II. *Ueber die optischen Axen der allgemeinen Wellenoberflächen von Cauchy und Neumann;*
von L. Pochhammer.

Nachdem zuerst Fresnel eine theoretische Ableitung der Wellenoberfläche in krystallinischen Medien gegeben hatte, ist, wie bekannt, später dasselbe Problem sowohl von Cauchy, als von Hrn. Neumann in Königsberg in genauerer Weise behandelt worden. Das Resultat, zu welchem dieselben gelangten, differirt in sofern von dem Fresnel's, als die von ihnen aufgefundenen Wellenoberflächen zwar die Fresnel'sche als speciellen Fall enthalten, aber allgemeiner als diese sind. Es wird daher nicht als theoretisch bewiesen betrachtet werden können, dafs bei Lichtbewegungen in Krystallen immer die Fresnel'sche Wellenoberfläche anzuwenden sey; die Versuche haben allerdings bisher nur die letztere bestätigt.

Die Wellenoberflächen von Cauchy und von Neumann weichen ebenfalls noch von einander ab, wenn sie sich auch sehr ähnlich sind. In Folge der verschiedenartigen Ableitung der fundamentalen Differentialgleichungen sind in der Wellenoberfläche von Cauchy drei Coëfficienten mehr enthalten, als in der von Neumann. Wenn man diese drei Coëfficienten verschwinden läfst, stimmen die beiden Flächen genau überein.

Im Folgenden soll eine Eigenschaft der allgemeinen Wellenoberflächen von Cauchy und Neumann behandelt werden, welche besonders auch für ihr Verhältnifs zu der Fresnel'schen Fläche von Wichtigkeit ist. Es sollen nämlich die *optischen Axen* der gedachten Flächen aufgesucht werden. Man unterscheidet in der Optik immer nur zwischen isotropen, einaxigen und zweiaxigen Krystallen. Aus den theoretischen Ableitungen von Cauchy und Neumann ergiebt sich indessen die Möglichkeit, dafs auch bei Medien, welche drei auf einander senkrechte Symmetrieebenen haben, eine erheblich gröfsere Anzahl optischer Axen als zwei vorkommen. Im Maximum ist, wie unten ausgeführt werden wird, diese Anzahl gleich 18. Die Eintheilung der krystallinischen Medien wäre demnach eine zu enge, indem man noch optisch mehraxige Medien hinzuzunehmen hätte. — In Betreff der optischen Axen hat die Cauchy'sche Wellenoberfläche genau dieselben Eigenschaften, als die Neumann'sche; die drei Coëfficienten, welche die erstere mehr enthält, heben sich in den hierbei in Betracht kommenden Gleichungen völlig heraus.

Da die in der Natur beobachteten Medien immer nur höchstens zwei optische Axen enthalten, so werden die speciellen Fälle der allgemeinen Wellenoberfläche, in welchen die Anzahl der optischen Axen sich auf zwei vermindert, besonderes Interesse erregen. Es findet sich auch, dafs die optisch zweiaxigen Wellenoberflächen unter den in den allgemeinen Gleichungen enthaltenen Flächen eine ausgezeichnete Rolle spielen. Bei Durchführung der Reduction der optischen Axen geben, im Einklang mit der erwähnten Verschiedenheit der Differentialgleichungen, die Rechnungen von Cauchy eine etwas andere optisch zweiaxige Wellenoberfläche, als die Rechnungen von Neumann. Nämlich die allgemeine Wellenoberfläche von Neumann geht durch die Bedingung, dafs die optischen Axen sich reduciren sollen, in die Fresnel'sche über; bei den Cauchyschen Entwicklungen dagegen ist die entsprechende optisch zweiaxige Fläche zwar der Fresnel'schen sehr ähnlich, hängt jedoch von sechs Constanten ab.

