ÜBER DIE ABGRAENZUNG DER LÖSUNGEN EINER ALGEBRAISCHEN GLEICHUNG.

Von **Leo Koenigsberger** (Heidelberg).

Adunanza del 24 maggio 1908.

Die Einschliessung der Lösungen einer algebraischen Gleichung

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_{n-1} x + a_n = 0,$$

worin $a_0, a_1, \ldots, a_n$ reelle oder complexe Grössen bedeuten, mittels eines um den Nullpunkt gelegten Kreisringes, dessen Radien durch

$$M + 1 \quad \text{und} \quad \frac{1}{m+1}$$

gegeben sind, worin M und m den grössten der absoluten Beträge

$$\left|\frac{a_1}{a_0}\right|, \quad \left|\frac{a_2}{a_0}\right|, \ldots, \left|\frac{a_n}{a_0}\right|, \quad \text{resp.} \quad \left|\frac{a_0}{a_n}\right|, \quad \left|\frac{a_1}{a_n}\right|, \ldots, \left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right|$$

bezeichnen, beruht bekanntlich auf der Bemerkung, dass die Ungleichheit

$$\left|\frac{a_1}{a_0} x^{n-1} + \frac{a_2}{a_0} x^{n-2} + \cdots + \frac{a_n}{a_0}\right| \leqq M \frac{|x|^n - 1}{|x| - 1} < |x|^n$$

stets unabhängig von n erfüllt ist, wenn

$$|x| \geqq M + 1,$$

während eine Lösung x_1 der vorgelegten Gleichung die Beziehung

$$\left|\frac{a_1}{a_0} x_1^{n-1} + \frac{a_2}{a_0} x_1^{n-2} + \cdots + \frac{a_n}{a_0}\right| = |x_1|^n$$

erfordert.

Für die Anwendung dieses Satzes wird es sich aber meist um einen möglichst engen Kreisring handeln, dessen Radien zwar unabhängig von den Werthen der Coefficienten der Gleichung sein müssen, wohl aber von dem Grade der Gleichung abhängen dürfen, und bezüglich dieser Forderung mögen im Folgenden einige einfache Bemerkungen Erwähnung finden.

Da für einen beliebigen Werth von x zunächst die Beziehung gilt

$$\left|\frac{a_1}{a_0} x^{n-1} + \frac{a_2}{a_0} x^{n-2} + \cdots + \frac{a_n}{a_0}\right| \leqq \left|\frac{a_1}{a_0}\right| |x|^{n-1} + \left|\frac{a_2}{a_0}\right| |x|^{n-2} + \cdots + \left|\frac{a_n}{a_0}\right|$$

oder nach der für M getroffenen Werthbestimmung

$$\left|\frac{a_1}{a_0}x^{n-1}+\frac{a_2}{a_0}x^{n-2}+\cdots+\frac{a_n}{a_0}\right| \leqq M\frac{|x|^n-1}{|x|-1}$$

ist, so folgt für jede Lösung x_1 der vorgelegten Gleichung

$$|x_1|^n \leqq M\frac{|x_1|^n-1}{|x_1|-1},$$

und es wird somit weder ein Werth x, dessen absoluter Betrag r kleiner als 1 und der Ungleichheit genügt

$$r^{n+1}-(M+1)r^n+M<0,$$

noch ein solcher, für welchen r grösser als 1 und der die Ungleichheit

$$r^{n+1}-(M+1)r^n+M>0$$

befriedigt, eine Wurzel der Gleichung sein können, während $r=1$ mit der Ungleichheit

$$Mn<1$$

unvereinbar ist.

Untersuchen wir nun für einen beliebig gegebenen positiven Werth von M den Lauf des Polynoms

$$R(r)=r^{n+1}-(M+1)r^n+M=(r-1)(r^n-Mr^{n-1}-Mr^{n-2}-\cdots-Mr-M),$$

welches für $r=0$ den positiven Werth M annimmt, so ist ersichtlich, dass $R(r)$ von einem über $r=0$ hinausliegenden Werthe an unter der Annahme, dass $M<\frac{1}{n}$ ist, bis zu $r=1$ negativ sein wird. Da nämlich der Werth von r, welcher

$$\frac{dR}{dr}=r^{n-1}[(n+1)r-n(M+1)]$$

zu Null macht oder

$$r_0=\frac{n}{n+1}(M+1)$$

unter der gemachten Voraussetzung zwischen 0 und 1 liegt, so wird

$$R(r_0)=-\frac{1}{n}\left[\frac{n}{n+1}(M+1)\right]^{n+1}+M$$

als Function von M aufgefasst für $M=0$ negativ, während es für $M=\frac{1}{n}$ verschwindet, und somit für ein $M<\frac{1}{n}$ stets negativ sein, da

$$\frac{dR(r_0)}{dM}=-\left[\frac{n}{n+1}(M+1)\right]^n+1$$

in dem betrachteten Intervalle für M positiv bleibt und erst für $M=\frac{1}{n}$ verschwindet, um dann für grösser werdende M negativ zu bleiben.

In dem Intervalle von $r=0$ bis $r=1$ wird somit die Function $R(r)$ für jeden positiven Werth von M, welcher zwischen 0 und $\frac{1}{n}$ liegt, von dem positiven Werthe

M durch Null ins Negative gehen und für $r = 1$ verschwinden, um dann von $r = 1$ an positiv zu bleiben, für $r = M + 1$ den Werth M anzunehmen und dann ins Unendliche zu wachsen.

Ist $M = \frac{1}{n}$, so bleibt die Function $R(r)$ von $r = 0$ über $r = r_0 = 1$ hinaus, wofür sie verschwindet, stets positiv.

Ist jedoch $M > \frac{1}{n}$, so dass r_0 ausserhalb des Intervalles 0 bis 1, und zwar zwischen 1 und $M + 1$ fällt, so wird, da $R(r_0)$ jedenfalls negativ ist, $R(r)$ bei $r = 1$ negativ zu werden anfangen und erst für ein $r > r_0$ und $< M + 1$ wieder positiv werden, um dann positiv zu bleiben.

