

## UN TEOREMA SULLE TRASFORMAZIONI DELLE SUPERFICIE DI GUICHARD.

Nota di **Elisabetta Ragazzi** (Messina).

Adunanza del 23 marzo 1919.

In una importante Memoria pubblicata da EISENHART nel 1914 <sup>1)</sup> l'autore ha stabilito una trasformazione per le superficie  $N$  di GUICHARD, per la quale data che sia una superficie  $N$  se ne possono sempre dedurre infinite  $N_1$  che dipendono da quattro costanti arbitrarie.

Detta trasformazione, che è una particolare trasformazione di RIBAUCCOUR, si effettua mediante l'integrazione di un sistema completo, in cui si presenta sotto forma esplicita una costante arbitraria  $m$ , ed è qui indicata con  $E_m$ .

È inoltre conosciuta una trasformazione  $G$  di GUICHARD <sup>2)</sup> per la quale una superficie isoterma è sempre deducibile in infiniti modi da una superficie  $N$ .

Anteriormente al lavoro di EISENHART (anno 1905) il problema della trasformazione delle superficie  $N$  era stato studiato da CALAPSO <sup>3)</sup>, il quale aveva stabilito un metodo di trasformazione utilizzando appunto la trasformazione  $G$ .

Il metodo di trasformazione di CALAPSO consiste nel comporre una  $G$  con una  $\bar{G}^{-1}$ .

Nel 1917, in occasione della mia tesi di laurea, il Prof. CALAPSO ha giudicato prevedibile che anche la trasformazione  $E_m$  potesse ottenersi con opportuna composizione di trasformazioni di DARBOUX e GUICHARD e mi ha proposto di studiare la questione direttamente con procedimento analitico.

<sup>1)</sup> L. P. EISENHART, *Transformations of Surfaces of GUICHARD and Surfaces Applicable to Quadrics* [Annali di Matematica pura ed applicata, serie 3, t. XXII (1914), pp. 191-247].

<sup>2)</sup> C. GUICHARD, *Sur les surfaces isothermiques* [Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences, t. CXXX (1<sup>er</sup> semestre 1900), pp. 159-162] e *Sur une transformation des surfaces isothermiques* [Ibidem, pp. 477-480].

<sup>3)</sup> P. CALAPSO, *Alcune superficie di GUICHARD e le relative trasformazioni* [Annali di Matematica pura ed applicata, serie 3, t. XI (1905), pp. 201-251].

In questo modo ho ottenuto il teorema seguente:

« Due superficie  $N$  ed  $N_1$ , corrispondenti per trasformazione  $E_m$ , si portano per convenienti trasformazioni  $G$  (di GUICHARD) in due superficie isoterme  $I$  ed  $I_1$ , corrispondenti per trasformazione di DARBOUX <sup>4)</sup>  $D_{-m}$  ».

### § 1.

#### Formole generali della trasformazione $E_m$ .

1. Le superficie di GUICHARD sono caratterizzate dalla seguente relazione tra i coefficienti delle due forme fondamentali relative alle linee di curvatura

$$(1) \quad \sqrt{G} \frac{D}{\sqrt{E}} - \sqrt{E} \frac{D''}{\sqrt{G}} = \sqrt{G - E}.$$

Seguendo le notazioni di CALAPSO, poniamo

$$\sqrt{E} = e^{\xi} \sinh \theta, \quad \sqrt{G} = e^{\xi} \cosh \theta,$$

ed introduciamo una funzione  $H$  mediante la formola

$$-\sinh \theta \frac{D}{\sqrt{E}} + \cosh \theta \frac{D''}{\sqrt{G}} = H.$$

Ricordiamo inoltre che per dette superficie le equazioni di GAUSS e CODAZZI assumono la forma:

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial H}{\partial u} = (H + \operatorname{ctgh} \theta) \frac{\partial \xi}{\partial u}, \quad \frac{\partial H}{\partial v} = (H + \operatorname{tgh} \theta) \frac{\partial \xi}{\partial v}, \\ \frac{\partial^2 \theta}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial v^2} + \operatorname{ctgh} \theta \frac{\partial^2 \xi}{\partial u^2} + \operatorname{tgh} \theta \frac{\partial^2 \xi}{\partial v^2} - \frac{1}{\sinh^2 \theta} \frac{\partial \theta}{\partial u} \frac{\partial \xi}{\partial u} \\ + \frac{1}{\cosh^2 \theta} \frac{\partial \theta}{\partial v} \frac{\partial \xi}{\partial v} + (\cosh \theta + H \sinh \theta)(\sinh \theta + H \cosh \theta) = 0. \end{array} \right.$$

Fissata una superficie  $N$ , indichiamo con  $x, y, z$  le coordinate di un suo punto, con  $X_i^{(0)}, Y_i^{(0)}, Z_i^{(0)}$  i coseni direttori del triedro principale ad essa relativo, e consideria-

<sup>4)</sup> G. DARBOUX, *Sur les surfaces isothermiques* [Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure, série 3<sup>e</sup>, t. XVI (1899), pp. 491-508].