Es sollen zunächst kurz die Voraussetzungen recapitulirt werden, welche Cauchy und Neumann bei der Herleitung ihrer Wellenoberfläche machen. Dieselben nehmen an, dafs das betrachtete Medium sich symmetrisch in Bezug auf drei feste, zu einander senkrechte Ebenen verhalte; ferner, dafs dasselbe zwar nach den einzelnen Richtungen verschiedenartig, jedoch im Uebrigen homogen sey. Für alle hierin begriffene Medien wird das Problem behandelt, und gilt, in angenäherter Rechnung, die abgeleitete Wellenoberfläche. Cauchy sowohl wie Neumann erhalten eine aus drei Schalen bestehende Wellenoberfläche; jedoch vernachlässigt man in der Optik eine dieser Schalen als unwesentlich für die Lichterscheinungen, indem die zugehörigen Schwingungen, weil ziemlich longitudinal, keinen merklichen Lichteindruck erzeugen. An den Formeln, welche die beiden anderen Schalen der Wellenoberfläche ausdrücken, bringt man aufserdem noch eine auf die Beobachtung sich gründende Vereinfachung an. Bei allen bekannten doppelbrechenden Medien bleiben die Unterschiede von den isotropen Medien innerhalb gewisser, ziemlich kleiner Gränzen; die Abweichungen der Wellenoberflächen von der Kugelgestalt sind niemals sehr bedeutend. Man erachtet daher die Quadrate der Gröfsen, welche diese Abweichungen ausdrücken, für genügend klein, um sie bei einer angenäherten Rechnung vernachlässigen zu können. Alsdann nehmen die allgemeinen zweischaligen Wellenoberflächen von Cauchy und von Neumann die Gestalt an, welche unten analytisch bestimmt ist.

Zur Aufsuchung der optischen Axen bei der allgemeinen Wellenoberfläche wird zuvörderst der Begriff derselben genau anzugeben seyn. Man bezeichnet als optische Axe die Richtung, welche senkrecht zu einer gemeinsamen Tangentialebene an die beiden Schalen der Wellenoberfläche steht. Bei der Fresnel'schen Wellenoberfläche giebt es vier Ebenen, welche gleichzeitig beide Schalen berühren; zu diesen vier Ebenen gehören, da je zwei einander parallel sind, zwei Normalen; diefs sind die beiden optischen Axen der Fresnel'schen Fläche.

Man gebraucht, um die optischen Axen zu bestimmen nicht die Gleichung der allgemeinen Wellenoberfläche selbst, welche eine sehr complicirte Form haben würde, sondern es genügt, die Fufspunktenfläche derselben, die sogenannte Wellennormalenfläche, zu kennen. Die Doppelpunkte der Fufspunktenfläche geben unmittelbar die optischen Axen der Wellenoberfläche. Denkt man sich sämmtliche Tangentialebenen an die Wellenoberfläche gelegt und auf eine jede vom Mittelpunkt der Fläche aus das Loth gefällt: so liegen im Allgemeinen je zwei Lothe in derselben Richtung. Denn da die beiden Schalen der Wellenoberfläche geschlossen sind, so giebt es zu jeder Tangentialebene an die erste Schale eine parallele an die zweite; die zu diesen beiden Ebenen gehörigen Lothe fallen in dieselbe Richtung. Eine Ausnahme findet nur da statt, wo die beiden parallelen Berührungsebenen sich decken, und somit beide Schalen durch eine und dieselbe Ebene berührt werden. Alsdann giebt es in der zur gemeinsamen Tangentialebene senkrechten Richtung nur ein Loth, oder, genauer gesagt, zwei gleich lange. Eben diese Richtungen, in denen die Lothe einander gleich werden, sind, wie aus der Definition folgt, die optischen Axen. — Der geometrische Ort der Fufspunkte sämmtlicher Lothe, die Fufspunktenfläche, ist, wie die Wellenoberfläche, zweischalig; die beiden Lothe, welche zu je einer — vom Mittelpunkt aus gerechneten — Richtung gehören, sind die Radii vectores. Man hat die Gleichung der Fufspunktenfläche in der Form, dafs der Radius vector als Function der Richtungswinkel angegeben wird. Sucht man also diejenigen Richtungen auf, für welche es nicht zwei verschiedene, sondern nur einen Werth des Radius vector giebt, so sind diefs die optischen Axen der Wellenoberfläche.

