

Über eine besondere Art von Integralgleichungen.

Von

C. RUNGE in Göttingen.

Einige physikalische Probleme führen auf die folgende Art von Integralgleichungen

$$f(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} k(x) \varphi(u-x) dx \quad \text{und} \quad f(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) \varphi(u-x) dx.$$

Im ersten Fall sind die Funktionen $f(u)$ und $k(x)$, im zweiten Falle die Funktion $f(u)$ allein gegeben. In beiden Fällen ist die Funktion $\varphi(x)$ gesucht.

Beide Aufgaben lassen sich in einfacher Weise durch Entwicklung nach Hermiteschen Polynomen lösen. Was zunächst die erste Aufgabe betrifft, so sei

$$\begin{aligned} k(x) &= e^{-x^2} [a_0 + a_1 g_1(x) + a_2 g_2(x) + \dots], \\ \varphi(x) &= e^{-x^2} [b_0 + b_1 g_1(x) + b_2 g_2(x) + \dots], \end{aligned}$$

wo $e^{-x^2} g_n(x)$ den n^{ten} Differentialquotienten von e^{-x^2} bedeutet. Wenn man diese beiden Entwicklungen in das Integral einsetzt, so erhält man

$$f(u) = \sum a_\lambda b_\mu \int_{-\infty}^{+\infty} g_\lambda(x) e^{-x^2} g_\mu(u-x) e^{-(u-x)^2} dx \quad \left(\begin{array}{l} \lambda, \mu = 0, 1, 2, \dots \\ g_0(x) = 1 \end{array} \right),$$

und nachdem man λ -mal partiell integriert hat,

$$f(u) = \sum a_\lambda b_\mu \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} g_{\lambda+\mu}(u-x) e^{-(u-x)^2} dx.$$

Unter dem Integralzeichen wird nun statt x eine neue Integrationsvariable $\xi = \sqrt{2}x - \frac{u}{\sqrt{2}}$ eingeführt. Das Integral geht dadurch über in

$$\frac{e^{-\frac{u^2}{2}}}{\sqrt{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} g_{\lambda+\mu} \left(\frac{u}{2} - \frac{\xi}{\sqrt{2}} \right) e^{-\xi^2} d\xi,$$

und wenn man $\frac{u}{\sqrt{2}} = v$ schreibt,

$$\frac{e^{-v^2}}{\sqrt{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} g_{\lambda+\mu} \left(\frac{v-\xi}{\sqrt{2}} \right) e^{-\xi^2} d\xi.$$

Nun gilt für die ganze rationale Funktion $g_n(x)$ eine Art von binomischem Satz, der folgendermaßen lautet:

$$\sqrt{2}^n g_n \left(\frac{x+y}{\sqrt{2}} \right) = g_n(x) + \binom{n}{1} g_{n-1}(x) g_1(y) + \binom{n}{2} g_{n-2}(x) g_2(y) + \dots + g_n(y),^*$$

wo $\binom{n}{1}$, $\binom{n}{2}$, ... die gewöhnlichen Binomialkoeffizienten bedeuten. Multipliziert man mit $e^{-\xi^2}$, setzt $x = v$, $y = -\xi$ und integriert über ξ von $-\infty$ bis $+\infty$, so verschwinden nach den bekannten Eigenschaften der Hermiteschen Polynome auf der rechten Seite alle Glieder mit Ausnahme des ersten und es ergibt sich demnach,

$$\frac{e^{-v^2}}{\sqrt{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} g_{\lambda+\mu} \left(\frac{v-\xi}{\sqrt{2}} \right) e^{-\xi^2} d\xi = \frac{e^{-v^2}}{\sqrt{2}} \frac{g_{\lambda+\mu}(v)}{\sqrt{2}^{\lambda+\mu}} \sqrt{\pi},$$

und damit

$$f(u) = f(\sqrt{2}v) = \frac{e^{-v^2}}{\sqrt{2}} \sqrt{\pi} \sum a_\lambda b_\mu \frac{g_{\lambda+\mu}(v)}{\sqrt{2}^{\lambda+\mu}} \\ = \frac{e^{-v^2}}{\sqrt{2}} \sqrt{\pi} \left(a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) \frac{g_1(v)}{\sqrt{2}} + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0) \frac{g_2(v)}{\sqrt{2}^2} + \dots \right).$$

