

Über Borel's Verallgemeinerung des Grenzbegriffes.

Von Lucius Hanni in Wien.

I.

Ist eine Potenzreihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu} x^{\nu}$ mit endlichem Convergenzkreise

gegeben, und ist dadurch eine analytische Function $f(x)$ innerhalb eines bestimmten Bereiches definiert, so kann man den Wert dieser Function in einem Punkte P außerhalb des Convergenzkreises dieser Reihe durch die Methode der analytischen Fortsetzung bestimmen. Zu dieser Methode sind nun in neuester Zeit noch andere hinzugekommen, die den Zweck haben, eine Potenzreihe in eine andere Reihe umzuformen, welche wieder eine analytische Function der Veränderlichen x ist, die sich aber bezüglich ihres Geltungsbereiches in vortheilhafter Weise von der analytischen Fortsetzung unterscheidet. Es sind hauptsächlich zwei Gesichtspunkte, welche zur Einführung dieser letzteren Methoden Anlass gaben.

Ist nämlich nur eine Potenzreihe gegeben, und weiß man nichts über die dadurch definierte analytische Function, so bieten diese Methoden, wie E. Lindelöf im Anfange seiner Arbeit über diesen Gegenstand (Acta soc. scient. Fennicae, t. 24, 1899) bemerkt, eine bedeutende Erleichterung der Untersuchung und der numerischen Berechnung der Function für ihre Werte auf dem Convergenzkreise der betreffenden Potenzreihe und außerhalb desselben, während die Methode der analytischen Fortsetzung in dieser Hinsicht meistens ohne praktischen Nutzen ist.

Andererseits ermöglichen diese Methoden die Lösung eines Problems, welches A. Pringsheim (Encyklopädie der mathem. Wissenschaften hgb. v. Burkhardt u. Meyer Bd. I, p. 109) in folgender Weise formuliert: In wie weit kann eine Potenzreihe

$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu} x^{\nu}$ auch dort, wo sie divergiert, zur Definition einer bestimmten von x abhängigen Zahl („Function“) $F(x)$ dienen? Und dürfen gewisse zunächst nur für convergente Reihen definierte Rechnungsoperationen auf solche rein formale Äquivalenzen

$$F(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu} x^{\nu},$$

welche nur im Falle der Convergenz von $\sum_0^\infty a_v x^v$ den Sinn wirklicher Gleichungen annehmen, ohne Widerspruch angewendet werden?

Gerade diesen zweiten Gesichtspunkt berücksichtigt besonders E. Borel bei der Einführung seines verallgemeinerten Grenzwertes (*limite généralisée*), den er auf folgende Weise definiert:

$$(1) \quad \lim_{a=\infty} e^{-a} \sum_0^\infty \frac{a^v s_v}{v!} = \lim \text{gen } s_n, \quad (\lim n = \infty),$$

$$s_v = \sum_0^v a_l x^l.$$

Für alle Werte von x , für welche $\sum_0^\infty a_l x^l$ convergiert, ist $\lim \text{gen } s_n = \lim_{n=\infty} s_n$; für jene Werte von x aber, für welche diese Potenzreihe nicht mehr convergiert (oscilliert) und der in (1) links stehende Grenzwert existiert, dient die Gleichung (1) als Definition des Grenzwertes von $\sum_0^\infty a_l x^l$. Diese Definition, die zunächst allerdings etwas willkürlich erscheint, wird dann dadurch gerechtfertigt, dass unter gewissen noch erforderlichen Einschränkungen $\lim \text{gen } s_n$ wirklich die analytische Fortsetzung von $\sum_0^\infty a_l x^l$ liefert. (Journ. de

mathem. 1896, p. 103 ff, p. 441 ff; Ann. de l'école norm. sup. p. 1 ff.; außerdem verschiedene Noten in den Comptes rend.). Doch weist Borel selbst auf die Möglichkeit hin, seine Transformation einer Potenzreihe (*limite généralisée*) zu gewinnen, ohne von divergenten Reihen sprechen zu müssen; auch erwartet er eine Beziehung zwischen seiner Methode und der Lindelöfs (Acta soc. scient. Fennicae, t. 24.)

In der That, berücksichtigt man die von O. Stolz und A. Pringsheim aufgestellten Sätze über unendliche Doppelreihen, so erscheinen Borel's und Lindelöf's Methoden unter einem einheitlichen Gesichtspunkte, und zwar kann man Borel's Transformation erhalten durch Verallgemeinerung eines Processes, der die Euler'sche Transformation, einen speciellen Fall von Lindelöfs Methode der conformen Abbildung, liefert. Ferner bieten diese Sätze über unendliche Doppelreihen nicht nur ein Mittel, um ohne Verwendung von divergenten Reihen durch directe Transformation der ursprünglich vorgelegten Potenzreihe zum *limite généralisée* zu gelangen, sondern man kann dann auch von hier aus leicht zu dem Gesichtspunkte gelangen, von dem Borel selbst ausgegangen ist (Ann. de l'école norm. sup. 1899 p. 52 f.).

muss das Unbestimmtheits-Intervall aller Zeilen und Colonnen von einer bestimmten an beliebig klein werden.

Ist außer der unendlichen Doppelreihe jede einzelne Zeile

$$\sum_{\mu=0}^{\infty} a_{\mu}^{(\nu)} \quad (\nu=0, 1, 2 \dots \text{ (oder jede einzelne Colonne } \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\mu}^{(\nu)} (\mu=0, 1, 2 \dots))$$

convergent, so convergiert auch die Reihe der Zeilensummen bzw. diejenige der Colonnensummen gegen denselben Grenzwert S , gegen welchen die Doppelreihe convergiert.

Endlich bedürfen wir noch eines Satzes von O. Stolz (Math. Ann., 24, p. 169):

$$\text{Man setze } a_{\mu}^{(\nu)} = a_{\mu, \nu} x^{\mu}. \text{ Die Zeilen } f_{\nu}(x) = \sum_{\mu=0}^{\infty} a_{\mu}^{(\nu)} (\nu=0, 1, 2, \dots)$$

seien sämtlich convergent für alle reellen und complexen Werte von x , welche dem absoluten Betrage nach unter der positiven Zahl R liegen, Es convergiere ferner die aus den Grenzwerten $f_{\nu}(x)$ gebildete Reihe

$$f_0(x) + f_1(x) + \dots + f_{\nu}(x) + \dots$$

gleichmäßig für alle Werte $|x| < R$; dann convergiert die Doppelreihe, deren Glieder $a_{\mu}^{(\nu)} = a_{\mu, \nu} x^{\mu}$ sind, für jeden Wert von x , der dem absoluten Betrag nach kleiner ist als R .

II.

Diese Sätze über convergente Doppelreihen geben nun zu folgenden Bemerkungen Anlass. Verwandelt man eine Potenzreihe

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu} x^{\nu} \text{ mit endlichem Convergenzkreise auf irgend eine Art}$$

in eine unendliche Doppelreihe, so wird diese im allgemeinen nur für solche Werte von x absolut convergieren, welche innerhalb des Convergenzkreises jener Potenzreihe gelegen sind. Verlangt man aber nur bedingte Convergenz, so ergibt sich leicht die Möglichkeit, dass auch für solche Werte von x , für welche die ursprüngliche Potenzreihe nicht mehr convergiert, die betreffende Doppelreihe dennoch convergieren kann, weil nun die Bedingungen für die Convergenz einer Doppelreihe sehr weite sind. Ferner können dann in diesem Doppelreihenschema auch noch entweder die aus den Zeilensummen oder den Colonnensummen oder den Diagonalsummen gebildeten einfachen Reihen convergieren und sogar eine analytische Function von x darstellen, welche identisch ist mit der durch die vorgegebene Potenzreihe definierten. Daher scheint von vornherein die Verwandlung einer Potenzreihe in eine unendliche Doppelreihe sehr dazu geeignet, um jene in einen analytischen Ausdruck mit weiterem Geltungsbereiche zu transformieren.

