

Ueber eine eigenthümliche Sorte dioptrischer Bilder.

(Ein Beitrag zur Theorie der Cylinderlinsen.)

Von

Dr. Carl Koller,

Zur Zeit Assistenzarzt am Nederl. Gasthuis voor Ooglijders zu Utrecht.

Gelegentlich einer dioptrischen Aufgabe, die ich mir gestellt hatte, habe ich mich viel mit Cylinderlinsen beschäftigt und hierbei ganz zufällig eine Reihe von Phänomenen beobachtet, die durch ihre paradoxen Eigenschaften mein Interesse in hohem Grade fesselten, und die, soweit ich habe in Erfahrung bringen können, bisher nicht bekannt waren. — Da alle dioptrischen Erscheinungen von nichts anderem abhängig sind als von der geometrischen Gestalt der brechenden Medien, deren relativen Abständen und Brechungsindices, so konnten jene Phänomene nur besondere, bisher nicht in Betracht gezogene Specialfälle darstellen, auf welche die allgemeinen Regeln über Cylinderlinsen anzuwenden waren. — Indem ich mich aber bemühte die Erscheinungen zu analysiren, erschloss sich mir die theoretisch interessante Thatsache, dass man vermittelst besonderer Veranstaltungen dioptrische Bilder erzeugen könne, die eine merkwürdige Mittelstellung zwischen den reellen und virtuellen Bildern einnehmen. — Dieser Umstand hat mich zur Publication der vorliegenden Arbeit veranlasst. Zur Feststellung der im Folgenden anzuwendenden Termini will ich vorerst Einiges über die

Cylinderlinsen sagen, hierauf die in Rede stehenden Phänomene beschreiben und in einem dritten Abschnitte die Analyse derselben geben.

A. Die Cylinderlinsen.

Cylinderlinsen nennt man gemeinhin Linsen, von deren zwei optisch wirksamen Begrenzungsflächen mindestens die eine cylindrisch gekrümmt ist, während die andere plan, cylindrisch oder auch sphärisch sein kann. — Die am meisten gebräuchlichen (einfache Cylinderlinsen) stellen Abschnitte eines Glascylinders dar, die parallel zur Achse geführt sind — demgemäss ist die eine Fläche eben, die andere cylindrisch. Da bei diesen Plancyylinderlinsen so wie auch bei allen anderen die cylindrische Fläche convex und auch concav sein kann, so ergeben sich als Haupt-Unterabtheilungen: Convex- und Concaveylinderlinsen.

Als Linsenaxe (optische Hauptaxe) ist diejenige Linie anzusehen, welche auf beiden Begrenzungsflächen senkrecht steht. Bei den einfachen Cylinderlinsen entsprechen dieser Definition alle (untereinander parallelen) Cylinder-Radien, welche in dem „axialen Hauptschnitte“ liegen.

Axe schlechtweg heisst die Richtung parallel der Cylinderaxe (oder auch erzeugenden Linie); eigentlich ist dies nur ein kurzer Ausdruck für die die Cylinderaxe und Linsenaxe enthaltene Ebene — den axialen Hauptschnitt.

Maximaler Hauptschnitt*) heisst jeder ebene Schnitt der Cylinderlinse, der die Leitlinie enthält; jeder maximale

*) Ich werde im Folgenden diese Bezeichnung gebrauchen, analog der Nomenclatur, welche z. B. für dreiaxige Ellipsoide (astigmatische Hornhaut) gebräuchlich ist: Maximaler und minimaler Hauptschnitt (Meridian der stärksten und schwächsten Krümmung).

Hauptschnitt ist senkrecht zur Cylinderaxe so wie zum axialen Hauptschnitt.

Zu den einfachen Cylinderlinsen werden ausser den plancyindriscen auch noch solche gerechnet*), deren beide Grenzflächen cylindrisch gekrümmt sind, wobei die Achsen der beiden Cylinder parallel sein müssen. Sie stehen zu den plancyindriscen Linsen in analogem Verhältnisse wie die plansphärischen zu den bispährischen Linsen; — es sind auch hier die gleichen Variationen möglich.

Bicylindriscne Linsen heissen Linsen mit zwei cylindrischen Grenzflächen, deren Achsen sich rechtwinklig kreuzen; da eine derartige Linse sich immer durch eine sphärisch-cylindriscne Linse gleicher Wirksamkeit ersetzen lässt und ausserdem die Herstellung schwierig ist, so sind die bicylindriscnen Linsen nicht im Gebrauch.

Die sphärisch-cylindriscnen Linsen haben wie schon der Name besagt eine sphärische und eine cylindriscne Grenzfläche; man kann sich eine solche Linse combinirt denken aus einer plansphärischen und einer plancyindriscnen, die mit den ebenen Grenzflächen aneinander gelegt sind.

Die Cylinderlinsen werden seit 25 Jahren ganz allgemein von den Augenärzten zur Correction des „regulären Astigmatismus“ angewendet. — In den gewöhnlichen Brillenkästen befindet sich je ein Satz plancyindriscner Convex- und Concavlinsen von $\frac{1}{2}$, 1, $1\frac{1}{2}$, 2, $2\frac{1}{2}$, 3, $3\frac{1}{2}$, 4, $4\frac{1}{2}$, 5, $5\frac{1}{2}$, 6 Dioptrien, (respective von 2000, 1000, 666, 500, 400, 333, 285, 250, 222, 200, 181, 167 Millimeter Brennweite). — Den Brechungsindex des Glases mit 1,5 angenommen sind diese Linsen also Abschnitte von Glascylindern von resp. 1000, 500, 333, 250, 200, 166, 142, 125, 111, 90, 83 Millimeter Radius.

*) Ich folge hier der von Donder's „Anomalien der Refract. und Accomodat. d. Aug.“ gegebenen Eintheilung.

B. Einige Cylinderlinsen-Phänomene.

I. Wenn man eine Convex-Cylinderlinse von sechs Dioptrien (167 Mm. Hauptbrennweite)*) mit ausgestrecktem Arme (also 35—40 Cm. vom Auge) vor sich hinhält, die Cylinderaxe vertical gestellt, und durch die Linse eine in der Entfernung von einigen Metern (mindestens 1 Meter) befindliche verticale Linie betrachtet, so sieht man dieselbe zwar nicht ganz scharf aber mit hinreichender Deutlichkeit. — Ertheilt man nun der Linse eine Drehung um ihre Axe (Linsenaxe), so beginnt die Linie ihren Ort zu verändern; sie rotirt in gleichem Sinne wie die Linse, aber mit grösserer Geschwindigkeit; wenn die Linse sich um 45° gedreht hat, so scheint die Linie horizontal zu stehen, und wenn die Linse eine Viertel-Rotation (90°) gemacht hat, dann steht die Linie wieder vertical. Dreht man weiter, so setzt die Linie in gleichem Sinne ihre Rotation fort, immer in der Art, dass sie sich genau zweimal so schnell dreht als die Linse. — Angesichts dieser paradoxen Erscheinung könnte man der Vermuthung Raum geben, es sei nicht das Bild jener Linie, das die beschriebene Drehung mache, sondern etwa eine Brennlinie; abgesehen davon, dass dagegen die Drehungsgeschwindigkeit spricht, kann man sich durch den Versuch vom Gegentheil überzeugen. Macht man nämlich in jene Linie zwei Zeichen in angemessener Distanz, so wird man sehen, dass es wirklich das Bild jener Linie selbst ist, das sich dreht.

*) Die Erscheinungen lassen sich auch mit Cylinderlinsen von grösserer und geringerer Brennweite, etwa innerhalb der Grenzen von 25—15 Ctm., mit hinreichender Deutlichkeit hervorbringen. — Um in die Massangaben nicht überflüssige Complication hinein zu bringen, wähle ich die Linse von 6 Dioptrien = 167 Mm. Brennweite (ca. 6 Pariser Zoll nach alter Bezeichnung). — Das Auge des Beobachters ist immer als emmetropisch und nicht accommodirt gedacht.

Zwischen je zwei aufeinander folgenden Phasen, in denen die Linie in ihrer natürlichen Stellung erscheint, wird man den Unterschied finden, dass die Linie einmal scharf, das andere Mal etwas verschwommen ist; das letztere dann, wenn Cylinderaxe und Linie parallel sind. — Beobachter, die ein deutliches Bewusstsein von ihrer Accommodation haben, werden finden, dass sie bei starker Accommodationsspannung die Linie auch in der zweiten Stellung scharf sehen können.