* Das Binomialtheorem läßt sich unschwer durch einen Schluß von n auf $n+1$ beweisen. Man differenziert die Gleichung nach x und ersetzt auf beiden Seiten die Ableitungen durch die Ausdrücke, die sich aus dem Bildungsgesetz der Funktionen g_n ergeben,

$$g'_n \left(\frac{x+y}{\sqrt{2}} \right) = 2 \frac{x+y}{\sqrt{2}} g_n \left(\frac{x+y}{\sqrt{2}} \right) + g_{n+1} \left(\frac{x+y}{\sqrt{2}} \right)$$

und

$$g'_1(x) = 2x g_1(x) + g_2(x).$$

Dann ergibt sich

$$\sqrt{2}^{n-1} \left(2 \frac{x+y}{\sqrt{2}} g_n \left(\frac{x+y}{\sqrt{2}} \right) + g_{n+1} \left(\frac{x+y}{\sqrt{2}} \right) \right) \\ = 2x \sqrt{2}^n g_n \left(\frac{x+y}{\sqrt{2}} \right) + g_{n+1}(x) + \binom{n}{1} g_n(x) g_1(y) + \dots + \binom{n}{0} g_1(x) g_{n-1}(y).$$

Jetzt vertauscht man x und y und addiert die Seiten der neuen Gleichung links und rechts dazu. Dann kann man

$$2(x+y) \sqrt{2}^n g_n \left(\frac{x+y}{\sqrt{2}} \right).$$

auf beiden Seiten wegheben und erhält das Theorem für $n+1$.

Denken wir uns also die Funktion $f(u) = f(\sqrt{2}v)$ in die Reihe entwickelt

$$f(\sqrt{2}v) = e^{-v^2} [c_0 + c_1 g_1(v) + c_2 g_2(v) + \dots],$$

so ist

$$(I) \quad \begin{aligned} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} c_0 &= a_0 b_0, & \frac{\sqrt{2}^2}{\sqrt{\pi}} c_1 &= a_0 b_1 + a_1 b_0, \\ \frac{\sqrt{2}^3}{\sqrt{\pi}} c_2 &= a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0, \text{ etc.} \end{aligned}$$

Durch diese Kette von Gleichungen läßt sich aus der Reihe der c_λ , wenn die Reihe der a_λ als bekannt vorausgesetzt wird, die Reihe der b_λ ermitteln (a_0 als von Null verschieden vorausgesetzt). Die Berechnung der Größen b_λ kann in der Form einer Division zweier Potenzreihen ausgeführt werden. Der Dividendus ist die Potenzreihe

$$\frac{\sqrt{2}}{\pi} (c_0 + c_1 \sqrt{2}t + c_2 (\sqrt{2}t)^2 + \dots),$$

der Divisor die Reihe

$$a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots.$$

Die Größen b_λ sind dann die Koeffizienten der Potenzreihe, die den Quotienten darstellt.

Die zweite Aufgabe läßt sich sogleich auf die erste zurückführen. Ist nämlich $a_\lambda = b_\lambda$ und sollen die Größen a_λ aus den Größen c_λ ermittelt werden, so läßt sich das ebenfalls durch die Kette der Gleichungen (I) ausführen, die in diesem Falle übergehen in

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} c_0 = a_0^2, \quad \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sqrt{2} c_1 = 2a_0 a_1, \quad \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sqrt{2}^2 c_2 = a_1^2 + 2a_0 a_2, \text{ etc.}$$

Oder zwischen den entsprechenden Potenzreihen muß die Beziehung bestehen

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} (c_0 + c_1 \sqrt{2}t + c_2 (\sqrt{2}t)^2 + \dots) = (a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots)^2.$$

Das heißt, es ist aus der linken Seite die Quadratwurzel auszuziehen. Damit sind die Koeffizienten a_λ bis auf einen gemeinsamen Vorzeichenwechsel eindeutig bestimmt.

Um die Konvergenz der betrachteten Entwicklungen braucht man sich, soweit physikalische Probleme in Betracht kommen, keine Sorgen zu machen. Denn bei diesen können wir immer annehmen, daß die Funktionen $k(x)$ und $\varphi(x)$ und demnach auch $f(x)$ für hinreichend große absolute Beträge von x Null sind, und damit ist die Konvergenz der Entwicklungen gegeben.