Ferner ist aus

$$R(M) = - M^n + M$$

unmittelbar ersichtlich, dass für $M < 1$, also für $M < \frac{1}{n}$ und $M \geqq \frac{1}{n}$ aber < 1, $R(M)$ positiv ist, während es für $M = 1$ verschwindet, dass jedoch, wenn $M > 1$, $R(M)$ negativ ist, und dass endlich, wenn $M < n$ der Werth $r_0 > M$, wenn $M > n$, $r_0 < M$ wird, während für $M = n$, $r_0 = M = n$ ist.

Fassen wir die gewonnenen Resultate zusammen, so folgt, da, wie wir oben gesehen, kein x, dessen absoluter Betrag $r < 1$ und für den $R(r) < 0$ ist, oder dessen $r > 1$ zugleich $R(r) > 0$ liefert, eine Lösung der Gleichung

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n = 0$$

sein kann, dass

1) für $M < \frac{1}{n}$

sämmtliche Lösungen dieser Gleichung innerhalb eines um den Nullpunkt mit einem Radius $r = \alpha$, welcher $> M$ und $< \frac{n}{n+1}(M + 1)$ ist, gezogenen Kreises liegen werden, dass

2) für $M = \frac{1}{n}$

dieselben vom Einheitskreise umschlossen werden, und dass

3) für $M > \frac{1}{n}$

die Lösungen in einem um den Nullpunkt mit einem Radius β beschriebenen Kreise liegen, worin β

für $M \leqq n$ innerhalb der Graenzen $\frac{n}{n+1}(M + 1)$ und $M + 1$, und
für $M > n$ zwischen M und $M + 1$

enthalten ist.

Setzt man in der Gleichung

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n = 0,$$

in welcher a_n von Null verschieden vorausgesetzt wird, $x = \frac{1}{y}$, so ergeben sich für die Gleichung

$$a_n y^n + a_{n-1} y^{n-1} + \cdots + a_1 y + a_0 = 0,$$

wenn m den grössten der Moduln

$$\left|\frac{a_0}{a_n}\right|, \quad \left|\frac{a_1}{a_n}\right|, \ldots, \left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right|$$

bezeichnet, die analogen Graenzen für die Radien der um $y = 0$ gelegten Kreise, innerhalb deren alle Lösungen dieser transformirten Gleichung liegen, und bestimmen somit durch ihre reciproken Werthe die Kreisfläche, ausserhalb deren die Lösungen der vorgelegten Gleichung sich befinden, so dass damit der concentrische Ringraum als das Gebiet für die Lösungen der ursprünglichen Gleichung festgelegt ist.

Zunächst ist nun, da alles auf die Bestimmung der von n und M abhängigen Werthe α und β ankommt, zu bemerken, dass für $M < \frac{1}{n}$ die Lösung α zwischen

$$M \quad \text{und} \quad r_0 = \frac{n}{n+1}(M+1) < M+1$$

liegt, sich also von $M+1$ um weniger als die Einheit unterscheidet, während für $M = \frac{1}{n}$, $\alpha = 1$, und für $M > \frac{1}{n}$ die Lage von β jedenfalls zwischen M und $M+1$ fixirt ist, so dass man in allen Fällen durch $r = M+1$ den gesuchten Werthen α und β um weniger als eine Einheit nahe kommt.

Für die Bestimmung des Werthes β lassen sich jedoch ganz allgemein statt des mit dem Radius $M+1$ um den Nullpunkt gelegten Kreises engere Graenzen ziehen, da

$$R''(r) = n r^{n-1}[(n+1)r - (n-1)(M+1)]$$

für $r = M+1$ ebenso wie $R(r)$ selbst positiv ist, und daher das Newton'sche Annäherungsverfahren von $r = M+1$ ausgehend stets zu Werten führt, welche dem um weniger als eine Einheit von $M+1$ entfernt gelegenen Werthe β, der gesucht wird, näher liegen als $M+1$ selbst.

Setzt man in $R(r)$

$$\beta = M + 1 + \delta,$$

so ergiebt sich aus

$$R(M+1+\delta) = R(M+1) + \delta R'(M+1) + \frac{\delta^2}{2} R''(M+1) + \cdots = 0$$

bei Vernachlässigung der höheren Potenzen von δ als der ersten der Werth

$$\delta = -\frac{M}{(M+1)^n},$$

und somit als engere obere Begraenzung für die Lösungen der algebraischen Gleichung ein um den Nullpunkt gelegter Kreis mit dem von M und n abhängigen Radius

$$r = M + 1 - \frac{M}{(M+1)^n} = \frac{(M+1)^{n+1} - M}{(M+1)^n},$$

wofür $R(r)$ den positiven Werth

$$R(r) = -M\left(\frac{(M+1)^{n+1}-M}{(M+1)^{n+1}}\right)^n - M$$

annimmt.

Die Fortsetzung dieses Verfahrens liefert den entsprechenden Werth

$$\delta' = -\frac{M\left[1-\left(\frac{(M+1)^{n+1}-M}{(M+1)^{n+1}}\right)^n\right]}{\left(\frac{(M+1)^{n+1}-M}{(M+1)^n}\right)^{n-1}\left(\frac{(M+1)^{n+1}-(n+1)M}{(M+1)^n}\right)},$$

und hiernach wieder für den Radius des noch enger gezogenen Kreisgebietes für die Lösungen der algebraischen Gleichung den Ausdruck

$$r = \frac{[(M+1)^{n+1}-M]^n[(2M+1)(M+1)^n-(n+1)M]-M(M+1)^{n^2}}{[(M+1)^{n+1}-M]^{n-1}[M^{n+1}-(n+1)M](M+1)^n},$$

u. s. w., so dass man durch dieses Annäherungsverfahren beliebig nahe an den gesuchten Werth β heranrücken kann, welcher den Radius für das engste Kreisgebiet definiren wird, welches mit Hülfe der oben angestellten Betrachtungen die Lösungen der vorgelegten algebraischen Gleichung umschliesst.

