

## Angenäherte Jupitersstörungen

derjenigen kleinen Planeten, deren mittlere Bewegungen in der Nähe von 900" liegen.

Von *K. Bohlin*.

Die folgende Mittheilung enthält die vorläufigen Resultate eines Versuches Störungsausdrücke aufzustellen, welche nicht etwa die Bewegung eines bestimmten Planeten darstellen sollten, sondern für eine ganze Gruppe von Planeten gültig wären und zwar beziehen sich die unten angeführten Zahlen auf diejenige Gruppe von kleinen Planeten, für welche die mittlere Bewegung  $n$  in der Nähe von dem Dreifachen der mittleren Bewegung des Jupiters liegt.

Auf die Einzelheiten der angewandten Integrationsmethode, deren Grundzüge übrigens in dem Bihang till K. Svenska Vet. Akad. Handlingar, Band 14, Afd. I, Nr. 5, sowie in einer Notiz in A. N. 2882 enthalten sind, ausführlicher einzugehen, wird sich wohl späterhin eine Gelegenheit bieten. Um eine vorläufige Uebersicht zu liefern und zur Anwendung der unten mitgetheilten Tafeln wird es genügen, Folgendes anzuführen.

Die Störungsfunction wurde in gewöhnlicher Weise nach Potenzen der Excentricitäten und der gegenseitigen Neigung der Bahnebenen entwickelt, ferner aber, indem für das Verhältniss der mittleren Bewegungen  $\mu_1$  die Darstellung

$$\mu_1 = \mu (1 + \bar{W})^{-1},$$

wo

$$\mu = \frac{1}{3},$$

eingeführt wurde, auch noch nach Potenzen von der Grösse  $\bar{W}$ . Insofern die Entwicklungscoefficienten der Störungsfunction von dem Verhältnisse der halben grossen Achse  $\alpha$  abhängen und da

$$\alpha = \mu_1^{2/3}$$

ist ja in der That eine derartige Entwicklung möglich. Es leuchtet auch sofort ein, dass die Coefficienten dieser Entwicklung nach Potenzen von  $\bar{W}$  Functionen von  $\mu$ , d. h. von der Zahl  $\frac{1}{3}$  sind.

Bei der Entwicklung der Störungsfunction wurden vorläufig nur die Glieder bis zum zweiten Grade inclusive in Bezug auf die Excentricitäten und die gegenseitige Neigung sowie nur die erste Potenz von  $\bar{W}$  mitgenommen. Nur ausnahmsweise sind einzelne Glieder höherer Ordnung berücksichtigt worden. Dass die Hansen'sche Grösse  $\bar{W}$  sowie überhaupt Hansen'sche Störungsstücke und Differentialgleichungen eingeführt wurden, geschah erstens deshalb, weil sich die Berechnung der gestörten Oerter eines Planeten mit Anwendung der Hansen'schen Coordinaten am zweckmässigsten gestaltet; zweitens aber, um die erlangten Resultate unmittelbar mit den mehreren schon vorhandenen nach Hansen's Methode berechneten Störungen kleiner Planeten vergleichen zu können.

Die Nenner der verschiedenen Störungsglieder stellen sich bei der angewandten Integrationsmethode als Ausdrücke von der Form

$$i - j\mu$$

dar. Für diejenigen Glieder, bei welchen

$$\frac{i}{j} = \frac{1}{3},$$

wird der Divisor Null. Diese Glieder sind deshalb besonders behandelt worden und zwar konnte die Integration in der Weise angeordnet werden, dass diese Glieder in üblicher Weise auf elliptische Functionen zurückgeführt wurden.

Die Rechnungsvorschriften zur Ermittlung der Störungen eines Planeten ergaben sich folgendermaassen. Man berechne zuerst die Grössen  $\mathcal{F}$   $\Pi$   $\Pi'$  nach den gewöhnlichen Formeln:

$$\begin{aligned} \sin \frac{1}{2} \mathcal{F} \sin \frac{1}{2} (\Psi + \Phi) &= \sin \frac{1}{2} (\mathcal{Q} - \mathcal{Q}') \sin \frac{1}{2} (i + i') \\ \sin \frac{1}{2} \mathcal{F} \cos \frac{1}{2} (\Psi + \Phi) &= \cos \frac{1}{2} (\mathcal{Q} - \mathcal{Q}') \sin \frac{1}{2} (i - i') \\ \cos \frac{1}{2} \mathcal{F} \sin \frac{1}{2} (\Psi - \Phi) &= \sin \frac{1}{2} (\mathcal{Q} - \mathcal{Q}') \cos \frac{1}{2} (i + i') \\ \cos \frac{1}{2} \mathcal{F} \cos \frac{1}{2} (\Psi - \Phi) &= \cos \frac{1}{2} (\mathcal{Q} - \mathcal{Q}') \cos \frac{1}{2} (i - i') \end{aligned} \quad (1)$$

Controlle:

$$\frac{\sin (\mathcal{Q} - \mathcal{Q}')}{\sin \mathcal{F}} = \frac{\sin \Phi}{\sin i'} = \frac{\sin \Psi}{\sin i}$$

$$\Pi = \pi - \mathcal{Q} - \Phi; \quad \Pi' = \pi' - \mathcal{Q}' - \Psi.$$

Man bezeichne noch

$$\Delta = \Pi - \Pi' \quad \Sigma = \Pi + \Pi' \quad (2)$$

und bilde die Grössen

$$\begin{aligned} n\Delta - \Sigma \\ n\Delta \\ n\Delta + \Pi + \Pi' \\ n\Delta - \Pi - \Pi' \\ n\Delta + \Pi - \Pi' \quad n = 0, 1, 2 \dots \\ n\Delta - \Pi + \Pi' \\ n\Delta + \Pi' \\ n\Delta - \Pi' \end{aligned}$$

Dann setze man

$$\eta = \frac{e}{2} \quad \eta' = \frac{e'}{2}$$

und bilde die Coefficienten

$$\eta \quad \eta' \quad \eta^2 \quad \eta\eta' \quad \eta'^2 \quad \sin^2 \frac{1}{2} \mathcal{F} \quad \sin \mathcal{F} \quad \eta \sin \mathcal{F} \quad \eta' \sin \mathcal{F}$$

sowie schliesslich noch die Grösse  $w$  nach der Formel

$$w = 1 - 3\mu_1,$$

wo  $\mu_1$  das Verhältniss der wahren mittleren Bewegungen

ist. Nachdem diese Grössen für den betreffenden Planeten berechnet worden sind, erhält man die Störungen aus den unten gegebenen Tafeln, in welchen sämtliche Coefficienten bloss von der reinen Zahl  $\mu = \frac{1}{3}$  und von der Jupitersmasse (1 : 1047.879) abhängen und also für alle Planeten der Gruppe gelten.

Der einfacheren Schreibweise wegen führen wir statt Sinus und Cosinus Exponentialfunctionen ein. Diese Exponentialfunctionen wieder mögen in der von Hansen angewandten Weise mit besonderen Buchstaben bezeichnet werden, so dass gesetzt wird

$$\begin{aligned} e\sqrt{-1}\varepsilon &= \gamma & \varepsilon &= \text{excentrische Anomalie} \\ e\sqrt{-1}\theta &= \vartheta & \theta &= \mu(\varepsilon - e \sin \varepsilon) - g' \\ e\sqrt{-1}\Delta &= D \\ e\sqrt{-1}\Sigma &= S \\ e\sqrt{-1}\Pi &= P \\ e\sqrt{-1}\Pi' &= P'. \end{aligned}$$

Als Ausgangspunkt für die Berechnung derjenigen Glieder, welche nur von  $\theta$  abhängen, sowie einiger Glieder, welche mit denselben verknüpft sind, dienen nun folgende Grössen.

Tafel I.