Die Wellenoberfläche, unter den oben erwähnten Voraussetzungen hergeleitet, hat die nachstehende Fufspunktenfläche:

$$\left.\frac{cs^2\varkappa}{\varrho^2-\psi_1}+\frac{cs^2\lambda}{\varrho^2-\psi_2}+\frac{cs^2\mu}{\varrho^2-\psi_3}=o\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

wobei durch ψ_1, ψ_2, ψ_3 nach Neumann die folgenden Ausdrücke abgekürzt bezeichnet werden:

$$\left.\begin{aligned}\psi_1&=(A+2D-2E-2F).cs^2\varkappa+F.cs^2\lambda+E.cs^2\mu\\ \psi_2&=F.cs^2\varkappa+(B+2E-2F-2D).cs^2\lambda+D.cs^2\mu\\ \psi_3&=E.cs^2\varkappa+D.cs^2\lambda+(C+2F-2D-2E).cs^2\mu\end{aligned}\right\}\quad(2)$$

und nach Cauchy die folgenden:

$$\left.\begin{aligned}
\psi_1 &= (A_0+A+2D-2E-2F)\,cs^2\varkappa \\
&\quad +(B_0+F)\,cs^2\lambda+(C_0+E)\,cs^2\mu \\
\psi_2 &= (A_0+F)\,cs^2\varkappa+(B_0+B+2E-2F-2D)\,cs^2\lambda \\
&\quad +(C_0+D)\,cs^2\mu \\
\psi_3 &= (A_0+E)\,cs^2\varkappa+(B_0+D)\,cs^2 k \\
&\quad +(C_0+C+2F-2D-2E)\,cs^2\mu
\end{aligned}\right\}\quad (3)$$

Durch $\varkappa$, λ, μ werden die Winkel, welche je eine Richtung mit den drei Hauptaxen des Mediums bildet, und durch ϱ der zugehörige Radius vector dargestellt, während A, B, ... F, A_0, B_0, C_0 Constante sind.

Die Gleichung (1) ist quadratisch in Bezug auf ϱ^2, und man erhält daher beim Auflösen derselben für ϱ^2 einen Ausdruck, der aus einem rationalen Summandus und aus einer Quadratwurzel zusammengesetzt ist. Damit sich für ϱ^2 ein eindeutiger Werth ergebe, mufs der Ausdruck unter der Quadratwurzel $= 0$ seyn. Auf diese Weise erhält man die Gleichung:

$$\left.\begin{aligned}
&[(\psi_2+\psi_3)\,cs^2\varkappa+(\psi_3+\psi_1)\,cs^2\lambda+(\psi_1+\psi_2)\,cs^2\mu]^2 \\
&\quad -4\psi_2\psi_3\,cs^2\varkappa-4\psi_3\psi_1\,cs^2\lambda-4\psi_1\psi_2\,cs^2\mu
\end{aligned}\right\}=0\quad (4)$$

als Bedingung dafür, dafs die Richtung $\varkappa$, λ, μ optische Axe sey: denn jede Richtung, zu welcher nur ein Werth des Radius vector gehört, ist optische Axe.

