Ueber einige Gattungen elliptischer Integrale.

(Von Herrn *O. Röthig.*)

Von den Integralen von der Form:

$$(1.)\quad \int \frac{f(x)\,dx}{\{a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3\}^{\frac{m}{3}}},$$

$m=1$ oder 2, $f(x)$ rationale Function, haben sowohl *Legendre* im 27sten, 28sten und besonders im 32sten Capt. seines „traité des fonctions elliptiques" als auch die Herren *Minding* und *Richelot* im 9ten Bande dieses Journals pag. 295 und 407 verschiedene specielle Fälle behandelt. Dennoch scheint bis jetzt ein allgemeiner Satz noch nicht bemerkt worden zu sein, der sich folgendermafsen aussprechen läfst:

Die Integrale von der Form (1.) *lassen sich auf elliptische Integrale bringen, deren Modul* $\frac{1}{2}\sqrt{2\pm\sqrt{3}}$ *ist.*

Ferner behandelt *Legendre* im 32sten Capt. des genannten Werkes specielle Fälle des folgenden allgemeinen Integrals

$$(2.)\quad \int \frac{f(x)\,dx}{\{a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4\}^{\frac{m}{4}}},$$

$m=1$ oder 3, $f(x)$ rationale Function; und giebt dort eine Substitution an, durch welche auch leicht folgender allgemeine Satz bewiesen werden kann, den er nicht anführt:

Die Integrale von der Form (2.) *lassen sich auf elliptische Integrale bringen, deren Modul* $\sqrt{\frac{1}{2}}$ *ist.*

Diese beiden Sätze sollen im Folgenden bewiesen werden und zwar dadurch, dafs (1.) zurückgeführt wird auf das Integral

$$(3.)\quad \int \frac{f(u)\,du}{\sqrt{\varepsilon+u^3}},\qquad \varepsilon=\pm 1,$$

und (2.) auf das folgende

$$(4.)\quad \int \frac{f(u^2)\,du}{\sqrt{1+u^4}},$$

von denen dann leicht zu zeigen ist, dafs sie durch die oben genannten elliptischen Integrale ausgedrückt werden. Um zunächst (1.) auf (3.) zurückzuführen, sei α die reelle Wurzel der Gleichung

$$P = a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0,$$

und es sei

$$P = a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = a_3 (x-\alpha)(b + b_1 x + x^2).$$

Setzt man nun:

$$b + b_1 x + x^2 = (x-\alpha)^2 z^3,$$

so wird:

$$x = \frac{-(b_1 + 2\alpha z^3) \pm \sqrt{(b_1^2 - 4b) + 4(b + b_1\alpha + \alpha^2) z^3}}{2(1-z^3)}, \quad P^{\frac{m}{3}} = a_3^{\frac{m}{3}} (x-\alpha)^m z^m,$$

$$dx = -\tfrac{3}{2} \frac{(b_1 + 2\alpha) z^2 dz}{(1-z^3)^2} \pm \tfrac{3}{2} \frac{b_1^2 - 2(b - b_1\alpha - \alpha^2) + 2(b + b_1\alpha + \alpha^2) z^3}{(1-z^3)^2 \sqrt{(b_1^2 - 4b) + 4(b + b_1\alpha + \alpha^2) z^3}} z^2 dz.$$

Bezeichnet man noch $\sqrt{(b_1^2 - 4b) + 4(b + b_1\alpha + \alpha^2) z^3}$ mit R, so erhält $\frac{fx}{(x-\alpha)^m z^m}$ nach ausgeführter Substitution die Form $\frac{\varphi_0(z) + R.\psi_0(z)}{\varphi_1(z) + R.\psi_1(z)}$, welche durch Multiplication mit $\varphi_1(z) - R.\psi_1(z)$ sofort in die folgende übergeht:

$$\varphi(z) + R.\psi(z),$$

in welcher $\varphi(z)$ und $\psi(z)$ bekannte rationale Functionen bedeuten.

Führt man jetzt die so eben entwickelten Ausdrücke in (1.) ein, so nimmt dies Integral die folgende Gestalt an:

$$\int f_1(z) dz + \int \frac{f_2(z) dz}{R},$$

wo f_1 und f_2 gegebene rationale Functionen sind. Da das erste dieser beiden Integrale durch bekannte Functionen integrirt werden kann, so bleibt nur noch das zweite zur weiteren Behandlung übrig. Dieses hat aber die Form:

$$(5.) \quad \int \frac{f_2(z) dz}{\sqrt{(b_1^2 - 4b) + 4(b + b_1\alpha + \alpha^2) z^3}}.$$