$\eta v =$		$[2.98526_n \quad 2.621734 \quad w^{-1} \quad 8.86176_n w^{-2}] \eta' \vartheta^3 D^2$		
		$[2.84880 \quad 2.354964_n w^{-1} \quad 8.59499 \quad w^{-2}] \eta \vartheta^3 D^3$		
$F = \frac{\text{I Th}^*)}{\sqrt{-1}}$	$[2.614413 \quad 3.105461_n w$	$9.32170 \quad w^{-1}$	$5.56172_n w^{-2}] \eta'^2 \vartheta^3 D$	
	$[3.399477_n \quad 3.819091 \quad w$	$9.74029_n w^{-1}$	$5.98026 \quad w^{-2}] \eta \eta' \vartheta^3 D^2$	
	$[2.831379 \quad 3.372546_n w$	$9.37314 \quad w^{-1}$	$5.61308_n w^{-2}] \eta^2 \vartheta^3 D^3$	
	$[1.972597 \quad 2.501377_n w$	—	—	$] \sin^2 \frac{1}{2} \mathcal{F} \vartheta^3 D^2 S^{-1}$
	$[2.736968_n \quad \text{—}$	—	—	$] \sin^4 \frac{1}{2} \mathcal{F} \vartheta^3 D^2 S^{-1}$
$A = \text{R Th}^*)$	$[1.467078_n \quad 1.85548 \quad w$	$1.79963_n w^2]$		
	$[2.54067_n \quad 3.058779 \quad w$	$0.62780 \quad w^{-1}$	$6.8702_n w^{-2}$	$3.0872_n w^{-3}] \eta'^2$
	$[2.66464 \quad 3.241071_n w$	$0.71665_n w^{-1}$	$6.9571 \quad w^{-2}$	$3.2090 \quad w^{-3}] \eta \eta' D$
	$[2.42975_n \quad 2.961428 \quad w$	$0.19734 \quad w^{-1}$	$6.4380_n w^{-2}$	$2.7137_n w^{-3}] \eta^2$
	$[2.52822 \quad 3.058781_n w$	—	—	$] \sin^2 \frac{1}{2} \mathcal{F}$
	$[3.305852_n \quad \text{—}$	—	—	$] \sin^4 \frac{1}{2} \mathcal{F}$
	$[3.000654_n \quad 3.456717 \quad w$	$9.76239 \quad w^{-1}$	$6.00241_n w^{-2}] \eta'^2 \vartheta^3 D$	
	$[3.451893 \quad 3.548841_n w$	$0.06195_n w^{-1}$	$6.30200 \quad w^{-2}] \eta \eta' \vartheta^3 D^2$	
	$[2.889392_n \quad 3.045266 \quad w$	$9.65765 \quad w^{-1}$	$5.89772_n w^{-2}] \eta^2 \vartheta^3 D^3$	
	$[2.40593_n \quad 2.930853 \quad w$	—	—	$] \sin^2 \frac{1}{2} \mathcal{F} \vartheta^3 D^2 S^{-1}$
	$[3.344216 \quad \text{—}$	—	—	$] \sin^4 \frac{1}{2} \mathcal{F} \vartheta^3 D^2 S^{-1}$
	$[2.097877_n \quad 2.626315 \quad w$	$0.01250 \quad w^{-1}$	$6.25249_n w^{-2}] \eta \eta' D$	
	$[2.739352 \quad 2.844869_n w$	$9.44662 \quad w^{-1}$	$5.68664_n w^{-2}] \eta'^2 \vartheta^3 D$	
	$[3.621407_n \quad 3.832198 \quad w$	$9.76918_n w^{-1}$	$5.88569 \quad w^{-2}] \eta \eta' \vartheta^3 D^2$	
	$[3.132646 \quad 3.497972_n w$	$9.37314 \quad w^{-1}$	$5.43707_n w^{-2}] \eta^2 \vartheta^3 D^3$	
	$[2.097536 \quad 2.226159_n w$	—	—	$] \sin^2 \frac{1}{2} \mathcal{F} \vartheta^3 D^2 S^{-1}$
	$[2.861906_n \quad \text{—}$	—	—	$] \sin^4 \frac{1}{2} \mathcal{F} \vartheta^3 D^2 S^{-1}$

\*)  $\frac{\text{I Th}}{\sqrt{-1}}$  bedeutet  $\frac{\text{Imaginärer Theil}}{\sqrt{-1}}$ ; R Th bedeutet Reeller Theil.

$$\begin{aligned}
l &= [1.788785_n \quad 2.325286 \quad w \quad 9.70196 \quad w^{-1} \quad 5.94198_n w^{-2}] \eta \eta' \sin A \\
m &= [1.805018_n \quad 2.325286 \quad w \quad 9.72953 \quad w^{-1} \quad 5.96955_n w^{-2}] \eta' \sin A \\
n &= [2.035207 \quad 2.472268_n w \quad 9.46276_n w^{-1} \quad 5.70278 \quad w^{-2}] \eta \\
&\quad [1.805018_n \quad 2.325286 \quad w \quad 9.72953 \quad w^{-1} \quad 5.96955_n w^{-2}] \eta' \cos A \\
s_0 &= \varepsilon \cdot R \operatorname{Th} [1.429509 \sin \mathcal{F} \cdot y D P' + 1.730537_n \eta \sin \mathcal{F} \cdot D P'] \\
&\quad + \frac{1 \operatorname{Th}}{\sqrt{-1}} \left[ \frac{1.194446_n}{x(x+1)} \cdot \sin \mathcal{F} \cdot y \vartheta^3 D^2 P'^{-1} \right. \\
&\quad \quad \left. \frac{1.495477}{x} \cdot \eta \sin \mathcal{F} \cdot \vartheta^3 D^2 P'^{-1} \right. \\
&\quad \quad \left. 1.429509_n \cdot \sin \mathcal{F} \cdot y D P' \right].
\end{aligned}$$

Die Zahlencoefficienten sind hier, wie auch im Folgenden logarithmisch angesetzt und die Einheit ist die Bogensecunde. Mit dem Werthe von  $w = 1 - 3\mu_1$  ergeben sich nun unmittelbar die Coefficienten dieser Formeln. Dieselben ziehen sich dann aber, wie unmittelbar ersichtlich ist, folgendermaassen numerisch zusammen

$$\begin{aligned}
\eta v &= v e^{\sqrt{-1}(3\theta + V)} \\
F &= f \sin(3\theta + F) \\
A &= a_0 + a \cos(3\theta + A) \\
B &= b_0 + b \sin(3\theta + B).
\end{aligned} \quad (5)$$

Damit sind die Zahlen  $f, F, a_0, a, A, b_0, b, B, v, V$  bestimmt. Die Grösse  $x$  ist durch die Formel

$$x = w + a_0 \quad (6)$$

gegeben. Nachdem noch die  $l, m, n$  berechnet worden sind, besitzt man alle Daten, um die zu  $n\delta z$  und  $2v$  gehörenden Glieder zu bestimmen. Die auf die Breitenstörungen bezügliche Grösse  $s_0$  ergibt sich unmittelbar, sobald  $x$  bestimmt worden ist.

Aus dem Werthe von  $f$  ergibt sich der Modul  $k$  der angewandten elliptischen Functionen nach der Formel

$$k^2 = \frac{4f}{w^2} \cdot \left( \frac{\pi}{2K} \right)^2, \quad (7)$$

wobei in erster Annäherung  $\frac{\pi}{2K} = 1$  zu setzen ist. Setzt man dann

$$k = \sin \theta, \quad (8)$$

so erhält man mit dem Argumente  $\theta$  die Grösse  $q$  und  $K$  aus den als Anhang beigefügten Tafeln. Nachdem noch zwei Hilfsgrössen  $r$  und  $R$  mittels der Formeln

$$\begin{aligned}
r \cos R &= 4q + \frac{a}{x} \cos(180^\circ + A - F) \\
r \sin R &= \frac{a}{x} \sin(180^\circ + A - F)
\end{aligned} \quad (9)$$

bestimmt worden sind, ergibt sich

$$3\theta = x\varepsilon + 3E + r \sin(3\theta + 180^\circ + F + R) \quad (10)$$

Die Störung der mittleren Anomalie ist nun durch die Formel

$$n\delta z = 3\theta - c + 3c' + \zeta_1 \quad (11)$$

gegeben, wo  $\zeta_1$  aber unter anderen Gliedern auch das Glied

$$-w\varepsilon \sin \varepsilon$$

enthält, welches zweckmässig mit dem Gliede  $w\varepsilon$  aus  $3\theta$  vereinigt werden kann. Die Form (11) der Störung der mittleren Anomalie bleibt unverändert; man hat aber in dieselbe statt den Ausdruck (10) für  $3\theta$  den folgenden

$$3\theta = w \cdot nt + 3E + a_0\varepsilon + r \sin(3\theta + 180^\circ + F + R) \quad (12)$$

einzuführen.