Unter den vielen möglichen Umformungen einer Potenzreihe $\sum_0^\infty a_\nu x^\nu$ in eine unendliche Doppelreihe ist diejenige am nächsten gelegen, welche man dadurch erhält, dass man x als Function einer neuen Veränderlichen darstellt und dann nach Potenzen dieser neuen Variablen ordnet, so dass gleiche Potenzen derselben in einer und derselben Colonne sich befinden.

Dieses Verfahren hat E. Lindelöf (Acta soc. scient. Fennicae, 24, 1899) eingeschlagen; seine Methode lässt sich kurz in folgender Weise darstellen. Es sei in der Ebene der complexen Veränderlichen x ein einfach zusammenhängendes Gebiet T gegeben, und $f(x)$ sei eine analytische Function von x , die in der Umgebung eines jeden Punktes im Innern von T regulär ist. Nach einem Satze von Riemann existiert dann unter sehr allgemeinen Bedingungen betreffs des Randes von T eine analytische Function $t = \varphi(x)$, welche diese Fläche T auf den Kreis $|t| \leq 1$ conform abbildet. Nach dem Begriffe der conformen Abbildung ist diese Function $\varphi(x)$ regulär im Innern von T und ebenso ist aus demselben Grunde die umgekehrte Function $x = \psi(t)$ regulär im Innern des Kreises $|t| \leq 1$.

Entspricht dem Mittelpunkte $t=0$ dieses Kreises der Punkt x_0 , so hat man

$$x - x_0 = a_1 t + a_2 t^2 + \dots$$

Da ferner $f(x)$ im Punkte x_0 zufolge der Voraussetzung holomorph ist, so hat man in der Umgebung dieses Punktes

$$f(x) = \beta_0 + \beta_1 (x - x_0) + \beta_2 (x - x_0)^2 + \dots$$

Setzt man in diese Reihe für $x - x_0$ den obigen Ausdruck ein, so erhält man für $f(x)$ eine Reihe nach ganzen positiven Potenzen von t , welche sicher für genügend kleine Werte von t convergiert. Es ist also die Function $f(x)$ durch die Substitution $x = \psi(t)$ in eine Function von t transformiert $f\{\psi(t)\} = F(t)$,

$$(3) \quad F(t) = b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + \dots$$

Da man diese Transformation nicht nur für den Punkt x_0 , sondern für jeden anderen Punkt x_1 im Innern des Gebietes T machen kann, so ist $F(t)$ regulär in jedem Punkte im Innern des Kreises $|t| \leq 1$. Daraus folgt nun, dass der wahre Convergencekreis der Reihe (3) nicht nur ein Theilgebiet des Kreises $|t| \leq 1$, sondern der Kreis $|t| < 1$ selbst ist. Macht man jetzt in der Reihe (3) die Substitution $t = \varphi(x)$, so erhält man als Schlussergebnis das Resultat.

$$(4) \quad f(x) = b_0 + b_1 \varphi(x) + b_2 \{\varphi(x)\}^2 + \dots;$$

diese Reihe convergiert nun für alle Werte von x im Innern des Gebietes T .

Somit hat man hier schon ein Beispiel eines Doppelreihenschemas, in dem die einzelnen Zeilen divergieren, die Columnen aber und die aus den Columnensummen gebildete Reihe convergieren. Ferner ergibt sich unmittelbar aus dem citierten Satze von O. Stolz, dass für alle jene Werte von x , für welche die aus den Columnensummen gebildete Reihe (4) convergiert, auch die entsprechende unendliche Doppelreihe zu demselben Grenzwerte convergiert. Wenn man daher die Verwandlung einer Potenzreihe in eine unendliche Doppelreihe berücksichtigt, so erscheint die Methode der conformen Abbildung als ein specieller Fall dieser Verwandlung; denn es ist leicht ersichtlich, dass verschiedene andere Transformationen einer Potenzreihe in eine unendliche Doppelreihe möglich sind.

Bei solchen Verwandlungen kann der Fall eintreten, dass dieselbe Doppelreihe durch verschiedene Methoden erhalten werden kann. Ein sehr einfaches Beispiel dazu bietet die Euler'sche Transformation; man erhält sie, wenn man $x = \frac{t}{1+t}$ und daher $t = \frac{x}{1-x}$ setzt.

Dadurch geht die Function $f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu} x^{\nu}$ über in

$$(5) f(x) = a_0 + a_1 \left(\frac{x}{1-x} \right) + \Delta a_1 \left(\frac{x}{1-x} \right)^2 + \dots + \Delta^{n-1} a_1 \left(\frac{x}{1-x} \right)^n + \dots,$$

wo $\Delta^r a_1 = a_{r+1} - \binom{r}{1} a_r + \binom{r}{2} a_{r-1} + \dots + (-1)^r a_1$ ist.

Diese Transformation kann man nämlich außer durch Substitution auch durch einen andern Process erhalten, durch dessen Verallgemeinerung man eine Potenzreihe in eine solche Doppelreihe umwandeln kann, dass man unmittelbar Borel's Transformation erhält. Dieser Process ist beinahe derselbe, den schon Poncelet (Crelle's Journ. f. Math. 13, 1835) zur Convergenz-Untersuchung der Reihe (5) verwendet hat. Er beruht auf der folgenden Identität, welche Markoff (Differenzrechnung, übers. v. Friesendorff u. Prümm, p. 101, 102) als die Formel der partiellen Summation bezeichnet:

$$(6) \quad \sum_{\alpha}^{\alpha+n\delta} \varphi(\nu) \Delta \psi(\nu) = \varphi(\alpha+n\delta) \psi(\alpha+n\delta) - \varphi(\alpha) \psi(\alpha) \\ - \sum_{\alpha}^{\alpha+n\delta} \psi(\nu+\delta) \Delta \varphi(\nu),$$

wo φ und ψ Functionen von ν sind, und Δ wieder die bekannte Bezeichnung für die Differenz $\Delta \varphi(\nu) = \varphi(\nu+\delta) - \varphi(\nu)$ u. s. w. ist.

Setzt man jetzt $\delta = 1$ und $\psi(v) = \frac{x^v}{x-1}$, so ist $\Delta\psi(v) = x^v$; die Gleichung (6) geht dann über in

$$\sum_{\alpha}^{a+n} x^v \varphi(v) = \frac{x^{a+n} \varphi(a+n) - x^a \varphi(a)}{x-1} - \frac{x}{x-1} \sum_{\alpha}^{a+n} x^v \Delta \varphi(v).$$

Setzt man ferner $\alpha = 1$, $\varphi(v) = a_v$ und wendet diese Formel der Reihe nach auf die Summen

$$\sum_{v=1}^n a_v x^v, \sum_{v=1}^n x^v \Delta a_v, \dots, \sum_{v=1}^n x^v \Delta^{m-1} a_v$$

an, so erhält man ein System von m Gleichungen, aus dem sich ergibt:

$$(7) \quad \sum_{v=1}^n a_v x^v = \sum_{v=1}^m \left(\frac{x}{1-x} \right)^v \Delta^{v-1} a_1 + \left(\frac{x}{1-x} \right)^m \sum_{v=1}^n x^v \Delta^m a_v - \frac{x^n}{1-x} \sum_{v=0}^{m-1} \left(\frac{x}{1-x} \right)^v \Delta^v a_n = A + B + C.$$