Sei nun: $b_1^2 - 4b = \varepsilon A$; $b + b_1\alpha + \alpha^2 = \varepsilon' B$, so dafs A und B die absoluten Werthe der Coefficienten unter der Wurzel, ε und ε' ± 1 bedeuten. So geht dann (5.) über in:

$$\int \frac{f_2(z) dz}{\sqrt{\varepsilon A + 4\varepsilon' B z^3}},$$

welches Integral durch die Substitution

$$z = \varepsilon' u \sqrt[3]{\frac{A}{4B}}$$

die folgende Form erhält:

$$\int \frac{f(u)\,du}{\sqrt{\varepsilon + u^3}},$$

wodurch also in der That (1.) auf das Integral (3.) zurückgeführt ist. Um nun zu zeigen, dafs (3.) durch elliptische Integrale mit dem Modul $\frac{1}{2}\sqrt{2 \pm \sqrt{3}}$ ausgedrückt werden kann, setze man

$$u = y^2 - \varepsilon,$$

wodurch (3.) übergeht in

$$(6.) \quad \int \frac{f(y)\,dy}{\sqrt{3 - 3\varepsilon y^2 + y^4}}.$$

Nun sei:

$$y^2 = \sqrt{3}\,\frac{1 - \sqrt{1 - v^2}}{1 + \sqrt{1 - v^2}};$$

es folgt dann

$$y = \sqrt[4]{3}\,\frac{1 - \sqrt{1 - v^2}}{v}$$

und, wenn $\frac{1}{2}\sqrt{2 + \varepsilon\sqrt{3}} = c$ gesetzt wird,

$$\sqrt{3 - 3\varepsilon y^2 + y^4} = 2\sqrt{3}\,\frac{\sqrt{1 - c^2 v^2}}{1 + \sqrt{1 - v^2}}, \qquad dy = \sqrt[4]{3}\,\frac{dv}{\sqrt{1 - v^2}\,(1 + \sqrt{1 - v^2})}.$$

Da aber aus diesen Werthen leicht geschlossen wird, dafs:

$$\frac{dy}{\sqrt{3 - 3\varepsilon y^2 + y^4}} = \frac{1}{2\sqrt[4]{3}}\,\frac{dv}{\sqrt{(1 - v^2)(1 - c^2 v^2)}}, \quad c = \frac{1}{2}\sqrt{2 + \varepsilon\sqrt{3}},$$

so erhellt, dafs derjenige Theil von (6.), welcher nach Einführung der Substitution in (6.) durch bekannte Functionen nicht integrirt werden kann, die Form annehmen mufs:

$$\int \frac{f(v)\,dv}{\sqrt{(1 - v^2)(1 - c^2 v^2)}}; \quad c = \frac{1}{2}\sqrt{2 + \varepsilon\sqrt{3}}.$$

Hierdurch ist der erste Satz bewiesen. Es mag noch bemerkt werden, dafs die f in den Integralen (3.), (6.) und dem letzten natürlich weder untereinander noch mit dem f in (1.) identisch sind.

Zum Beweise des zweiten Satzes, also um zunächst (2.) auf (4.) zurückzuführen, schaffe man durch die bekannte Substitution $x = \frac{\alpha + \beta z}{\gamma + z}$ die ungeraden Potenzen aus dem Ausdruck vierter Ordnung unter der Wurzel im Integrale (2.) fort und gebe demselben die bekannte Form:

$$(7.)\quad \int \frac{f(x)\,dx}{[(1-x^2)(1-k^2x^2)]^{\frac{m}{4}}}.$$

Da ferner $f(x)$ die Form erhalten kann:

$$\varphi(x^2)+x\,\psi(x^2),$$

was bekannt ist, überdies oben gezeigt wurde, so zerlegt man (7.) leicht in die folgenden beiden Integrale

$$(\text{I.})\quad \int \frac{\varphi(x^2)\,dx}{[(1-x^2)(1-k^2x^2)]^{\frac{m}{4}}} \quad \text{und} \quad (\text{II.})\quad \int \frac{x\,\psi(x^2)\,dx}{[(1-x^2)(1-k^2x^2)]^{\frac{m}{4}}},$$

deren jedes auf (4.) zurückgeführt werden soll.