Zur Annäherung an den Punkt α, für den unter der Voraussetzung, dass $M < \frac{1}{n}$, $R(r) = 0$ wird, ist dieses Verfahren zur Aufstellung allgemeiner angenäherterer Formeln nicht brauchbar, da $R(r)$ zu beiden Seiten dieses Werthes für $r=M$ und $r = r_0$ entgegengesetztes Zeichen von dem des Werthes $R''(r)$ hat.

So werden sich für die Gleichung

$$x^5 - 2x^4 - \tfrac{5}{4}x^3 + \tfrac{5}{2}x^2 + \tfrac{1}{4}x - \tfrac{1}{2} = 0,$$

deren Lösungen $-1, -\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}, 2$ sind, als grösste absolute Beträge der Grössen

$$-2,\ -\tfrac{5}{4},\ \tfrac{5}{2},\ \tfrac{1}{4},\ -\tfrac{1}{2}, \quad \text{resp.} \quad -2,\ 4,\ \tfrac{5}{2},\ -5,\ -\tfrac{1}{2}$$

die Werthe

$$M = \tfrac{5}{2}, \quad m = 5$$

ergeben, und es werden daher die Lösungen der Gleichung 5^{ten} Grades in einem Kreisringe liegen, dessen begraenzende Kreise durch die Radien

$$M + 1 = \frac{7}{2} \quad \text{und} \quad \frac{1}{m+1} = \frac{1}{6}$$

bestimmt sind. Wendet man aber die erste der oben gegebenen Annäherungsformeln an, so erhält man für den Radius des aeusseren Kreises

$$r = \frac{\left(\frac{7}{2}\right)^6 - \frac{5}{2}}{\left(\frac{7}{2}\right)^5} = 3{,}49412\ldots,$$

und mit derselben Annäherung für den Radius des inneren Kreises

$$r = \frac{6^5}{6^6 - 5} = 0{,}16668\ldots,$$

von denen der erstere kleiner als $\frac{7}{2}$, der letztere grösser als $\frac{1}{6}$ ist.

Um nun in allen Fällen für jede Grössenlage von M — und zwar nur mittels der angegebenen Abgraenzungsmethode durch einen Kreisring — die ausser $r = 1$ einzigen reellen positiven Lösungen α und β der Gleichung

$$f(r, M) = r^{n+1} - (M + 1)r^n + M = 0$$

zu bestimmen, wollen wir die sich für r als Function von M und n in den verschiedenen Bereichen gültigen Reihenentwicklungen aufstellen und deren Convergenzgebiete bestimmen, wobei uns besonders die Umgebung des Nullpunktes von M, des Werthes $M = \frac{1}{n}$, und des unendlich entfernten Punktes interessiren wird.

Da $M = 0$ die n-fache Lösung $r = 0$ liefert, so wird man, um die Entwicklung von r in der Umgebung des Nullpunktes von M zu erhalten, aus

$$M = (r^n - r^{n+1})(1 - r^n)^{-1} = r^n - r^{n+1} + r^{2n} - r^{2n+1} + r^{3n} - r^{3n+1} + \cdots$$

oder

$$M^{\frac{1}{n}} = r(1 - r + r^n - r^{n+1} + r^{2n} - r^{2n+1} + \cdots)^{\frac{1}{n}},$$

wenn

$$M^{\frac{1}{n}} = \mu$$

gesetzt wird, in der Umgebung von $\mu = 0$ die Entwicklung erhalten

$$r = b_1\mu + b_2\mu^2 + b_3\mu^3 + \cdots$$

oder in der Umgebung von $M = 0$

$$r = b_1 M^{\frac{1}{n}} + b_2 M^{\frac{2}{n}} + b_3 M^{\frac{3}{n}} + \cdots,$$

worin sich aus der Gleichung

$$\varphi(r, \mu) = r(1 - r + r^n - r^{n+1} + r^{2n} - r^{2n+1} + \cdots)^{\frac{1}{n}} - \mu = 0$$

und den durch Differentiation nach μ hergeleiteten Beziehungen

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \mu} + \frac{\partial \varphi}{\partial r}\frac{dr}{d\mu} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \mu^2} + 2\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \mu \partial r}\frac{dr}{d\mu} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2}\left(\frac{dr}{d\mu}\right)^2 + \frac{\partial \varphi}{\partial r}\frac{d^2 r}{d\mu^2} = 0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

die Coefficienten in der Form ergeben

$$b_1 = \frac{1}{1!}\left(\frac{dr}{d\mu}\right)_0 = 1, \qquad b_2 = \frac{1}{2!}\left(\frac{d^2 r}{d\mu^2}\right)_0 = \frac{1}{n_1}, \quad \ldots,$$

zu deren weiterer Berechnung die bekannten Recursionsformeln zu benutzen sind.

So lange nun die oben für r gefundene, nach positiven steigenden ganzen Potenzen von $\mu = M^{\frac{1}{n}}$ fortschreitende Reihe convergent bleibt, wird man für jeden innerhalb des Convergenzbereiches liegenden positiven Werth von M die gesuchten genauen Graenzen α und β für die möglichst grösste Einschränkung des Convergenzringes finden, wenn man in diese Reihe den reellen positiven Werth von $M^{\frac{1}{n}}$ einsetzt, da α und β die einzigen reellen und positiven Lösungen der von dem Factor $r - 1$ befreiten Gleichung

$$r^{n+1} - (M + 1)r^n + M = 0$$

sind.

Es bleibt somit zunächst die Frage zu erörtern, wie weit sich der um den Nullpunkt von M gelegte n-fache Convergenzkreis für die Reihe

$$r = M^{\frac{1}{n}} + b_2 M^{\frac{2}{n}} + b_3 M^{\frac{3}{n}} + \cdots$$

erstreckt, oder welches das weiteste um den Nullpunkt von M, welcher ein n-facher Verzweigungspunkt von r ist, gelegte Kreisgebiet ist, in welches keine weiteren Verzweigungspunkte der Function r von M, oder wenigstens keine mehrfachen Punkte eintreten, insofern man diese Frage wieder nur mit Hülfe von Anwendung der bekannten Einschränkung der Lösungen einer Gleichung auf ein Kreisringgebiet beantworten kann.