Den Ausdruck auf der rechten Seite dieser Gleichung kann man nun in folgender Weise in der Form einer endlichen Doppelreihe darstellen:

$$(8) \quad \left\{ \begin{aligned} & a_1 \left[\frac{x}{1-x} - \left(\frac{x}{1-x} \right)^2 + \left(\frac{x}{1-x} \right)^3 \dots + (-1)^{m-1} \left(\frac{x}{1-x} \right)^m \right] \\ & + (-1)^{m-1} \left(\frac{x}{1-x} \right)^m [x \Delta a_1 + x^2 \Delta a_2 \dots + x^n \Delta a_n] - \frac{x^n a_n}{1-x} \\ & + a_2 \left[\left(\frac{x}{1-x} \right)^2 + \binom{-2}{1} \left(\frac{x}{1-x} \right)^3 \dots + \binom{-2}{m-2} \left(\frac{x}{1-x} \right)^m \right] \\ & + \binom{-2}{m-2} \left(\frac{x}{1-x} \right)^m [x \Delta a_2 + x^2 \Delta a_3 \dots + x^n \Delta a_{n+1}] - \frac{x^{n+1} \Delta a_n}{(1-x)^2} \\ & + a_3 \left[\left(\frac{x}{1-x} \right)^3 \dots + \binom{-3}{m-3} \left(\frac{x}{1-x} \right)^m \right] \\ & + \binom{-3}{m-3} \left(\frac{x}{1-x} \right)^m [x \Delta a_3 + x^2 \Delta a_4 \dots + x^n \Delta a_{n+2}] - \frac{x^{n+2} \Delta^2 a_n}{(1-x)^3} \\ & \dots \dots \dots \\ & a_m \left(\frac{x}{1-x} \right)^m + \left(\frac{x}{1-x} \right)^m [x \Delta a_m + x^2 \Delta a_{m+1} \dots + x^n \Delta a_{n+m}] - \frac{x^{n+m-1} \Delta^{m-1} a_n}{(1-x)^m} \end{aligned} \right.$$

Lässt man jetzt m und n gleichzeitig zur Grenze ∞ übergehen, so gilt die Gleichung (7) nur für solche Werte von x , für welche die dabei auftretenden unendlichen Reihen convergieren; trotzdem können die Reihen auf der rechten Seite von (7) bei $\lim m = \infty$, $\lim n = \infty$ auch für solche Werte von x convergieren,

für welche nicht alle Reihen in dem zur Ableitung von (7) dienenden Gleichungssysteme convergieren. Es geht nämlich in (7) der Ausdruck A in die unendliche Reihe auf der rechten Seite der Gleichung (5) über, während die Terme B und C als die bei der Euler'schen Transformation auftretenden Restglieder erscheinen (vergl. Poncelet a. a. O.), die natürlich für alle Werte von x , für welche die Gleichung (5) besteht, zur Null convergieren, was sich sofort auch direct ergeben wird. Dadurch ist zunächst bewiesen, dass man die Euler'sche Transformation auch durch successive Anwendung der Formel der partiellen Summation erhalten kann.

Ferner geht die endliche Doppelreihe (8), wenn m und n sich gleichzeitig der Grenze $+\infty$ nähern, in eine unendliche über, und es handelt sich darum zu untersuchen, wann diese unendliche Doppelreihe eine convergente ist. Die nothwendige und hinreichende Bedingung zur Convergenz derselben ist:

$$|S_{\mu+\varrho}^{r+\sigma} - S_{\mu}^r| < \varepsilon, \mu > g, \nu > g', \rho \Big\}_{\sigma} = 0, 1, 2, \dots,$$

d. h. es muss der absolute Betrag von

$$\begin{aligned} & \sum_{\mu}^{m+r} \left(\frac{x}{1-x} \right)^{\nu} \Delta^{\nu-1} a_1 + \left(\frac{x}{1-x} \right)^{m+r} \sum_{\nu}^{n+s} x^{\nu} \Delta^{m+r} a_{\nu} - \left(\frac{x}{1-x} \right)^m \sum_{\nu}^n x^{\nu} \Delta^m a_n \\ & \sim - \frac{x^{n+s}}{1-x} \sum_{\nu}^{m+r-1} \left(\frac{x}{1-x} \right)^{\nu} \Delta^{\nu} a_{n+s} + \frac{x^n}{1-x} \sum_{\nu}^{m-1} \left(\frac{x}{1-x} \right)^{\nu} \Delta^{\nu} a_n \end{aligned}$$

kleiner sein, als eine beliebige positive Zahl ε , wenn $m > g$, $n > g, \rho \Big\}_{\sigma} = 0, 1, 2, \dots$

Man sieht leicht, dass zur Erfüllung dieser letzten Bedingung wieder nothwendig und hinreichend ist, dass in (7) für $\lim m = \infty$, $\lim n = \infty$ die Reihe A convergiere und die Doppelreihe B und C (zur Null) convergieren. Dies ist aber der Fall für alle Werte von x , für welche die Gleichung (5) besteht; denn dann convergirt die unendliche Doppelreihe

$$(9) \left\{ \begin{aligned} & a_1 \left[\frac{x}{1-x} - \left(\frac{x}{1-x} \right)^2 + \left(\frac{x}{1-x} \right)^3 \dots + (-1)^{n-1} \left(\frac{x}{1-x} \right)^n \dots \right] \\ & a_2 \left[\left(\frac{x}{1-x} \right)^2 + \left(\frac{-2}{1} \right) \left(\frac{x}{1-x} \right)^3 \dots + \left(\frac{-2}{n-2} \right) \left(\frac{x}{1-x} \right)^n \dots \right] \\ & a_3 \left[\left(\frac{x}{1-x} \right)^3 \dots + \left(\frac{-3}{n-3} \right) \left(\frac{x}{1-x} \right)^n \dots \right] \\ & \dots \dots \dots \\ & a_m \left[\left(\frac{x}{1-x} \right)^m \dots + \left(\frac{-m}{n-m} \right) \left(\frac{x}{1-x} \right)^n \dots \right] \\ & \dots \dots \dots \end{aligned} \right.$$

wie schon früher bewiesen wurde. Zuzufolge der Convergenz dieser Doppelreihe ist $|S_{m+n}^{(m+n)} - S_m^{(m)}| < \varepsilon$, $m > g$, $n = 1, 2, 3, \dots g', \dots$

Es ist aber $S_{m+n}^{(m+n)} - S_m^{(m)}$ nicht nur gleich $\sum_1^n \left(\frac{x}{1-x}\right)^{m+r} \Delta^{m+r-1} a_1$,

sondern auch gleich $\left(\frac{x}{1-x}\right)^m \sum_1^n x^r \Delta^m a_r$; daraus folgt, dass auch

$$\left| \left(\frac{x}{1-x}\right)^m \sum_1^n x^r \Delta^m a_r \right| < \varepsilon, \quad m > g, \quad n = 1, 2, \dots, g', \dots, \quad \text{d. h. es}$$

muss auch in (7) $|B| < \varepsilon$, $m > g$, $n > g'$.

Ebenso convergiert bei genügend großem m und n die Doppelreihe C für alle Werte von x , für welche (5) besteht, zum Grenzwerte Null; denn diese Doppelreihe entsteht durch Anwendung der Euler'schen Transformation auf das Restglied

$$x^{n-1} (a_n x + a_{n+1} x^2 + \dots).$$

Somit ist nachgewiesen, dass für alle Werte von x , für welche die Gleichung (5) besteht, nicht nur die unendliche Doppelreihe (9), sondern auch die unendliche Doppelreihe (8) für $\lim m = \infty$,

$\lim n = \infty$ zum Grenzwert $\sum_1^\infty \left(\frac{x}{1-x}\right)^v \Delta^{v-1} a_1$ convergiert.

Außerdem sieht man leicht, dass man durch ähnliche Schlüsse den Satz nachweisen kann: Für alle Werte von x , für welche die Gleichung (5) besteht, folgt aus der Convergenz der Doppelreihe (8) bei $\lim m = \infty$, $\lim n = \infty$ auch die Convergenz der Doppelreihe (9); daher sind diese beiden Doppelreihen einander äquivalent.