II. Wenn die angegebenen Distanzen nicht eingehalten werden, dann ist die Erscheinung verändert: Wenn nämlich die Entfernung der Linse von der Linie kleiner ist als etwa 15 Cm. (also z. B. 10 Cm.) ebenso auch wenn die Entfernung der Linse vom Auge nur etwa 12 Cm. oder weniger beträgt, dann verursacht Rotation der C.-Linse nicht eine gleichsinnige Rotation der Linie sondern eine Pendelbewegung derselben, und zwar während einer vollen Linsenrotation zwei volle Pendelbewegungen der Linie. — Geht man wieder von der Stellung aus wo C.-Axe und Linie parallel sind und dreht dann die Linse, so macht die Linie vorerst eine Excursion im entgegengesetzten Sinne, erreicht bei Drehung der C.-Linse um 45° ihre grösste Amplitude, kehrt dann zurück und ist nach Drehung der Linse um 90° in ihrem vorigen Stande — hat also während einer Viertel-Rotation der Linse eine halbe Pendelbewegung gemacht. Dreht man die Linse weiter, so geht nun die Linie in demselben Sinne mit, erreicht nach einer Achteldrehung der Linse wieder ihren äussersten Stand, um nach einer weiteren Achteldrehung wieder in ihrer Anfangsstellung zu sein. — Zwischen je zwei aufeinander folgenden Phasen, in denen die Linie an ihrem wirklichen Orte gesehen wird, sind dieselben Unterschiede bezüglich Schärfe des Bildes zu bemerken, wie in Versuch I.

III. Das in II beschriebene Phänomen wird von einer

Concav-Cylinderlinse in allen Distanzen hervorgebracht — mit dem Unterschiede, dass die Pendelbewegung in allen Phasen die entgegengesetzte ist als in II.

IV. Bei dem Versuche I ist in Folge davon, dass eine Linie als Object gewählt wurde, eine wichtige Theilerscheinung der Beobachtung entgangen, die sich erst zeigt, wenn man bei übrigens gleicher Versuchsanordnung einen asymmetrischen Gegenstand betrachtet. — Nehmen wir z. B. ein im Profil gezeichnetes Porträt zum Objecte; die Distanzen seien die gleichen wie in I, die Cylinderaxe: 1) vertical. — Durch die Linse sieht man ein zwar nicht scharfes, aber immerhin recht deutliches Bild; das Bild ist aufrecht wie das Object; es hat aber das Merkwürdige, dass Rechts und Links vertauscht sind, dass es sich zu dem Objecte verhält wie das durch einen Planspiegel entworfene Bild. Das heisst: Wenn man von der nicht vollkommenen Schärfe und von den möglicherweise geänderten Grössendimensionen absieht — Umstände die, wie ich später zeigen werde, sich vollkommen corrigiren lassen — so ist das Bild dem Objecte congruent, kann aber mit diesem nicht zur Deckung gebracht werden. — Dreht man nun die Linse, so zeigt das Bild ein ganz gleiches Verhalten wie vorher die Linie. 2) Wenn die Cylinderaxe um 45° gegen die Verticale geneigt ist, steht das Bild horizontal — Object und Bild kehren sich die gleichen Seiten zu. 3) Steht die Cylinderaxe horizontal, so steht das Bild auf dem Kopfe, rechts und links sind aber nicht vertauscht: kurz in jeder Stellung ist dieses dioptrische Bild ein „Spiegelbild“ des Objectes. Zwischen jedem Objecte und seinem „Spiegelbilde“ lässt sich eine Symmetrie-Ebene construiren; bei einem wirklichen Spiegelbilde (Bild eines Planspiegels) fällt die Symmetrie-Ebene mit der Spiegelebene zusammen. — Suchen wir in unserem Falle die ideale Symmetrie-Ebene auf, so finden wir Folgendes: In der Anfangsstellung (Cylinderaxe vertical) ist die Symmetrieebene

vertical; in der zweiten Stellung (Cylinderaxe 45° gegen den Horizont) steht das Bild horizontal und kehrt dem verticalen Objecte die gleiche Seite zu: die Symmetrie-Ebene ist also um 45° gegen beide geneigt, genau wie die Cylinderaxe; in der dritten Stellung (Cylinderaxe horizontal) steht das Bild auf dem Kopfe; die Symmetrie-Ebene ist horizontal, wieder so wie die Cylinderaxe. In jeder Stellung wird die ideale Symmetrie-Ebene zwischen Object und Bild durch eine Ebene dargestellt, die die Cylinderaxe und die optische Axe enthält — diese Ebene aber haben wir als axialen Hauptschnitt defnirt.

Ganz ebenso wie das beschriebene Bild unserer Cylinderlinse würde sich bezüglich Stellung und Drehungsgeschwindigkeit das Bild eines Planspiegels verhalten, der um die Verbindungslinie von Beobachter und Object als Axe derart gedreht würde, dass Spiegelebene und Axe jederzeit parallel sind.

Ganz analog verhalten sich auch die Bilder, welche man erhält, wenn man durch ein gleichschenkliges rechtwinkliges Prisma parallel der Hypothenusenfläche hindurchsieht,*) wobei eben die Hypothenusenfläche als Spiegelebene wirkt.

Was nun die Dimensionen des Bildes anbelangt, so wird man Folgendes bemerken: Durch Vor- und Zurückschieben der Linse in der Richtung der optischen Axe wird man leicht eine Stellung finden, in der das Bild bezüglich aller seiner Dimensionen sich gleichmässig verhält; grössere oder geringere Entfernung der Linse vom Auge bewirkt eine Verzerrung des Bildes, so zwar dass bei grösserer Entfernung die Dimension in der Richtung der Cylinderaxe überwiegt, bei geringerer Entfernung die Dimension in darauf senkrechter Richtung; wenn also beispielsweise Object und Linsenaxe vertical stehen, so ist im ersten Falle das Bild in die Länge verzogen, im zweiten Falle in die Breite.

*) Helmholtz, Handb. d. physiol. Ophth., S. 476.

Concavcylinderlinsen geben überhaupt nie derartige spiegelbildartige Bilder, und die durch Concavcylinder hindurchgesehenen Objecte sind immer in der Richtung der Cylinderaxe unverändert, in darauf senkrechter verschmächtigt.

V. Man zeichne auf ein Blatt Papier zwei sich rechtwinklig kreuzende Linien, zur Unterscheidung von ungleicher Farbe — etwa blau und roth; wenn man nun die Zeichnung auf den Tisch legt, die Convex-Cylinder-Linse von 6 Dioptrien in einem Abstände von weniger als 20 Cm. (etwa 15) darüber hält und nun mit einem Auge aus einer Höhe von 60—80 Cm. (von der Tischfläche aus gerechnet) durch die Linse auf die Zeichnung sieht, so bemerkt man folgendes: — Der von jenen 2 Linien eingeschlossene Winkel erscheint nur dann als rechter, wenn die Linsenaxe mit einer jener Linien parallel ist; dreht man die Linse, so beginnen beide Linien jene Pendelbewegung, welche schon in II beschrieben wurde; da sich die 2 Linien aber (wie gleichfalls aus genauer Beobachtung des Phänomen II zu ersehen ist) immer in entgegengesetzten Phasen der Bewegung befinden, so wird jeder der 4 rechten Winkel nach einander spitz und stumpf — (wobei natürlich zwei aneinander stossende Winkel sich entgegengesetzt, zwei gegenüberliegende sich gleichartig verhalten). — Stumpfwinkelig wird immer jenes Quadrantenpaar, in das die Cylinderachse eintritt, spitz dasjenige, aus welchem sie austritt.

Hält man die Cylinderlinse etwa 21 Cm. über der Zeichnung mit dem Kreuze (das Auge wieder 40—60 Cm. über der Linse) und richtet man die Cylinderaxe so, dass sie mit jeder der Linien einen $<$ von 45° einschliesst, so werden die rothe und blaue Linie durch die Linse hindurch als vollkommen parallel neben einander gesehen (oder vielmehr diejenigen Stücke der Linien, die man durch die Linse hindurch sehen kann). — Die Richtung der Linien erscheint rechtwinklig auf die Cylinderaxe, ihr gegen-

seitiger Abstand kann verschieden gross sein und hängt davon ab ob, ein dem Durchkreuzungspunkte näherer oder fernerer Abschnitt der Zeichnung betrachtet wird. — Richtet man das Auge auf den Durchkreuzungspunkt, so decken sich die Linien; lässt man die Visirlinie an der Halbirungslinie eines Quadrantenpaares dahingleiten oder giebt man der Linse eine entsprechende Verschiebung, sonähern oder entfernen sich die Linien von einander, immer parallel bleibend; im Durchkreuzungspunkt wechseln sie die Seite.*)

Um sich eine exacte Vorstellung darüber zu bilden, wie die beschriebenen Erscheinungen zu Stande kommen, wird man nach der allgemeinen Methode der Dioptrik auf die Elemente zurückgehen müssen und die Frage zu beantworten haben, welcher Art ein Punkt unter den gegebenen Verhältnissen abgebildet oder gesehen wird.