Da aber die mehrfachen Lösungen der Gleichung

$$f(r, M) = r^{n+1} - (M + 1)r^n + M = 0$$

die Gleichung

$$\frac{df(r, M)}{dr} = r^{n-1}[(n + 1)r - n(M + 1)]$$

befriedigen, so werden sich die Werthe von M, für welche r mehrfache Lösungen besitzt, als die Wurzeln der Gleichung

$$\left(\frac{n}{n+1}(M + 1)\right)^{n+1} - nM = 0$$

ergeben, zu denen sich die mehrfachen Werthe von r durch den Ausdruck bestimmen

$$r = \frac{n}{n+1}(M + 1),$$

und es soll nun mittels jenes Abgraenzungsatzes das Gebiet bezeichnet werden, über welches hin sich diese Werthe M, für welche r mehrfache Lösungen annimmt, erstrecken.

Setzt man die oben für M gefundene Gleichung in die Form

$$M^{n+1} + (n + 1)_1 M^n + (n + 1)_2 M^{n-1} + \cdots + (n + 1)_{n-1} M^2$$
$$+ \left[(n + 1)_1 - n\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}\right] M + 1 = 0,$$

so werden, wenn der grösste der absoluten Beträge der Zahlen

$$1,\ (n+1)_1,\ (n+1)_2,\ (n+1)_3,\ \ldots,\ (n+1)_{n-1},\ (n+1)_1 - n\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}$$

mit q bezeichnet wird, die Werthe $\frac{1}{q+1}$ und $q+1$, von denen der eine kleiner, der andere grösser als die Einheit ist, die Radien des um den Nullpunkt von M gelegten Kreisringes angeben, in welchem sämmtliche anderen Werthe von M ausser dem Nullpunkt liegen, welchen mehrfache Werthe von r entsprechen, also gewiss auch sämmtliche Verzweigunspunkte sich befinden.

Nun ist aber leicht ersichtlich, dass — von $n=2$ abgesehen — unter den oben bezeichneten Zahlen

$$n\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}-(n+1)_1>(n+1)_1,$$

da $\left(\frac{n+1}{n}\right)^n>2$; es ist aber andererseits

$$n\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}-(n+1)_1<(n+1)_2$$

oder

$$\left(\frac{n+1}{n}\right)^n-1<\frac{n}{2},$$

da

$$n\cdot\frac{1}{n}+\frac{n(n-1)}{1.2}\frac{1}{n^2}+\cdots+\frac{1}{n^n}<1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}<2\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]$$

ist; nur die Fälle $n=1$ und $n=2$ werden jene für die beiden Coefficienten aufgestellte Ungleichheit nicht befriedigen, und die grösste Zahl jener Zahlenreihe die Werthe 2 und $\frac{15}{4}$ annehmen, so dass in diesen Fällen, deren besondere Behandlung aber kein weiteres Interesse hat, die Radien der inneren Convergenzkreise durch $\frac{1}{3}$ und $\frac{4}{19}$, die der aeusseren durch 3 und $\frac{19}{4}$ gegeben, also jedenfalls $<\frac{1}{n}$, resp. $>n$ sind.

Da nun die Binomialcoefficienten in der obigen Zahlenreihe bis zum mittleren hin wachsen und dann wieder abnehmen, so wird die grösste Zahl in jener Reihe

$$\text{wenn } n=2\nu,\ q=(2\nu+1)_\nu \text{ und wenn } n=2\nu+1,\ q=(2\nu+2)_{\nu+1}$$

sein, und es werden daher sämmtliche mehrfache Lösungen — von $M=0$ abgesehen — innerhalb des von den Kreisen mit den Radien

$$\frac{1}{1+(2\nu+1)_\nu} \text{ und } 1+(2\nu+1)_\nu, \quad \text{resp.} \quad \frac{1}{1+(2\nu+2)_{\nu+1}} \text{ und } 1+(2\nu+2)_{\nu+1},$$

welche $<\frac{1}{2n}$, bez. $>2n$ sind, begraenzten, um den Nullpunkt gezogenen Ringes liegen.

Die oben für r als Function von M gefundene Reihe

$$r=M^{\frac{1}{n}}+b_2M^{\frac{2}{n}}+b_3M^{\frac{3}{n}}+\cdots$$

wird somit jedenfalls für alle positiven M convergent sein, welche unter $\frac{1}{q+1}$ liegen, und für diese Werthe von M wird daher mittels dieser Reihe, der Werth von α berechnet werden können, für welchen

$$f(r,\ M) = R(r) = 0$$

wird, oder welcher den Radius des um den Nullpunkt beschriebenen Kreises angiebt, über den hinaus sich die Lösungen der gegebenen Gleichung

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n = 0$$

nicht erstrecken, wobei wiederholt werden möge, dass der Convergenzbereich der Reihe für r nur durch die Abgraenzungsmethode mittels eines Kreisringes festgestellt werden sollte.

Sei z. B. die kubische Gleichung gegeben

$$x^3 + \tfrac{1}{20} x^2 - \tfrac{1}{64} x - \tfrac{1}{1280} = 0,$$

deren Lösungen $-\frac{1}{20}$, $-\frac{1}{8}$, $+\frac{1}{8}$ sind, so würde der höchste absolute Betrag der Zahlen

$$\frac{1}{20},\ -\frac{1}{64},\ -\frac{1}{1280}$$

für den Radius des aeusseren Kreises des Ringraumes für die Lösungen nach der ursprünglichen Abgraenzungsmethode den Werth $M + 1 = \frac{1}{20} + 1 = \frac{21}{20}$ liefern; wollen wir aber die engste obere Graenze angeben oder $\varkappa$ bestimmen, so würde, da $n=3$ also $\nu = 1$ und

$$M = \frac{1}{20} < \frac{1}{1 + 4_2} < \frac{1}{7} \quad \text{also kleiner als} \quad \frac{1}{n} = \frac{1}{3}$$

ist, der Werth $\varkappa$ durch die Reihe

$$\varkappa = \left(\tfrac{1}{20}\right)^{\frac{1}{3}} + b_2 \left(\tfrac{1}{20}\right)^{\frac{2}{3}} + b_3 \left(\tfrac{1}{20}\right)^{\frac{3}{3}} + \cdots$$