Endlich wollen wir noch kurz hinweisen, dass man durch die Formel der partiellen Summation sofort auch noch eine etwas allgemeinere Transformation erhalten kann. Dieselbe besteht darin,

dass man in der Potenzreihe $\sum_0^\infty a_v x^v$ für x die Substitution macht

$$x = \frac{\alpha t}{1+t}, \quad t = \frac{x}{\alpha-x}, \quad \text{wo } \alpha \text{ eine reelle positive Zahl bedeutet.}$$

Ordnet man nach Potenzen von t und setzt

$$\Delta_\alpha^n a_1 = a^{n+1} a_{n+1} - \binom{n}{1} \alpha^n a_n + \binom{n}{2} \alpha^{n-1} a_{n-1} \dots + (-1)^n \alpha a_1,$$

so erhält man

$$\sum_0^\infty a_v x^v = f(x) = a_0 + a_1 \alpha \frac{x}{\alpha-x} + \Delta_\alpha a_1 \left(\frac{x}{\alpha-x}\right)^2 + \dots$$

(Lindelöf, Comptes rend., Bd. 126, 1898, p. 632; Acta soc. scient. Fennicae 24). Zu dieser Transformation kann man leicht durch

successive Anwendung der Formel der partiellen Summation gelangen; man braucht nur zu beachten, dass

$$\sum_0^{\infty} a_{\nu} x^{\nu} = \sum_0^{\infty} a_{\nu} x^{\nu} \left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\nu} = \sum_0^{\infty} a'_{\nu} x'^{\nu}$$

ist, wodurch die Richtigkeit dieser Behauptung unmittelbar einleuchtet.

III.

Wie schon früher erwähnt, werden wir, indem wir die Methode des vorigen Paragraphen verallgemeinern, durch Umformung einer Potenzreihe unmittelbar zu Borel's limite généralisée gelangen. Diese Verallgemeinerung besteht einerseits darin, dass wir in der Gleichung (6) für $\varphi(\nu)$ nicht mehr den Coefficienten a_{ν} , sondern die Function $a_{\nu} x^{\nu}$ einführen, welche jetzt nicht nur von ν , sondern auch von x abhängt. Wir wenden nämlich die Formel der partiellen Summation nicht mehr auf die Reihe $\sum_0^{\infty} a_{\nu} x^{\nu}$ an, sondern auf die Reihe $\sum_0^{\infty} \left(\frac{a}{a+1}\right)^{\nu} a_{\nu} x^{\nu}$, die für $\lim_{a \rightarrow +\infty}$ gleichmäßig zum Grenzwerte $\sum_0^{\infty} a_{\nu} x^{\nu}$ convergiert, da

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \left(\frac{a}{a+1}\right)^{\nu} = \lim_{a \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1+\frac{1}{a}}\right)^{\nu} = 1$$

ist.

Ferner treffen wir auch für die Function $\psi(\nu)$ von früher (Gleichung (6)) eine etwas allgemeinere Wahl; wir setzen nämlich

$$\psi(\nu) = \frac{\left(\frac{a}{a+r}\right)^{\nu}}{\frac{a}{a+r} - 1} = -\frac{a}{r} \left(\frac{a}{a+r}\right)^{\nu-1}$$

und daher

$$\Delta \psi(\nu) = \left(\frac{a}{a+r}\right)^{\nu}, \quad (r = 1, 2, 3, \dots).$$

Dann wenden wir die Formel der partiellen Summation der Reihe nach an auf die Summen

$$\sum_1^n \left(\frac{a}{a+1}\right)^{\nu} a_{\nu} x^{\nu}, \quad \sum_1^n \left(\frac{a}{a+2}\right)^{\nu} \Delta a_{\nu} x^{\nu}, \quad \dots \quad \sum_1^n \left(\frac{a}{a+m}\right)^{\nu} \Delta^{m-1} a_{\nu} x^{\nu}$$

Lässt man jetzt m und n gleichzeitig zum Grenzwert $+\infty$ übergehen — natürlich immer unter der Voraussetzung, dass

$\lim_{a=\infty} \frac{a}{a+r} = 1$ ($r=1, 2, \dots$) —, so treten in den Gleichungen (10) und (11) unendliche Reihen auf, so dass diese Gleichungen nur dann einen Sinn haben, wenn die betreffenden Reihen convergieren. Dies ist aber sicher der Fall für alle Werte von x , welche

dem Convergenzkreise der Reihe $f(x) = \sum_{v=0}^{\infty} a_v x^v$ angehören, dessen Radius wir der Einfachheit wegen gleich 1 annehmen wollen.

Zunächst convergieren nämlich die Reihen $\Delta^r(a_1 x)$ für alle Werte von x innerhalb des Convergenzkreises, weil auch die binomische Reihe einen Convergenzkreis mit dem Radius 1 besitzt. Ferner convergieren auch die Reihen von der Form

$$\sum_{v=1}^{\infty} \left(\frac{a}{a+r} \right)^v \Delta^r(a_v x^v) \quad (r=1, 2, \dots m \dots).$$

Setzt man z. B. $r=1$, so entsteht die Reihe $\sum_{v=1}^{\infty} \left(\frac{a}{a+1} \right)^v \Delta(a_v x^v)$ dadurch, dass man die Reihe $\sum_{v=1}^{\infty} \left(\frac{a}{a+1} \right)^v a_v x^v$ gliedweise von der Reihe $\sum_{v=1}^{\infty} \left(\frac{a}{a+1} \right)^v a_{v+1} x^{v+1}$ subtrahiert; die durch Subtraction

von zwei absolut convergenten Reihen entstandene Reihe muss aber wieder absolut convergieren und zwar unter denselben Bedingungen wie die beiden anderen Reihen. Dieselbe Schlussweise kann man jetzt auch auf die neu erhaltene Reihe anwenden und von da be-

liebig fortsetzen. Somit convergieren die Reihen $\sum_{v=1}^{\infty} \left(\frac{a}{a+r} \right)^v \Delta^r(a_v x^v)$

für alle Werte von x , deren absoluter Betrag kleiner ist als 1, und für alle $a > G$ (G eine beliebig große positive Zahl), und zwar ist die Convergenz, wie man sich leicht überzeugen kann, eine gleichmäßige sowohl in Bezug auf alle diese Werte von x , als auch betreffs aller a für $a > G$.

Aus der absoluten Convergenz der Reihe

$$\lim_{a=\infty} \sum_{v=1}^{\infty} \left(\frac{a}{a+r} \right)^v \Delta^r(a_v x^v) \text{ folgt } |\Delta^r(a_v x^v)| < \varepsilon_r, \text{ wenn } v > n \text{ ist}$$

(ε_r eine positive von r abhängige Zahl). Da diese Reihe nach dem Obigen aber für jedes beliebige r convergiert, so kann man eine andere positive Zahl ε so wählen, dass sie gleich oder größer ist als die größte dieser ε_r , und man hat dann auch unabhängig von r $|\Delta^r(a_v x^v)| < \varepsilon$, $v > n$. Ferner ist

$$|\Delta^{r+1}(a_\nu x^\nu)| = |\Delta^r(a_{\nu+1} x^{\nu+1}) - \Delta^r(a_\nu x^\nu)| \leq 2 \varepsilon_r$$

und daher allgemein

$$|\Delta^{r+k}(a_\nu x^\nu)| \leq 2^k \varepsilon_r.$$

Betrachtet man die Reihe

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{a^\nu}{\nu!} \Delta^{\nu-1}(a_1 x) = \sum_{\nu=1}^N \frac{a^\nu}{\nu!} \Delta^{\nu-1}(a_1 x) + \sum_{\nu=N+1}^{\infty} \frac{a^\nu}{\nu!} \Delta^{\nu-1}(a_1 x),$$

so ist für

$$\nu \geq N+1 \quad |\Delta^{\nu-1}(a_1 x)| \leq 2^{\nu-N-1} \varepsilon_N;$$

daher konvergiert diese Reihe absolut und gleichmäßig für alle Werte von x , für welche $|x| < 1$, und als Potenzreihe von a auch gleichmäßig für alle $a > G$, da $\varepsilon_N < \varepsilon$.

Aus gleichen Gründen muss endlich auch noch die Reihe $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{a^\nu}{\nu!} \Delta^{\nu-1}(a_n x^n)$ für $|x| < 1$ und $a > G$ gleichmäßig und absolut konvergieren. Somit ist für alle $|x| < 1$ und $a > G$ die Zulässigkeit des Grenzüberganges $\lim m = \infty$, $\lim n = \infty$ in Gleichung (11) nachgewiesen.

