1880. ANNALEN № 7.
DER PHYSIK UND CHEMIE.
NEUE FOLGE. BAND X.

I. *Versuche über stehende Schwingungen des Wassers; von G. Kirchhoff u. G. Hansemann.*

In den Monatsberichten der Berl. Akad. vom Mai 1879[1]) hat einer von uns die Theorie der stehenden Schwingungen entwickelt, die eine schwere Flüssigkeit in einem prismatischen Gefässe ausführen kann, dessen verticaler Querschnitt aus zwei geraden Linien besteht, die miteinander einen rechten Winkel bilden und gleich geneigt gegen die Verticale sind. Wir haben einige der dort abgeleiteten Resultate, namentlich einige der dort berechneten Schwingungsdauern durch Messungen zu prüfen gesucht. Die Schwingungen der Flüssigkeit wurden dadurch hervorgerufen und unterhalten, dass das prismatische Gefäss unter dem Einfluss electromagnetischer Kräfte Schwingungen um seine Kante als Axe ausführte. Die Dauer dieser Schwingungen konnte innerhalb gewisser Grenzen geändert und gemessen werden; ausserdem liess sich ihre Amplitude und die Amplitude der Wasserfläche in ihrer Mitte messen. Das Verhältniss dieser beiden Amplituden zeigte für gewisse Werthe der Schwingungsdauer stark ausgesprochene Maxima; diese Werthe mussten nahe übereinstimmen mit den Schwingungsdauern der Schwingungsarten ungerader Ordnungszahl, welche an dem angeführten Orte gefunden sind. Will man mit grösserer Genauigkeit die Resultate der Theorie mit denen der Beobachtung vergleichen, so stösst man auf Schwierigkeiten, da in der Theorie weder die Bewegung des Gefässes noch die Reibung der Flüssigkeit bis jetzt berücksichtigt werden kann; es ist nur der Weg offen, der so häufig eingeschlagen werden muss: für den Fall, der vorliegt, Formeln als gültig anzunehmen,

1) Auch Wied. Ann. **10.** p. 34. 1880.

die für einen Fall, der ähnlich zu sein scheint, und dessen Theorie durchgeführt werden kann, sich ergeben. Um solche Formeln zu finden, haben wir die Wassermasse uns ersetzt gedacht durch ein Pendel, auf welches eine dämpfende Kraft wirkt, das trotzdem aber in periodischer Bewegung infolge davon bleibt, dass seine Axe von einem zweiten Pendel getragen wird, dessen Schwingungen durch geeignete Kräfte gleichmässig erhalten werden. Sehr einfache Betrachtungen führen dann zu einer Gleichung zwischen dem Verhältniss der Amplituden beider Pendel und der Schwingungsdauer; sind die in dieser Gleichung vorkommenden Constanten aus Beobachtungen bestimmt, so kann man aus ihnen die Schwingungsdauer finden, die das erste Pendel haben würde, wenn es keiner dämpfenden Kraft unterworfen, und seine Axe fest wäre.

Man denke sich ein Pendel, welches um eine horizontale Axe unter dem Einfluss geeigneter Kräfte Schwingungen ausführt. Dieses Pendel trage die seiner eigenen Axe parallele Axe eines andern Pendels, auf welches die Schwere und eine dämpfende Kraft wirkt. Es sei m die Masse des letzteren, ξ die vertical nach unten gekehrte, η die auf den Drehungsaxen senkrechte, horizontale Ordinate eines Punktes seiner Axe zur Zeit t; die Bewegung desselben relativ gegen ein Axensystem, dessen Anfangspunkt dieser Punkt ist, und dessen Axenrichtungen mit den Richtungen von ξ und η zusammenfallen, ist dann die gleiche, wie wenn dieses Axensystem ruhte, neben den vorhandenen Kräften aber auf den Schwerpunkt des Pendels noch eine Kraft wirkte, deren Componenten $-m\frac{d^2\xi}{dt^2}$ und $-m\frac{d^2\eta}{dt^2}$ sind. Ist der Abstand des Schwerpunkts von der Drehungsmasse des Pendels l, sein Trägheitsmoment K, u der Winkel, um den es sich zur Zeit t aus seiner Gleichgewichtslage gedreht hat, und nimmt man die dämpfende Kraft als proportional mit $\frac{du}{dt}$ an[1]), so ist daher:

---

1) Treffender wäre es, die dämpfende Kraft als proportional mit der relativen Geschwindigkeit der beiden Pendel anzunehmen; beide Annahmen müssen zu nahe gleichen Resultaten führen, wenn die Amplitude

$$\frac{K}{lm}\frac{d^2u}{dt^2} = \left(\frac{d_2\xi}{dt^2} - g\right)\sin u + \frac{d^2\eta}{dt^2}\cos u - \varkappa\frac{du}{dt},$$

wo g die Intensität der Schwere und $\varkappa$ eine Constante bezeichnet. Bedeutet ferner λ den Abstand der Drehungsaxen beider Pendel voneinander und v den Winkel, den die durch diese gelegte Ebene zur Zeit t bildet mit der verticalen, durch die feste Axe gehenden Ebene, so ist, wenn der Anfangspunkt der ξ und η in der festen Axe angenommen wird:

$$\xi = \lambda\cos v, \qquad \eta = \lambda\sin v.$$

Setzt man sowohl u als v als unendlich klein voraus, so hat man daher:

$$\frac{K}{lm}\frac{d^2u}{dt^2} = -gu + \lambda\frac{d^2v}{dt^2} - \varkappa\frac{du}{dt}.$$

Diese Gleichung möge geschrieben werden:

$$\alpha^2\frac{d^2u}{dt^2} + 2\beta\frac{du}{dt} + u = N\frac{d^2v}{dt^2},$$

wo dann α, β, N gewisse Constanten bedeuten, von denen die erste die Schwingungsdauer bestimmt, die das Pendel mit der beweglichen Axe haben würde, wenn es keiner Dämpfung unterworfen und seine Axe fest wäre; diese Schwingungsdauer ist nämlich $= \alpha\pi$.

Nun werde angenommen, dass die Schwingungen des Pendels mit der festen Axe der Gleichung:

$$v = B\cos nt$$

gemäss geschehen, und dass auch u periodisch geworden ist. Es muss dann:

$$u = A'\cos nt + A''\sin nt$$

sein, und es müssen die Constanten B, A', A'' den Gleichungen genügen:

$$A'(\alpha^2n^2 - 1) - A''2\beta n = BNn^2,$$
$$A'2\beta n + A''(\alpha^2n^2 - 1) = 0.$$

Quadrirt und addirt man diese Gleichungen und setzt dann:

$$A'^2 + A''^2 = A^2,$$

bezeichnet also durch A die Amplitude des Pendels mit der beweglichen Axe, so erhält man:

des Pendels mit fester Axe klein ist gegen die Amplitude des andern, was hier vorausgesetzt werden kann; die im Texte genannte Annahme ist gewählt, weil für sie die nöthigen numerischen Rechnungen leichter sind.

$$A^2\left((\alpha^2 n^2 - 1)^2 + 4\beta^2 n^2\right) = B^2 N^2 n^4.$$

Das ist die Beziehung zwischen dem Amplitudenverhältniss $A:B$ und der Schwingungsdauer $\frac{\pi}{n}$. Setzt man:

$$\frac{1}{n^2} = x \text{ und } \frac{B}{A} = y,$$

so ist sie:

$$N^2 y^2 = (\alpha^2 - x)^2 + 4\beta^2 x$$

und stellt, wenn man x und y als die rechtwinkligen Coordinaten eines Punktes ansieht, eine Hyperbel dar. Kennt man drei oder mehr zusammengehörige Werthepaare von x und y, so kann man die drei in ihr vorkommenden Constanten berechnen, also auch die Schwingungsdauer $\alpha\pi$ ermitteln.

Diese Formeln haben wir auch bei unsern Versuchen über die Schwingungen des Wassers benutzt, um die Schwingungsdauern zu berechnen, die ihm zukommen würden, wenn das Gefäss stillstände und Reibung nicht vorhanden wäre.