bestimmt werden, für welche mittels der oben bezeichneten Recursionsformeln sich die Werthe der Coefficienten

$$b_2 = \tfrac{1}{3},\ b_3 = 1,\ b_4 = \tfrac{44}{81},\ \ldots$$

ergeben, und somit $\varkappa$ den Werth annehmen

$$\varkappa = 0{,}368 + 0{,}045 + 0{,}050 + 0{,}009 + \cdots = 0{,}472 < \tfrac{5}{12},$$

welcher den Radius des engsten, um den Nullpunkt gelegten Kreises darstellt, innerhalb dessen die Lösungen der kubischen Gleichung liegen; $\varkappa$ liegt somit zwischen $\frac{5}{12}$ und $\frac{1}{2}$, da $R(r)$ für $r = \frac{5}{12}$ positiv, für $r = \frac{1}{2}$ negativ wird, während das bekannte Abgraenzungsgesetz die viel weitere Graenze $\frac{21}{20}$ liefert.

Für alle Werthe von $M < \dfrac{1}{n}$, welche die oben für grade und ungrade n angegebenen Graenzen nicht überschreiten, würde also die nach Potenzen von $M^{\frac{1}{n}}$ fortschreitende Reihe den gesuchten Werth von $\varkappa$ liefern; für diejenigen Werthe von M jedoch, die, wenn auch kleiner als $\dfrac{1}{n}$, über jene Graenzen hinaus liegen, würde nur mittels der Abgraenzungsmethode nicht auf die Convergenz der Reihe geschlossen werden können, und somit für das Intervall der Werthe von M zwischen

$$\frac{1}{1+(2\nu+1)_\nu} \quad \text{und} \quad \frac{1}{2\nu}, \qquad \text{resp.} \qquad \frac{1}{1+(2\nu+2)_{\nu+1}} \quad \text{und} \quad \frac{1}{2\nu+1}$$

die Methode für die Berechnung des Werthes α noch einer weiteren Ergänzung bedürfen.

Wir wollen jedoch zunächst auf die Bestimmung des Werthes β für die Werthe von M, welche grösser als $\frac{1}{n}$ sind, übergehen und zu dem Zwecke die Entwicklung derjenigen Lösung r der Gleichung

$$r^{n+1}-(M+1)r^n+M=0$$

in der Umgebung des unendlichentfernten Punktes M aufstellen, welche selbst unendlich wird.

Setzt man in diese Gleichung

$$r=\frac{1}{\rho}, \qquad M=\frac{1}{\mu},$$

so ergiebt sich aus

$$\rho^{n+1}-(\mu+1)\rho+\mu=0$$

oder

$$\varphi(\rho,\mu)=\rho+\rho^2+\rho^3+\cdots+\rho^n-\mu=0$$

für $\mu=0$ die einfache Lösung $\rho=0$, und es folgt somit, da durch Differentiation dieser Gleichung vermöge der bekannten Recursionsformeln sich die Werthe

$$\frac{1}{1!}\left(\frac{d\rho}{d\mu}\right)_0=1, \quad \frac{1}{2!}\left(\frac{d^2\rho}{d\mu^2}\right)_0=-1, \quad \frac{1}{3!}\left(\frac{d^3\rho}{d\mu^3}\right)_0=1, \quad \frac{1}{4!}\left(\frac{d^4\rho}{d\mu^4}\right)_0=-1, \ldots$$

ergeben, welche erst vom n^{ten} Differentialquotienten an von n selbst abhängen, die um $\mu=0$ gültige Entwicklung von ρ

$$\rho=\mu-\mu^2+\mu^3-\mu^4+\mu^5-\cdots$$

oder in der Umgebung von $M=\infty$ die Entwicklung der einfachen Lösung $r=\infty$ der obigen Gleichung in der Form

$$r^{-1}=M^{-1}-M^{-2}+M^{-3}-M^{-4}+\cdots$$

oder

$$r=M(1-M^{-1}+M^{-2}-M^{-3}+\cdots)^{-1},$$

welche Reihe um $M=\infty$ für $r=\infty$ convergent ist.

Um nun den Convergenzbereich derselben festzustellen — und zwar wieder nur in so weit, als es sich mit Hülfe der wiederholt benutzten Abgraenzungsmethode für die mehrfachen Lösungen ermöglichen lässt — müssen zunächst diejenigen Werthe von μ untersucht werden, für welche die Gleichung

$$\rho^{n+1}-(\mu+1)\rho+\mu=0$$

und die nach ρ genommene Ableitung

$$(n+1)\rho^n-(\mu+1)=0$$

gemeinsame Lösungen besitzen, also die Wurzeln der Gleichung

$$(\mu+1)^{n+1}-n\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}\mu^n=0$$

oder

$$\mu^{n+1} - \left[n\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1} - (n+1)_1\right]\mu^n + (n+1)_2\mu^{n-1} + \cdots + 1 = 0.$$

Die mehrfachen Punkte μ liegen somit ausserhalb eines mit dem Radius $\frac{1}{q+1}$ um den Nullpunkt von μ gelegten Kreises, worin q den grössten der absoluten Beträge der Zahlen

$$1, \quad -n\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1} + (n+1)_1, \quad (n+1)_2, \quad (n+1)_3, \quad \ldots$$

darstellt, also die mehrfachen Punkte von M innerhalb eines Kreises, der um $M = 0$ mit dem Radius $q+1$ gelegt ist, worin $q+1$ nach dem Früheren für $n = 2\nu$ und $n = 2\nu + 1$ durch die Ausdrücke

$$1 + (2\nu + 1)_\nu \quad \text{resp.} \quad 1 + (2\nu + 2)_{\nu+1},$$

welche grösser als n sind, gegeben ist — was mit dem oben gefundenen Radius des Kreises übereinstimmt, welcher die aeussere Begraenzung des Ringraumes bildete, innerhalb dessen sich die Punkte M befanden, welche mehrfache Lösungen der Gleichung

$$r^{n+1} - (M+1)r^n + M = 0$$

lieferten. Es wird somit die oben aufgestellte, nach negativen ganzen Potenzen von M fortschreitende Reihe jedenfalls convergent sein innerhalb eines Kreisringes, welcher begraenzt ist von dem um den Nullpunkt von M mit dem Radius $q + 1 > \frac{1}{n}$ gezogenen Kreise und dem unendlich grossen Kreise, β somit für jeden positiven reellen Werth von M bestimmt werden können, der zwischen $q+1$ und ∞ liegt.