Vedasi anche L. BIANCHI, *Ricerche sulle superficie isoterme e sulla deformazione delle quadriche* [Annali di Matematica pura ed applicata, serie 3, t. XI (1905), pp. 93-157].

mo una soluzione del sistema completo:

$$(3) \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \lambda}{\partial u} &= -\mu \left( \operatorname{tgh} \theta \frac{\partial \xi}{\partial v} + \frac{\partial \theta}{\partial v} \right) + w (\cosh \theta + H \sinh \theta) \\ &\quad + m \left\{ \left[ \sigma e^{\xi} + \psi e^{-\xi} + \psi e^{-\xi} \left( H + \frac{w}{\psi} e^{\xi} \right)^2 \right] \sinh \theta + 2 \psi e^{-\xi} \left( H + \frac{w}{\psi} e^{\xi} \right) \cosh \theta \right\}, \\ \frac{\partial \lambda}{\partial v} &= \mu \left( \operatorname{ctgh} \theta \frac{\partial \xi}{\partial u} + \frac{\partial \theta}{\partial u} \right), \\ \frac{\partial \mu}{\partial u} &= \lambda \left( \operatorname{tgh} \theta \frac{\partial \xi}{\partial v} + \frac{\partial \theta}{\partial v} \right), \\ \frac{\partial \mu}{\partial v} &= -\lambda \left( \operatorname{ctgh} \theta \frac{\partial \xi}{\partial u} + \frac{\partial \theta}{\partial u} \right) + w (\sinh \theta + H \cosh \theta) \\ &\quad + m \left\{ \left[ \sigma e^{\xi} + \psi e^{-\xi} + \psi e^{-\xi} \left( H + \frac{w}{\psi} e^{\xi} \right)^2 \right] \cosh \theta + 2 \psi e^{-\xi} \left( H + \frac{w}{\psi} e^{\xi} \right) \sinh \theta \right\}, \\ \frac{\partial w}{\partial u} &= -\lambda (\cosh \theta + H \sinh \theta), \\ \frac{\partial w}{\partial v} &= -\mu (\sinh \theta + H \cosh \theta), \\ \frac{\partial \psi}{\partial u} &= \lambda e^{\xi} \sinh \theta, \\ \frac{\partial \psi}{\partial v} &= \mu e^{\xi} \cosh \theta, \\ \frac{\partial \sigma}{\partial u} &= \lambda \left\{ e^{-\xi} \left[ 1 + \left( H + \frac{w}{\psi} e^{\xi} \right)^2 \right] \sinh \theta + 2 e^{-\xi} \left( H + \frac{w}{\psi} e^{\xi} \right) \cosh \theta \right\}, \\ \frac{\partial \sigma}{\partial v} &= \mu \left\{ e^{-\xi} \left[ 1 + \left( H + \frac{w}{\psi} e^{\xi} \right)^2 \right] \cosh \theta + 2 e^{-\xi} \left( H + \frac{w}{\psi} e^{\xi} \right) \sinh \theta \right\}, \end{aligned} \right.$$

con la relazione fondamentale quadratica

$$(4) \quad \lambda^2 + \mu^2 + w^2 = 2m\psi\sigma.$$

Allora le equazioni

$$(5) \quad x_i = x - \frac{1}{m\sigma} \left( \lambda X_i^{(0)} + \mu X_2^{(0)} + w X_3^{(0)} \right)$$

determinano una superficie  $N_1$ , che corrisponde alla data per trasformazione  $E_m$ . Le funzioni fondamentali  $\xi_1$ ,  $\theta_1$ ,  $H_1$  della nuova superficie sono date dalle seguenti espressioni

$$(6) \left\{ \begin{aligned} e^{\xi_1} &= \frac{\psi}{\sigma} e^{-\xi} \left[ 1 - \left( H + \frac{w}{\psi} e^{\xi} \right)^2 \right], \\ e^{\xi_1} \sinh \theta_1 &= -\frac{\psi}{\sigma} e^{-\xi} \left[ 1 + \left( H + \frac{w}{\psi} e^{\xi} \right)^2 \right] \sinh \theta - 2 \frac{\psi}{\sigma} e^{-\xi} \left( H + \frac{w}{\psi} e^{\xi} \right) \cosh \theta, \\ e^{\xi_1} \cosh \theta_1 &= \frac{\psi}{\sigma} e^{-\xi} \left[ 1 + \left( H + \frac{w}{\psi} e^{\xi} \right)^2 \right] \cosh \theta + 2 \frac{\psi}{\sigma} e^{-\xi} \left( H + \frac{w}{\psi} e^{\xi} \right) \sinh \theta, \\ H_1 + \frac{w}{\psi} e^{\xi_1} &= H + \frac{w}{\psi} e^{\xi}, \end{aligned} \right.$$