Das prismatische Gefäss A, Taf. IV Fig. 1 war aus vier Glasplatten von 6 mm Dicke zusammengekittet, von denen zwei Quadrate und zwei gleichschenklige, rechtwinklige Dreiecke bildeten; die Seiten jener waren etwa 200 mm lang. Mit seinem untern Theile war das Glasgefäss in ein aus Messingplatten zusammengesetztes Hohlprisma gekittet, das zwei Stahlschneiden trug, deren nach unten gekehrten Schärfen in die Verlängerungen der Linie fielen, die die untere Kante des das Glassgefäss erfüllenden Wassers ausmachte. Diese Schneiden ruhten auf stählernen Lagern, die auf einem sehr festen Tische — dem Gestelle einer kleinen eisernen Drehbank — befestigt waren, und bildeten die Drehungsaxe für ein Federpendel, von dem das mit Wasser gefüllte Gefäss ein Theil war. Es trug dieses einen nach unten gehenden Messingstab B mit einem Bleigewicht, dessen Grösse ausreichte, um das Umstürzen des mit Wasser gefüllten Gefässes zu verhindern. Durch eine Durchbohrung des Messingstabes war ein dünnerer Eisenstab CD geführt, der bei C aufwärts gebogen und mit einer Feder verbunden war, deren zweites Ende bei E an dem Tische so befestigt war, dass ihre Ebene durch die genannte Drehungsaxe ging. Eine zweite Feder F verband den Messingstab B mit einem Holzstabe, der bei G ein Laufgewicht trug; durch Verschiebung dieses oder durch Hinzufügung kleiner Gewichtsstücke zu demselben konnte die Schwingungsdauer des ganzen Systemes geändert werden. Oberhalb des Laufgewichtes war auf jeder Seite des Holzstabes eine kleine Eisenplatte befestigt, die einem davor aufgestellten Electromagneten als Anker diente. Bei den Schwingungen wurde der Strom einer Kette abwechselnd durch den Draht des einen und den des andern Electromagneten geleitet, indem von den Enden eines mit dem Holzstabe verbundenen Drahtes HH bald das eine, bald das andere in ein darunter befindliches Quecksilbernäpfchen tauchte. Die Bildung von Funken in diesen war durch eine, als Nebenschliessung eingeschaltete Zersetzungszelle verhindert. Waren die Schwingungen stationär geworden, so wurde durch Herstellung eines Contactes eine zweite Kette in Thätigkeit gesetzt, deren Strom vermöge eines dritten, an dem Holzstabe befestigten Armes und eines entsprechenden Quecksilbernäpfchens abwechselnd unterbrochen und geschlossen wurde. Dieser Strom ging durch einen Siemens'schen Chronographen J und erzeugte auf dem Papierstreifen dieses Marken, aus denen die Schwingungsdauer später ermittelt werden konnte. Um die Amplitude des Gefässes messen zu können, hatten wir an dem schon erwähnten Eisenstabe bei D ein verticales Glasplättchen befestigt, das ein mit einem horizontalen, feinen Spalt versehenes Staniolblatt trug. Auf der einen Seite dieses war eine Lampe, auf der andern ein mit einem Ocularmikrometer versehenes Mikroskop aufgestellt, das auf der Zeichnung sichtbar, dessen Träger aber nicht dargestellt ist. Zur Beobachtung der Bewegung der Wasseroberfläche diente ein, mit einem horizontalen, durch eine Gasflamme erleuchteten Spalt versehener Collimator K und ein Fernrohr L, welches dem Beobachter das an der Wasserfläche erzeugte Spiegelbild des Spaltes zeigte. Die Axen von Fernrohr und Collimator schnitten sich in einem Punkte der Wasserfläche; um die Linie, die durch diesen Punkt in der Richtung der Drehungsaxe des Gefässes ging, waren beide drehbar, und der Winkel, um den das Fernrohr gedreht wurde, liess sich an einer Kreistheilung ablesen. Ausserdem konnten Fernrohr und Collimator zusammen, horizontal und senkrecht auf der Drehungsaxe des Gefässes, längs einer Scala verschoben werden. Der Regel nach befand sich vor dem Objectiv des Fernrohrs oder des Collimators ein Schirm mit einem schmalen, horizontalen Schlitz in seiner Mitte, der von den Strahlen, die der Lichtspalt aussendete, nur diejenigen hindurchliess, die an einem schmalen Theile der Wasserfläche reflectirt wurden. Das Gesichtsfeld des Fernrohrs war durch zwei in der Ebene des Fadenkreuzes befindliche Schirme oben und unten geradlinig begrenzt. Sollte die Amplitude des Theiles der Wasserfläche, der in der Axe des Fernrohrs lag, gemessen werden, so wurde dieses zunächst bei ruhendem Wasser so eingestellt, dass von dem Spiegelbilde des leuchtenden Spaltes an der einen Grenze des Gesichtsfeldes eben eine Spur noch wahrnehmbar war, und dann, nachdem die Schwingungen hervorgerufen waren, so gedreht, dass an derselben Grenze auch jetzt nur noch Spuren von Licht aufblitzten. Der Drehungswinkel des Fernrohrs war dann dem Winkel gleich, durch den der beobachtete Theil der Wasserfläche bei einer Schwingung sich drehte, also gleich dem Doppelten seiner Amplitude.