Sei z. B. die biquadratische Gleichung gegeben

$$x^4 - x^3 - 27x^2 + 25x + 50 = 0,$$

deren Lösungen -5, -1, 2, 5 sind, so würde, da der grösste absolute Betrag der Zahlen -1, -27, 25, 50 $M = 50$ ist, sich zunächst als Graenze für β, welches zwischen M und $M+1$, also 50 und 51 fällt, $M + 1 = 51$ ergeben. Wendet man ferner das oben zur angenäherten Berechnung von β benutzte NEWTON'sche Annäherungsverfahren an, so erhält man aus der Gleichung

$$r^5 - 51r^4 + 50 = 0$$

nach der früher aufgestellten Formel als erste Annäherung für β

$$r = 50{,}999992609.$$

Da aber $M = 50$ und n grade, wobei $\nu = 2$, so erstreckt sich der oben betrachtete concentrische Kreisring von $M = \infty$ bis $M = 1 + (2\nu + 1)_\nu = 11$, so dass $M = 50$ innerhalb desselben liegt, und daher der genaue Werth von β aus der oben entwickelten, nach negativen Potenzen von M fortschreitenden Reihe für r berechnet werden kann. Setzt man

$$r = M + 1 + b_1 M^{-1} + b_2 M^{-2} + b_3 M^{-3} + b_4 M^{-4} + \cdots$$

in die Gleichung

$$r^5 - (M+1)r^4 + M = 0$$

ein, so ergiebt sich

$$b_1 = 0, \quad b_2 = 0, \quad b_3 = -1, \quad b_4 = 4, \quad \ldots,$$

und die nach negativen Potenzen von M fortschreitende Reihe lautet danach

$$r = M + 1 - M^{-3} + 4M^{-4} + \cdots$$

und liefert für $M = 50$ den Werth

$$\beta = 50{,}99999264.$$

Die Bestimmung der reellen positiven Lösungen α und β der Gleichung

$$r^{n+1} - (M+1)r^n + M = 0$$

ist somit ermöglicht für solche Werthe von M, welche zwischen 0 und $\frac{1}{q+1}$, und für diejenigen, welche zwischen $q+1$ und ∞ liegen, worin

$$\text{für } n = 2\nu, \quad q = (2\nu+1)_\nu, \qquad \text{für } n = 2\nu+1, \quad q = (2\nu+2)_{\nu+1}$$

ist, und es erübrigt somit nur noch zur genauen Abgraenzung der Lösungen irgend einer algebraischen Gleichung die reellen positiven Lösungen der oben bezeichneten Gleichung in r und M für den Fall zu bestimmen, dass M zwischen den Graenzen $\frac{1}{q+1}$ und $q+1$ liegt.

Die Gleichung zwischen r und M besitzt für $M = \frac{1}{n}$ die Lösung 1 doppelt, da r einerseits für jedes M den Werth 1 annimmt, andererseits die erste Ableitungsgleichung

$$(n+1)r^n - n(M+1)r^{n-1} = 0,$$

aber nicht mehr die zweite, ebenfalls für $M = \frac{1}{n}$ durch $r = 1$ befriedigt wird, und es wird somit $r - 1$ in der Umgebung von $M = \frac{1}{n}$ als eine nach positiven ganzen Potenzen von $M - \frac{1}{n}$ fortschreitende Reihe sich darstellen lassen.

Setzt man in der Gleichung

$$r^{n+1} - (M+1)r^n + M = 0$$

$$M = \mu + \frac{1}{n}, \qquad r = \rho + 1,$$

so ergiebt sich

$$(\rho+1)^{n+1} = \left(\mu + \frac{1}{n} + 1\right)(\rho+1)^n + \left(\mu + \frac{1}{n}\right) = 0$$

woraus

$$\mu = \frac{(\rho+1)^{n+1} - \frac{n+1}{n}(\rho+1)^n + \frac{1}{n}}{(\rho+1)^n}$$

oder, wie leicht zu sehen, in der Umgebung von $\mu = 0$, $\rho = 0$

$$\mu = \frac{n+1}{2n}\rho + \frac{1}{n}\left[(n+1)_3 - \frac{n+1}{n}n_3 - \frac{n_2}{n_1}\left((n+1)_2 - \frac{n+1}{n}n_2\right)\right]\rho^2 + \cdots,$$

und hieraus wieder wie oben mittels der Recursionsformeln

$$\frac{1}{1!}\left(\frac{d\rho}{d\mu}\right)_0 = \frac{2n}{n+1}, \quad \frac{1}{2!}\left(\frac{d^2\rho}{d\mu^2}\right)_0 = -\frac{2n^2(n-1)}{3(n+1)^2}, \quad \ldots,$$

also

$$\rho = \frac{2n}{n+1}\mu - \frac{2n^2(n-1)}{3(n+1)^2}\mu^2 + \cdots$$

oder

$$r = 1 + \frac{2n}{n+1}\left(M - \frac{1}{n}\right) - \frac{2}{3}(n-1)\left(\frac{n}{n+1}\right)^2\left(M - \frac{1}{n}\right)^2 + \cdots$$

folgt.