Die Function  $\zeta_1$ , welche die übrigen Störungen der mittleren Anomalie enthält, hat sich folgendermaassen ergeben

$$\begin{aligned}
\zeta_1 &= \frac{1 \operatorname{Th}}{\sqrt{-1}} \Sigma R(r \cdot s) y^{r-s\mu} \vartheta^s \\
&\quad + \frac{1 \operatorname{Th}}{\sqrt{-1}} \Sigma R(r \cdot s)_w y^{r-s\mu} \vartheta^s \cdot w \\
&\quad + \frac{1 \operatorname{Th}}{\sqrt{-1}} \left[ \frac{2\eta v}{1+w} y - \eta \cdot \eta v y^2 \right] \\
&\quad + \frac{l-m\eta}{2} \varepsilon^2 + (m-2l\eta) \varepsilon \sin \varepsilon - \frac{m\eta}{2} \varepsilon \sin 2\varepsilon \\
&\quad \quad - n\varepsilon \cos \varepsilon + \frac{n\eta}{2} \varepsilon \cos 2\varepsilon \\
&\quad \quad + n \sin \varepsilon - \frac{n\eta}{4} \sin 2\varepsilon \\
&\quad \quad + (m-2l\eta) \cos \varepsilon + \frac{m\eta}{4} \cos 2\varepsilon
\end{aligned} \quad (13)$$

Die Coefficienten  $R(r \cdot s)$  in den beiden ersten Abtheilungen dieser Formel, sowie die analogen Coefficienten  $S(r \cdot s)$  und  $D(r \cdot s)$ , welche sich resp. auf die Radiusvector- und die Breitenstörungen beziehen, sind mit gewissen von den Factoren  $\eta, \eta', \eta^2, \eta\eta', \eta'^2, \sin^2 \frac{1}{2} \mathcal{F}, \sin \mathcal{F}, \eta \sin \mathcal{F}, \eta' \sin \mathcal{F}$  zu multipliciren und auch sind den Argumenten  $y^{r-s\mu} \vartheta^s$  gewisse Constanten hinzuzufügen, welche in den Formeln (13), (15) und (16) nicht ausgeschrieben, in den unten angeführten Tafeln aber überall vollständig angesetzt sind.

Setzt man die Störungen des Radiusvectors in der Formel

$$2\nu = 2\nu_0 + 2\nu_1$$

so ergibt sich der bloss von  $\theta$  abhängige Theil aus der Formel

$$2\nu_0 = -b_0 \varepsilon + \frac{b}{\pi} \cos(3\theta + B) \quad (14)$$

und der übrige Theil als

$$\begin{aligned} 2\nu_1 = & R \operatorname{Th} \Sigma S(r \cdot - s) y^r - s^\mu \vartheta^s \\ & + R \operatorname{Th} \Sigma S(r \cdot - s)_w y^r - s^\mu \vartheta^s \cdot w \\ & + R \operatorname{Th} \left( -\frac{2\eta v}{1+w} y \right) \\ & - m \varepsilon \cos \varepsilon - n \varepsilon \sin \varepsilon \\ & - n \cos \varepsilon + m \sin \varepsilon \end{aligned} \quad (15)$$

Analog setzen wir für die Breitenstörungen

$$\frac{u^*}{\cos i} = s = s_0 + s_1;$$

$s_1$  ergibt sich dann als

$$s_1 = \frac{1 \operatorname{Th}}{\sqrt{-1}} \Sigma D(r \cdot - s)_{\pm 1} y^r - s^\mu \vartheta^s \quad (16)$$

während  $s_0$  fast unmittelbar aus den schon angeführten Tafeln zu entnehmen ist.

Hier unten folgen nun die Tafeln der Zahlencoefficienten der verschiedenen Störungsglieder, wobei die zu  $n\delta z$  und  $2\nu$  gehörenden parallel neben einander angeführt, die Inclinationsglieder aber für sich zusammengestellt sind.

Tafel II.

	$n = 0$	1	2	3	4	5	6	Factor		
$R_{0,0}(n \cdot -n)$	—	2.17133 <sub>n</sub>	2.31202	1.31906	0.6543	0.1022	9.6086	$y^{n-n^\mu}$	$\vartheta^n$	$D^n$
$S_{0,0}(n \cdot -n)$	—	2.02467	2.39115 <sub>n</sub>	1.48667 <sub>n</sub>	0.8678 <sub>n</sub>	0.3425 <sub>n</sub>	9.8656 <sub>n</sub>			
$R_{1,0}(n+1 \cdot -n)$	1.85038	1.12330	2.10645 <sub>n</sub>	1.17710 <sub>n</sub>	0.4878 <sub>n</sub>	9.8470 <sub>n</sub>	9.1821 <sub>n</sub>	$\eta y^{n+1-n^\mu}$	$\vartheta^n$	$D^n$
$S_{1,0}(n+1 \cdot -n)$	1.08735	1.83491	1.19366	0.18294	9.7195 <sub>n</sub>	9.7452 <sub>n</sub>	9.5401 <sub>n</sub>			
$R_{1,0}(n-1 \cdot -n)$	1.85038 <sub>n</sub>	2.66093 <sub>n</sub>	3.68618	2.47521	2.35110 <sub>n</sub>	1.65968 <sub>n</sub>	1.12950 <sub>n</sub>	$\eta y^{n-1-n^\mu}$	$\vartheta^n$	$D^n$
$S_{1,0}(n-1 \cdot -n)$	1.08735	1.40100	3.40468 <sub>n</sub>	1.84415 <sub>n</sub>	2.45198	1.81336	1.31525			
$R_{0,1}(n \cdot -n+1)$	2.55984 <sub>n</sub>	1.62533 <sub>n</sub>	1.65951 <sub>n</sub>	1.31275 <sub>n</sub>	0.92937 <sub>n</sub>	0.55431 <sub>n</sub>	0.1886 <sub>n</sub>	$\eta' y^{n-(n-1)^\mu}$	$\vartheta^{n-1}$	$D^n$
$S_{0,1}(n \cdot -n+1)$	2.08272	0.97686 <sub>n</sub>	1.77464	1.49778	1.15174	0.79925	0.4482			
$R_{0,1}(n \cdot -n-1)$	2.55984	3.20971 <sub>n</sub>	2.83430 <sub>n</sub>	2.63717	1.96236	1.44600	0.9961	$\eta' y^{n-(n+1)^\mu}$	$\vartheta^{n+1}$	$D^n$
$S_{0,1}(n \cdot -n-1)$	2.08272	2.79826	2.04346	2.76868 <sub>n</sub>	2.15659 <sub>n</sub>	1.67489 <sub>n</sub>	1.2460 <sub>n</sub>			
$R_{2,0}(n+2 \cdot -n)$	0.20712 <sub>n</sub>	1.57826	0.8598	9.6138	—	—	—	$\eta^2 y^{n+2-n^\mu}$	$\vartheta^n$	$D^n$
$S_{2,0}(n+2 \cdot -n)$	1.58342 <sub>n</sub>	1.26496 <sub>n</sub>	0.0457 <sub>n</sub>	9.4467	—	—	—			
$R_{2,0}(n-2 \cdot -n)$	0.20710	2.21218 <sub>n</sub>	2.88946	—	3.91196 <sub>n</sub>	3.36911	2.51652	$\eta^2 y^{n-2-n^\mu}$	$\vartheta^n$	$D^n$
$S_{2,0}(n-2 \cdot -n)$	1.58343 <sub>n</sub>	2.50454 <sub>n</sub>	3.34333 <sub>n</sub>	—	3.83064	3.41855 <sub>n</sub>	2.62495 <sub>n</sub>			
$R_{2,0}(n \cdot -n)$	—	3.20181 <sub>n</sub>	3.03671 <sub>n</sub>	2.24671 <sub>n</sub>	2.07190	1.27872	0.4935	$\eta^2 y^{n-n^\mu}$	$\vartheta^n$	$D^n$
$S_{2,0}(n \cdot -n)$	—	3.07675	2.53160 <sub>n</sub>	1.33554	1.49368	1.30718	1.0619			
$R_{1,1}(n+1 \cdot -n+1)$	2.54034 <sub>n</sub>	1.72905 <sub>n</sub>	1.38741	1.1699	0.7863	—	—	$\eta \eta' y^{n+1-(n-1)^\mu}$	$\vartheta^{n-1}$	$D^n$
$S_{1,1}(n+1 \cdot -n+1)$	2.76616	2.11054	1.07995	0.0573	0.0776	—	—			
$R_{1,1}(n-1 \cdot -n-1)$	2.54034	3.39953 <sub>n</sub>	—	4.47713	3.94652 <sub>n</sub>	3.10805 <sub>n</sub>	2.57554 <sub>n</sub>	$\eta \eta' y^{n-1-(n+1)^\mu}$	$\vartheta^{n+1}$	$D^n$
$S_{1,1}(n-1 \cdot -n-1)$	2.76616	2.93480 <sub>n</sub>	—	4.37401 <sub>n</sub>	4.00940	3.24373	2.75163			
$R_{1,1}(n+1 \cdot -n-1)$	3.15575	2.64401 <sub>n</sub>	2.43146	2.42405 <sub>n</sub>	1.7142 <sub>n</sub>	1.0735 <sub>n</sub>	—	$\eta \eta' y^{n+1-(n+1)^\mu}$	$\vartheta^{n+1}$	$D^n$
$S_{1,1}(n+1 \cdot -n-1)$	2.92078 <sub>n</sub>	3.02742	1.99692	1.13656 <sub>n</sub>	1.3803 <sub>n</sub>	1.2456 <sub>n</sub>	—			
$R_{1,1}(n-1 \cdot -n+1)$	3.15575 <sub>n</sub>	—	3.07045 <sub>n</sub>	3.09729	2.45465	2.02792	—	$\eta \eta' y^{n-1-(n-1)^\mu}$	$\vartheta^{n-1}$	$D^n$
$S_{1,1}(n-1 \cdot -n+1)$	2.92078 <sub>n</sub>	—	3.02431	3.14688 <sub>n</sub>	2.57313 <sub>n</sub>	2.18871 <sub>n</sub>	—			
$R_{0,2}(n \cdot -n+2)$	3.01548 <sub>n</sub>	2.57594	1.39039	0.8236	—	—	—	$\eta'^2 y^{n-(n-2)^\mu}$	$\vartheta^{n-2}$	$D^n$
$S_{0,2}(n \cdot -n+2)$	2.83939	2.67851 <sub>n</sub>	1.61040 <sub>n</sub>	1.0690 <sub>n</sub>	—	—	—			