Bevor wir die rechte Seite von (11) in der Form einer Doppelreihe darstellen, nehmen wir noch zwei kleine Änderungen daran vor. Bezeichnet man mit

$$s_0, s_1(x), s_2(x), \dots s_n(x), \dots$$

oder auch kürzer mit $s_0, s_1 s_2 \dots s_n \dots$ die Partialsummen der Potenzreihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu x^\nu$, so ist

$$a_1 x = \Delta s_0, \dots, \Delta^{\nu-1}(a_1 x) = \Delta^\nu s_0, \dots$$

Berücksichtigt man noch, dass $\lim_{a=\infty} \frac{a}{a+1} = \lim_{a=\infty} \frac{a}{a+1} = 1$ ist, so geht Gleichung (11) über in

$$\sum_{\nu=0}^n a_\nu x^\nu = \lim_{a=\infty} \left[\sum_{\nu=0}^m \frac{a^\nu}{\nu!} \Delta^\nu s_0 + \frac{a^m}{m!} \sum_{\nu=1}^n \left(\frac{a}{a+m} \right)^\nu \Delta^{m+1} s_{\nu-1} - \sum_{\nu=1}^m \frac{a^\nu}{\nu!} \Delta^\nu s_{n-1} \right]$$

Ebenso gilt auch wieder umgekehrt, wenn die unendliche Doppelreihe (13) konvergiert, so konvergiert auch (12) bei $\lim m = +\infty$, $\lim n = +\infty$ zu demselben Grenzwerte.

Auf Grund dieses Satzes ergibt sich, dass diese beiden Doppelreihen für alle $|x| < 1$ wirklich zum Grenzwerte $\lim_{a=\infty} \sum_{v=0}^{\infty} \frac{a^v}{v!} \Delta^v s_0$ konvergieren (natürlich immer unter der Voraussetzung, dass $\sum_{v=0}^{\infty} a_v x^v$ für $|x| < 1$ konvergiert und dass $\lim_{a=\infty} \frac{a}{a+r} = 1$, $r = 1, 2, \dots$). Darnämlich für alle $|x| < 1$ die Reihe $\lim_{a=\infty} \sum_{v=0}^{\infty} \frac{a^v}{v!} \Delta^v s_0$ gleichmäßig konvergiert, außerdem eine Potenzreihe nach ganzen positiven Potenzen von a ist und endlich die einzelnen Columnen der Doppelreihe (13) absolut konvergieren, so kann man auch hier den Satz von O. Stolz (§ I) anwenden. Es konvergieren somit für alle $|x| < 1$ die Doppelreihen (13) und (12) zum Grenzwert $\lim_{a=\infty} \sum_{v=0}^{\infty} \frac{a^v}{v!} \Delta^v s_0$, und demnach konvergieren für $\lim m = +\infty$, $\lim n = +\infty$ auch die Restglieder $\lim_{a=\infty} \frac{a^n}{n!} \sum_{v=1}^n \left(\frac{a}{a+m}\right)^v \Delta^{m+1}$ und $\lim_{a=\infty} \sum_{v=1}^m \frac{a^v}{v!} \Delta^v s_{n-1}$ zum Grenzwerte Null; daraus folgt jetzt auch, dass für $|x| < 1$, $\sum_{v=0}^{\infty} a_v x^v = \lim_{a=\infty} \sum_{v=0}^{\infty} \frac{a^v}{v!} \Delta^v s_0$ ist.

Aus der Convergenz der unendlichen Doppelreihe (13) lässt sich weiter die Folgerung ziehen, dass unter den bisher gemachten Voraussetzungen auch die aus ihren Zeilensummen gebildete Reihe konvergiert. Wenn nämlich die unendliche Doppelreihe (13) konvergiert, so müssen die Diagonalglieder von einem bestimmten an zur Null konvergieren. Es muss also $\left| \lim_{a=\infty} \frac{a^m}{m!} s_m(x) \right| < \varepsilon$, wenn m größer ist als eine beliebig gegebene positive Zahl G ; daher ist auch

$$\left| \lim_{a=\infty} \frac{a^m}{m!} s_m(x) \left(1 - a + \frac{a^2}{1!} \dots\right) \right| < \varepsilon', m > G.$$

Da selbstverständlich auch für $m < G$ $\lim_{a=\infty} e^{-a} \frac{a^m}{m!} s_m(x)$ zur Null konvergiert, so konvergiert jede Zeile dieser unendlichen Doppelreihe und infolge dessen auch die aus den Zeilensummen gebildete Reihe

$$(14) \quad \lim_{a=\infty} e^{-a} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{a^{\nu}}{\nu!} s_{\nu}(x) \dots;$$

der Grenzwert $s(x)$ dieser letzteren Reihe ist gleich dem Grenzwerte der aus den Colonnensummen gebildeten Reihe. Daher hat man für $|x| < 1$

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu} x^{\nu} = \lim_{a=\infty} e^{-a} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{a^{\nu}}{\nu!} s_{\nu}(x),$$

wo die Reihe rechts gleichmäßig konvergiert für $|x| < 1$ und ebenso für $a > G$.

Jetzt kann man nun umgekehrt die Voraussetzung machen, dass die Reihe (14) für alle Werte von x innerhalb eines bestimmten Bereiches A und ebenso für $a > G$ gleichmäßig konvergiere. Es ergibt sich dann, dass für alle diese Werte von x auch die Doppelreihe (13) zu demselben Grenzwert $s(x)$ konvergiert. Es ist nämlich

$$\begin{aligned} S_{m+r}^{n+s} - S_m^n &= \left[\sum_{\nu=0}^{n+s} (-1)^{\nu} \frac{a^{\nu}}{\nu!} \right] \left[\sum_{\nu=0}^{m+r} \frac{a^{\nu} s_{\nu}}{\nu!} \right] - \left[\sum_{\nu=0}^n (-1)^{\nu} \frac{a^{\nu}}{\nu!} \right] \left[\sum_{\nu=0}^m \frac{a^{\nu} s_{\nu}}{\nu!} \right] = \\ &= \left[\sum_{\nu=0}^n (-1)^{\nu} \frac{a^{\nu}}{\nu!} \right] \left[\sum_{\nu=m+1}^{m+r} \frac{a^{\nu} s_{\nu}}{\nu!} \right] + \left[\sum_{\nu=n+1}^{n+s} (-1)^{\nu} \frac{a^{\nu}}{\nu!} \right] \left[\sum_{\nu=0}^{m+r} \frac{a^{\nu} s_{\nu}}{\nu!} \right] = \\ &= P + Q, \quad \left. \begin{matrix} r \\ s \end{matrix} \right\} = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Wenn nun $\left| e^{-a} \sum_{\nu=0}^{m+r} \frac{a^{\nu}}{\nu!} s_{\nu} \right| < \varepsilon$ für $m > \mu$, $a > G$ und für alle

Werte von x innerhalb des Bereiches A , so ist zunächst $|P| < \varepsilon_1$.

In ähnlicher Weise folgt dann auch $|Q| < \varepsilon_2$. Daher ist unter diesen Bedingungen $|S_{m+r}^{n+s} - S_m^n| < \varepsilon_1 + \varepsilon_2 < \varepsilon_3$; somit ist die obige Behauptung bewiesen.

Während man aber früher zeigen konnte, dass auch die aus den Zeilensummen gebildete Reihe konvergiert, wenn dies für die aus den Colonnensummen gebildete Reihe der Fall ist, so kann

man nicht das Umgekehrte zeigen. Die Potenzreihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu} x^{\nu}$

ist also mit Hilfe der Formel der partiellen Summation in eine unendliche Doppelreihe verwandelt worden, die auch dann, wenn die einzelnen Colonnen und die ursprüngliche Reihe divergieren, dennoch konvergieren kann und zwar zu demselben Grenzwerte wie die Reihe der Zeilensummen. So sieht man schon die Möglichkeit,

dass die Reihe (14) als eine Umwandlung der vorgegebenen Potenzreihe in einen Ausdruck mit weiterem Geltungsbereich dienen kann.