da cui si ricava facilmente

$$(7) \quad \left\{ \begin{aligned} e^{\xi_1 + \xi} [1 + \cosh(\theta_1 + \theta)] &= 2 \frac{\psi}{\sigma}, \\ e^{\xi_1 + \xi} \sinh(\theta_1 + \theta) &= -2 \frac{\psi}{\sigma} \left( H + \frac{w}{\psi} e^{\xi} \right), \\ e^{\xi_1 + \xi} \cosh(\theta_1 + \theta) &= \frac{\psi}{\sigma} \left[ 1 + \left( H + \frac{w}{\psi} e^{\xi} \right)^2 \right]; \end{aligned} \right.$$

ed inoltre

$$(8) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \theta_1}{\partial u} + \frac{\partial \theta}{\partial u} &= - \left( \frac{1}{\sinh \theta} \frac{\partial \xi}{\partial u} - e^{\xi} \frac{\lambda}{\psi} \right) (\cosh \theta_1 + \cosh \theta), \\ \frac{\partial \theta_1}{\partial v} + \frac{\partial \theta}{\partial v} &= \left( \frac{1}{\cosh \theta} \frac{\partial \xi}{\partial v} + e^{\xi} \frac{\mu}{\psi} \right) (\sinh \theta_1 - \sinh \theta), \end{aligned} \right.$$

$$(9) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \xi_1}{\partial u} &= \sinh \theta_1 \left[ \frac{1}{\sinh \theta} \frac{\partial \xi}{\partial u} + \frac{\lambda}{\psi} (e^{\xi_1} - e^{\xi}) \right], \\ \frac{\partial \xi_1}{\partial v} &= -\cosh \theta_1 \left[ \frac{1}{\cosh \theta} \frac{\partial \xi}{\partial v} + \frac{\mu}{\psi} (e^{\xi_1} - e^{\xi}) \right], \end{aligned} \right.$$

$$(10) \quad \left\{ \begin{aligned} (\cosh \theta - \cosh \theta_1)(e^{\xi_1} - e^{\xi}) &= -(\sinh \theta - \sinh \theta_1)(H e^{\xi_1} - H_1 e^{\xi}), \\ (\sinh \theta + \sinh \theta_1)(e^{\xi_1} - e^{\xi}) &= -(\cosh \theta + \cosh \theta_1)(H e^{\xi_1} - H_1 e^{\xi}). \end{aligned} \right.$$

## § 2.

### Il teorema fondamentale.

2. Noi sappiamo che se  $\varphi$  è una soluzione del sistema differenziale

$$(11) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial u} + i \frac{\partial \theta}{\partial v} &= -\sinh \theta \cosh(\varphi - \xi) - i \tanh \theta \frac{\partial \xi}{\partial v} - \frac{1}{2} e^{\varphi - \xi} (H^2 \sinh \theta + 2H \cosh \theta), \\ i \frac{\partial \varphi}{\partial v} + \frac{\partial \theta}{\partial u} &= \cosh \theta \sinh(\varphi - \xi) - \operatorname{ctgh} \theta \frac{\partial \xi}{\partial u} + \frac{1}{2} e^{\varphi - \xi} (H^2 \cosh \theta + 2H \sinh \theta), \end{aligned} \right.$$

le equazioni

$$(12) \quad x' = x + e^{\varphi} (X_1^{(0)} + i X_2^{(0)}),$$

definiscono una superficie isoterma  $I$ , che deriva dalla superficie  $N$  per trasformazione  $G$ , ed i cui raggi di curvatura sono dati dalle note espressioni

$$(13) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{e^{\varphi}}{r_2} &= \frac{1}{\sinh \theta} \frac{\partial \xi}{\partial u} + \cosh(\varphi - \xi) - \frac{e^{\varphi - \xi}}{2} H^2, \\ \frac{e^{\varphi}}{r_1} &= -i \frac{1}{\cosh \theta} \frac{\partial \xi}{\partial v} + \sinh(\varphi - \xi) - \frac{e^{\varphi - \xi}}{2} H^2. \end{aligned} \right.$$