Da zwischen $\varkappa$, λ, μ, den Richtungswinkeln der optischen Axen, aufser der Gleichung (4) nur noch eine zweite, nämlich

$$cs^2\varkappa+cs^2\lambda+cs^2\mu=1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

besteht, so scheinen dieselben nicht ausreichend bestimmt zu seyn. In der That würde man auch schliefsen können, dafs eine unendliche Anzahl optischer Axen vorhanden sey, wenn nicht die linke Seite der Gleichung (4) sich als Summe mehrerer Quadrate schreiben liefse, und daher die Gleichung (4) in eine gröfsere Anzahl von Gleichungen zerfiele. Berücksichtigt man die Gleichung (5), so findet man die linke Seite von (4) als die Summe der folgenden sechs Quadrate:

$$\left.\begin{aligned}
&cs^2\varkappa\,.\,[(\psi_2-\psi_3)cs^2\varkappa-(\psi_3-\psi_1)cs^2\lambda-(\psi_1-\psi_2)cs^2\mu]^2\\
&+cs^2\lambda[(\psi_3-\psi_1)cs^2\lambda-(\psi_1-\psi_2)cs^2\mu\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad-(\psi_2-\psi_3)cs^2\varkappa]^2\\
&+cs^2\mu\,.\,[(\psi_1-\psi_2)cs^2\mu-(\psi_2-\psi_3)cs^2\varkappa\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad-(\psi_3-\psi_1)cs^2\lambda]^2\\
&+2cs^2\varkappa cs^2\lambda cs^2\mu(\psi_2-\psi_3)^2\\
&+2cs^2\varkappa cs^2\lambda cs^2\mu(\psi_3-\psi_1)^2\\
&+2cs^2\varkappa cs^2\lambda cs^2\mu(\psi_1-\psi_2)^2
\end{aligned}\right\}\quad(6)$$

welche alle einzeln $=0$ seyn müssen, damit der Gleichung (4) genügt werde.

Die zu den optischen Axen gehörigen Werthe von $\varkappa$, λ, μ scheinen jetzt überbestimmt zu seyn, da diese drei Unbekannten sieben Gleichungen, in welchen sonst nur noch Constante vorkommen, gleichzeitig genügen sollen. Indessen sind, wie man mit leichter Mühe zeigen kann, je vier der sieben Gleichungen die Folge der drei andern, so dafs für die drei Richtungswinkel der optischen Axen immer grade drei Gleichungen bleiben.

In den Ausdrücken (6) kommen die Gröfsen ψ_1, ψ_2, ψ_3 nicht anders, als in den Differenzen $\psi_2-\psi_3$, $\psi_3-\psi_1$, $\psi_1-\psi_2$ vor. Da aber letztere die Constanten A_0, B_0, C_0 nicht mehr enthalten, so sind die optischen Axen von A_0, B_0, C_0 unabhängig, und folglich die Gleichungen für die optischen Axen bei den Wellenoberflächen von Cauchy und von Neumann ganz identisch.

Die erhaltenen Gleichungen für die optischen Axen haben 20 *Lösungen.* Bei zwölf derselben ist entweder $cs\varkappa$ oder $cs\lambda$ oder $cs\mu=0$, bei den acht übrigen sind alle drei Cosinus von Null verschieden. Hieraus folgt, dafs die ersten zwölf Lösungen optische Axen, welche in einer der Hauptebenen liegen, ergeben; die übrigen acht optischen Axen dagegen befinden sich in den acht von den Hauptebenen gebildeten Fachräumen, und zwar symmetrisch zu einander geordnet.