<sup>30)</sup>  $u$  ist die Hansen'sche Grösse.

	$n = 0$	1	2	3	4	5	6	Factor
$(n \cdot -n-2)$	3.01548	—	4.43481 <sub>n</sub>	3.91906	3.09645	2.57823	2.15302	$\eta'^2 y^{n-(n+2)\mu} g^{n+2} D^n$
$(n \cdot -n-2)$	2.83939	—	4.30400	3.99830 <sub>n</sub>	3.26442 <sub>n</sub>	2.79224 <sub>n</sub>	2.39379 <sub>n</sub>	
$(n \cdot -n)$	—	3.46214 <sub>n</sub>	3.16961 <sub>n</sub>	2.63449 <sub>n</sub>	2.25802 <sub>n</sub>	1.91929 <sub>n</sub>	1.59576 <sub>n</sub>	$\eta'^2 y^{n-n\mu} g^n D^n$
$(n \cdot -n)$	—	2.63764	3.24263	2.79592	2.46662	2.15566	1.84972	
$(n+1 \cdot -n+1)$	2.30061	2.07546	1.57369	1.14065	0.7409	0.3604	—	$\sin^{21/2} \mathcal{F} y^{n+1-(n-1)\mu} g^{n-1} D^n P P'$
$(n+1 \cdot -n+1)$	2.40302 <sub>n</sub>	2.26524 <sub>n</sub>	1.81099 <sub>n</sub>	1.40431 <sub>n</sub>	1.0203 <sub>n</sub>	0.6498 <sub>n</sub>	—	
$(n-1 \cdot -n-1)$	2.30061 <sub>n</sub>	2.95958	—	2.97793 <sub>n</sub>	2.30703	1.35449	0.7311	$\sin^{21/2} \mathcal{F} y^{n+1-(n+1)\mu} g^{n+1} D^n P^{-1} P'^{-1}$
$(n-1 \cdot -n-1)$	2.40302 <sub>n</sub>	2.78349	—	2.83595	2.39723 <sub>n</sub>	1.55070 <sub>n</sub>	0.9843 <sub>n</sub>	
$(n+1 \cdot -n-1)$	2.80362	2.84323 <sub>n</sub>	1.98770 <sub>n</sub>	1.42684 <sub>n</sub>	0.9588 <sub>n</sub>	0.5358 <sub>n</sub>	—	$\sin^{21/2} \mathcal{F} y^{n+1-(n+1)\mu} g^{n+1} D^n P P'^{-1}$
$(n+1 \cdot -n-1)$	2.65427 <sub>n</sub>	2.92874	2.16871	1.65671	1.2164	0.8103	—	
$(n-1 \cdot -n+1)$	2.80362 <sub>n</sub>	—	3.05080	2.45749 <sub>n</sub>	1.53987 <sub>n</sub>	0.9383 <sub>n</sub>	—	$\sin^{21/2} \mathcal{F} y^{n-1-(n-1)\mu} g^{n-1} D^n P^{-1} P'$
$(n-1 \cdot -n+1)$	2.65427 <sub>n</sub>	—	2.90110 <sub>n</sub>	2.55197	1.74404	1.2003	—	

Mit  $w$  zu multiplicirende Glieder.

$(n \cdot -n)_w$	—	2.62887	3.01933 <sub>n</sub>	1.98901 <sub>n</sub>	1.3602 <sub>n</sub>	0.8516 <sub>n</sub>	0.4010 <sub>n</sub>	$w y^{n-n\mu} g^n D^n$
$(n \cdot -n)_w$	—	2.41128 <sub>n</sub>	3.07350	2.13796	1.5617	1.0841	0.6530	
$(n+1 \cdot -n)_w$	2.25937 <sub>n</sub>	1.1763	2.83347	1.89328	1.25900	0.6846	0.1045	$\eta w y^{n+1-n\mu} g^n D^n$
$(n+1 \cdot -n)_w$	1.58343 <sub>n</sub>	2.40772 <sub>n</sub>	2.14944 <sub>n</sub>	1.34914 <sub>n</sub>	0.3741 <sub>n</sub>	0.1204	0.1686	
$(n-1 \cdot -n)_w$	2.25937	3.03513	4.41016 <sub>n</sub>	3.18512 <sub>n</sub>	3.19147	2.47885	1.9662	$\eta w y^{n-1-n\mu} g^n D^n$
$(n-1 \cdot -n)_w$	1.58343 <sub>n</sub>	2.34250	3.99467	2.46627	3.27478 <sub>n</sub>	2.62137 <sub>n</sub>	2.1450 <sub>n</sub>	
$(n \cdot -n+1)_w$	2.86275	2.14672	1.98241	1.85288	1.5638	1.2577	0.9488	$\eta' w y^{n-(n-1)\mu} g^{n-1} D^n$
$(n \cdot -n+1)_w$	2.56105 <sub>n</sub>	1.56620	2.05943 <sub>n</sub>	2.02209 <sub>n</sub>	1.7763 <sub>n</sub>	1.4962 <sub>n</sub>	1.2040 <sub>n</sub>	
$(n \cdot -n-1)_w$	2.86275 <sub>n</sub>	3.96307	3.47338	3.43408 <sub>n</sub>	2.73511 <sub>n</sub>	2.2379 <sub>n</sub>	1.8182 <sub>n</sub>	$\eta' w y^{n-(n+1)\mu} g^{n+1} D^n$
$(n \cdot -n-1)_w$	2.56105 <sub>n</sub>	3.38419 <sub>n</sub>	2.57131 <sub>n</sub>	3.53787	2.91102	2.4550	2.0605	

Neigungsstörungen.