Wie sich die Strahlen eines leuchtenden Punktes bei ihrem Durchgange durch eine Cylinderlinse verhalten, ist in den Arbeiten über die Theorie der Cylinderlinsen allerdings wiederholt Gegenstand der Darstellung gewesen; doch will ich mir erlauben wegen der Gleichförmigkeit der Behandlung mit diesem einfachen Probleme zu beginnen. Daran wird sich dann die Untersuchung über die Wirksamkeit einer aus einer Cylinder- und einer sphärischen Linse bestehenden Combination anschliessen, welcher Fall eben in den beschriebenen Phänomenen gegeben ist.

C. Erklärung der Erscheinungen.

Methode der Darstellung.

Zur Behandlung der vorliegenden dioptrischen Aufgaben habe ich die Methode der „darstellenden Geometrie“ gewählt, indem ich hierbei einem Rathe gefolgt bin, den

*) Cylinder- und Sattelspiegel bringen ganz analoge Erscheinungen hervor, wie die beschriebenen; jene sind etwas allgemeiner bekannt, indem man bisweilen in Jahrmarktsbuden und dergleichen Gelegenheit hat, sie zu sehen.

F. E. Reusch in seiner „Theorie der Cylinderlinsen“, Leipzig, Teubner, gegeben hat. — Die „descriptive Geometrie“ stellt bekanntlich Punkte, Linien, Flächen und Körper durch ihre Projectionen auf ein System von 2 (respective 3) gegen einander senkrechten Ebenen dar. — Dass es zulässig ist, Bildobjecte und brechende Flächen durch ihre Projectionen darzustellen, innerhalb dieser Projectionen nach dioptrisch gültigen Regeln Constructionen vorzunehmen, und aus den Resultaten dieser Constructionen in der Fläche die Raumgebilde wieder aufzubauen, bedarf keiner weiteren Erörterung, da ja die analytische Geometrie, welche im Wesen das Gleiche thut, die klassische Methode der Dioptrik ist. *)

I. Abbildung eines Leuchtpunktes durch eine Cylinderlinse.

a) Der Leuchtpunkt liege in der Ebene des axiolen Hauptschnittes.

Man denke sich eine einfache Cylinderlinse in Bezug auf ein Projectionssystem von zwei gegen einander senkrechten Ebenen derart orientirt, dass der eine Hauptschnitt, z. B. der maximale der Ebene I, der andere, also der axiale der Ebene II parallel sei. In Folge dessen stellt sich die Cylinderlinse in der Projection I mit kreisbogenförmiger (Leitlinie), in Projection II mit geradliniger Begrenzung (erzeugende Linie) dar. (Siehe Fig. 1 und 2.)

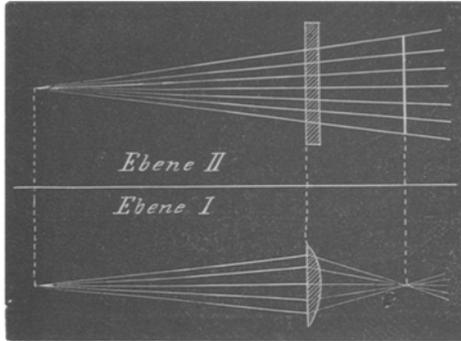
Ein von einem Leuchtpunkte ausgehendes Strahlenbüschel kann man sich nun in eine Anzahl von unter einander divergenten Strahlenfächern derart zerlegt denken, dass ihre Ebenen sämmtlich auf Projectionsebene II senk-

*) In allen folgenden Figuren sind die Projectionen von Lichtstrahlen und Linsen auf zwei gegen einander senkrechte Ebenen dargestellt. Die in jeder Figur wiederkehrende, die Zeichnung halbirende horizontale Linie ist die Durchschnittslinie jener zwei Ebenen. Von diesen mag die untere als in der Ebene des Papiers liegend vorgestellt werden, die obere dagegen soll man sich um die Durchschnittslinie wie um ein Charnier gedreht denken, bis sie auf der unteren senkrecht steht.

recht stehen; jeder solche Fächer hat dann in Ebene II eine gerade Linie zur Projection, und die Divergenz der Fächer unter einander wird durch die Divergenz dieser Geraden dargestellt.

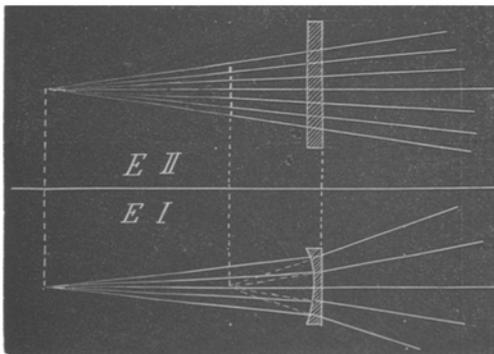
Die Projectionen der verschiedenen Strahlenfächer

Fig. 1.



auf Ebene I fallen alle zusammen, was ohne weiteres einleuchtet, wenn man sich das Strahlenbündel in anderer Weise zerlegt denkt, nämlich in eine Reihe von Fächern, die auf Ebene I senkrecht stehen.

Fig. 2.



Die zwei Projectionen sind nun gesondert zu behandeln.

In Projection I haben wir einen Querschnitt der Cylindrolinse vor uns, der sich durch nichts von dem

Querschnitt einer sphärischen Linse unterscheidet. Die Projection des Leuchtpunktes liegt auf der optischen Axe dieses Linsenquerschnittes, gemäss der Voraussetzung, dass der Leuchtpunkt im axialen Hauptschnitte liege. — Der von diesem Punkte ausstrahlende Fächer wird durch die Linse in Einem Punkte der Axe zusammengebrochen, welcher dem Leuchtpunkte in Bezug auf den Linsenquerschnitt conjugirt ist und dessen Lage durch die Formeln: $\frac{1}{f} + \frac{1}{a} = \frac{1}{F}$ und $\frac{1}{F} = (n - 1) \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{e} + \frac{n - 1}{n \cdot r \cdot e} \right)$ gegeben ist. — Der gebrochene Strahlenfächer stellt die Projection I aller Strahlen nach ihrer Brechung und der Vereinigungspunkt die Projection aller Vereinigungsorte der Strahlen dar.

Betrachten wir nun Projectionsebene II:

In dieser Ebene erscheinen die Begrenzungsflächen der Cylinderlinse als zwei parallele gerade Linien, geradeso als ob eine Platte mit planparallelen Flächen vorläge. Streng genommen würden der cylindrischen Fläche nicht bloss Eine sondern eine ganze Anzahl von geraden Linien als Projection zukommen, entsprechend der vom Rande gegen die Mitte zunehmenden Dicke der Linse. Es kann dies jedoch vernachlässigt werden, wenn man hier die in dioptrischen Ableitungen gebräuchliche Einschränkung macht, dass die Dicke der Linse überhaupt eine geringe sei, und dass Randstrahlen, sowie Strahlen von allzu schiefer Incidenz auszuschliessen sind.

Das homocentrische Lichtbüschel wird in dieser Projection durch eine Anzahl von aus einem Punkte divergirenden Strahlen repräsentirt — deren jeder die Projection eines Strahlenfächers ist. — Die Strahlen dieser Projection erleiden keine Veränderung ihrer Richtung, nur eine geringfügige Verschiebung, die gemäss der gemachten Einschränkung unberücksichtigt bleiben kann. Aus der Sprache der Construction in Worte übersetzt

heisst dies: Die einem Fächer angehörenden Strahlen bleiben auch nach ihrer Brechung in der Cylinderlinse insgesamt in der Ebene ihres Fächers.

Fassen wir die Ergebnisse beider Projectionen zusammen:

Gemäss Projection I werden die Strahlen eines jeden Fächers, die ja zufolge Projection II auch nach der Brechung in der Ebene ihres Fächers verbleiben, wieder in Einem Punkte vereinigt; — die Vereinigungspunkte der verschiedenen Fächer aber liegen in einer zu Ebene I senkrechten Geraden, was daraus folgt, dass alle diese Punkte die gleiche Projection I haben:

Das von einer Cylinderlinse entworfene Bild eines im axialen Hauptschnitte gelegenen Punktes ist eine, gleichfalls in diesem Hauptschnitte gelegene, zur Cylinderaxe parallele gerade Linie — die Brennlinie. Die Brennlinie kann reell und auch virtuell sein, je nach dem Werthe und Vorzeichen der in den Gleichungen (Seite 180) vorkommenden Grössen — ganz homolog den Bildpunkten spärischer Linsen. — Die Länge der Brennlinie hängt hauptsächlich ab von dem Oeffnungswinkel des in Betracht kommenden Lichtbüschels und der Summe respective Differenz der conjugirten Brennweiten; unter Umständen kann sie auch von der Grösse des angewendeten Linsenstückes (in axialer Richtung) beeinflusst werden.

Wenn man das durch eine Convex-Cylinderlinse entworfene Bild eines Leuchtpunktes durch einen an passender Stelle angebrachten Schirm auffängt, so erhält man thatsächlich eine der Cylinderaxe parallele Lichtlinie; die Linie macht natürlich jede Rotation der Linse mit gleicher Geschwindigkeit mit.