Assumiamo ora una soluzione  $\varphi_1$  del sistema:

$$(14) \quad \begin{cases} \frac{\partial \varphi_1}{\partial u} + i \frac{\partial \theta_1}{\partial v} = \sinh \theta_1 \cosh (\varphi_1 - \xi_1) - i \operatorname{tgh} \theta_1 \frac{\partial \xi_1}{\partial v} \\ \quad + \frac{1}{2} e^{\varphi_1 - \xi_1} (H_1^2 \sinh \theta_1 + 2 H_1 \cosh \theta_1), \\ i \frac{\partial \varphi_1}{\partial v} + \frac{\partial \theta_1}{\partial u} = -\cosh \theta_1 \sinh (\varphi_1 - \xi_1) - \operatorname{ctgh} \theta_1 \frac{\partial \xi_1}{\partial u} - \\ \quad - \frac{1}{2} e^{\varphi_1 - \xi_1} (H_1^2 \cosh \theta_1 + 2 H_1 \sinh \theta_1), \end{cases}$$

e consideriamo la superficie isoterma  $I_1$  determinata dalle equazioni

$$(15) \quad x'' = x_1 - e^{\varphi_1} (X_1 + i X_2),$$

dove  $x_i$ ,  $X_i$ , rappresentano rispettivamente le coordinate di un punto ed i coseni direttori del triedro fondamentale relativi alla superficie  $N_1$ , da cui la  $I_1$  discende per trasformazione  $G$ . I raggi di curvatura della  $I_1$  sono:

$$(16) \quad \begin{cases} \frac{e^{\varphi_1}}{r_2^1} = -\frac{1}{\sinh \theta_1} \frac{\partial \xi_1}{\partial u} + \cosh (\varphi_1 - \xi_1) - \frac{e^{\varphi_1 - \xi_1}}{2} H_1^2, \\ \frac{e^{\varphi_1}}{r_1^1} = i \frac{1}{\cosh \theta_1} \frac{\partial \xi_1}{\partial v} + \sinh (\varphi_1 - \xi_1) - \frac{e^{\varphi_1 - \xi_1}}{2} H_1^2. \end{cases}$$

3. Ora noi vogliamo dimostrare che *tra le superficie  $I_1$  che così si ottengono ne esiste una ed una sola legata alla  $I$  per trasformazione di DARBOUX.*

Le formole di detta trasformazione ci danno che se  $\varphi$ ,  $\frac{e^\varphi}{r_2}$ ,  $\frac{e^\varphi}{r_1}$  sono gli elementi di una superficie isoterma  $I$ , i corrispondenti elementi  $e^{\varphi_1}$ ,  $\frac{e^{\varphi_1}}{r_2^1}$ ,  $\frac{e^{\varphi_1}}{r_1^1}$  della sua trasformata  $I_1$  sono legati ai precedenti dalle relazioni

$$(17) \quad \begin{cases} e^{\varphi_1} = e^{-\varphi} \frac{\psi_1}{\sigma_1}, \\ \frac{e^{\varphi_1}}{r_2^1} + \frac{e^\varphi}{r_2} = \frac{w_1}{\sigma_1} (e^{-\varphi_1} + e^{-\varphi}), \\ \frac{e^{\varphi_1}}{r_1^1} - \frac{e^\varphi}{r_1} = -\frac{w_1}{\sigma_1} (e^{-\varphi_1} - e^{-\varphi}), \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial u} + \frac{\partial \varphi}{\partial u} = \frac{\lambda_1}{\sigma_1} (e^{-\varphi_1} - e^{-\varphi}), \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial v} + \frac{\partial \varphi}{\partial v} = \frac{\mu_1}{\sigma_1} (e^{-\varphi_1} + e^{-\varphi}) \end{cases}$$

dove  $\lambda_1$ ,  $\mu_1$ ,  $w_1$ ,  $\psi_1$ ,  $\sigma_1$  sono un sistema di funzioni trasformatrici per una  $D_*$ .

Scriviamo le (14) trasformate mediante le (8), (9):

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial u} - i \frac{\partial \theta}{\partial v} = i \operatorname{tgh} \theta \frac{\partial \xi}{\partial v} + i \frac{\mu}{\psi} (e^{\xi_1} \sinh \theta_1 - e^{\xi} \sinh \theta) + \sinh \theta_1 \cosh (\varphi_1 - \xi_1) + \frac{1}{2} e^{\varphi_1 - \xi_1} (H_1^2 \sinh \theta_1 + 2 H_1 \cosh \theta_1),$$

$$i \frac{\partial \varphi_1}{\partial v} - \frac{\partial \theta}{\partial u} = \operatorname{ctgh} \theta \frac{\partial \xi}{\partial u} - \frac{\lambda}{\psi} (e^{\xi_1} \cosh \theta_1 + e^{\xi} \cosh \theta) - \cosh \theta_1 \sinh (\varphi_1 - \xi_1) - \frac{1}{2} e^{\varphi_1 - \xi_1} (H_1^2 \cosh \theta_1 + 2 H_1 \sinh \theta_1),$$