Wenn nun durch $f(x) = \sum_0^{\infty} a_v x^v$ für einen bestimmten Bereich A' der Ebene eine analytische Function definiert ist, so handelt es sich darum, ob der Grenzwert der Reihe (14) falls ein solcher auch außerhalb des Convergenzkreises von $\sum_0^{\infty} a_v x^v$, vorhanden ist, mit dem Werte der durch diese Reihe definierten analytischen Function übereinstimmt. Bei der Lösung dieser Frage geht Borel in folgender Weise vor. (Journ. de math., 1896, p. 115). Soll nämlich die Reihe (14) die analytische Fortsetzung von $\sum_0^{\infty} a_v x^v$ liefern, so muss diese Reihe für alle Werte von x innerhalb des Bereiches A und für $a > G$ gleichmäßig convergieren und ihr Grenzwert eine analytische Function $\varphi(x)$ sein für alle Werte von x innerhalb eines gewissen Bereiches A'' , der sowohl innerhalb A als auch innerhalb A' liegen muss. Wenn diese Voraussetzungen erfüllt sind, hat man zwei analytische Functionen, die innerhalb des Convergenzkreises von $\sum_0^{\infty} a_v x^v$ identisch sind. Da durch diese Potenzreihe beide Functionen bestimmt sind, so muss die Reihe (14) für alle Werte von x innerhalb A'' die analytische Fortsetzung von $\sum_0^{\infty} a_v x^v$ liefern. Somit kann die Reihe (14) wirklich in der Weise verwendet werden, wie sich gerade früher zunächst nur als wahrscheinlich ergab, sobald man weiß,¹⁾ wann sie eine analytische Function von x ist, und²⁾ welches der Geltungsbereich dieser Function ist.

Zur Beantwortung der ¹⁾ersten Frage brauchen wir auch bei dieser Art der Einführung des *limite généralisée* nur die betreffenden Andeutungen Borel's (Journ. de math., 1896, p. 114; Ann. de l'école norm. 1899, p. 55, Anmerk.) vollständig auszuführen. Borel geht aus von der Reihe

$$(15) \quad \sum_0^{\infty} [e^{-(v+1)s} (v+1, x) - e^{-v s} (v, x)], \dots,$$

wo

$$s(v, x) = s_0 + v s_1(x) + \frac{v^2}{2!} s_2(x) + \dots$$

Diese Reihe convergiert gleichmäßig für alle Werte von x , für welche die Ungleichung besteht

(16) $|e^{-(v+r)} s(v+r, x) - e^{-v} s_v(x)| < \varepsilon$ für $v > n, r = 0, 1, 2, \dots$,
ihr Grenzwert ist gleich

$$\lim_{a=\infty} e^{-a} \sum_{v=0}^{\infty} \frac{a^v}{v!} s_v(x) - s_0 = s(x) - s_0.$$

Weil nun die Reihe (15), die für alle Werte von x innerhalb jenes Bereiches, für welche die Ungleichung (16) besteht, eine analytische Function von x ist, so folgt, dass auch der Grenzwert der Reihe (14) eine analytische Function von x ist, wenn (16) erfüllt ist; denn es unterscheiden sich die Grenzwerte von (14) und (15) nur um eine Constante. Da die Reihe (14), wenn (16) besteht, in Bezug auf a und in Bezug auf x gleichmäßig convergiert, so erhält man nach dem Mittelwertsatze

$$e^{-(v+r)} s(v+r, x) - e^{-v} s_v(x) = r \frac{d [e^{-(v+\Theta r)} s(v+\Theta r, x)]}{d v},$$

$$v > n, 0 < \Theta < 1;$$

daher geht die Ungleichung (16) über in

$$\left| \frac{d [e^{-a} s(a, x)]}{d a} \right| < \varepsilon, \quad a > G.$$

Man darf nun unter den hier gemachten Voraussetzungen die Reihe (14) gliedweise nach a differentieren und erhält

$$(17) \quad \frac{d [e^{-a} s(a, x)]}{d a} = e^{-a} [s'(a, x) - s(a, x)] = e^{-a} u_1(a, x),$$

wo

$$u_1(a, x) = a_1 x + a \cdot a_2 x^2 + \frac{a^2}{2!} \cdot a_3 x^3 + \dots$$

ist.

Für alle jene Werte von x und a , für welche die Reihe (14) gleichmäßig convergiert, muss auch $e^{-a} u_1(a, x)$ gleichmäßig convergieren. — Endlich sieht man leicht, dass für alle Werte von x , für welche die Reihe (14) gleichmäßig convergiert und ihr Grenzwert eine analytische Function von x ist, dasselbe von der Reihe (15) gilt. Daher gelangt man durch Einführung der Reihe (15) zum Satze: Die nothwendige und hinreichende Bedingung, dass der

Grenzwert der Reihe $\lim_{a=\infty} e^{-a} \sum_{v=0}^{\infty} \frac{a^v}{v!} s_v(x)$ eine analytische Function von x darstellt, ist, dass der absolute Betrag von $\lim_{a=\infty} e^{-a} u_1(a, x)$ zur Null convergiert.

Falls diese Bedingung erfüllt ist, folgt leicht aus der Gleichung (17), wie Borel gezeigt hat, dass sie auch ersetzt werden kann durch die Ungleichung

$$(18) \quad |e^{-a} u(a, x)| < \varepsilon, a > G,$$

wo

$$u(a, x) = a_0 + a_1 x + \frac{a^2}{2!} a_2 x^2 + \frac{a^3}{3!} a_3 x^3 + \dots$$

ist. Von diesem Ausdrucke kann man jetzt in derselben Weise wie Borel dazu übergehen, dass

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \tilde{e} \sum_{v=0}^{\infty} \frac{a^v}{v!} s_v(x) = \int_0^{\infty} e^{-a} u(a, x) da$$

ist, so dass dieses Integral und die Reihe auf der linken Seite dieser Gleichung einander vollständig gleichwertig sind für alle Werte von x , für welche die letzte Ungleichung erfüllt ist. Ferner benützt Borel zu einer weiteren Umformung des Ausdruckes $e^{-a} u(a, x)$ den Satz über das Cauchy'sche Integral: Ist $f(x)$ eine analytische Function, so ist

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{(C)} \frac{f(u)}{u-x} du,$$

wo C eine einfache geschlossene Linie ist, innerhalb der und auf der $f(x)$ eindeutig, stetig und mit einem vollständigen Differentialquotienten begabt ist, der selbst wieder eine stetige Function von x bildet. Dadurch erhält man

$$e^{-a} u(a, x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{(C)} \frac{f(u)}{u} e^{a\left(\frac{x}{u}-1\right)} du.$$

Mit diesen Hilfsmitteln gelingt es nun auch etwas über den Geltungsbereich der Function $\lim_{a \rightarrow \infty} e^{-a} \sum_{v=0}^{\infty} \frac{a^v}{v!} s_v(x)$ zu erfahren, und zwar gelangt Borel (Journ. de mathem. 1896, p. 443—45) durch Verwendung von Sätzen der elementaren Geometrie zu folgendem Satze:

Die Reihe (14) ist eine analytische Function von x (die Bedingung (18) ist erfüllt) wenigstens innerhalb eines convexen Polygons, das in folgender Weise bestimmt ist: Man zieht vom Mittelpunkt O des Convergenzkreises von $\sum_{v=0}^{\infty} a_v x^v$ Radienvectoren zu

den einzelnen singulären Punkten der durch diese Reihe definierten analytischen Function $f(x)$, errichtet in jedem derselben eine Senk-

rechte auf den betreffenden Radiusvector und lässt dann jenen Theil der Ebene weg, der vom Punkte O aus betrachtet außerhalb dieser Senkrechten liegt.