Für die räumliche Auffassung wichtig erscheint noch folgende Ueberlegung:

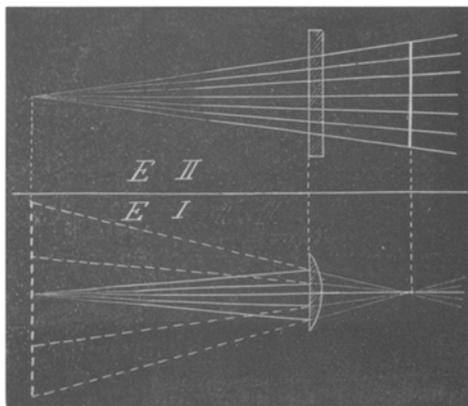
Nach ihrer Vereinigung in der Brennlinie divergiren die Strahlen wieder; sie gehen aber von der Brennlinie nicht so aus wie die Strahlen von einer leuchtenden Linie.

Jeder Punkt der Brennlinie kann Strahlen nur in seiner Eigenschaft als Durchkreuzungspunkt entsenden.

Verlängert man die in jedem Punkte der Brennlinie sich kreuzenden, also je einem Fächer angehörenden Strahlen nach rückwärts (vergl. Fig. 3), so liegen auch diese Verlängerungen insgesamt in der Fächer-Ebene.

Die Ebenen der einzelnen Fächer aber schneiden sich gemäss der Disposition in einer geraden durch den Objectpunkt hindurchgehenden Linie, welche sich mit der Cylinderaxe rechtwinkelig kreuzt. — Durch diese Linie

Fig. 3.



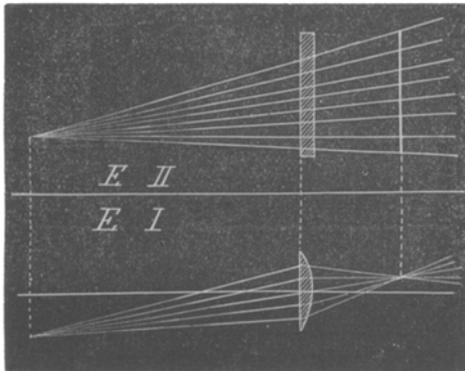
also müssen alle Strahlen hindurchgehen, wenn man sie nach rückwärts verlängert, oder sie haben alle eine solche Richtung, als wenn sie von dieser Linie ausgehen würden. Da diese Linie der virtuellen Durchkreuzung ein nothwendiges Supplement für jede Brennlinie, ob reell, ob virtuell, darstellt, so will ich sie im Folgenden „supplementäre Brennlinie“ nennen.

- b) Der Leuchtpunkt liege nicht in der Ebene des axialen Hauptschnittes.

Die Orientirung der Linse gegen das Projectionssystem sei die gleiche wie vorher, folglich sind auch die Projectionen der Linse die gleichen wie früher. — Das

von dem Leuchtpunkte ausgehende Strahlenbüschel denken wir uns wieder in eine Anzahl von Strahlenfächern zerlegt, deren Ebenen auf *E II* senkrecht stehen, die daher alle dieselbe Projection *I* haben. Für diese Projection ist es ganz so, als hätten wir den Querschnitt einer sphärischen Linse vor uns und einen Leuchtpunkt, der nicht auf der optischen Axe dieser Linse (Projection des axialen Hauptschnittes) liegt. (Vergl. Fig. 4). Die Strahlen auch eines solchen Punktes werden bekanntlich wieder in einem Punkte vereinigt, der auf der entsprechenden Nebenaxe gelegen ist.

Fig. 4.



Das vom Bildpunkte auf die optische Axe gefällte Loth schneidet dieselbe in einer Distanz von der Linse, die durch die Formel $\frac{1}{f} + \frac{1}{a} = \frac{1}{F}$ gegeben ist; der Abstand des Bildpunktes von der optischen Axe berechnet sich durch die Proportion $L_o : L_b = a : f$.

Für die Projection *II* liegen die Verhältnisse ganz so wie in dem früheren Falle; die Linien, deren jede die Projection eines Strahlenfächers darstellt, erleiden in dem Längsschnitte der Linse keine Richtungsveränderung, woraus wiederum folgt, dass die Strahlen eines jeden

Fächers auch nach ihrem Durchgange durch die Cylinderlinse in der Ebene dieses Fächers verbleiben.

Da alle Strahlenfächer die gleiche Projection I haben, und die Projection sämtlicher Vereinigungsorte auf Ebene I ein Punkt ist, so müssen die Vereinigungspunkte der einzelnen Strahlenfächer in einer Geraden übereinander liegen, die auf Ebene I senkrecht — zur Cylinderaxe parallel ist: — Das durch eine Cylinderlinse entworfene Bild eines nicht im axialen Hauptschnitte gelegenen Punktes ist also gleichfalls eine zur Cylinderaxe parallele Brennlinie; aus den oben angegebenen Formeln berechnet sich leicht der Abstand dieser Brennlinie vom axialen Hauptschnitte; desgleichen ergibt sich daraus, ob die Brennlinie reell oder virtuell ist. Wenn die Brennlinie reell ist, dann liegt sie auf der entgegengesetzten Seite des axialen Hauptschnittes als der leuchtende Punkt und zwar um so weiter davon entfernt, je weiter der leuchtende Punkt vom Hauptschnitte abliegt.

Abbildung eines ebenen Objectes durch eine Cylinderlinse.

In den zwei behandelten Fällen sind die Anhaltspunkte gegeben, um das durch eine Cylinderlinse entworfene Bild eines Objectes zu construiren: das Bild wird aus einer Reihe von Brennlinien bestehen müssen, die sämtlich untereinander und der Cylinderaxe parallel sind, und deren Länge von den früher angegebenen Umständen abhängig ist; die Brennlinien aller Objectpunkte, die in einer zur optischen Axe senkrechten Ebene liegen, werden in einer gleichfalls zur optischen Axe senkrechten Bildebene gelegen sein.

Wenn man thatsächlich ein leuchtendes Object — etwa eine Lampe der Abbildung durch eine Convex-Cylinderlinse unterwirft, so entsteht in der der Objectentfernung (in Bezug auf den Linsenquerschnitt) conjugirten Distanz als Bild jenes Objectes ein System von Brennlinien; man

kann dieses Bild auf einem Schirme auffangen. Sämmtliche Brennlinien sind der Cylinderaxe, also auch untereinander parallel und liegen je auf der entgegengesetzten Seite des axialen Hauptschnittes als der entsprechende Objectpunkt. — Die Brennlinien sind alle ungefähr gleich lang, da ihre Länge bei diesem Versuche hauptsächlich von der Grösse (Länge) des Linsenstückes abhängt, wenn anders der Bedingung genügt ist, dass Strahlen von allzu schiefer Incidenz ausgeschlossen sind und falls nicht etwa ein Diaphragma angewendet wurde. In Folge dieses Verhaltens decken sich die Brennlinien jener Punkte, deren gegenseitiger Abstand der Linsenaxe parallel ist und das aufgefangene Bild hat nur eine ganz entfernte Aehnlichkeit mit dem Objecte. — Es erscheinen nur diejenigen Linien des Objectes im Bilde wieder als solche, die der Linsenaxe parallel verlaufen.

Ganz anders gestaltet sich die Sache, wenn man das durch die Cylinderaxe entworfene Bild nicht mittelst eines Schirmes auffängt, sondern die Strahlen ungehindert weiter gehen lässt, um sie dann der Brechung in einer sphärischen Linse (oder den Medien des Auges) zu unterwerfen.

Die constructive Behandlung gestattet nicht eine derartige Allgemeinheit als die Rechnung; ich werde mich daher bei diesem etwas complicirten Probleme auf specielle Fälle beschränken, wie sie eben in den beschriebenen Versuchen vorliegen.

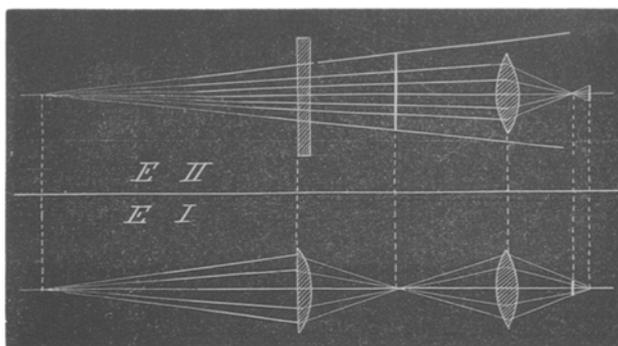
II. System, bestehend aus einer Convexcylinder- und einer sphärischen Linse.

(Entfernung beider jedenfalls bedeutend grösser als die Summe ihrer Brennweiten.)