Von den 20 Lösungen sind eine gewisse Anzahl imaginär. Rechnet man diese mit, so haben die Wellenoberflächen von Cauchy und von Neumann in jeder Hauptebene vier optische Axen, je zwei und zwei sich entsprechend, und ferner die schon erwähnten acht symmetrisch liegenden optischen Axen aufserhalb der Hauptebenen, im Ganzen 20 optische Axen. — Geht man auf das Verhältnifs der reellen und der imaginären Lösungen näher ein, so zeigt sich, dafs nicht gleichzeitig in allen drei Hauptebenen vier reelle optische Axen vorkommen können, dafs vielmehr bei einer derselben stets zwei optische Axen imaginär sind; es ist diefs nämlich diejenige Hauptebene, welche dem mittleren unter den drei Coëfficienten D, E, F entspricht. Als Maximum erhält man daher den Fall, dafs bei der Wellenoberfläche achtzehn reelle optische Axen vorkommen. Die 20 Lösungen können sich im Uebrigen auf sehr verschiedene Art in reelle und imaginäre eintheilen. Es kommt dabei auf das Gröfsenverhältnifs der Coëfficienten zu einander an, und gewisse Ungleichungen bestimmen die Gränzen der einzelnen Fälle. Es soll hier nur noch erwähnt werden, dafs die andern zwei Hauptebenen, welche dem gröfsten und dem kleinsten der Coëfficienten D, E, F entsprechen, immer nur entweder vier reelle, oder vier imaginäre, dagegen nicht zwei reelle und zwei imaginäre optische Axen enthalten können.

Mit Hülfe der optischen Axen ist es nun leicht, zu den einfacheren Fällen der allgemeinen Wellenoberfläche zu gelangen, indem man diejenigen speciellen Flächen aufsucht, welche eine geringere Anzahl optischer Axen haben. Indessen ist klar, dafs es hierbei nicht genügt, die reellen optischen Axen allein zu betrachten. Eine Vereinfachung der Fläche tritt dadurch nicht ein, dafs eine reelle optische Axe durch eine imaginäre ersetzt wird, sondern nur dadurch, dafs die Lösungen der die optischen Axen bestimmenden Gleichungen überhaupt von 20 auf eine geringere Anzahl vermindert werden, d. h., dafs der Grad der Gleichungen sich erniedrigt.

Die allgemeine Wellenoberfläche hat in den Hauptebenen je vier optische Axen; zu jeder Hauptebene gehört eine biquadratische Gleichung, welche die Lage der vier Axen angiebt. Wird der Coëfficient der vierten Potenz gleich Null, so reducirt sich diese Gleichung auf den zweiten Grad, und es bleiben nur zwei optische Axen in der betreffenden Hauptebene übrig. — Man erhält auf diese Weise als Bedingung, dafs in der ersten der drei Hauptebenen nur zwei optische Axen, statt vier, vorhanden seyen, die Relation:

$$D - \tfrac{1}{6}(B + C) = 0,$$

durch welche die Gesammtzahl der Lösungen der besagten Gleichungen von 20 auf 18 reducirt wird. Die analoge Bedeutung haben, bei den beiden andern Hauptebenen, die Gleichungen:

$$E - \tfrac{1}{6}(C + A) = 0,$$
$$F - \tfrac{1}{6}(A + B) = 0.$$

Läfst man nun aber die gefundenen drei Bedingungen gleichzeitig gelten, so vermindern sich nicht allein in jeder der Hauptebenen die optischen Axen von vier auf zwei, sondern es fallen dann auch die acht in den Fachräumen liegenden optischen Axen von selbst fort. Durch die Relationen:

$$D = \tfrac{1}{6}(B + C),\ E = \tfrac{1}{6}(C + A),\ F = \tfrac{1}{6}(A + B) \qquad (7)$$

wird demnach ein aufserordentlich einfacher Fall der allgemeinen Wellenoberfläche bestimmt, da die Gleichungen, welche die optischen Gleichungen angeben, dann statt 20 nur 6 Lösungen haben.