e sommiamole con le (11), otteniamo

$$(18) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \varphi_1}{\partial u} + \frac{\partial \varphi}{\partial u} = i \frac{\mu}{\psi} (e^{\xi_1} \sinh \theta_1 - e^{\xi} \sinh \theta) \\ + \frac{1}{2} e^{\varphi_1 - \xi_1} (\sinh \theta_1 + H_1^2 \sinh \theta_1 + 2 H_1 \cosh \theta_1) + \frac{1}{2} e^{\xi_1 - \varphi_1} \sinh \theta_1, \\ - \frac{1}{2} e^{\varphi - \xi} (\sinh \theta + H^2 \sinh \theta + 2 H \cosh \theta) - \frac{1}{2} e^{\xi - \varphi} \sinh \theta, \\ i \frac{\partial \varphi_1}{\partial v} + i \frac{\partial \varphi}{\partial v} = - \frac{\lambda}{\psi} (e^{\xi_1} \cosh \theta_1 + e^{\xi} \cosh \theta) - \\ - \frac{1}{2} e^{\varphi_1 - \xi_1} (\cosh \theta_1 + H_1^2 \cosh \theta_1 + 2 H_1 \sinh \theta_1) + \frac{1}{2} e^{\xi_1 - \varphi_1} \cosh \theta_1, \\ + \frac{1}{2} e^{\varphi - \xi} (\cosh \theta + H^2 \cosh \theta + 2 H \sinh \theta) - \frac{1}{2} e^{\xi - \varphi} \cosh \theta. \end{array} \right.$$

Inoltre le (16) per le (9) divengono

$$\frac{e^{\varphi_1}}{r_2^2} = - \frac{1}{\sinh \theta} \frac{\partial \xi}{\partial u} - \frac{\lambda}{\psi} (e^{\xi_1} - e^{\xi}) + \cosh (\varphi_1 - \xi_1) - \frac{e^{\varphi_1 - \xi_1}}{2} H_1^2,$$

$$\frac{e^{\varphi_1}}{r_1^2} = - i \frac{1}{\cosh \theta} \frac{\partial \xi}{\partial v} - i \frac{\mu}{\psi} (e^{\xi_1} - e^{\xi}) + \sinh (\varphi_1 - \xi_1) - \frac{e^{\varphi_1 - \xi_1}}{2} H_1^2,$$

e tenendo presenti le (13) abbiamo

$$(19) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{e^{\varphi_1}}{r_2^2} + \frac{e^{\varphi}}{r_2} = - \frac{\lambda}{\psi} (e^{\xi_1} - e^{\xi}) + \cosh (\varphi_1 - \xi_1) - \frac{e^{\varphi_1 - \xi_1}}{2} H_1^2 + \cosh (\varphi - \xi) - \frac{e^{\varphi - \xi}}{2} H^2, \\ \frac{e^{\varphi_1}}{r_1^2} - \frac{e^{\varphi}}{r_1} = - i \frac{\mu}{\psi} (e^{\xi_1} - e^{\xi}) + \sinh (\varphi_1 - \xi_1) - \frac{e^{\varphi_1 - \xi_1}}{2} H_1^2 - \sinh (\varphi - \xi) + \frac{e^{\varphi - \xi}}{2} H^2. \end{array} \right.$$

Confrontando queste relazioni e le (18) col sistema (17) si vede subito che i rapporti delle funzioni trasformatrici  $\frac{\lambda_1}{\sigma_1}$ ,  $\frac{\mu_1}{\sigma_1}$ ,  $\frac{w_1}{\sigma_1}$  debbono prendere le seguenti espres-