Um nun wieder — und zwar nur mittels jenes Abgraenzungsatzes — einen bestimmten Bereich für die um $M = \frac{1}{n}$ herum convergirende Potenzreihe festzustellen, werden wir die Werthe von μ zu suchen haben, welchen mehrfache Werthe r der Gleichung

$$r^{n+1} - \left(\mu + \frac{1}{n} + 1\right)r^n + \mu + \frac{1}{n} = 0$$

entsprechen, die also zugleich der Gleichung genügen

$$(n+1)r^n - n\left(\mu + \frac{1}{n} + 1\right)r^{n-1} = 0;$$

da aber r nur für $\mu = -\frac{1}{n}$ oder für $M = 0$ verschwindet, und dieser Fall nach dem Früheren hier auszuschliessen ist, so wird sich aus der zweiten der obigen Gleichungen

$$r = \frac{n\left(\mu + \frac{1}{n} + 1\right)}{n+1}$$

ergeben, und somit die erste derselben die gesuchten Werthe für μ als die Lösungen der Gleichung liefern

$$\left(\mu + \frac{1}{n} + 1\right)^{n+1} - n\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}\left(\mu + \frac{1}{n}\right) = 0,$$

oder, da die Coefficienten von μ^1 und μ^0 verschwinden

$$\mu^{n+1} + (n+1)_1\left(\frac{n+1}{n}\right)\mu^n + (n+1)_2\left(\frac{n+1}{n}\right)^2\mu^{n-1} + \cdots + (n+1)_{n-1}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n-1}\mu^2 = 0$$

und durch Division mit μ^2

$$\mu^{n-1} + (n+1)_1\left(\frac{n+1}{n}\right)\mu^{n-2} + (n+1)_2\left(\frac{n+1}{n}\right)^2\mu^{n-3} + \cdots + (n+1)_{n-1}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n-1} = 0.$$

Um die unterste Graenze für diese Lösungen und zwar wieder wermöge des Abgraenzungsatzes zu bestimmen, haben wir die Quotienten

$$\frac{1}{(n+1)_{n-1}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n-1}},\quad \frac{(n+1)_1\left(\frac{n+1}{n}\right)}{(n+1)_{n-1}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n-1}},\ \ldots,\ \frac{(n+1)_{n-1}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n-2}}{(n+1)_{n-1}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n-1}}$$

zu bilden und den grössten Werth q derselben zu bestimmen. Da aber der Zähler

$$(n+1)_\alpha\left(\frac{n+1}{n}\right)^\alpha = \frac{(n+1)n(n-1)\ldots[n+1-(\alpha-1)]}{1.2.3.\ldots\alpha}\left(\frac{n+1}{n}\right)^\alpha$$

des $(\alpha+1)^{\text{ten}}$ Gliedes aus dem Zähler

$$(n+1)_{\alpha-1}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{\alpha-1} = \frac{(n+1)n(n-1)\ldots[n+1-(\alpha-2)]}{1.2.3.\ldots(\alpha-1)}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{\alpha-1}$$

des α^{ten} Gliedes sich ergiebt, wenn man letzteren mit

$$\frac{n+1-(\alpha-1)}{\alpha}\,\frac{n+1}{n}$$

multiplicirt, so werden die Zähler, also wegen Gleichheit des Nenners auch die Brüche so lange wachsen, bis dieser Ausdruck anfängt ein ächter Bruch zu werden. Ist nun $n=2\nu$, so geht derselbe über in

$$\frac{2\nu+1-(\alpha-1)}{\alpha}\,\frac{2\nu+1}{2\nu},$$

wird für $\alpha=1, 2, \ldots, \nu+1$ grösser als 1 und erst für $\alpha=\nu+2$ anfangen ächt gebrochen zu sein, so dass für $n=2\nu$ der grösste der obigen Brüche

$$q_1 = \frac{(2\nu+1)_{\nu+1}\left(\frac{2\nu+1}{2\nu}\right)^{\nu+1}}{(2\nu+1)_{2\nu-1}\left(\frac{2\nu+1}{2\nu}\right)^{2\nu-1}} = \frac{(2\nu+1)_{\nu+1}}{(2\nu+1)_2\left(\frac{2\nu+1}{2\nu}\right)^{\nu-2}}$$

ist, während sich für $n=2\nu+1$

$$q_1 = \frac{(2\nu+2)_{\nu+1}\left(\frac{2\nu+2}{2\nu+1}\right)^{\nu+1}}{(2\nu+2)_{2\nu}\left(\frac{2\nu+2}{2\nu+1}\right)^{2\nu}} = \frac{(2\nu+2)_{\nu+1}}{(2\nu+2)_2\left(\frac{2\nu+2}{2\nu+1}\right)^{\nu-1}}$$

ergiebt, und daher die nach positiven ganzen Potenzen von μ fortschreitende Reihe für ρ für alle reellen Werthe von μ convergirt, welche zwischen $-\frac{1}{q_1+1}$ und $+\frac{1}{q_1+1}$ liegen.

Es wird somit die oben aufgestellte, nach positiven ganzen Potenzen von $M-\frac{1}{n}$ fortschreitende Reihe für r für alle reellen Werthe von M convergiren, welche:

für $n=2\nu$, zwischen $$\frac{1}{2\nu}-\frac{1}{1+\frac{(2\nu+1)_{\nu+1}}{(2\nu+1)_2}\left(\frac{2\nu}{2\nu+1}\right)^{\nu-2}}$$

und

$$\frac{1}{2\nu} + \frac{1}{1 + \frac{(2\nu+1)_{\nu+1}}{(2\nu+1)_2}\left(\frac{2\nu}{2\nu+1}\right)^{\nu-2}},$$

für $n = 2\nu + 1$, zwischen $\frac{1}{2\nu+1} - \frac{1}{1 + \frac{(2\nu+2)_{\nu+1}}{(2\nu+2)_2}\left(\frac{2\nu+1}{2\nu+2}\right)^{\nu-1}}$

und

$$\frac{1}{2\nu+1} + \frac{1}{1 + \frac{(2\nu+2)_{\nu+1}}{(2\nu+2)_2}\left(\frac{2\nu+1}{2\nu+2}\right)^{\nu-1}}$$

liegen.