Zwar ist damit noch nicht gesagt, dass der Geltungsbereich der Reihe (14) nicht über dieses Polygon hinausgehen könne; nur in einfachen Fällen (geometrische und logarithmische Reihe) hat Borel (Journ. d. mathem. 1896, p. 116, 117) gezeigt, dass man durch diese Construction den wirklichen Geltungsbereich der Reihe (14) erhält. Auch bei der Reihe für den $\arctan x$ kann man direct zeigen, dass der Ausdruck (14) gleichmäßig convergiert in dem Streifen, welcher von den beiden Tangenten eingeschlossen ist, die in den Punkten $x = +i$ und $x = -i$ an den Convergenz kreis gezogen werden können; den man hat hier

$$e^{-a} u(a, x) = e^{-a} \cdot \frac{1}{a} \sin ax = \frac{1}{2i} \frac{e^{a(xi-1)} - e^{-a(xi+1)}}{a}.$$

Bei dieser und bei der logarithmischen Reihe führt die directe Rechnung deswegen zum Ziele, weil die Ableitung die Form einer geometrischen Reihe hat; im allgemeinen kann man aber die Function $u(a, x)$ nur in der Form einer unendlichen Reihe darstellen.

Indem wir also wie Lindelöf davon ausgegangen sind, eine Potenzreihe in eine Reihe mit größerem Geltungsbereich zu transformieren, sind wir mit Hilfe der unendlichen Doppelreihen zu Borel's limite généralisée in ganz analoger Weise gelangt wie zur Euler'schen Transformation. Nur unterscheidet sich Lindelöf's Transformation dadurch von der Borel's, dass jener durch die Verwendung der Sätze über conforme Abbildung den Geltungsbereich der transformierten Reihe von vornherein genau angeben kann. Doch zeigen beide Methoden wieder insofern Ähnlichkeit, als man ebenfalls Borel's Transformation als eine Art von Abbildung in weiterem Sinne auffassen kann, wie dies Pincherle (Comptes rendus, 1899, Bd. 128, p. 407) hervorhebt.

IV.

Den Ausdruck $\lim_{a \rightarrow \infty} e^{-a} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{a^{\nu} s_{\nu}(x)}{\nu!}$, der bisher nur als analytische Function von x betrachtet werde, kann man noch in anderer Weise auffassen, indem man seinen Bau berücksichtigt.

Es ist ja $e^{-a} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{a^{\nu}}{\nu!} s_{\nu}(x)$ ein Bruch, dessen Nenner gleich ist

$$1 + a + \frac{a^2}{2!} + \dots,$$

und dessen Zähler dadurch erhalten wird, dass man die einzelnen Partialsummen

$$s_0, s_1(x), s_2(x), \dots, s_n(x), \dots$$

der gegebenen Potenzreihe der Reihe nach mit

$$1, a, \frac{a^2}{2!}, \dots, \frac{a^n}{n!}, \dots,$$

multipliziert. Man kann daher den Ausdruck (14) als eine Art von Mittel zwischen den einzelnen Partialsummen $s_0, s_1(x), \dots, s_n(x), \dots$ ansehen. Zu dieser Auffassung als Mittel bietet außerdem seine Eigenschaft Anlass, dass er auch dann convergieren kann, wenn $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x)$ divergiert. Ferner folgt aus (17) leicht, dass ein Grenzwert nur von den Summen $s_n(x)$ abhängt, die genügend großen Werten von n entsprechen. Endlich sieht man auch, dass der Ausdruck (14) für jene Werte x' außerhalb des Convergencekreises

von $\sum_{v=0}^{\infty} a_v x^v$, für welche er die analytische Fortsetzung $f(x')$ von $\sum_{v=0}^{\infty} a_v x^v$ liefert, sogar dann zur numerischen Berechnung von $(f x')$

dient, wenn nur die numerischen Werte der einzelnen Reihenglieder und nicht deren analytisches Bildungsgesetz bekannt sind. Nur in dieser Weise aufgefasst erscheint daher die Borel'sche Transformation einfach als ein Process zur numerischen Berechnung von $f(x')$ aus den numerischen Werten von $s_v(x')$. So sind wir durch die Entwicklung der Eigenschaften des Ausdruckes (14) zu dem Gesichtspunkte gelangt, von welchem Borel ausgegangen ist; die hier angeführten Eigenschaften dieses Ausdruckes haben nämlich Borel veranlasst, denselben als den verallgemeinerten Grenzwert von $s_n(x)$ ($\lim \text{gen } s_n(x)$) zu definieren. Diese Definition rechtfertigt dann Borel in der schon § I. erwähnten Weise.

Einfachere Arten von Mittelbildungen wurden schon von Frobenius (Crelles Journ. f. Math. Bd. 89, 1880, p. 262) und von Hölder (Math. Ann. Bd. 20, 1882, p. 535) behandelt und von Cesàro (Bulletin des sciences mathem. 1890, p. 114) weiter ausgebildet. An diese letztere Arbeit knüpft Borel an (Ann. de l'école norm. 1899, p. 52); doch bleibt er bei der Verwendung der e -Function zur Mittelbildung nicht stehen, sondern zeigt auch, unter welchen Bedingungen man eine allgemeine Function $\varphi(a)$ verwenden kann. — Eine naheliegende Verallgemeinerung des *limite généralisée* ist hier noch deswegen bemerkenswert, weil man sie auch durch die Methode des vorigen Paragraphen erhalten kann. Sie besteht darin, dass man an Stelle von $u(a, x)$ die Function

$$\begin{aligned}\psi_p(a, x) = & a_0 + a_1 x + \dots + a_{p-1} x^{p-1} + a(a_p x^p + a_{p+1} x^{p+1} + \dots \\ & + a_{2p-1} x^{2p-1} \\ & + \frac{a^2}{2!}(a_{2p} x^{2p} + \dots + a_{3p-1} x^{3p-1}) + \dots\end{aligned}$$

bildet und so das Integral $\int_0^\infty e^{-a} \psi_p(a, x) da$ erhält (Borel, Ann. de l'école norm., 1899, p. 72). Um diese Verallgemeinerung durch die frühere Methode zu erhalten, braucht man nur anstatt der Reihe

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \sum_{v=0}^{\infty} \left(\frac{a}{a+1} \right)^v a_v x^v \text{ die Reihe}$$

$$\begin{aligned}a_0 + a_1 + \dots + a_{p-1} x^{p-1} + \left(\frac{a}{a+1} \right) (a_p x^p + \dots + a_{2p-1} x^{2p-1}) + \\ + \left(\frac{a}{a+1} \right)^2 (a_{2p} x^{2p} + \dots + a_{3p-1} x^{3p-1}) + \dots\end{aligned}$$

zu betrachten. — Die Resultate Borel's sind endlich ein specieller Fall der Resultate, welche G. Mittag-Leffler durch die Benützung von n fach unendlichen Reihen und durch Einführung des „Sternes“ erhalten hat (Acta mathem., 23, 1900 p. 43, ff.; Göttinger Nachrichten, mathem.-phys. Cl. 1900, p. 194 ff.).