$(n \cdot -n+1)_{+1}$	1.30544 <sub>n</sub>	1.12848	1.24560	0.5892	0.0625	—	—	$\sin \mathcal{F} y^{n-(n-1)\mu} g^{n-1} D^n P'$
$(n \cdot -n-1)_{-1}$	1.30544	1.78169	0.89342 <sub>n</sub>	0.9872 <sub>n</sub>	0.3178 <sub>n</sub>	—	—	$\sin \mathcal{F} y^{n-(n+1)\mu} g^{n+1} D^n P'^{-1}$
$(n+1 \cdot -n+1)_{+1}$	2.14594 <sub>n</sub>	1.81411 <sub>n</sub>	1.20212 <sub>n</sub>	0.6578 <sub>n</sub>	0.1430 <sub>n</sub>	—	—	$\eta \sin \mathcal{F} y^{n+1-(n-1)\mu} g^{n-1} D^n P'$
$(n+1 \cdot -n-1)_{-1}$	2.29800 <sub>n</sub>	2.34750	1.42802	0.7674	0.1757	—	—	$\eta \sin \mathcal{F} y^{n+1-(n+1)\mu} g^{n+1} D^n P'^{-1}$
$(n-1 \cdot -n+1)_{+1}$	2.29800	—	2.52173	2.29789 <sub>n</sub>	1.5494 <sub>n</sub>	1.0442 <sub>n</sub>	—	$\eta \sin \mathcal{F} y^{n-1-(n-1)\mu} g^{n-1} D^n P'$
$(n-1 \cdot -n-1)_{-1}$	2.14594	2.84930 <sub>n</sub>	—	2.43995 <sub>n</sub>	2.1511	1.3697	—	$\eta \sin \mathcal{F} y^{n-1-(n+1)\mu} g^{n+1} D^n P'^{-1}$
$(n \cdot -n+2)_{+1}$	2.35324 <sub>n</sub>	2.45647	1.50527	0.7586	9.9638	—	—	$\eta' \sin \mathcal{F} y^{n-(n-2)\mu} g^{n-2} D^n P'$
$(n \cdot -n)_{-1}$	—	1.22259 <sub>n</sub>	1.57385	1.05423	0.6556	—	—	$\eta' \sin \mathcal{F} y^{n-n\mu} g^n D^n P'^{-1}$
$(n \cdot -n)_{+1}$	—	2.69951	2.45394	1.76126	1.2936	0.8848	—	$\eta' \sin \mathcal{F} y^{n-n\mu} g^n D^n P'$
$(n \cdot -n-2)_{-1}$	2.35324	—	2.79483	2.49327 <sub>n</sub>	1.7191 <sub>n</sub>	1.2005 <sub>n</sub>	—	$\eta' \sin \mathcal{F} y^{n-(n+2)\mu} g^n D^n P'^{-1}$

Um die Störungen eines gegebenen Planeten zu finden, hat man diese Zahlencoefficienten mit den bezüglichen Werthen von  $\eta, \eta'$  etc. zu multipliciren und die numerischen Werthe der Argumente  $n\Delta, n\Delta + \Pi + \Pi'$ , u. s. w. in den Argumenten einzuführen.

Es wird sich empfehlen, den vollständigen Werth von  $\theta$ , welcher ja ohnehin berechnet werden muss, in den Argumenten beizubehalten, denn man berücksichtigt in dieser Weise einige Störungen zweiter Ordnung. Um aber in einfacher Weise einen Vergleich mit den nach Hansen's Methode berechneten Störungen zu bewerkstelligen, kann man den von  $r$  abhängigen Theil von  $\theta$ , welcher Störungen zweiter Ordnung erzeugt, vernachlässigen. Man hat dann, wenn auch das Glied  $a_0 \varepsilon$  bei Seite gelassen wird, einfach

$$3\theta = w\varepsilon + 3E \\ = (1 - 3\mu_1)\varepsilon + 3E$$

oder weil

$$\mu = \frac{1}{3} \\ \theta = (\mu - \mu_1)\varepsilon + E.$$

Die Argumente der Störungsglieder ändern durch Einführung dieses Ausdruckes für  $\theta$  ihre Form. So giebt beispielsweise

$$j^n (1 - \mu) g^n D^n$$

das Argument

$$(n - n\mu_1)\varepsilon + nE + n\Delta.$$

Um eine vollständige Uebereinstimmung mit der Hansen'schen Form der Argumente herbeizuführen, hat man hier zu setzen

$$E = -c' + \mu_1 c$$

wodurch sich das Argument auf

$$(n - n\mu_1)\varepsilon - n(c' - \mu_1 c) + n\Delta \quad (17)$$

reducirt.

Die Berechnung der Hilfsgrößen  $\mathcal{F}, \Pi, \Pi'$ , und der von  $\theta$  allein abhängigen Glieder und die Multiplication der tabulirten Coefficienten mit ihren Factoren  $\eta, \eta', \eta^2$  etc. dürfte im Ganzen zwei bis drei Stunden Arbeit in Anspruch nehmen. Will man aber die Hansen'sche Form

$$[i i' c] \cos [(i - i' \mu_1)\varepsilon - i'(c' - \mu_1 c)] \\ + [i i' s] \sin [(i - i' \mu_1)\varepsilon - i'(c' - \mu_1 c)]$$

erlangen, so erübrigt noch, die verschiedenen Glieder in Sinus und Cosinus der Argumente

$$(i - i' \mu_1)\varepsilon - i'(c' - \mu_1 c)$$

zu zerlegen, wozu noch erforderlich ist, mit den Sinus und Cosinus der Constanten  $n\Delta$  etc. (siehe 17) zu multipliciren und dann die Glieder mit denselben Argumenten, welche aus verschiedenen Horizontalreihen der Tafeln entstehen, zu addiren. Diese Rechnung erfordert an und für sich etwas mehr Zeit als die Herstellung der Störungen selbst in der Form (13), (15), (16). Die folgende Tafel der Störungen für (9) Metis erforderte im Ganzen 10 Stunden Rechnung. Ich bemerke hierzu noch, dass die mit  $w^{-1}$ ,  $w^{-2}$  und  $w^{-3}$  multiplicirten Glieder in der Tafel I, doch mit Ausnahme der mit  $w^{-1}$  multiplicirten Glieder in  $\eta v$ , bei der Berechnung übergangen werden können, weil dieselben Störungen zweiter Ordnung entsprechen. Hierdurch wird sogar die Uebereinstimmung der Störungswerthe mit den Lesser'schen Störungen (A. N. 1189) speciell betreffend die mit  $nt$  und  $\varepsilon$  multiplicirten Glieder etwas grösser, als nach der folgenden Zusammenstellung.