Zur Reduction von (I.) setze man wie ***Legendre*** im 32[sten] Capt. des „traité des fonctions elliptiques"

$$(1-x^2)(1-k^2x^2) = x^4z^4,$$

so wird

$$x^2 = \frac{(1+k^2)\pm\sqrt{(1-k^2)^2+4z^4}}{2(k^2-z^4)};\quad x\,dx = \frac{(1+k^4)\pm(1+k^2)\sqrt{(1-k^2)^2+4z^4}+2z^4}{(k^2-z^4)^2\sqrt{(1-k^2)^2+4z^4}}\,z^3\,dz,$$

und daher, wenn $P=(1-x^2)(1-k^2x^2)$ gesetzt wird,

$$\frac{dx}{P^{\frac{m}{4}}} = \frac{(1+k^4)\pm(1+k^2)\sqrt{(1-k^2)^2+4z^4}+2z^4}{x^{m+1}(k^2-z^4)^2\sqrt{(1-k^2)^2+4z^4}}\,z^{3-m}\,dz.$$

Da nun zufolge der Voraussetzung m immer eine der Zahlen 1 oder 3 bedeutet, x^{m+1} also immer gleich x^2 oder x^4 wird, und in x^2 nur $\sqrt{(1-k^2)^2+4z^4}$ eingeht, so folgt, dafs in dem Ausdrucke $\frac{\varphi(x^2)\,dx}{P^{\frac{m}{4}}}$ alles auf rationale Weise durch $\sqrt{(1-k^2)^2+4z^4}$ ausgedrückt ist. Hieraus wird klar, dafs Integral (I.) nach Abscheidung des durch bekannte Functionen integrabeln Theiles durch die angewandte Substitution auf die Form

$$\int \frac{f(z^2)\,dz}{\sqrt{(1-k^2)^2+4z^4}}$$

gebracht ist, in welcher f defswegen eine Function des Argumentes z^2 bedeutet, weil durch den Werth von x sowohl, wie auch sonst, z nur in geraden Potenzen eingeführt wird. Dieses Integral nun geht durch die neue Substitution

$$4z^4 = (1-k^2)^2u^4$$

sofort in das folgende über:

$$\int \frac{\varphi(u^2)\,du}{\sqrt{1+u^4}},$$

welches mit dem Integrale (4.) identisch ist.

Was Integral (II.) betrifft, so könnte der behauptete Satz für dasselbe leicht auf andere Weise bewiesen werden, als es hier geschehen soll. Es ist jedoch die folgende Methode wegen der Uebereinstimmung mit der bei (I.) verfolgten vorgezogen worden.

Man setze zur Reduction von (II.) auf die Form (4.)

$$(1-x^2)(1-k^2x^2) = z^4,$$

so folgt:

$$x^2 = \frac{(1+k^2)\pm\sqrt{(1-k^2)^2+4k^2z^4}}{2k^2};$$

also

$$\frac{x\,dx}{p^{\frac{m}{4}}} = \frac{z^{3-m}\,dz}{\sqrt{(1-k^2)^2+4k^2z^4}}.$$

Wiederholt man hier die bei der Behandlung von (I.) gemachten Schlüsse, so erhellt, dafs das Integral (II.) auf die Form:

$$\int \frac{f(z^2)\,dz}{\sqrt{(1-k^2)^2+4k^2z^4}}$$

gebracht wird, welche durch die Substitution

$$4k^2z^4 = (1-k^2)^2u^4$$

ebenfalls in (4.) übergeht.

Es bleibt daher nur noch übrig zu zeigen, dafs Integral (4.) durch elliptische Integrale mit dem Modul $\sqrt{\frac{1}{2}}$ ausgedrückt werden kann.

Hierzu setze man:

$$u^2 = \frac{2y^2}{1-y^4},$$

so wird leicht

$$\frac{\varphi(u^2)\,du}{\sqrt{1+u^4}} = \frac{\varphi(y^2)\,dy}{\sqrt{1-y^4}}.$$

Es ist also (4.) auf

$$\int \frac{\varphi(y^2)\,dy}{\sqrt{1-y^4}}$$

gebracht, welches Integral durch die Substitution

$$y^2 = 1-v^2$$

in die Form

$$\int \frac{\varphi(v^2)\,dv}{\sqrt{(1-v^2)(1-\frac{1}{2}v^2)}}$$

übergeht, wodurch der Satz bewiesen ist.

Die Constanten, welche durch die hier angewandten Substitutionen als Factoren vor die Integrale treten müfsten, sind wegen der willkürlichen Function unter dem Integralzeichen fortgelassen worden.

Aus den vorangehenden Betrachtungen erhellt noch leicht, dafs *für die Integrale von der Form:*

$$\int \frac{f(x)\,dx}{[a+a_1x+a_2x^2]^{\frac{m}{3}}}, \qquad m=1 \text{ oder } 2,$$

derselbe Satz gilt, wie für die Integrale (1.); und dafs *für die Integrale von der Form:*

$$\int \frac{f(x)\,dx}{[a+a_1x+a_2x^2]^{\frac{m}{4}}}, \qquad m=1 \text{ oder } 3,$$

ebenfalls *derselbe Satz gilt, wie für die Integrale* (2.).