Um eine vollkommene Benetzung der Gefässwände zu sichern, war dem Wasser etwas Kalilauge zugesetzt.

Bei den langsamsten Schwingungen der prismatischen Wassermasse bleibt der Theorie zufolge die Oberfläche eine Ebene, und die Schwingungsdauer ist gleich der Schwingungsdauer eines einfachen Pendels, dessen Länge der halben Länge der Oberfläche gleich ist. War die Schwingungsdauer diesem Werthe nahe gleich gemacht, so blieb auch die Wasseroberfläche nahe eben, ausser in der Nähe der Gefässwände, wo sie durch Capillarität gekrümmt war; es zeigte sich das an den Spiegelbildern, die sie erzeugte, welche scharf und unverzerrt waren. Die Beobachtungen mit dem Fernrohre konnten hier bei freien Objectiven ausgeführt werden.

Die folgende Zusammenstellung gibt die Zahl n der in einer Minute ausgeführten Schwingungen, die in Graden ausgedrückten Amplituden der Wasserfläche, A, und des Gefässes, B, und die Verhältnisse beider, y, wie sie in einem Beobachtungssatze bei verschiedener Grösse des an dem Holzstabe befindlichen Gewichtes gefunden wurden.

Tabelle I.

Nr.	n	A	B	y beobachtet	y berechnet	Differenzen
1	160,1	2,20°	0,129°	0,0587	0,0591	−0,0004
2	160,9	2,43	0,125	0,0517	0,0515	+0,0002
3	161,6	2,78	0,122	0,0438	0,0446	−0,0008
4	162,2	3,10	0,122	0,0392	0,0396	−0,0004
5	162,9	3,45	0,118	0,0341	0,0339	+0,0002
6	163,2	3,90	0,110	0,0282	0,0302	−0,0020
7	168,5	3,73	0,064	0,0171	0,0193	−0,0022
8	168,6	3,55	0,071	0,0201	0,0200	+0,0001
9	169,0	3,28	0,075	0,0230	0,0237	−0,0007
10	169,7	3,00	0,083	0,0276	0,0288	−0,0012
11	168,9	3,30	0,077	0,0234	0,0223	+0,0011
12	168,4	3,53	0,069	0,0197	0,0185	+0,0012
13	168,0	3,75	0,064	0,0170	0,0159	+0,0011
14	167,8	3,93	0,060	0,0152	0,0147	+0,0005
15	167,4	4,05	0,056	0,0138	0,0125	+0,0013
16	167,2	4,15	0,048	0,0116	0,0115	+0,0001
17	167,1	4,20	0,044	0,0106	0,0111	−0,0005
18	161,1	2,53	0,129	0,0512	0,0498	+0,0014
19	160,3	2,25	0,131	0,0583	0,0569	+0,0014

Aus den Werthen von n und y sind die Constanten der aufgestellten Hyperbelgleichung so berechnet, dass die Summe der Quadrate der Fehler der Werthe von y zu einem Minimum gemacht ist. So ergab sich:

$$\alpha = 0{,}006\,006, \qquad \beta = 0{,}000\,041\,23, \qquad N = 0{,}000\,050\,86.$$

Um zu zeigen, inwieweit die Beobachtungen durch die Hyperbelgleichung bei diesen Werthen der Constanten dargestellt werden, sind die aus ihr berechneten Werthe von y in der „y berechnet“ überschriebenen Columne angegeben und die übrig bleibenden Differenzen hinzugefügt. Aus dem Werthe von α ergibt sich $\frac{1}{\alpha}$, d. h. die Schwingungszahl für eine Minute bei der langsamsten Schwingungsart der Wassermasse in dem Falle, dass das Gefäss ruht und keine Reibung stattfindet:

$$= 166{,}5.$$

Eine zweite, ähnliche Versuchsreihe führte zu genau demselben Zahlenwerth; eine dritte ergab 166,4.

Die Länge der Wasserfläche, wenn ihre Höhe einer gewissen Marke entsprach, was bei allen Versuchen der Fall war, betrug 256,9 mm; ein Pendel, dessen Länge die Hälfte hiervon ist, führt in einer Minute

$$166{,}9$$

Schwingungen aus, eine Zahl, die mit den aus den Beobachtungen hergeleiteten in befriedigender Uebereinstimmung ist.