### Störungen der Metis.

$n \delta z$ Bohlín		$n \delta z$ Lesser	
cos	sin	cos	sin
0-0 — 24"95 $nt$	—	— 24"99 $nt$	—
1-0 — 4.67 $\varepsilon$	— 0"86 $\varepsilon$	— 4.90 $nt$	— 0"95 $nt$
2-0 + 0.14 $\varepsilon$	+ 0.03 $\varepsilon$	+ 9.15 $nt^1$	+ 0.03 $nt$
1-1 — 107.7	— 58.2	— 108.0	— 59.7
2-2 + 111.9	— 62.7	+ 124.0	— 67.8
3-3 — 5.7	— 19.9	— 5.4	— 20.8
4-4 — 2.9	— 1.3	— 2.9	— 1.7
5-5 — 0.7	+ 0.5	— 0.7	+ 0.4
1-0 — 1.5	+ 11.5	— 2.6	+ 8.7
2-1 — 0.1	+ 0.9	— 0.0	+ 0.9
3-2 — 4.4	+ 2.8	— 5.0	+ 3.1
4-3 + 0.1	+ 0.7	+ 0.1	+ 0.8
5-4 + 0.2	0.0	+ 0.2	+ 0.1
0-1 — 20.3	+ 3.0	— 20.1	+ 3.0
1-2 + 148.1	— 103.2	+ 163.0	— 114.0
2-3 + 182.7	+ 184.2	+ 180.1	+ 184.6
3-4 + 6.4	— 2.0	+ 7.0	— 1.4
4-5 + 0.3	— 1.4	+ 0.3	— 1.6
5-6 — 0.8	— 0.4	— 0.4	— 0.3

<sup>1)</sup> Hier soll es offenbar +0.15  $nt$  heissen.

$n \delta z$ Bohlín		$n \delta z$ Lesser	
cos	sin	cos	sin
2-0 0"0	+ 0"1	+ 0"1	— 0"3
3-1 + 0.2	+ 0.1	+ 0.2	0.0
4-2 0.0	0.0	0.0	0.0
— 1-1 — 0.7	+ 0.1	— 0.6	+ 0.1
0-2 + 0.8	— 2.3	+ 0.6	— 1.7
1-3 + 560.4	+ 125.3	+ 570.7	+ 141.8
2-4 + 14.8	— 18.8	+ 11.1	— 15.7
3-5 + 2.9	+ 6.3	+ 1.6	+ 2.8
4-6 + 1.0	0.0	+ 0.6	— 0.1
$\frac{u}{\cos i}$ Bohlín		$\frac{u}{\cos i}$ Lesser	
cos	sin	cos	sin
0-0 — 0"26 $\varepsilon$	—	— 0"21 $nt$	—
1-0 + 2.08 $\varepsilon$	— 0"40 $\varepsilon$	+ 1.71 $nt$	— 0"39 $nt$
1-1 + 0.2	+ 0.2	— 0.1	— 1.2
2-2 + 0.8	+ 0.4	+ 0.6	+ 0.2
3-3 0.1	0.0	+ 0.1	— 0.0

$\frac{u}{\cos i}$ Bohlin		$\frac{u}{\cos i}$ Lesser	
cos	sin	cos	sin
1-0	-0".2	-0".2	-0".9
2-1	+1.3	+1.0	+0.3
3-2	+0.2	+0.2	-0.2
4-3	0.0	0.0	-0.1
0-1	+2.4	+1.7	+1.8
1-2	+4.6	+4.1	-1.4
2-3	-3.9	-3.0	+13.9
3-4	+0.6	+0.4	+0.4
3-1	-0.1	-0.1	0.0
4-2	0.0	0.0	0.0
-1-1	+1.1	+0.9	+0.3
0-2	-2.6	-2.0	+1.1
1-3	+0.5	+1.0	-0.9
2-4	+1.2	+1.2	-0.3
3-5	-0.2	-0.1	+0.3

$\nu$ Bohlin		$\nu$ Lesser	
cos	sin	cos	sin
0-0	+ 0".05 $\varepsilon$	+ 0".06 $nt$	-
1-0	+ 0.42 $\varepsilon$	+ 0.48 $nt$	- 2".45 $nt$
1-1	+ 21.2	+ 22.1	- 40.0
2-2	+ 40.0	+ 42.7	+ 77.7
3-3	+ 10.5	+ 11.1	+ 0.3
4-4	+ 1.2	+ 1.4	- 2.1
5-5	- 0.3	- 0.3	- 0.6

$\nu$ Bohlin		$\nu$ Lesser	
cos	sin	cos	sin
1-0	- 1".8	- 1".9	- 0".4
2-1	+ 0.5	+ 0.5	- 2.0
3-2	- 0.4	- 0.5	- 0.4
4-3	+ 0.1	- 0.1	+ 0.1
5-4	+ 0.1	0.0	0.0
0-1	+ 2.9	+ 2.8	- 1.0
1-2	+ 30.2	+ 32.1	+ 48.8
2-3	- 95.3	- 95.3	+ 95.7
3-4	+ 1.7	+ 1.6	+ 4.7
4-5	+ 1.1	+ 1.2	+ 0.2
5-6	+ 0.5	+ 0.2	- 0.3
2-0	- 0.2	0.0	0.0
3-1	0.0	0.0	0.0
4-2	0.0	0.0	0.0

$\nu$ Bohlin		$\nu$ Lesser	
cos	sin	cos	sin
-1-1	+ 0.2	+ 0.2	+ 0.5
0-2	+ 2.0	+ 1.8	+ 3.1
1-3	- 12.7	- 18.6	+ 37.8
2-4	+ 7.3	+ 6.7	+ 5.3
3-5	- 3.5	- 1.6	+ 1.0
4-6	+ 0.1	+ 0.1	+ 0.4

Die Elemente, mit welchen diese Störungen berechnet wurden, waren folgende

$$\begin{aligned} II &= 10^\circ 59'3 & II' &= 311^\circ 49'4 & \log \sin \frac{1}{2} \mathcal{F} &= 8.59566 \\ \log \eta &= 8.79001 & \log \eta' &= 8.38239 & & \\ n &= 962''.8856 & n' &= 299''.1284 & \log w &= 8.83267 \end{aligned}$$

Die mittlere Bewegung ist also mehr als 60" grösser als das Dreifache der mittleren Bewegung des Jupiters.

Um noch eine Prüfung der Tafeln und Formeln zu erhalten, berechnete ich die Störungen für (32) Pomona, deren mittlere Bewegung wieder kleiner als 900" ist. Die zu Grunde gelegten Constanten waren

$$\begin{aligned} II &= 323^\circ 17'9 & II' &= 140^\circ 58'7 & \log \sin \frac{1}{2} \mathcal{F} &= 8.73823 \\ \log \eta &= 8.61511 & \log \eta' &= 8.38248 & & \\ n &= 852''.8299 & n' &= 299''.1284 & \log w &= 8.71805_n \end{aligned}$$

Die Störungen ergaben sich folgendermaassen. Die zum Vergleich angeführten Lesser'schen Störungen erster Ordnung sind den A. N. 1379 entnommen. Die A. N. 1597 enthalten noch Störungen inclusive zweiter Ordnung für Pomona, deren Vergleichung mit den hier angeführten Werthen instructiv sein kann.

#### Störungen der Pomona.

$n \delta z$ Bohlin		$n \delta z$ Lesser		$n \delta z$ Bohlin		$n \delta z$ Lesser	
cos	sin	cos	sin	cos	sin	cos	sin
0-0	- 33".58 $nt$	- 33".30 $nt$	-	1-0	+ 0".1	- 0.4	+ 11".8
1-0	- 7.35 $\varepsilon$	- 6.79 $nt$	- 0".26 $nt$	2-1	- 0.1	- 0.4	- 1.6
2-0	+ 0.15 $\varepsilon$	+ 0.14 $nt$	+ 0.01	3-2	- 0.4	- 0.3	- 6.1
1-1	+ 6.7	+ 6.3	+ 170.0	4-3	+ 0.1	0.0	+ 0.5
2-2	+ 20.2	+ 20.6	+ 259.7	5-4	0.0	0.0	0.0
3-3	- 1.3	- 1.2	- 7.1	0-1	+ 0.9	+ 1.7	+ 39.9
4-4	+ 0.9	+ 0.9	+ 6.0	1-2	+ 22.8	+ 24.2	+ 310.1
5-5	- 0.3	- 0.3	- 1.6	2-3	- 93.9	- 90.8	- 900.1