Die früher gefundene Entwicklung von r nach positiven steigenden Potenzen von $M^{\frac{1}{n}}$ galt aber — wenigstens soweit sich die Untersuchung auf die Abgraenzungsmethode stützt — nur für diejenigen Werthe von $M < \frac{1}{n}$, welche sich von 0 an für alle graden $n = 2\nu$ — und aehnlich für ungrade — bis

$$\frac{1}{1 + (2\nu+1)_\nu} = M_1 < \frac{1}{4\nu}$$

erstrecken, so dass jene Reihe für alle M von $M = M_1$ bis $M = \frac{1}{2\nu}$ nicht zur Berechnung von α benutzt werden konnte, während die letztgefundene nach positiven ganzen Potenzen von $M - \frac{1}{n}$ fortschreitende Reihe convergent gefunden wurde für alle Werthe von $M < \frac{1}{n}$ zwischen

$$\frac{1}{2\nu} - M_2 \quad \text{und} \quad \frac{1}{2\nu} + M_2,$$

wenn

$$\frac{1}{1 + \frac{(2\nu+1)_{\nu+1}}{(2\nu+1)_2}\left(\frac{2\nu}{2\nu+1}\right)^{\nu-2}} = M_2$$

gesetzt wird.

Bemerkt man nun, dass $\frac{1}{2\nu} - M_2$ negativ ist für $\nu = 2, 3, 4, 5$ während es von $\nu = 6$ an positiv bleibt [1]), so wird die letztere Reihe für r, wenn $\nu = 2, 3, 4, 5$ ist,

---

[1]) Dass für $\nu \geqq 6$ der Ausdruck $\frac{1}{2\nu} - M_2$ positiv ist, geht daraus hervor, dass wenn die Ungleichheit $\frac{1}{2\nu} > M_2$ bis zu einem bestimmten ν hin gültig ist, — und dass sie für $\nu = 6$ erfüllt wird, ist unmittelbar ersichtlich — wenn also

$$2\nu - 1 < \frac{(2\nu-1)(2\nu-2)\ldots(\nu+2)}{3.4\ldots\nu}\left(\frac{2\nu}{2\nu+1}\right)^{\nu-2}$$

nach positiven steigenden ganzen Potenzen von $M - \frac{1}{2\nu}$ fortschreitend convergent sein für alle Werthe von M, welche sich von dem negativen Werthe $\frac{1}{2\nu} - M_2$ bis zu dem positiven Werthe $\frac{1}{2\nu} + M_2$ erstrecken, und somit diese Reihe allein ausreichen zur Berechnung der Werthe von α für alle $M < \frac{1}{2\nu}$; anders verhält es sich jedoch für alle $\nu \geqq 6$, für welche $\frac{1}{2\nu} - M_2$ eine positive Grösse darstellt. Dann wird, da $M_2 > M_1$, also

$$M_1 + \frac{1}{2\nu} - M_2 < \frac{1}{2\nu}$$

ist, für alle Werthe von $M < \frac{1}{2\nu}$, welche zwischen M_1 und M_2 liegen, — wieder mit dem stets gemachten Vorbehalt der Bestimmung des Convergenzgebietes lediglich mit Hülfe der bekannten Abgraenzungsmethode — die Bestimmung der Grössen α weder vermöge der nach positiven ganzen Potenzen von $M^{\frac{1}{n}}$, noch vermöge der nach positiven ganzen Potenzen von $M - \frac{1}{2\nu}$ fortschreitenden Reihe getroffen werden können — und aehnliches gilt für ungrade n.

Ferner dehnte sich das Convergenzgebiet der nach Potenzen von $M - \frac{1}{2\nu}$ fortschreitenden Reihe bis zu dem Werthe $\frac{1}{2\nu} + M_2$ aus, welcher Werth, da M_2 ein ächter Bruch und für alle $\nu \geqq 6$ unter $\frac{1}{2\nu}$ liegt, kleiner als $\frac{1}{\nu}$ sein wird [2]), während das Convergenzgebiet um den unendlichentfernten Punkt durch einen Ring bezeichnet war, dessen innerer Kreis den Radius

$$1 + (2\nu + 1)_\nu = M_3$$

hatte, und es werden somit wieder für alle Werthe von M, welche zwischen $\frac{1}{2\nu} + M_2$

---

ist, während für das nächstfolgende ν die Ungleichheit zu bestehen aufhörte, also

$$\frac{(2\nu+1)2\nu\ldots(\nu+3)}{3.4\ldots(\nu+1)}\left(\frac{2\nu+2}{2\nu+3}\right)^{\nu-1} < 2\nu+1$$

wäre, durch Multiplication dieser beiden Ungleichheiten sich

$$\frac{4\nu(2\nu-1)}{(\nu+2)(2\nu+3)} < \left(\frac{2\nu(2\nu+3)}{(2\nu+1)(2\nu+2)}\right)^{\nu-2}$$

ergeben würde. Nun ist aber die rechte Seite ein ächter Bruch, während die linke Seite für positive ganze $\nu > 2$ grösser als die Einheit ist, und es wird somit für alle $\nu \geqq 6$ die Grösse $\frac{1}{2\nu} - M_2$ positiv sein — aehnliches gilt für ungrade n.

[2]) Für $\nu < 6$ wird $\frac{1}{2\nu} + M_2 > \frac{1}{\nu}$, aber jedenfalls < 1.

und M_3 liegen, die Grössen α und β weder aus der nach Potenzen von $M - \frac{1}{2\nu}$, noch nach der nach Potenzen von M^{-1} fortschreitende Reihe berechnet werden können.

Um die Bestimmung der Grössen α und β, deren Werthe die engsten Abgraenzungen der Lösungen der Gleichung

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n = 0$$

lieferten, für die beiden fehlenden Intervalle der M-Werthe zu treffen, hätte man nur einen ausserhalb dieser Intervalle gelegenen M-Werth zu wählen, aus einer der beiden gültigen Reihenentwicklungen den r-Werth zu berechnen und nun r in der Umgebung dieser Werthe in eine Reihe zu entwickeln, deren Convergenzbereich sich dann in die beiden fehlenden Intervalle hinein erstrecken wird. Da aber die solchen M zugehörigen Werthe von r vermöge der obigen Reihenentwicklungen auch selbst schon vom Grade n der Gleichung abhängen, so wird die zur Berechnung der α-und β-Werthe aufzustellende Reihenentwicklung complicirter sein als die oben durchgeführten und sich daher für die Anwendung weniger brauchbar erweisen.

Heidelberg, den 9. Mai 1908.

L. KOENIGSBERGER.