Aufserdem tritt noch eine Regelmäfsigkeit der Art ein, dafs von diesen 6 Lösungen stets vier imaginär und zwei reell sind. Es liegen in derjenigen Hauptebene, welche dem mittleren der drei Coëfficienten D, E, F entspricht, immer zwei reelle optische Axen, in den andern Hauptebenen nur imaginäre. Die den Gleichungen (7) genügende specielle Wellenoberfläche würde mathematisch die optisch sechsaxige zu nennen seyn; in physikalischer Hinsicht, wo nur reelle optische Axen zu rechnen sind, ist sie zweiaxig, und zwar kann man sie als zweiaxige Wellenoberfläche in hervorragendem Sinne bezeichnen. Denn sobald man irgend eine der drei Bedingungen (7) fortläfst, kann die Fläche bedeutend mehr als zwei reelle optische Axen haben, wenn auch in vielen Fällen die Anzahl der reellen Axen nur gerade gleich zwei seyn wird. Die Gleichungen (7) geben diejenige Vereinfachung der allgemeinen Wellenoberfläche, welche niemals mehr als zwei reelle optische Axen zuläfst. Wir bezeichnen daher die in Rede stehende Fläche, welche zwei reelle und vier imaginäre optische Axen besitzt, kurz als die optisch zweiaxige Wellenoberfläche.

Die Gleichungen (7) geben eine solche optisch zweiaxige Wellenoberfläche einerseits aus der Cauchy'schen, andrerseits aus der Neumann'schen allgemeinen Fläche. Wendet man die Gleichungen (7) an, so hat die optisch zweiaxige Wellenoberfläche, gemäfs den Entwicklungen von Neumann, die folgende Fufspunktenfläche:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{cs^2\varkappa}{\varrho^2-\frac{1}{6}A-X_1}+\dfrac{cs^2\lambda}{\varrho^2-\frac{1}{6}B-X_1}+\dfrac{cs\mu^2}{\varrho^2-\frac{1}{6}C-X_1}=0 \\ \text{wobei zu setzen:} \\ \qquad X_1=\frac{1}{6}Acs^2\varkappa+\frac{1}{6}Bcs^2\lambda+\frac{1}{6}Ccs^2\mu; \end{array}\right\} \quad (8)$$

gemäfs denen von Cauchy dagegen die folgende:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{cs^2\varkappa}{\varrho^2-\frac{1}{6}A-X_2}+\dfrac{cs^2\lambda}{\varrho^2-\frac{1}{6}B-X_2}+\dfrac{es^2\mu}{\varrho^2-\frac{1}{2}C-X_2}=0 \\ \text{wo: } X_2=(A_0+\frac{1}{6}A)cs^2\varkappa \\ \qquad\qquad +(B_0+\frac{1}{6}B)cs^2\lambda+(C_0+\frac{1}{6}C)cs^2\mu \end{array}\right\} \quad (9)$$

Die ersterwähnte Fläche ist genau die Fresnel'sche Fufspunktenfläche; denn sobald man die Multiplication ausführt, sieht man, dafs die Gleichung (8) auch auf die nachstehende, bekanntere Form gebracht werden kann:

$$\frac{cs^2\varkappa}{\varrho^2-D}+\frac{cs^2\lambda}{\varrho^2-E}+\frac{cs^2\mu}{\varrho^2-F}=0 \quad . \quad . \quad (10)$$

Es ergiebt sich also aus den Neumann'schen Rechnungen, welche viel genauer sind, als die Fresnel's, eine Ableitung der Fresnel'schen Wellenoberfläche; aber hier tritt sie nicht als die bei allen doppelbrechenden Medien gültige Wellenoberfläche, sondern nur als eine specielle, nämlich die optisch zweiaxige Fläche auf. Die Constanten D, E, F sind die Quadrate der Fresnel'schen Elasticitätsaxen.