sioni

$$(20) \left\{ \begin{aligned} \frac{\lambda_1}{\sigma_1} (e^{-\varphi_1} - e^{-\varphi}) &= e^{-\varphi_1} \left[ -\frac{1}{2} e^{\xi_1} \sinh \theta_1 - \frac{1}{2} e^{\varphi+\varphi_1-\xi} (\sinh \theta + H^2 \sinh \theta + 2H \cosh \theta) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{e^{\varphi_1}}{2} \frac{\lambda + i\mu}{\psi} (e^{\xi_1} \sinh \theta_1 - e^{\xi} \sinh \theta) \right] - \\ &- e^{-\varphi} \left[ \frac{1}{2} e^{\xi} \sinh \theta - \frac{1}{2} e^{\varphi+\varphi_1-\xi_1} (\sinh \theta_1 + H_1^2 \sinh \theta_1 + 2H_1 \cosh \theta_1) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{e^{\varphi}}{2} \frac{\lambda + i\mu}{\psi} (e^{\xi_1} \sinh \theta_1 + e^{\xi} \sinh \theta) \right], \\ \frac{\mu_1}{\sigma_1} (e^{-\varphi_1} + e^{-\varphi}) &= i e^{-\varphi_1} \left[ -\frac{1}{2} e^{\xi_1} \cosh \theta_1 - \frac{1}{2} e^{\varphi+\varphi_1-\xi} (\cosh \theta + H^2 \cosh \theta + 2H \sinh \theta) \right. \\ &\quad \left. + \frac{e^{\varphi_1}}{2} \frac{\lambda - i\mu}{\psi} (e^{\xi_1} \cosh \theta_1 + e^{\xi} \cosh \theta) \right] \\ &+ i e^{-\varphi} \left[ \frac{1}{2} e^{\xi} \cosh \theta + \frac{1}{2} e^{\varphi+\varphi_1-\xi} (\cosh \theta_1 + H_1^2 \cosh \theta_1 + 2H_1 \sinh \theta_1) \right. \\ &\quad \left. + \frac{e^{\varphi}}{2} \frac{\lambda + i\mu}{\psi} (e^{\xi_1} \cosh \theta_1 + e^{\xi} \cosh \theta) \right], \end{aligned} \right.$$

$$\frac{w_1}{\sigma_1} (e^{-\varphi_1} + e^{-\varphi}) = -\frac{\lambda}{\psi} (e^{\xi_1} - e^{\xi}) + \cosh(\varphi_1 - \xi_1) - \frac{e^{\varphi_1-\xi_1}}{2} H_1^2 + \cosh(\varphi - \xi) - \frac{e^{\varphi-\xi}}{2} H^2,$$

$$\frac{w_1}{\sigma_1} (e^{-\varphi_1} - e^{-\varphi}) = i \frac{\mu}{\psi} (e^{\xi_1} - e^{\xi}) - \sinh(\varphi_1 - \xi_1) + \frac{e^{\varphi_1-\xi_1}}{2} H_1^2 + \sinh(\varphi - \xi) - \frac{e^{\varphi-\xi}}{2} H^2,$$

e da queste due ultime abbiamo facilmente le altre più semplici

$$(21) \quad \begin{cases} 2 \frac{w_1}{\sigma_1} e^{-\varphi_1} = -\frac{\lambda - i\mu}{\psi} (e^{\xi_1} - e^{\xi}) + e^{\xi_1-\varphi_1} - e^{\varphi-\xi} (H^2 - 1), \\ 2 \frac{w_1}{\sigma_1} e^{-\varphi} = -\frac{\lambda + i\mu}{\psi} (e^{\xi_1} - e^{\xi}) + e^{\xi-\varphi} - e^{\varphi_1-\xi_1} (H_1^2 - 1). \end{cases}$$

Si deduce così che, nell'ipotesi affermativa sulla verità del teorema, deve essere verificata la relazione

$$(22) \quad \begin{cases} e^{\xi_1} - e^{\varphi+\varphi_1-\xi} (H^2 - 1) - e^{\varphi_1} \frac{\lambda - i\mu}{\psi} (e^{\xi_1} - e^{\xi}) \\ = e^{\xi} - e^{\varphi+\varphi_1-\xi_1} (H_1^2 - 1) - e^{\varphi} \frac{\lambda + i\mu}{\psi} (e^{\xi_1} - e^{\xi}); \end{cases}$$

la quale tenuto conto delle identità:

$$\begin{aligned} & \frac{e^{-\xi_1} (\sinh \theta_1 + H_1^2 \sinh \theta_1 + 2H_1 \cosh \theta_1) - e^{-\xi} (\sinh \theta + H^2 \sinh \theta + 2H \cosh \theta)}{e^{\xi_1} \sinh \theta_1 - e^{\xi} \sinh \theta} \\ &= \frac{e^{-\xi_1} (H_1^2 - 1) - e^{-\xi} (H^2 - 1)}{e^{\xi_1} - e^{\xi}}, \end{aligned}$$

$$\frac{e^{-\xi_1} (\cosh \theta_1 + H_1^2 \cosh \theta_1 + 2 H_1 \sinh \theta_1) + e^{-\xi} (\cosh \theta + H^2 \cosh \theta + 2 H \sinh \theta)}{e^{\xi_1} \cosh \theta_1 + e^{\xi} \cosh \theta} = \frac{e^{-\xi_1} (H_1^2 - 1) - e^{-\xi} (H^2 - 1)}{e^{\xi_1} - e^{\xi}},$$