Der Ausdruck (14) lässt sich außerdem noch von einem andern Gesichtspunkte aus betrachten, indem man zwei Fundamenteigenschaften desselben berücksichtigt. Neben seiner einen Eigenschaft, dass durch ihn auch einer divergenten numerischen Reihe ein Grenzwert zugeordnet werden kann, besitzt er noch die folgende:

Sind $\sum_{v=0}^{\infty} f_v$ und $\sum_{v=0}^{\infty} \varphi_v$ zwei „summierbare“ Reihen, und ist

$$s_v = f_0 + f_1 + \dots + f_v$$

$$s'_v = \varphi_0 + \varphi_1 + \dots + \varphi_v,$$

so dass $\lim \text{gen } s_v = s$ und $\lim \text{gen } s'_v = s'$ ist, so erhält man $\lim \text{gen } (\alpha s_v + \beta s'_v) = \alpha \lim \text{gen } s_v + \beta \lim \text{gen } s'_v$, wo α und β Constante bedeuten. Diese zwei Eigenschaften haben mit dem *limite généralisée* auch die gerade erwähnten Verallgemeinerungen desselben gemeinsam; es gehören daher alle diese Functional-Operationen in die Gruppe derjenigen, welche Pincherle als die tributive Functional-Operationen bezeichnet und in seiner Arbeit (Math. Ann. 49, p. 325) in allgemeiner Weise untersucht hat. Insbesondere steht der *limite généralisée*, insofern man an Stelle des Ausdruckes (14) das ihm äquivalente Integral setzen kann, in naher

Beziehung zu einer distributiven Functional-Operation, welche schon Abel (Oevres, II, p. 67) verwendet. Abel transformiert nämlich

eine Function $f(x)$ in ein Integral $f(x) = \int_0^{\infty} e^{ax} \varphi(a) da$ und be-

zeichnet f als die „fonction génératrice“ der „fonction déterminante de f^a , φ . Bei der geometrischen Reihe fällt nun die Borel'sche Transformation mit der Abel'schen zusammen; denn man hat

$$\frac{1}{1-x} = \int_0^{\infty} e^{ax} \cdot e^{-a} da,$$

wenn der reelle Theil von x kleiner ist als die Einheit. Die Beziehung der Abel'schen Transformation zur Borel'schen Transformation einer beliebigen Potenzreihe ergibt sich daraus, dass man die Borel'sche Transformation einer solchen Reihe auf die Transformation der geometrischen Reihe zurückführen kann (Borel, Ann. de l'école norm. 1899, p. 66, 67). Stellt man nämlich eine Function durch das Cauchy'sche Integral dar, so hat man

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{(+c)} \frac{f(u)}{u} \left(1 + \frac{x}{u} + \frac{x^2}{u^2} + \dots\right) du.$$

Transformiert man jetzt die hier auftretende geometrische Reihe, so erhält man

$$(19) \quad f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{(+c)} \frac{f(u)}{u} \left[\int_0^{\infty} e^{-a} \left(1 + a \cdot \frac{x}{u} + \frac{a^2 x^2}{2! u^2} + \dots\right) da \right] du.$$

Dieses Integral existiert für alle Werte von x , für welche der reelle Theil von $\frac{x}{u} - 1$ kleiner ist als eine bestimmte negative Zahl $-\varepsilon$. Man hat dann $e^{a\left(\frac{x}{u}-1\right)} < e^{-a\varepsilon}$ und daher

$$e^{-a} |u(a, x)| < k e^{-a\varepsilon}, \text{ wo } k = \frac{1}{2\pi i} \int_{(+c)} \frac{f(u)}{u} du$$

eine constante Zahl bedeutet.

Es existiert also für alle diese Werte von x auch die Gleichung

$$(20) \quad f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{\infty} e^{-a} \left[\int_{(+c)} \frac{f(u)}{u} e^{\frac{ax}{u}} du \right] da = \int_0^{\infty} e^{-a} u(a, x) da.$$

d. h. es sind für alle Werte von x , für welche der reelle Theil von $\frac{x}{u}$ kleiner ist als die Einheit, die beiden Integrale (19) und (20) einander gleich. Somit kann die Borel'sche Transformation einer beliebigen Potenzreihe auch dadurch erhalten, dass man die

Coefficienten a_r dieser Reihe durch das Integral $a_r = \int_{(+c)} \frac{f(u)}{u^{r+1}} du$ darstellt und auf die so erhaltene geometrische Reihe die Abel'sche Transformation anwendet. — In einer anderen Form hat Laplace die Beziehung zwischen der „fonction génératrice“ und der „fonction determinante“ derselben ausgedrückt und es kommt auch schon bei ihm das Integral $\int_0^\infty e^{-a} u(a) da$ vor (Theorie analytique des probabilités, 2. partie, chap. I, p. 90).

Da man die Borel'sche Transformation einer Potenzreihe auf die Transformation der geometrischen Reihe zurückführen kann, erhält man schließlich noch ein anderes Verfahren, um durch directe Umformung einer Potenzreihe zum limite généralisée zu gelangen. Jetzt kommt es nämlich zunächst darauf an, die geometrische Reihe in eine Reihe mit weiterem Geltungsbereich zu transformieren. Diese Aufgabe kann man lösen, indem man die geometrische Reihe durch das Cauchy'sche Integral darstellt und dann eine neue Integrations-Veränderliche einführt. Es ist

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+x} &= \frac{1}{2\pi i} \int_{(+c)} \frac{1}{(1-u)(u-x)} du = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{(+c)} \frac{1}{(1-u)u} \left(1 + \frac{x}{u} + \frac{x^2}{u^2} + \dots\right) du; \end{aligned}$$

die Reihe unter dem Integral convergirt nur für die Werte von x , für welche $|x| < |u|$. Nun handelt es sich darum, dieses Integral so zu transformieren, dass die unter dem Integrale auftretende Reihe für Werte von x convergirt, die einem größeren Geltungsbereiche angehören. Da die e -Reihe eine beständig convergente Reihe ist, liegt es am nächsten, dieses Integral in ein solches von der Form $\int e^{\varphi(a,x)} da$ zu transformieren; denn es ist die Bedingung, dass die Reihe unter dem Integrale convergiere, schon erfüllt, und es bleibt nur noch die Bedingung, dass das Integral existiert und sein Wert gleich ist $\frac{1}{1-x}$. Diese Lösung ist zwar noch unbestimmt, weil die Function $\varphi(a,x)$ und die Integrationsgrenzen willkürlich sind. Jedoch erhält man eine Transformation, welche dieser Bedingung genügt, wenn man setzt

$$u = \frac{x - e^x}{1 - e^x}, \quad x = 2\pi i \cdot e^{a(x-1)},$$

wo a die neue Veränderliche bedeuten soll. Es ist dann:

$$\frac{du}{da} = \left(\frac{1}{1 - e^x}\right)^2 [(-x) e^x (1 - x)^2], \quad \frac{1}{(1-u)(u-x)} = \frac{(1 - e^x)^2}{-(1-x)^2 e^x}$$

und daher

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{(+c)} \frac{du}{(1-u)(u-x)} = \int_{(+W)} e^{a(x-1)} da,$$

wo der Weg W noch zu bestimmen ist. Dieser ergibt sich jedoch leicht aus der Bedingung, dass das Integral rechts gleich $\frac{1}{1-x}$ sein muss. Somit haben wir auch auf diesem Wege die Borel'sche Transformation der geometrischen Reihe erhalten $\frac{1}{1-x} = \int_0^\infty e^{a(x-1)} da$.

Von hier aus kann man wegen des gerade früher erwähnten Zusammenhanges zwischen der Transformation der geometrischen Reihe und der Transformation einer beliebigen Potenzreihe, zur Transformation der letzteren übergehen, erhält das Integral $\int_0^\infty e^{-a} u(a, x) da$, das äquivalent ist der Reihe $\lim_{a=\infty} e^{-a} \sum_{\nu=0}^\infty \frac{a^\nu}{\nu!} s_\nu(x)$ und kann von hier aus wiederum die schon bekannten Eigenschaften dieses Ausdruckes ableiten.

So sind wir ohne willkürlich erscheinende Definition zum *limite généralisée* gelangt, und es ist diese Lücke in Borel's Methode ausgefüllt; zugleich erscheinen mit Rücksicht auf die n -fach unendlichen Reihen die Methoden von Mittag-Leffler, Borel und Lindelöf unter einem einheitlichen Gesichtspunkte.¹⁾

¹⁾ Wie man mittels der Methode der partiellen Summation den von Borel aufgestellten allgemeinen Typus der Mittelbildung auf Doppelreihen bzw. auf die n -fach unendlichen Reihen Mittag-Leffler's zurückführen kann, wird in einer folgenden Arbeit gezeigt werden. — Zugleich muss hier noch erwähnt werden, dass Borel in seinen *Leçons sur les séries divergentes*, Paris 1901 schon bewiesen hat, dass der Geltungsbereich der Reihe (14) nicht über das Polygon der Summierbarkeit hinausgeht; doch war es nicht mehr leicht möglich diesen Beweis erst nachträglich im Texte zu berücksichtigen.