Die folgende Tabelle gibt in ähnlicher Weise die Resultate der Beobachtungen an, die wir angestellt haben in Bezug auf die dritte, am Eingangs erwähnten Orte behandelten Schwingungsart.

Tabelle II.

Nr.	n	A	B	y berechnet	y beobachtet	Differenzen
1	322,4	1,75°	0,152°	0,0869	0,0896	−0,0027
2	327,9	2,40	0,155	0,0647	0,0627	+0,0020
3	334,8	2,78	0,155	0,0559	0,0584	−0,0025
4	342,4	1,73	0,157	0,0908	0,0891	+0,0017
5	339,0	1,98	0,147	0,0743	0,0731	+0,0012
6	336,9	2,15	0,136	0,0631	0,0648	−0,0017
7	334,6	2,18	0,127	0,0584	0,0581	+0,0003
8	332,5	2,20	0,126	0,0571	0,0553	+0,0018
9	329,8	2,35	0,137	0,0584	0,0572	+0,0012
10	327,2	2,03	0,137	0,0676	0,0652	+0,0024
11	332,7	2,95	0,155	0,0527	0,0554	−0,0027

Dabei fand sich:

$$\alpha = 0{,}003\,014, \qquad \beta = 0{,}000\,070\,71, \qquad N = 0{,}000\,007\,747,$$

also:

$$\frac{1}{\alpha} = 331{,}8.$$

Die entwickelte Theorie hat die entsprechende Schwingungszahl:

$$166{,}9 \,.\, 1{,}9824 = 330{,}9$$

ergeben. Aber diese Theorie hat nicht Rücksicht nehmen können auf die Capillarität, die, wie zuerst W. Thomson und später Koláček gezeigt hat, einen merklichen Einfluss auf die Wellenbewegung des Wassers auszuüben im Stande ist. Wenn das Wasser in horizontaler Richtung unbegrenzt ist, überall dieselbe Tiefe hat und stehende Schwingungen ausführt, deren von Knoten zu Knoten gemessene und in Millimetern ausgedrückte Wellenlänge durch λ bezeichnet wird, so bringt nach Koláček[1]) die Capillarität eine Verkleinerung der Schwingungsdauer hervor, die nahe:

$$1{,}5 \left(\frac{50}{\lambda}\right)^2 \text{ Procent}$$

beträgt. Mit einer solchen Bewegung wird näherungsweise die betrachtete Bewegung der prismatischen Wassermasse in genügender Entfernung von den Gefässwänden übereinstimmen; für sie ergibt sich aus den Knoten:

$$\lambda = 0{,}736 \,.\, 128{,}4 = 94{,}52$$

und aus den Bäuchen:

$$\lambda = 0{,}766 \,.\, 128{,}4 = 98{,}35.$$

Nimmt man für λ einen Mittelwerth an, so findet man hiernach die theoretische Schwingungszahl für eine Minute bei der dritten Schwingungsart mit Rücksicht auf die Capillarität.

$$= 332{,}2,$$

während unsere Beobachtungen sie 331,8 ergeben haben.

Auch in Bezug auf die Lage der Bäuche haben wir Messungen ausgeführt. In dem ideellen Falle, auf den die entwickelte Theorie sich bezieht, sind die Bäuche die Stellen, in denen die Richtung der Wasserfläche ungeändert bleibt. Solche Stellen gibt es in dem Falle, der bei den Versuchen verwirklicht ist, nicht; es gelten hier als Bäuche die Stellen, in denen die Aenderung der Richtung der Wasserfläche ein Minimum ist. Bei jedem der Versuche, die in der vorigen Tabelle aufgeführt sind, sind diese Stellen aufgesucht; auf jeder Seite der Mitte der Wasserfläche fand sich ein Bauch; der Abstand der beiden Bäuche voneinander zeigte sich als abhängig von der Schwingungszahl n und liess sich in befriedigender Weise als eine lineare Function von n dar-

1) Koláček, Wied. Ann. **5.** p. 429. 1878.

stellen, nämlich, wenn 1 mm als Längeneinheit angenommen wird, durch den Ausdruck:

$$506{,}18 - 1{,}2202\,n.$$

Die folgende Tabelle gibt die Werthe von n und die beobachteten, sowie die hiernach berechneten Werthe des Abstandes an.

Tabelle III.