$n \delta z$ Bohlin				$n \delta z$ Lesser			
cos		sin		cos		sin	
3-4	- 3".6	- 26".2		- 3".5	- 25".2		
4-5	+ 1.0	+ 5.3		+ 1.1	- 5.8		
5-6	- 0.3	- 1.4		- 0.3	- 1.6		
-1-1	+ 1.2	+ 1.3		+ 1.4	+ 1.6		
0-2	+ 2.9	+ 5.6		+ 3.7	+ 6.6		
1-3	+ 240.5	+ 1545.7		+ 241.5	+ 1491.2		
2-4	- 9.8	- 59.5		- 11.7	- 67.7		
3-5	- 3.4	- 17.4		- 5.9	- 29.7		
4-6	+ 0.6	+ 2.5		+ 0.6	+ 2.9		

$\frac{u}{\cos i}$ Bohlin				$\frac{u}{\cos i}$ Lesser			
cos		sin		cos		sin	
0-0	- 0".19 $\varepsilon$	-		- 0".22 $nt$	-		
1-0	+ 2.35 $\varepsilon$	+ 1".75 $\varepsilon$		+ 2.72 $nt$	+ 2".21 $nt$		
1-1	+ 1.2	- 0.1		+ 3.1	- 0.7		
2-2	+ 1.5	- 0.8		+ 2.0	- 1.0		
3-3	- 0.3	+ 0.2		- 0.3	+ 0.3		
1-0	+ 0.8	- 1.2		+ 1.1	- 1.4		
2-1	+ 1.1	- 1.6		+ 1.5	- 2.0		
3-2	- 0.2	+ 0.4		- 0.3	+ 0.5		
4-3	+ 0.1	- 0.1		+ 0.1	- 0.1		
0-1	- 2.8	- 3.4		- 3.9	- 3.7		
1-2	+ 4.4	+ 5.0		+ 5.4	+ 5.7		
2-3	- 23.2	- 24.3		- 31.0	- 26.8		
3-4	- 0.8	- 0.7		- 1.2	- 0.9		
4-5	+ 0.2	+ 0.2		+ 0.3	+ 0.1		
2-0	+ 0.2	- 0.3		+ 0.2	- 0.3		
3-1	0.0	+ 0.1		- 0.1	+ 0.1		
4-2	0.0	0.0		0.0	0.0		
-1-1	- 1.2	- 1.6		- 1.4	- 1.7		
0-2	- 2.9	- 3.4		- 3.8	- 4.0		
1-3	+ 1.9	+ 2.0		+ 4.0	+ 3.6		
2-4	- 2.0	- 2.0		- 2.2	- 2.0		
3-5	- 1.1	- 1.0		- 1.9	- 1.6		

$\nu$ Bohlin				$\nu$ Lesser			
cos		sin		cos		sin	
0-0	0".00 $\varepsilon$	-		-	-		
1-0	- 0.03 $\varepsilon$	- 3".68 $\varepsilon$		+ 0".13 $nt$	- 3".40 $nt$		
1-1	- 58.6	+ 2.3		- 59.0	+ 2.2		
2-2	- 151.3	+ 12.1		- 155.5	+ 12.3		
3-4	+ 18.1	- 2.2		+ 18.4	- 2.2		
4-4	- 4.3	+ 0.7		- 4.3	+ 0.7		
5-5	+ 1.3	- 0.3		+ 1.3	- 0.3		
1-0	- 3.0	0.0		- 2.7	- 0.1		
2-1	- 0.9	0.0		- 0.9	- 0.2		
3-2	+ 0.1	0.0		- 0.1	+ 0.1		
4-3	+ 0.1	0.0		+ 0.2	- 0.1		
5-4	- 0.1	0.0		- 0.1	0.0		

$\nu$ Bohlin				$\nu$ Lesser			
cos		sin		cos		sin	
0-1	+ 2".7	0".0		+ 3".0	- 0".2		
1-2	- 71.8	+ 5.4		- 71.1	+ 5.5		
2-3	+ 450.0	- 45.5		+ 438.0	- 44.3		
3-4	+ 16.9	- 2.4		+ 16.9	- 2.4		
4-5	- 3.9	+ 0.7		- 3.8	+ 0.7		
5-6	+ 1.2	- 0.3		+ 1.2	- 0.3		
2-0	- 0.2	- 0.3		- 0.1	- 0.3		
3-1	+ 0.1	+ 0.1		+ 0.1	+ 0.1		
4-2	0.0	0.0		0.0	0.0		
-1-1	+ 1.2	- 0.7		+ 1.3	- 0.9		
0-2	- 0.8	- 0.8		- 0.8	- 1.0		
1-3	+ 71.1	- 10.3		+ 87.8	- 12.0		
2-4	+ 23.3	- 3.8		+ 24.7	- 4.2		
3-5	+ 10.1	- 2.0		+ 16.9	- 3.4		
4-6	- 1.7	+ 0.4		- 2.4	+ 0.6		

Die Uebereinstimmung der gefundenen Werthe mit den Lesser'schen Störungen ist wohl, besonders in Anbetracht der ungemein kurzen Zeit, welche zu ihrer Herstellung mit Hülfe der Tafeln nöthig war, als eine recht befriedigende anzusehen. Die grössten Unterschiede kommen naturgemäss bei den grössten Gliedern vor. Sie dürften sich bei Mitnahme einzelner Glieder dritter und vierter Ordnung in Bezug auf die Excentricitäten und Neigungen noch herabdrücken lassen, was auch daraus hervorzugehen scheint, dass bei Lesser Glieder dritter und vierter Ordnung von dem Betrage bis zu einer halben Minute (für Pomona) vorkommen, welche Argumenten entsprechen, die unter den Gliedern zweiter Ordnung inclusive überhaupt nicht vorhanden sind. Die Zeit hat mir bis jetzt gefehlt, eine entsprechende Ausbildung der Tafel, welche allerdings nicht unbedeutende Arbeit erfordern würde, vorzunehmen. Für den Zweck der Aufsuchung eines Planeten dürfte aber die hier erreichte Genauigkeit der Störungen vielleicht schon hinreichend sein, besonders weil die Fehler der grössten Glieder, welche auch an relativ lange Perioden gebunden sind, sich bei Anschluss an die Normalörter für recht lange Zeit der mittleren Bewegung, der Excentricität und der Länge des Perihels als Correctionen anschliessen lassen werden.

Eine Anwendung der Methode auf (13) Egeria, die ich vor zwei Jahren begann, ergab für die Mehrzahl der Glieder eine befriedigende Uebereinstimmung mit Hansen's Störungswerten. Die Glieder mit den Argumenten  $1 - 3\mu$  und  $2 - 3\mu$  geben aber keine gute Annäherung an die Hansen'schen Werthe, was vermuthlich dem Einflusse höherer von der Neigung abhängigen Glieder zuzuschreiben ist ( $\mathcal{F} = 16^\circ$ ). Ein Fehler in den Hansen'schen Störungswerten der Egeria, auf den ich bei diesen Untersuchungen aufmerksam wurde, mag noch bei dieser Gelegenheit angezeigt werden. Wie es aus den Formeln hervorgeht, enthält  $n \delta z$  das Glied



$$\frac{I \text{ Th } \frac{2\eta v}{1+w} y}{\sqrt{-1}}$$

und  $2\nu$  das Glied

$$R \text{ Th } - \frac{2\eta v}{1+w} y.$$

Demselben Argumente ( $y \vartheta^3$  oder  $(2-3\mu)$ ) entsprechen aber sonst bloss ganz geringfügige Glieder. Wenn also  $n\delta z$  für das Argument  $2-3\mu$  die Glieder

$$n\delta z = a \cos + b \sin$$

enthält, so müssten sich bei  $\nu$  nahezu die Glieder

$$\nu = -\frac{b}{2} \cos + \frac{a}{2} \sin$$

finden, ein Verhalten, welches übrigens z. B. durch die oben angeführten Lesser'schen Störungen für Metis und Pomona bestätigt wird. Hansen hat nun für

$$w = 1 - 3\mu = \pm 0.01 \text{ entsprechend } \begin{matrix} n = 909'' \\ n = 891'' \end{matrix}$$

mit der Anwendung der Methode vereinbar sind. Nur werden durch die sehr kleinen Divisoren grössere Fehler in den Gliedern  $1-3\mu$  und  $2-3\mu$  entstehen, welche

$$2-3\mu$$

$$n\delta z = +0.54 \cos + 726.83 \sin$$

und in  $\nu$  müssten also angenähert die Glieder

$$\nu = -363.41 \cos + 0.27 \sin$$

auftreten, während die Störungstafel (Auseinanders. Th. I, p. 109)

$$+354.69 \cos - 0.21 \sin$$

angiebt. Die in Th. III befindlichen Störungstafeln haben die richtigen Zeichen.