Die Gleichung (9) kann ähnlich wie die Gleichung (8) transformirt werden: dieselbe ist identisch mit der folgenden:

$$\left.\begin{array}{c} \dfrac{cs^2\varkappa}{\varrho^2-\omega-D}+\dfrac{cs^2\lambda}{\varrho^2-\omega-E}+\dfrac{cs^2\mu}{\varrho^2-\omega-F}=0 \\ \text{wo: } \omega=A_0\, cs^2\varkappa+B_0\, cs^2\lambda+C_0\, cs^2\mu. \end{array}\right\} \quad (11)$$

Dasselbe, was die Fresnel'sche Wellenoberfläche bei den Neumann'schen Entwicklungen, ist bei den Cauchy-schen diejenige Fläche, deren Fufspunktenfläche durch die Gleichung (9) oder (11) angegeben wird. Dieselbe enthält, wie schon früher erwähnt wurde, sechs Constanten, und ihr hauptsächlicher Unterschied von der Fresnel'schen Wellenoberfläche besteht darin, dafs die drei Hauptebenen aus ihr nicht je eine Ellipse und einen Kreis, sondern zwei Ellipsen ausschneiden. Die beiden Ellipsen, welche bei dem Durchschnitt der ersten Hauptebene entstehen, haben die Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{c} \dfrac{y^2}{B_0+F}+\dfrac{z^2}{C_0+E}=1 \\ \dfrac{y^2}{B_0+D}+\dfrac{z^2}{C_0+D}=1 \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

Man sieht, dafs die zweite derselben zu einem Kreise wird, wenn die Constanten A_0, B_0, C_0 so klein sind, dafs sie ohne merklichen Fehler vernachlässigt werden können. Bei den beiden andern Hauptebenen kommen analoge Gleichungen vor.

Es entsteht die Frage, ob die Rechnungen von Cauchy oder die von Neumann die richtigeren und brauchbareren sind. Das Sachverhältnifs ist, dafs, wenn die Coëfficienten A_0, B_0, C_0 genügend kleine Gröfsen sind, um neben $A, B \ldots F$ ohne merklichen Fehler vernachlässigt werden zu können, die Cauchy'schen Entwicklungen eine überflüssige Allgemeinheit besitzen; dafs dagegen, wenn A_0, B_0, C_0 ziemlich derselben Gröfsenordnung als $A, B \ldots F$ angehören, die Neumann'schen Gleichungen nicht allgemein genug sind. Im ersteren Falle wäre als Wellenoberfläche in optisch zweiaxigen Krystallen genau die Fresnel'sche Fläche anzuwenden, im letzteren hätte man als solche nicht die Fresnel'sche, sondern jene andere Fläche, deren Fufspunktenfläche durch die Gleichung (11) angegeben wird, zu nehmen.

Diefs führt zu einem Mittel, die obige Frage durch Versuche zu entscheiden. In dem Fall, dafs die Neumann'schen Rechnungen nicht ausreichend seyn sollten, dürfte es bei der Wellenoberfläche der optisch zweiaxigen Krystalle im Allgemeinen keine Kreisschnitte in den Hauptebenen geben, sondern genauere Beobachtungen müfsten die bisher für Kreise gehaltenen Curven als Ellipsen erweisen. Wenn im Gegentheil die Versuche zeigen, dafs bis zu der überhaupt erreichbaren Genauigkeit man Kreisschnitte in den Hauptebenen annehmen mufs, werden die Coëfficienten A_0, B_0, C_0 als verschwindende Gröfsen, und daher die Neumann'schen Gleichungen als die fachgemäfseren zu betrachten seyn.

Welcher der beiden angeführten Fälle [1]) indessen auch der Wirklichkeit mehr entsprechen möge, jedenfalls hat man mit Hülfe der Rechnungen von Cauchy und Neumann eine strengere Herleitung der Wellenoberfläche in optisch zweiaxigen Krystallen, als sonst angegeben ist.

1) Bei der Cauchy'schen Ableitung der Differential-Gleichungen (*Exercices de Mathématiques, vol. III*) sind die Coëfficienten A_0, B_0, C_0 von wesentlich anderer Natur als die Coëfficienten A, B, ... F. Die Gröfsen A_0, B_0, C_0 sind im Vergleich zu A, B, ... F in einem um so höheren Grade zu vernachlässigen, je schneller die Molecular-Attraction oder- Repulsion bei Verminderung der Entfernung anwächst.