Nr.	n	Abstand der Bäuche beobachtet	berechnet	Differenzen
		mm	mm	
1	322,4	112,0	112,8	−0,8
2	327,9	105,6	106,0	−0,4
3	334,8	97,0	97,6	−0,6
4	342,4	89,6	88,4	+1,2
5	339,0	92,2	92,6	−0,4
6	336,9	95,0	95,0	0,0
7	334,6	98,4	97,8	+0,6
8	332,5	100,4	100,4	0,0
9	329,8	103,8	103,8	0,0
10	327,2	108,2	107,0	+1,2
11	332,7	99,4	100,2	−0,8

Setzt man in jenen Ausdruck für n den oben gefundenen Werth 331,8, so ergibt sich der Abstand der beiden Bäuche voneinander $= 101{,}3$.

Nach der entwickelten Theorie sollte derselbe:

$$= 0{,}7665 \,.\, 128{,}4 = 98{,}4 \text{ sein.}$$

Auf ähnliche Weise, wie die dritte, haben wir auch die fünfte Schwingungsart behandelt. Die Beobachtungsresultate, aus denen die Schwingungszahl abgeleitet ist, gibt

Tabelle IV.

Nr.	n	A	B	y beobachtet	y berechnet	Differenzen
1	458,0	1,77°	0,211°	0,119	0,116	+0,003
2	455,0	1,85	0,203	0,110	0,107	+0,003
3	451,5	1,80	0,185	0,103	0,102	+0,001
4	449,1	1,83	0,185	0,101	0,102	−0,001
5	446,5	1,58	0,170	0,108	0,105	+0,003
6	444,7	2,03	0,220	0,109	0,109	0,000
7	442,1	1,82	0,215	0,118	0,118	0,000
8	447,5	2,05	0,210	0,103	0,104	−0,001
9	453,7	1,93	0,195	0,101	0,105	−0,004
10	460,3	1,53	0,185	0,121	0,124	−0,003

Hieraus hat sich ergeben:

$$\alpha = 0{,}002\,224\,, \qquad \beta = 0{,}000\,070\,86\,, \qquad N = 0{,}000\,003\,089.$$

$$\frac{1}{\alpha} = 449{,}7\,.$$

Nach der entwickelten Theorie sollte die Schwingungszahl $\frac{1}{\alpha}$

$$= 166{,}9\,.\,2{,}6586 = 443{,}8$$

sein; dieses Resultat ist zu corrigiren wegen des Einflusses der Capillarität. Aus den inneren Knoten findet sich:

$$\lambda = 0{,}446\,.\,128{,}4 = 57{,}27$$

und aus den inneren Bäuchen:

$$\lambda = 0{,}445\,.\,128{,}4 = 57{,}15;$$

der eine wie der andere dieser Werthe gibt den corrigirten theoretischen Werth von $\frac{1}{\alpha}$

$$= 448{,}9.$$

Bäuche gibt es bei dieser Schwingungsart zwei innere und zwei äussere. Die Abstände der inneren voneinander und der äusseren voneinander, wie sie gefunden wurden bei den verschiedenen Schwingungszahlen, sind in Tab. V angegeben.

Tabelle V.

Nr.	n	Abstand der inneren Bäuche			Abstand der äusseren Bäuche		
		beobachtet	berechnet	Differenzen	beobachtet	berechnet	Differenzen
		mm	mm		mm	mm	
1	458,0	56,2	56,8	−0,6	161,2	160,8	+0,4
2	455,0	56,6	56,4	+0,2	164,0	164,4	−0,4
3	451,5	56,2	56,0	+0,2	168,4	168,8	−0,4
4	449,1	55,6	55,8	−0,2	171,6	171,6	0,0
5	446,5	55,6	55,4	+0,2	174,8	174,8	0,0
6	444,7	55,2	55,2	0,0	176,6	176,8	−0,2
7	442,1	54,6	54,8	−0,2	180,4	180,0	+0,4
8	447,5	55,6	55,6	0,0	173,6	173,6	0,0
9	453,7	56,8	56,4	+0,4	166,0	166,0	0,0
10	460,3	57,2	57,2	0,0	158,4	158,0	+0,4

Die berechneten Werthe dieser Abstände sind berechnet nach den Ausdrücken:

$$0{,}47828 + 0{,}12306\,n \qquad \text{und} \qquad 711{,}54 - 1{,}2023\,n.$$

Setzt man hier für n 449,7, so ergeben sie:

$$55{,}8 \quad \text{und} \quad 170{,}9,$$

während die Abstände nach der entwickelten Theorie sein sollten:

$$57{,}2 \quad \text{und} \quad 169{,}0.$$