Schliesslich sollte nicht unerwähnt bleiben, dass unsere Formeln bei allzukleinen Werthen von  $w$  oder bei mittleren Bewegungen, welche mit derjenigen des Jupiters allzu commensurabel sind, aufhören zu gelten, weil einzelne Coefficienten als Reihen nach fallenden Potenzen von  $w$  dargestellt sind. Die sehr bedeutende Convergenz dieser Reihen zeigt aber, dass auch sehr kleine Werthe von  $w$  z. B. noch

sich aber andererseits desto länger mittelst Correctionen der Bahnelemente compensiren lassen werden, je kleiner die erwähnten Divisoren sind.

#### Anhang.

$$\text{Log } q; \quad k = \sin \theta. \quad q = e^{-\frac{\pi K'}{K}}.$$

$\theta$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$0^0$	$-\infty$	3.280	3.882	4.234	4.484	4.678	4.836	4.970	5.086	5.188
1	5.2797	3624	4370	5076	5719	6319	6879	7406	7903	8372
2	8818	9242	9646	*0032	*0402	*0757	*1097	*1425	*1741	*2046
3	6.2341	2626	2902	3169	3428	3680	3925	4163	4395	4621
4	4841	5056	5265	5470	5670	5865	6056	6243	6426	6606
5	6.6781	6953	7122	7288	7451	7610	7767	7921	8072	8221
6	8367	8511	8653	8792	8929	9064	9197	9328	9457	9584
7	9709	9833	9954	*0075	*0193	*0310	*0425	*0539	*0652	*0763
8	7.0872	0981	1087	1193	1298	1401	1503	1603	1703	1802
9	1899	1996	2091	2185	2278	2371	2462	2553	2642	2731
10	7.2818	2905	2991	3077	3161	3245	3327	3409	3491	3571
11	3651	3730	3809	3886	3963	4040	4115	4190	4265	4339
12	4412	4485	4557	4628	4699	4769	4839	4908	4977	5045
13	5113	5180	5247	5313	5378	5444	5508	5573	5636	5700
14	5763	5825	5887	5949	6010	6071	6131	6191	6250	6310
15	7.6368	6427	6485	6542	6600	6657	6713	6769	6825	6881
16	6936	6991	7045	7099	7153	7207	7260	7313	7366	7418
17	7470	7522	7573	7624	7675	7726	7776	7826	7876	7925
18	7974	8023	8072	8120	8169	8216	8264	8312	8359	8406
19	8452	8499	8545	8591	8637	8682	8728	8773	8818	8862
20	7.8907	8951	8995	9039	9083	9126	9169	9212	9255	9298

$$\text{Log } K; \quad k = \sin \theta. \quad K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}.$$

$\theta$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0°	0.19612	9612	9612	9612	9613	9613	9613	9614	9614	9615
1	9615	9616	9617	9618	9618	9619	9620	9622	9623	9624
2	9625	9627	9628	9629	9631	9633	9634	9636	9638	9640
3	9642	9644	9646	9648	9650	9653	9655	9657	9660	9662
4	9665	9668	9670	9673	9676	9679	9682	9685	9688	9691
5	0.19695	9698	9701	9705	9709	9712	9716	9720	9723	9727
6	9731	9735	9739	9743	9748	9752	9756	9761	9765	9770
7	9774	9779	9784	9789	9793	9798	9803	9808	9814	9819
8	9824	9829	9835	9840	9846	9851	9857	9863	9869	9875
9	9881	9887	9893	9899	9905	9911	9918	9924	9931	9937
10	0.19944	9950	9957	9964	9971	9978	9985	9992	9999	*0006
11	0.20014	0021	0029	0036	0044	0051	0059	0067	0075	0082
12	0090	0098	0107	0115	0123	0131	0140	0148	0157	0165
13	0174	0183	0191	0200	0209	0218	0227	0236	0246	0255
14	0264	0274	0283	0293	0302	0312	0322	0332	0342	0352
15	0.20362	0372	0382	0392	0402	0413	0423	0434	0444	0455
16	0466	0476	0487	0498	0509	0520	0531	0543	0554	0565
17	0577	0588	0600	0611	0623	0635	0647	0659	0671	0683
18	0695	0707	0719	0732	0744	0757	0769	0782	0794	0807
19	0820	0833	0846	0859	0872	0885	0898	0912	0925	0939
20	0.20952	0966	0979	0993	1007	1021	1035	1049	1063	1077

Upsala März 1895.

Karl Bohlin.

## Bemerkung über die Rotation des Saturnringes.

Von H. Seeliger.

Vor Kurzem ist es einem der ausgezeichnetsten Spectroskopiker Herrn J. E. Keeler gelungen<sup>1)</sup>, auf spectrographischem Wege nicht nur die durch die Rotation des Saturnringes entstehenden Verschiebungen der Spectrallinien zu constatiren, sondern dieselben mit solcher Genauigkeit zu messen, dass mit unverhoffter Sicherheit die Verschiedenheit in der Rotationsgeschwindigkeit der näher oder weiter vom Saturncentrum stehenden Theile des Ringes constatirt werden konnte. Es ergab sich ferner, dass die Messungen vollkommen der Annahme entsprechen, nach welcher die Winkelgeschwindigkeit jedes Ringtheilchens ebenso gross ist, wie die eines in gleicher Entfernung in kreisförmiger Bahn laufenden Saturntrabanten wäre. Das ist unter allen Umständen ein interessantes Resultat, das glänzendes Zeugnis ablegt ebenso für die Fruchtbarkeit der spectrographischen Methode, wie für die eminente Geschicklichkeit des Beobachters. Indessen wird man die Bedeutung der Keeler'schen Beobachtung für die Erkenntnis der Constitution des Saturnringes doch etwas einschränken müssen und wenn Herr Keeler den genannten Aufsatz als »proof of the theoretic constitution of Saturn's rings« bezeichnet und weiterhin die Meinung auspricht, »it is the first direct proof of the

correctness of the accepted (Maxwell's) hypothesis«, so kann ich dem nicht zustimmen. Das Resultat der spectrographischen Beobachtung sagt nur aus, dass der Saturnring nicht eine einzige compacte Masse sein kann und auch nicht als eine einzige Gleichgewichtsfigur flüssiger Masse betrachtet werden darf. Wenn nun auch ohne Frage der directe Nachweis dieser Thatsache sehr werthvoll ist, so muss andererseits doch hervorgehoben werden, dass hierdurch nur die Unrichtigkeit einer Ansicht bezeugt wird, die wohl kaum Jemand ernstlich verfochten hat, nachdem die Cassini'sche und Encke'sche Trennungslinie entdeckt und nachdem die verschiedenen bis auf Laplace zurückreichenden Untersuchungen über die mechanische Unmöglichkeit solcher Systeme ausgeführt worden sind. Die von Herrn Keeler ausgeführten Messungen lassen sich auch, ebenso gut wie mit der Maxwell-Hirn'schen Hypothese, mit der Annahme mehrerer concentrischer Saturnringe vereinigen, von denen jeder nach dem erwähnten Gesetze rotirt. Bei dem gegenwärtig erreichbaren oder wenigstens erreichten Grad der Genauigkeit der Messungen, braucht die Anzahl dieser Ringe nicht einmal sehr gross zu sein. Dass diese Ringe nicht bestehen können, vielmehr in einzelne

<sup>1)</sup> Astrophys. Journal I, pag. 416 ff.