può scriversi nei due seguenti modi

$$(23) \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{2} e^{\xi_1} \sinh \theta_1 - \frac{1}{2} e^{\varphi+\varphi_1-\xi} (\sinh \theta + H^2 \sinh \theta + 2 H \cosh \theta) - \\ & \quad - \frac{e^{\varphi_1}}{2} \frac{\lambda - i\mu}{\psi} (e^{\xi_1} \sinh \theta_1 - e^{\xi} \sinh \theta) \\ & = \frac{1}{2} e^{\xi} \sinh \theta - \frac{1}{2} e^{\varphi+\varphi_1-\xi_1} (\sinh \theta_1 + H_1^2 \sinh \theta_1 + 2 H_1 \cosh \theta_1) - \\ & \quad - \frac{e^{\varphi}}{2} \frac{\lambda + i\mu}{\psi} (e^{\xi_1} \sinh \theta_1 - e^{\xi} \sinh \theta), \end{aligned} \right.$$

$$(24) \quad \left\{ \begin{aligned} & -\frac{1}{2} e^{\xi_1} \cosh \theta_1 - \frac{1}{2} e^{\varphi+\varphi_1-\xi} (\cosh \theta + H^2 \cosh \theta + 2 H \sinh \theta) \\ & \quad + \frac{e^{\varphi_1}}{2} \frac{\lambda - i\mu}{\psi} (e^{\xi_1} \cosh \theta_1 + e^{\xi} \cosh \theta) \\ & = \frac{1}{2} e^{\xi} \cosh \theta + \frac{1}{2} e^{\varphi+\varphi_1-\xi_1} (\cosh \theta_1 + H_1^2 \cosh \theta_1 + 2 H_1 \sinh \theta_1) \\ & \quad + \frac{e^{\varphi}}{2} \frac{\lambda + i\mu}{\psi} (e^{\xi_1} \cosh \theta_1 + e^{\xi} \cosh \theta). \end{aligned} \right.$$

In virtù di queste le (30) prendono la forma più semplice

$$\frac{\lambda_1}{\sigma_1} = \frac{1}{2} e^{\xi_1} \sinh \theta_1 - \frac{1}{2} e^{\varphi+\varphi_1-\xi} (\sinh \theta + H^2 \sinh \theta + 2 H \cosh \theta) - \\ - \frac{e^{\varphi_1}}{2} \frac{\lambda - i\mu}{\psi} (e^{\xi_1} \sinh \theta_1 - e^{\xi} \sinh \theta),$$

$$\frac{\mu_1}{\sigma_1} = -i \frac{1}{2} e^{\xi_1} \cosh \theta_1 - i \frac{1}{2} e^{\varphi+\varphi_1-\xi} (\cosh \theta + H^2 \cosh \theta + 2 H \sinh \theta) \\ + i \frac{e^{\varphi}}{2} \frac{\lambda - i\mu}{\psi} (e^{\xi_1} \cosh \theta_1 + e^{\xi} \cosh \theta).$$

Inoltre se facciamo uso delle relazioni (6), la (22) può anche scriversi

$$(25) \quad 1 + e^{\varphi+\varphi_1} \frac{\sigma}{\psi} + e^{\varphi+\varphi_1} \frac{w^2}{\psi^2} - e^{\varphi_1} \frac{\lambda - i\mu}{\psi} + e^{\varphi} \frac{\lambda + i\mu}{\psi} = 0.$$

4. Inversamente si verifica che se  $\varphi$  è una soluzione del sistema (11), la funzione  $\varphi_1$  data dalla (25) in termini finiti, soddisfa effettivamente al sistema (14); esiste inoltre



e si determina per quadratura una funzione  $\sigma_1$  soddisfacente alle equazioni

$$(26) \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \log \sigma_1}{\partial u} &= \frac{1}{2} e^{\xi_1 - \varphi} \sinh \theta_1 - \frac{1}{2} e^{\varphi_1 - \xi} (\sinh \theta + H^2 \sinh \theta + 2H \cosh \theta) - \\ &\quad - \frac{e^{\varphi_1 - \varphi} \lambda - i\mu}{2\psi} (e^{\xi_1} \sinh \theta_1 - e^{\xi} \sinh \theta), \\ \frac{\partial \log \sigma_1}{\partial v} &= i \frac{1}{2} e^{\xi_1 - \varphi} \cosh \theta_1 + i \frac{1}{2} e^{\varphi_1 - \xi} (\cosh \theta + H^2 \cosh \theta + 2H \sinh \theta) - \\ &\quad - i \frac{e^{\varphi_1 - \varphi} \lambda - i\mu}{2\psi} (e^{\xi_1} \cosh \theta_1 + e^{\xi} \cosh \theta). \end{aligned} \right.$$