Für die nun folgenden Fälle werde die Annahme gemacht, dass sich hinter einer Convexcylinderlinse noch eine sphärische Linse (oder das Auge) befinde, derart dass 1) die optischen Axen beider zusammenfallen 2) dass die

sphärische Linse um mehr als ihre Brennweite von jener zur optischen Axe senkrechten Ebene entfernt sei, in die das Cylinderlinsenbild zu liegen kommt. — Was die erste Bedingung betrifft, so habe ich schon früher erwähnt, dass als Linsenaxe der Cylinderlinse jeder Cylinderradius gelten kann, der im axialen Hauptschnitte liegt; die zweite Bedingung enthält gleichzeitig schon eine Beschränkung für die Lage des Objectpunktes.

Fig. 5.



a. Der leuchtende Punkt liege auf der opt. Axe.

Die Orientirung der Cylinderlinse sei die gleiche wie vorher; die Projectionen I und II der sphärischen Linse sind congruent. (Vergl. Fig. 5). In Ebene I ist für die sphärische Linse der auf ihrer Axe gelegene Punkt als Objectpunkt zu betrachten, welcher die Projection der Brennlinie ist. — In dem diesem Punkte conjugirten Abstände werden die Strahlen dieser Projection nach ihrer Brechung in der sphärischen Linse wieder in einem Punkte vereinigt. — Hieraus folgt das der Vereinigungsort des ganzen Lichtbüschels im Raume entweder auch ein Punkt oder eine auf Ebene I senkrechte Gerade sein muss, zwischen welchen Möglichkeiten Projection II zu entscheiden hat.

In Projection II ist für die sphärische Linse die Projection des ursprünglichen Leuchtpunktes das Object, da ja die Strahlen dieser Projection in ihrer Richtung durch die Cylinderlinse nicht beeinflusst worden sind; in der jenem Punkte conjugirten Distanz wird die sphärische Linse die Strahlen dieser Projection wieder in einem Punkte vereinigen, woraus wiederum folgt, dass das ganze Bündel als räumlichen Vereinigungsort entweder einen Punkt oder eine auf Ebene II senkrechte Gerade hat; darüber muss Projection I entscheiden.

Die zwei Vereinigungspunkte in I und II haben nicht gleichen Abstand von der sphärischen Linse; vielmehr muss der in II näher an derselben liegen, da der zugehörige Objectpunkt auf der andern Seite der Linse weiter entfernt ist als der in I; es können daher jene zwei Punkte nicht die Projectionen eines und desselben Punktes im Raume sein, sie sind ein jeder die Projection einer anderen Geraden, die auf Ebene I respective II senkrecht stehen, einander im Raume rechtwinkelig kreuzen und deren kürzester Abstand auf der optischen Axe gelegen ist.

Zu dem gleichen Resultat leitet auch folgende Ueberlegung: Nach dem Durchgange durch eine Convexcylinderlinse haben die Strahlen eines leuchtenden Punktes eine solche Richtung als wenn sie von der Brennlinie ausgehen würden; sie gehen aber von dieser nicht nach allen Richtungen aus, sondern nur derart, dass sie auch als von der „supplementären Brennlinie“ kommend aufgefasst werden können. — Denkt man die reelle Brennlinie als Object für die sphärische Linse, so folgt daraus, dass in conjugirter Distanz ein reelles Bild davon entsteht, also eine kleine Linie, die der Cylinderaxe parallel ist. (Diese unterscheidet sich allerdings noch in einem wichtigen Punkt von dem reellen Bilde einer leuchtenden Linie — nämlich in der Länge). Denkt man hingegen die Strahlen als von der supplementären Brennlinie ausgehend, so folgt daraus, dass in einer

dem Orte dieser letzteren conjugirten Distanz ein reelles Bild der supplementären Brennlinie entstehen muss, also eine kleine Linie deren Richtung auf die Cylinderaxe senkrecht ist. Sämmtliche Strahlen des leuchtenden Punktes gehen also, nachdem sie unser Linsensystem passirt haben, nacheinander durch zwei einander rechtwinklig kreuzende Linien hindurch, die vollkommen analog sind den Sturmischen Brennlinien, bekanntlich den Vereinigungsorten eines homocentrischen Lichtbündels nach seiner Brechung in einem dreiaxigen Ellipsoid. Die Distanz zwischen den Brennlinien — somit den Ort der dichtesten Zusammendrängung aller Strahlen — wird nach Sturm die „Brennstrecke“ genannt. — Die Art, in welcher der Querschnitt eines Strahlenbündels (vorausgesetzt dass er vor der Brechung kreisförmig war) auf dieser Strecke sich aus der ersten Brennlinie in eine Ellipse, dann einen Kreis, dann wieder eine Ellipse, dann endlich in die zweite Brennlinie verwandelt, ist so häufig der Gegenstand der Darstellung gewesen, dass ich hier darüber weggehen kann.

Dagegen will ich einiges über die Umstände sagen, welche die Länge und den Abstand der Brennlinien bestimmen, da dies für die Schärfe des Bildes von wesentlichem Einfluss ist und überhaupt die Thatsache erklärt, dass eine Linsencombination von beschriebener Art einigermassen scharfe Bilder liefert.

Auf die Länge der Brennlinien haben folgende Umstände Einfluss (vergl. Fig. 5):

1) Sie sind um so kürzer, je kleiner der Oeffnungswinkel des Strahlenbüschels ist; natürlich werden sie auch kleiner gemacht durch ein an beliebiger Stelle des Systems angebrachtes Diaphragma;

2) um so kürzer, je kürzer die Brennstrecke ist.

Die Brennstrecke aber ist um so kürzer:

3) je kleiner die Hauptbrennweite der sphärischen Linse ist;

4) je weiter sowohl leuchtender Punkt als sein Cylinderlinsenbild von der sphärischen Linse abliegen.

Der Einfluss, den die Grösse des Oeffnungswinkels hat, leuchtet von selbst ein.

Ad. 2. Nennen wir den Abstand der ersten Brennlinie vom optischen Centrum der sphärischen Linse a , den der zweiten b ; den Durchmesser der Linse (der hier den Querschnitt des Lichtbündels bestimmen mag) d , so ist

die Länge der Brennweite = $b - a$;

die Länge der ersten Brennlinie $B_1 = \frac{(b - a) \cdot d}{b}$;

die Länge der zweiten Brennlinie $B_2 = \frac{(b - a) \cdot d}{a}$.

Wie diese Gleichungen zeigen, steht die Länge der Brennlinien in geradem Verhältnisse zur Länge der Brennweite.

Ad 3 und 4. Es sei die Entfernung des Objectpunktes vom Centrum der sphärischen Linse = o ; die Entfernung seines Cylinderlinsenbildes vom Centrum der Linse = c ; die Hauptbrennweite der sphärischen Linse = F .

Dann bestehen die Gleichungen:

$$\frac{1}{o} + \frac{1}{a} = \frac{1}{F} \text{ und } \frac{1}{c} + \frac{1}{b} = \frac{1}{F}$$

Daraus erhält man:

$$\begin{aligned} a &= \frac{F \cdot o}{o - F}; \quad b = \frac{F \cdot c}{c - F} \\ b - a &= \frac{F \cdot c (o - F) - F \cdot o (c - F)}{(o - F) (c - F)} \\ &= \frac{F^2 (o - c)}{(o - F) (c - F)}. \end{aligned}$$

Aus letzterer Gleichung ist ersichtlich, dass die Länge der Brennweite sehr rasch zunimmt, wenn die Hauptbrennweite der sphärischen Linse wächst; ferner ist daraus zu ersehen, dass die Brennweite um so kleiner wird, je

grösser O und c an und für sich sind, also je weiter Objectpunkt und Cylinderlinsenbild von der sphärischen Linse abliegen; und dass sie um so kleiner wird, je kleiner $O - c$ ist, also je näher jene zwei Punkte aneinander liegen.

Die Länge der Brennlinien und Brennstrecke von Objectpunkten, die nicht auf der optischen Axe liegen, hängt in gleicher Weise von denselben Umständen ab; die Ableitung ist um ein Weniges complicirter.

Für das Zustandekommen eines möglichst scharfen Bildes (möglichst kleine Brennlinien und kurze Brennstrecke) sind also Folgendes die günstigsten Bedingungen:

- 1) Geringe Oeffnung des Lichtbündels.
- 2) Grosse Entfernung des Objectpunktes.
- 3) Grosse Entfernung des Cylinderlinsenbildes.
- 4) Gegen die beiden letzteren Grössen vergleichsweise kleine Brennweite der sphärischen Linse.

Wenn diese günstigen Bedingungen thatsächlich erfüllt, also Brennlinien und Brennstrecke verschwindend klein geworden sind, dann wird das Bild eines in der optischen Axe gelegenen Leuchtpunktes beinahe wieder ein Punkt sein und bezüglich seiner Lage sich nicht von dem nur durch die sphärische Linse (ohne Mitwirkung der Cylinderlinse) erzeugten Bilde unterscheiden; denn der Ort der ersten Brennlinie ist von der Cylinderlinse ganz unabhängig.