Ferner bemerke man, dafs die Substitution, welche die Integrale von der Form (I.) sofort auf elliptische Integrale mit dem Modul $\sqrt{\frac{1}{2}}$ zurückführt, die einfache Form annimmt:

$$1-v^2 = \pm\sqrt{\frac{1-x^2}{1-k^2x^2}} \quad \text{oder} \quad 1-v^2 = \pm\sqrt{\frac{1-k^2x^2}{1-x^2}},$$

und dafs ebenso die Substitution

$$1-v^2 = \pm k\sqrt{\frac{1-x^2}{1-k^2x^2}} \quad \text{oder} \quad 1-v^2 = \pm\frac{1}{k}\sqrt{\frac{1-k^2x^2}{1-x^2}}$$

dasselbe sofort für die Integrale (II.) leistet.

Schliefslich mögen hier noch einige specielle Fälle der Integrale (I.) und (II.) angeführt werden, die sich durch bekannte Functionen integriren lassen. Bezeichnet man nämlich mit ϑu den Ausdruck $[(1-u^2)(1-k^2u^2)]^{\frac{1}{4}}$, so gelten die folgenden Gleichungen:

$$\int \frac{2-(1+k^2)x^2}{1-(1+k^2)x^2}\cdot\frac{dx}{\vartheta x} = \frac{1}{2\sqrt{k}}\log\frac{x\sqrt{k}+\vartheta x}{x\sqrt{k}-\vartheta x} - \frac{1}{\sqrt{k}}\operatorname{arctg}\frac{\vartheta x}{x\sqrt{k}}$$

$$\int \frac{1}{\alpha^2-x^2}\cdot\frac{2-(1+k^2)x^2}{\alpha^2(1-x^2)+x^2(1-k^2\alpha^2)}\cdot\frac{dx}{\vartheta x} = \frac{1}{2\alpha^3\vartheta\alpha}\log\frac{x\vartheta\alpha+\alpha\vartheta x}{x\vartheta\alpha-\alpha\vartheta x} - \frac{1}{\alpha^3\vartheta\alpha}\operatorname{arctg}\frac{\alpha\vartheta x}{x\vartheta\alpha}$$

$$\int \frac{2-(1+k^2)x^2}{1-(1+k^2)x^2}\cdot\frac{x^2dx}{(\vartheta x)^3} = \frac{1}{2k\sqrt{k}}\log\frac{x\sqrt{k}+\vartheta x}{x\sqrt{k}-\vartheta x} + \frac{1}{k\sqrt{k}}\operatorname{arctg}\frac{\vartheta x}{x\sqrt{k}}$$

$$\int \frac{1}{\alpha^2-x^2}\cdot\frac{2-(1+k^2)x^2}{\alpha^2(1-x^2)+x^2(1-k^2\alpha^2)}\cdot\frac{x^2dx}{(\vartheta x)^3} = \frac{1}{2\alpha(\vartheta\alpha)^3}\log\frac{x\vartheta\alpha+\alpha\vartheta x}{x\vartheta\alpha-\alpha\vartheta x} + \frac{1}{\alpha(\vartheta\alpha)^3}\operatorname{arctg}\frac{\alpha\vartheta x}{x\vartheta\alpha}$$

die man vermittelst der Substitution

$$(1-x^2)(1-k^2x^2) = x^4z^4$$

beweist. Ebenso findet man durch die Substitution

$$(1-x^2)(1-k^2x^2) = z^4$$

die folgenden beiden Integrale:

$$\int \frac{1}{\alpha^2-x^2} \cdot \frac{1+k^2-2k^2x^2}{(1-k^2\alpha^2)+k^2(1-x^2)} \cdot \frac{x\,dx}{\vartheta x} = \frac{1}{2\vartheta\alpha} \log \frac{\vartheta\alpha+\vartheta x}{\vartheta\alpha-\vartheta x} - \frac{1}{\vartheta\alpha} \operatorname{arctg} \frac{\vartheta x}{\vartheta\alpha}$$

$$\int \frac{1}{\alpha^2-x^2} \cdot \frac{1+k^2-2k^2x^2}{(1-k^2\alpha^2)+k^2(1-x^2)} \cdot \frac{x\,dx}{(\vartheta x)^3} = \frac{1}{2(\vartheta\alpha)^3} \log \frac{\vartheta\alpha+\vartheta x}{\vartheta\alpha-\vartheta x} + \frac{1}{(\vartheta\alpha)^3} \operatorname{arctg} \frac{\vartheta x}{\vartheta\alpha}.$$

Berlin, im Juli 1857.