Ciò premesso si dimostra subito che le superficie  $I$  ed  $I_1$  sono legate da una trasformazione di DARBOUX, in cui le funzioni trasformatrici sono la  $\sigma_1$ , ora determinata, e le funzioni

$$(27) \left\{ \begin{aligned} \frac{\lambda_1}{\sigma_1} &= \frac{1}{2} e^{\xi_1} \sinh \theta_1 - \frac{1}{2} e^{\varphi + \varphi_1 - \xi} (\sinh \theta + H^2 \sinh \theta + 2H \cosh \theta) - \\ &\quad - \frac{e^{\varphi_1} \lambda - i\mu}{2\psi} (e^{\xi_1} \sinh \theta_1 - e^{\xi} \sinh \theta), \\ \frac{\mu_1}{\sigma_1} &= -i \frac{1}{2} e^{\xi_1} \cosh \theta_1 - i \frac{1}{2} e^{\varphi + \varphi_1 - \xi} (\cosh \theta + H^2 \cosh \theta + 2H \sinh \theta) \\ &\quad + i \frac{e^{\varphi_1} \lambda - i\mu}{2\psi} (e^{\xi_1} \cosh \theta_1 + e^{\xi} \cosh \theta), \\ \frac{w_1}{\sigma_1} &= \frac{1}{2} e^{\xi_1} - \frac{1}{2} e^{\varphi + \varphi_1 - \xi} (H^2 - 1) - \frac{e^{\varphi_1} \lambda - i\mu}{2\psi} (e^{\xi_1} - e^{\xi}), \\ \frac{\psi_1}{\sigma_1} &= e^{\varphi + \varphi_1}. \end{aligned} \right.$$

Infatti da queste tenendo presenti le (6) e (7) ricaviamo

$$\frac{\lambda_1^2 + \mu_1^2 + w_1^2}{\psi_1 \sigma_1} = -\frac{w^2}{\psi \sigma} + e^{-\varphi} \frac{\lambda - i\mu}{\sigma} \left[ 1 + \frac{\sigma}{\psi} e^{\varphi + \varphi_1} + \frac{w^2}{\psi^2} e^{\varphi + \varphi_1} - e^{\varphi_1} \frac{\lambda - i\mu}{\psi} \right],$$

e per la (25)

$$\frac{\lambda_1^2 + \mu_1^2 + w_1^2}{\psi_1 \sigma_1} = -\frac{w^2}{\psi \sigma} - e^{-\varphi} \frac{\lambda - i\mu}{\sigma} e^{\varphi} \frac{\lambda + i\mu}{\psi} = -\frac{\lambda^2 + \mu^2 + w^2}{\psi \sigma},$$

cioè

$$(28) \quad \lambda_1^2 + \mu_1^2 + w_1^2 = -2m\psi_1\sigma_1.$$

Inoltre tenendo sempre conto della (25) nelle sue differenti espressioni e delle

equazioni (2), (3), (4), (6), (8), (9), (11) e (14) otteniamo

$$(29) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \lambda_1}{\partial v} = \frac{\partial \varphi}{\partial u} \mu_1, \\ \frac{\partial \mu_1}{\partial u} = \frac{\partial \mu}{\partial v} \lambda_1, \\ \frac{\partial w_1}{\partial u} = \frac{e^\varphi}{r_2} \lambda_1, \\ \frac{\partial w_1}{\partial v} = \frac{e^\varphi}{r_1} \mu_1, \\ \frac{\partial \psi_1}{\partial u} = e^\varphi \lambda_1, \\ \frac{\partial \psi_1}{\partial v} = e^\varphi \mu_1, \\ \frac{\partial \sigma_1}{\partial u} = e^{-\varphi} \lambda_1, \\ \frac{\partial \sigma_1}{\partial v} = -e^{-\varphi} \mu_1. \end{array} \right.$$

Infine come conseguenza di queste e della (28) abbiamo anche

$$(30) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \lambda_1}{\partial u} = -m e^\varphi \sigma_1 - m e^{-\varphi} \psi_1 - \frac{e^\varphi}{r_2} w_1 - \frac{\partial \varphi}{\partial v} \mu_1, \\ \frac{\partial \mu_1}{\partial v} = -m e^\varphi \sigma_1 + m e^{-\varphi} \psi_1 - \frac{e^\varphi}{r_1} w_1 - \frac{\partial \varphi}{\partial u} \lambda_1. \end{array} \right.$$

È così dimostrato il teorema enunciato al n° 3, che può anche esprimersi sotto la forma seguente:

*Due superficie  $N$  ed  $N_1$ , corrispondenti per trasformazione  $E_m$ , si portano per convenienti trasformazioni  $G$  (di GUICHARD) in due superficie isoterme  $I$  ed  $I_1$ , corrispondenti per trasformazione di DARBOUX  $D_{-m}$ .*

Il risultato è qui ottenuto sulle equazioni intrinseche, ma con una verifica di calcolo si può accertare che il teorema è valido anche per le coordinate.

Messina, 15 dicembre 1918.

ELISABETTA RAGAZZI.