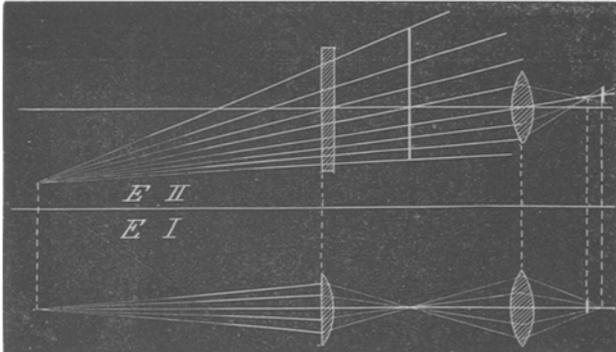
- b) Der leuchtende Punkt liege zwar nicht auf der optischen Axe, aber im axialen Hauptschnitt.

Die Orientirung der Cylinder- und sphärischen Linse sei die gleiche wie früher. — Es muss bemerkt werden, dass, während eine einfache Cylinderlinse Einen axialen, aber unendlich viele einander parallele maximale Hauptschnitte besitzt, eine Combination wie die unserige auch nur Einen maximalen Hauptschnitt hat, nämlich denjenigen, welcher die optische Axe enthält. Der Leuchtpunkt liege

also im axialen Hauptschnitte und auf einer Seite des maximalen, in einer Entfernung, die der früher gestellten Bedingung bezüglich des Ortes Genüge thut, an dem das Cylinderlinsenbild zu liegen hat.

In Ebene II (vergl. Fig. 6) ist die Projection des Leuchtpunktes Objectpunkt für die sphärische Linse, da ja die Strahlen dieser Projection in der Cylinderlinse keine Brechung erleiden; sie werden in Einem Punkte wieder vereinigt, der nach bekannten Regeln auf der Nebenaxe, an der anderen Seite der optischen Axe zu suchen ist

Fig. 6.



(Lothpunkte auf der Axe in conjugirten Entfernungen, Lothe selbst diesen proportional).

In Ebene I ist die auf der optischen Axe gelegene Projection der ursprünglichen Brennlinie Objectpunkt für die sphärische Linse. — In der conjugirten Distanz, die grösser ist als die entsprechende in II (nämlich des Lothpunktes auf der optischen Axe), werden die Strahlen dieser Projection wieder in Einem Punkte gesammelt.

Die Vereinigungspunkte in I und II können nicht Projectionen ein und desselben Punktes im Raume sein, sie sind wiederum ein jeder die Projection einer auf Ebene I resp. II senkrechten Geraden.

Sämmtliche Strahlen des leuchtenden Punktes passiren nach ihrem Austritte aus dem System zwei einander im Raume rechtwinkelig kreuzende Gerade, wovon die dem System nähere zur Cylinderaxe rechtwinkelig, die entferntere ihr parallel ist. Beide Brennlinien liegen auf der anderen Seite des maximalen Hauptschnittes als der leuchtende Punkt und ihr kürzester Abstand, die Brennstrecke, liegt im axialen Hauptschnitte auf demjenigen Strahle, der sowohl die Cylinder- als die sphärische Linse ungebrochen passirt.

Nehmen wir an, dass in Folge der auf Seite 190 genannten günstigen Bedingungen Brennlinien und Brennstrecke verschwindend klein seien, dann wird das Bild eines im axialen Hauptschnitte gelegenen Punktes beinahe wieder ein Punkt sein und bezüglich seiner Lage sich so verhalten, als ob es nur durch die sphärische Linse, ohne Mitwirkung der Cylinderlinse, erzeugt wäre.

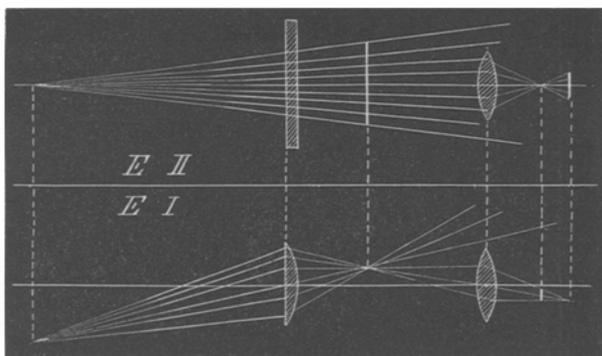
Von einer Reihe von Objectpunkten, die wir uns im axialen Hauptschnitte auf einer der Cylinderaxe parallelen, also zur optischen Axe senkrechten Geraden gelegen denken, werden die ersten Brennlinien derart angeordnet sein, dass die Aufeinanderfolge ihrer Schnittpunkte mit dem axialen Hauptschnitte gleichfalls auf einer zur Cylinderaxe parallelen Geraden gelegen ist; der Inbegriff aller dieser Brennlinien ist also ein zur Objectlinie paralleles schmales Band. — Die zweiten Brennlinien derselben Objectpunkte kommen alle, indem sie sich in ihrer Längsrichtung theilweise decken, auf eine gerade Linie zu liegen, die auch der Cylinderaxe parallel ist. — Ein in der Ebene der ersten Brennlinien aufgestellter Schirm wird nach dem Gesagten ein verwaschenes Bild der Objectlinie auffangen, ein in der Ebene der zweiten Brennlinien befindliches ein scharfes; befindet sich an Stelle der sphärischen Linse ein für die Objectlinie eingestelltes Auge, dann ist die Retina gleichwerthig dem ersten

Schirme, eine der Cylinderaxe parallele Objectlinie erscheint verschwommen; wird das Auge für das näher gelegene Cylinderlinsenbild accommodirt, dann ist die Retina gleichwerthig jenem zweiten Schirme, die Linie erscheint scharf. — Es ist hiermit eine in Versuch I erwähnte Erscheinung erklärt.

c. Der leuchtende Punkt liege zwar nicht auf der optischen Axe, aber im maximalen Hauptschnitte.

In Ebene I liegt die Projection des Objectpunktes (vergl. Fig. 7) seitlich von der optischen Axe (jener Linie,

Fig. 7.



welche die Projection des axialen Hauptschnittes ist); die Strahlen werden vorerst durch die Cylinderlinse wieder in Einem Punkte vereinigt (Projection der ursprünglichen Brennlinie), der auf der anderen Seite der optischen Axe liegt als der Objectpunkt. — Nach der Durchkreuzung gelangt ein Theil der Strahlen in die sphärische Linse und wird hinter derselben noch einmal in einem Punkte gesammelt, welcher wiederum auf der anderen Seite der optischen Axe als der secundäre Objectpunkt, also auf derselben Seite liegt als der leuchtende Punkt.

In Ebene II liegt die Projection des Objectpunktes

auf der optischen Axe (Projection des maximalen Hauptschnittes). — Die Strahlen passiren die Cylinderlinse, ohne eine Brechung zu erleiden und werden durch die sphärische Linse wieder in Einem Punkte der Axe (maximaler Hauptschnitt) vereinigt, der an die sphärische Linse näher heranliegt, als der entsprechende Punkt in Ebene II (nämlich der Lothpunkt des Vereinigungspunktes auf der optischen Axe).

Sämmtliche Strahlen des leuchtenden Punktes passiren nach ihrem Austritte aus dem System zwei einander rechtwinklig kreuzende Gerade, wovon die erste zur Richtung der Cylinderaxe senkrecht, die zweite parallel ist. — Beide Brennlinien liegen auf derselben Seite des axialen Hauptschnittes als der leuchtende Punkt; ihr kürzester Abstand — die Brennweite liegt im maximalen Hauptschnitte.

Wenn wiederum in Folge der mehrgenannten günstigen Umständen Brennlinien und Brennweite verschwindend klein werden, dann ist das Bild eines im maximalen Hauptschnitte befindlichen Leuchtpunktes ein gleichfalls im maximalen Hauptschnitte, auf derselben Seite der optischen Axe gelegener Punkt. Der Lothpunkt des Bildes auf der optischen Axe befindet sich in gleicher Entfernung von der sphärischen Linse, als ob die Cylinderlinse nicht vorhanden wäre; die Lage des Bildes auf dem Lothe selbst kann nach Umständen eine sehr verschiedene sein. (Siehe weiter unten.)

Von einer Reihe von Objectpunkten, die wir uns im maximalen Hauptschnitt auf einer zur Cylinderaxe senkrechten Geraden gelegen denken, werden die ersten Brennlinien einander theilweise deckend auf einer ähnlichen Geraden zu liegen kommen; die zweiten Brennlinien werden in ihrer Gesamtheit ein dieser Linie paralleles schmales Band formen. — Auf einem gegen die optische Axe senkrechten in der Ebene der ersten Brennlinie be-

findlichen Schirme (oder der Retina eines für die Objectlinie eingestellten Auges) entsteht ein scharfes Bild der Objectlinie; auf einem in der Ebene der zweiten Brennpunkten befindlichen Schirme (oder der Retina eines Auges, welche für das näher gelegene Cylinderlinsenbild accommodirt ist) entsteht ein verschwommenes Bild.

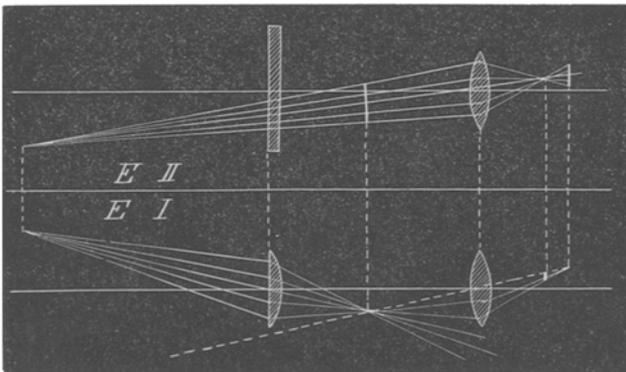
In dieser Beziehung verhält sich also das Bild einer zur Cylinderaxe senkrechten (im maximalen Hauptschnitte gelegenen) Linie gerade umgekehrt als das einer zur Cylinderaxe parallelen (im axialen Hauptschnitte situirten). — Aus dieser Verschiedenheit erklärt sich gleichfalls eine in Versuch I erwähnte Erscheinung.

d. Der leuchtende Punkt liege weder im axialen noch im maximalen Durchschnitte.

In Ebene I sind die Verhältnisse ganz die gleichen wie im vorigen Falle; der Vereinigungspunkt liegt also auf derselben Seite der optischen Axe (Projection des axialen Hauptschnittes) als der Objectpunkt (vergl. Fig. 8).

In Ebene II liegt die Projection des leuchtenden Punktes gleichfalls auf einer Seite der optischen Axe

Fig. 8.



(Projection des maximalen Hauptschnittes); die Strahlen passiren die Cylinderlinse ohne Brechung zu erleiden und werden jenseits der sphärischen Linse in einem Punkte wieder gesammelt, der auf der anderen Seite der optischen Axe liegt.

Diese zwei Vereinigungspunkte haben ihre Lothpunkte auf der optischen Axe in verschiedener Entfernung von der sphärischen Linse und zwar liegt der in II näher an dieselbe als der in I. — Die Vereinigungspunkte sind wiederum Projectionen der bekannten Brennlinien. — Die Lothpunkte sind wie in den früheren Fällen den Lothpunkten von Objectpunkt respective Cylinderlinsenbild (in Bezug auf die sphärische Linse) conjugirt.

Wenn wiederum Brennlinien und Brennstrecke auf ein Minimum reducirt sind, dann ist das Bild eines leuchtenden Punktes, der in keinem von beiden Hauptschnitten liegt, wieder nahezu ein Punkt; es liegt ebenso weit vom maximalen Hauptschnitte entfernt und auf derjenigen Seite desselben, als es durch die sphärische Linie allein bedingt wird; es liegt aber auf derselben Seite des axialen Hauptschnittes, wie der Objectpunkt und in einer Entfernung vom axialen Hauptschnitt, die von der Entfernung des Cylinderlinsenbildes von diesem abhängig ist.

Bild einer zur optischen Axe senkrechten Object-Ebene.

Aus der bisherigen Darstellung ist klar geworden, dass sämtliche Strahlen eines wo immer gelegenen Punktes nach ihrem Austritte aus unserer Linsencombination zwei einander im Raume rechtwinkelig kreuzende Gerade — die Brennlinien passiren müssen. — Die Entfernung der ersten Brennlinie von der Hauptebene der sphärischen Linse ist der Entfernung des Objectpunktes von dieser Ebene

conjugirt; und die Entfernung der zweiten Brennlinie von der Hauptebene ist conjugirt der Entfernung des Cylinderlinsenbildes von eben derselben Ebene. — Daraus folgt, dass die ersten Brennlinien aller jener Objectpunkte, welche in einer zur optischen Axe senkrechten Ebene gelegen sind, gleichfalls in einer zur optischen Axe senkrechten Ebene liegen; ebenso die zweiten Brennlinien. Bei dem Eintritte der mehrfach erwähnten günstigen Bedingungen werden die Strahlen je eines Objectpunktes wieder nahezu in je einem Bildpunkte vereinigt und es entsteht somit von einer als Object gedachten, zur optischen Axe senkrechten Ebene ein ebenes gleichfalls zur optischen Axe senkrecht Bild.

Wie aus den früheren Erörterungen hervorgeht, hat ein derartiges Bild bezüglich der Lage der Bildpunkte folgende Eigenthümlichkeiten: Jeder Bildpunkt liegt auf derselben Seite des axialen und auf der entgegengesetzten Seite des maximalen Hauptschnittes als der entsprechende Objectpunkt.

Die einzelnen Bildpunkte in jeder zur Cylinderaxe senkrechten Linie folgen aufeinander in derselben Reihenfolge wie die Objectpunkte; in jeder zur Cylinderaxe parallelen Linie folgen sie aufeinander in umgekehrter Reihenfolge als die Objectpunkte. — Dieses reelle Bild ist in einer Richtung ein aufrechtes in der darauf senkrechten Richtung ein umgekehrtes; es kann daher mit dem Objecte nicht zur Deckung gebracht werden, selbst wenn man es jenem an Grösse und Proportionen vollkommen gleich macht, was sehr wohl möglich ist.

Ueber die Richtung, in welcher das Bild ein aufrechtes, in welcher es ein umgekehrtes zu sein hat, entscheidet die Stellung des axialen Hauptschnittes, somit der Cylinderaxe zum Objecte: — die Stellung des Bildes hängt von der Stellung der Cylinderaxe ab. — Da während einer vollen Rotation der Cylinderlinse um ihre optische

Axe die Cylinderaxe zweimal vertical und zweimal horizontal steht, so erklärt sich daraus, dass das (mit Hülfe von noch einer sphärischen Linse erzeugte) Bild während derselben Zeit in verticaler Richtung zweimal aufrecht und zweimal verkehrt steht, also zwei volle Umdrehungen macht. Auch bedarf es keiner weiteren Erklärung, dass verticale Linien horizontal und horizontale vertical erscheinen, wenn die Cylinderaxe gegen sie eine Neigung von 45° hat. (Dies geschieht auch viermal während einer Linsen-umdrehung).

Es ist hiermit das spiegelbildartige Verhalten und die Drehungsgeschwindigkeit der in Versuch I und IV beschriebenen Bilder erklärt. — Hierzu muss nur noch folgendes bemerkt werden: Wenn, wie in diesen Versuchen, die brechenden Medien an Stelle der in unserer Darstellung angenommenen sphärischen Linse treten, dann gilt natürlich von den Retinalbildern alles bisher Gesagte. — Dadurch aber, dass die Retinalbilder nach aussen projicirt werden, entsteht eine kleine Aenderung: Das nach aussen projicirte Bild eines in derselben Weise durch eine Convex-Cylinderlinse gesehenen Objectes ist in der Richtung der Cylinderaxe ein aufrechtes in darauf senkrechter Richtung ein umgekehrtes.

Ueber die Proportionen des Bildes.

Bei Beschreibung des Versuches II ist erwähnt worden, dass man durch Verschiebung der Cylinderlinse längs der optischen Axe die Dimensionen des Bildes derart ändern kann, dass sie einmal in richtiger Proportion, das andere Mal in verschiedener Verzerrung erscheinen. — Der Grund hiervon ist leicht einzusehen. — Ich habe nachgewiesen, dass das Bild unserer Combination in der Richtung der Cylinderaxe eine solche Grösse hat, als ob es nur durch die sphärische Linse erzeugt wäre; die Bildgrösse in dieser

Dimension ist also einfach aus Objectgrösse, Objectentfernung und Brennweite der sphärischen Linse zu berechnen.

In der auf die Cylinderaxe senkrechten Richtung ist die Bildgrösse von anderen Umständen abhängig, indem hier das Cylinderlinsenbild als Object für die sphärische Linse zu betrachten ist; der Abstand zweier Bildpunkte in dieser Richtung berechnet sich aus: dem Abstände der ihnen im Cylinderlinsenbilde entsprechenden Brennlinien, der Entfernung des Cylinderlinsenbildes von der sphärischen Linse und aus deren Brennweite.

Zwei Brennlinien können nun einen derartigen Abstand von einander haben, dass sie vom optischen Centrum der sphärischen Linse aus gesehen um einen ebenso grossen Winkel von einander entfernt sind, als die ihnen entsprechenden Objectpunkte; in diesem Falle sind alle Dimensionen des Bildes denen des Objectes proportionirt. Eine einfache Ableitung ergibt, dass die verschiedenen in Betracht kommenden Grössen folgende Beziehung haben müssen: $\frac{D}{2 F_c} = \frac{E}{E - D}$, worin E die Entfernung des Objectes vom Centrum der sphärischen Linse, D den Abstand der optischen Centra von sphärischer und Cylinderlinse und F_c die Hauptbrennweite der Cylinderlinse bedeutet.

Wenn E so gross ist, dass D dagegen nicht wesentlich in Betracht kommt, wie beim Versuche IV, dann muss, um ein unverzerrtes Bild zu erhalten, D ungefähr $= 2 F_c$ gemacht werden.

Grössere Annäherung der Cylinderlinse an die sphärische vergrössert das Bild in der Richtung quer auf die Cylinderaxe, grössere Entfernung der Cylinderlinse verschmälert es in derselben Richtung.

Es ist wohl hier am Platze die Erscheinung des Parallelwerdens zweier gekreuzter Linien in Versuch V zu erklären. — Ich kann mich kurz dahin fassen, dass dies ein Vergrößerungsphänomen ist; bei diesem Versuche bleibt die Dimension in der Richtung der Cylinderaxe ungerändert, die darauf senkrechte aber erscheint ungeheuer vergrößert; hierdurch erscheinen die kleinen Abschnitte der Linien, die gleichzeitig sichtbar sind, in gleicher und daher in paralleler Richtung in die Länge gezogen.

Ueber stigmatische Cylinderlinsenbilder.

Die von einem leuchtenden Punkte ausgehenden Strahlen haben nach dem Durchgange durch eine Convexcylinderlinse einen derartigen Verlauf, dass sie erstens von der, der Cylinderaxe parallelen, reellen Brennlinie ausgehend gedacht werden können, zweitens aber auch aufgefasst werden können als von der „supplementären Brennlinie“ kommend, die rechtwinklig zur Cylinderaxe durch den leuchtenden Punkt selbst hindurchgeht. — Wenn wir die in unserer Darstellung bisher beobachtete Methode, ein Strahlenbüschel zu zerlegen, beibehalten, so hat folgende Anschauung Platz:

Von den verschiedenen Punkten der Brennlinie gehen Strahlenfächer aus, deren Ebenen sämmtlich zum axialen Hauptschnitte senkrecht stehen, und die alle von der supplementären Brennlinie aus divergiren. — Gemäss dieser Ausstrahlung aus zwei verschiedenen Orten haben die Strahlen nach ihrer Brechung in einer sphärischen Linse zwei differente Vereinigungsorte — die erste und die zweite Brennlinie. — Je näher jene zwei Orte an einander liegen, desto mehr müssen auch die Brennlinien an einander rücken und in demselben Maasse muss das Bild an Stigmatismus gewinnen.

Es gibt thatsächlich ein Mittel, die reelle und die supplementäre Brennlinie einander näher zu bringen.

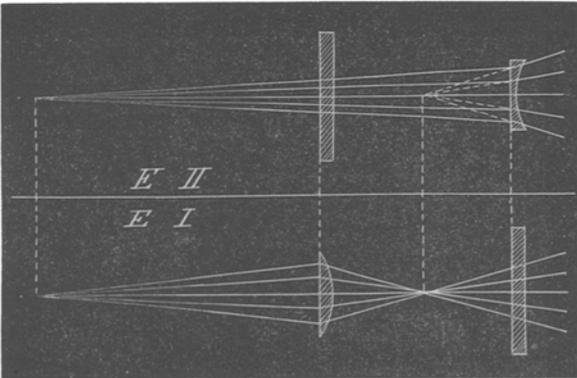
Wenn man mit der Convexcylinderlinse eine Concavcylinderlinse derart vereinigt, dass ihre Axen sich rechtwinklig kreuzen, so wird der Ort der reellen Brennlinie dadurch nicht verändert und auch die Divergenz der Strahlen jedes einzelnen Fächers erleidet keine Veränderung; die Strahlenfächer selbst aber convergiren rückwärts nun nicht mehr nach der „supplementären Brennlinie“, sondern nach einer näher gelegenen virtuellen Brennlinie, deren Entfernung durch die Brennweite der Concavcylinderlinse bestimmt ist. — Es können auf diese Weise reelle und virtuelle Brennlinie einander sehr nahe gebracht und das Bild, ganz abgesehen von den früher erwähnten günstigen Bedingungen, beinahe vollkommen scharf gemacht werden. — Es ist dies aber auch mit theoretischer Vollkommenheit möglich.

Wenn man hinter der Convexcylinderlinse eine Concavcylinderlinse derart anbringt, dass die Cylinderaxen beider sich rechtwinklig kreuzen und die Linsen um die Summe ihrer Brennweite von einander entfernt sind (vergl. Fig. 9 auf folgender Seite), dann durchsetzen die Strahlen eines fernen Lichtpunktes in folgender Weise das Linsensystem:

Die verschiedenen Strahlenfächer haben an eben demselben Orte ihre virtuelle Vereinigung, an dem sich die Strahlen jedes einzelnen Fächers realiter durchkreuzen. Nach ihrem Austritte aus einer solchen Combination haben alle Strahlen eines Punktes wieder eine solche Richtung, als wenn sie von einem Punkte kämen, der in der gemeinsamen Brennebene beider Cylinderlinsen liegt. — Jeder Punkt eines derartigen Bildes hat die bemerkenswerthe Eigenthümlichkeit, dass er für eine Anzahl von Strahlen (nämlich die im maximalen Hauptschnitt der Convexlinse gelegenen) reeller Bildpunkt, für eine andere Anzahl von Strahlen (die im axialen Hauptschnitte der Convexlinse gelegenen) virtueller Bildpunkt, für alle anderen Strahlen beides theil-

weise ist. — Strenge genommen gilt dies nur für sehr entfernte Objectpunkte, doch praktisch hat es für alle Geltung, deren Entfernung nicht so gering ist, dass die Distanz der Linsen von einander dagegen wesentlich in Betracht kommt.

Fig. 9.



Was nun die Dimensionen des Bildes betrifft, so sind dieselben denen des Objectes proportionirt, wenn folgende Beziehung besteht:

$$g = \frac{Ef + f^2}{E - f} \text{ *)},$$

worin E die Entfernung des Objectes von der Convexcylinderlinse, f die Hauptbrennweite derselben, g die der Concavcylinderlinse bedeutet. — Diese Formel besagt, dass für jede Object-Entfernung und jede Convexcylinderlinse von bestimmter Brechkraft eine Concavcylinderlinse von bestimmter Brechkraft (in angegebener Weise situirt)

*) Diese Formel erhält man, indem man die Bildgrösse für Convex- und Concavlinse aus den entsprechenden Entfernungen, jede für sich berechnet und dann einander gleichsetzt.

erforderlich ist, um den Bildern alle Verzerrung zu benehmen. — Ferner ist daraus ersichtlich, dass bei einer gegen die Brennweite der Linsen vergleichsweise grossen Object-Entfernung das gewünschte Resultat dann eintritt, wenn Convex- und Concavcylinderlinse gleiche Brennweiten haben. Die Bedingungen für vollkommene Schärfe und beinahe vollkommene Proportionalität der Bilder sind also die gleichen.

Ich habe die eben beschriebene Linsencombination thatsächlich anfertigen lassen*) und als Ocular noch eine schwache sphärische Linse zugefügt, da das Bild dem Auge sonst zu nahe liegt, um deutlich sichtbar zu sein.

Das Instrument liefert vollkommen scharfe, unverzerrte Bilder, welche übrigens alle Eigenschaften der in Versuch IV erwähnten besitzen.

Zu bemerken wäre noch, dass sich der Astigmatismus und die Verzerrung der Cylinderlinsenbilder noch in anderer Weise corrigiren lassen: nämlich durch eine der ersten Convexcylinderlinse gleich starke und von jener um die doppelte Brennweite entfernte gleichfalls convexe Cylinderlinse mit parallel gestellter Axe. — Im Wesen ist diese Correction mit der früher beschriebenen identisch; denn eine Convexcylinderlinse kann ersetzt werden durch die Combination von einer Concavcylinder- und einer sphärischen Linse, welche beide der ersteren gleiche Brennweite haben.

Der Umstand, dass ein Linsensystem von der zweiten Art stigmatische Bilder liefert, lässt auch eine von der

*) Bei dem Mechaniker D. Kageenaar, Utrecht, Physiologisches Institut, sind solche Linsencombinationen in einfacher Ausstattung zu haben.

unserigen etwas verschiedene Betrachtung und Erklärung zu.

Es sei mir noch gestattet, zu bemerken, dass ich den Herren Professor Leber und Dr. Nordmann aus Helsingfors für treffende Bemerkungen in dieser Sache sehr verpflichtet bin.
