Verwendung asymptotischer Darstellungen zur Untersuchung der Integrale einer speciellen linearen Differentialgleichung. II.

Von

J. Horn in Charlottenburg.

Im vorausgehenden Aufsatz (Seite 453 ds. Bds.) wurde die asymptotische Darstellung der Integrale der Differentialgleichung

$$\text{(A)} \qquad x\frac{d^2y}{dx^2} + (\lambda_1+\lambda_2+2)\frac{dy}{dx} + \big(x+(\lambda_1-\lambda_2)\,i\big)\,y = 0^{*})$$

vermittelst der divergenten Reihen

$$S_1 = e^{ix}\; x^{-\lambda_1-1}\Big(A_0 + \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x^2} + \cdots\Big),$$

$$S_2 = e^{-ix} x^{-\lambda_2-1}\Big(B_0 + \frac{B_1}{x} + \frac{B_2}{x^2} + \cdots\Big),$$

welche (A) formell befriedigen, für die ganze Umgebung der singulären Stelle $x=\infty$ behandelt**). Wir wollen nun auf Grund der früheren Entwicklungen die divergenten Reihen zur Untersuchung des Verhaltens der Integrale der Differentialgleichung (A) in der Umgebung von $x=\infty$ benutzen.

In § 1 und § 2 werden die in der Umgebung der singulären Stelle gelegenen Nullstellen der Integrale betrachtet; in § 3 werden die bei Integration der Differentialgleichung auftretenden ganzen transcendenten Functionen mit Rücksicht auf Productentwicklung und Geschlecht untersucht; § 4 beschäftigt sich mit dem Verlauf der reellen Integrale einer Differentialgleichung mit reellen Coefficienten.

Uebrigens bleiben die folgenden wie die früheren Entwicklungen zum Theil für allgemeinere lineare Differentialgleichungen bestehen;

---

*) Auf diese Form kann die lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung mit linearen Coefficienten gebracht werden, wenn man von den Ausnahmefällen absieht. Der Fall ganzzahliger Werthe von λ_1, λ_2, $\lambda_1+\lambda_2$ ist im Folgenden wie früher ausgeschlossen.

**) Es handelte sich darum, die Untersuchungen des Herrn Poincaré über allgemeinere lineare Differentialgleichungen sowie ältere Untersuchungen über Bessel'sche Functionen so weit zu ergänzen, dass sich das Verhalten der Integrale von (A) in der ganzen Umgebung der singulären Stelle übersehen lässt.

deswegen wird auch gewöhnlich von der Einsetzung der unserer speciellen Differentialgleichung entsprechenden Werthe der Reihencoefficienten abgesehen. Aehnliche Untersuchungen für allgemeinere Differentialgleichungen werde ich später führen.

§ 1.

Die Differentialgleichung (A) besitzt zwei particuläre Integrale η_1, η_2, welche durch die Reihen S_1, S_2 asymptotisch dargestellt werden; es ist

$$\eta_1 = e^{ix} \; x^{\mu_1}\left(A_0 + \frac{A_1}{x} + \cdots + \frac{A_n}{x^n} + \frac{\alpha_n}{x^n}\right),$$

$$\eta_2 = e^{-ix} x^{\mu_2}\left(B_0 + \frac{B_1}{x} + \cdots + \frac{B_n}{x^n} + \frac{\beta_n}{x^n}\right),$$

wenn wir

$$\mu_1 = -\lambda_1 - 1, \quad \mu_2 = -\lambda_2 - 1$$

setzen; α_n und β_n sind Functionen von x, welche zur Grenze Null convergiren, wenn $|x|$ unendlich gross wird, und zwar α_n $\left(\text{sowie } x^\nu \frac{d^\nu \alpha_n}{dx^\nu}\right)$ gleichmässig für alle Argumente von x zwischen $-\pi+\delta$ und $2\pi-\delta$, β_n $\left(\text{sowie } x^\nu \frac{d^\nu \beta_n}{dx^\nu}\right)$ gleichmässig für alle Argumente von x zwischen $-2\pi+\delta$ und $\pi-\delta$, wobei δ eine beliebig kleine positive Grösse bedeutet. Beschränkt man sich, unter ω eine beliebige Grösse zwischen 0 und π verstehend, auf das Gebiet

$$-\omega < \arg x < \omega,$$

so convergiren beide Functionen α_n und β_n gleichmässig zur Grenze Null, ebenso $x\frac{d\alpha_n}{dx}$ und $x\frac{d\beta_n}{dx}$. Wie früher gezeigt wurde, *besitzen die Integrale η_1 und η_2 in dem Gebiet $-\omega < \arg x < \omega$ keine Nullstelle, deren absoluter Betrag eine gewisse Grenze überschreitet.*

Ein beliebiges Integral $y = f(x)$ von (A) hat die Form

$$y = c_1\eta_1 + c_2\eta_2{}^{*)}.$$

Wir setzen die Constanten c_1, c_2 beide von Null verschieden voraus und *untersuchen die Lage der in der Nähe von $x=\infty$ gelegenen Nullstellen, deren Argument zwischen $-\omega$ und ω liegt.*

Wir haben

$$(1) \qquad y = f(x) = e^{ix} \; x^{\mu_1} c_1\left(A_0 + \frac{A_1}{x} + \cdots + \frac{A_n}{x^n} + \frac{\alpha_n}{x^n}\right)$$
$$+ e^{-ix} x^{\mu_2} c_2\left(B_0 + \frac{B_1}{x} + \cdots + \frac{B_n}{x^n} + \frac{\beta_n}{x^n}\right).$$

---

*) In dem Gebiet $|x| > r$, $-\omega < \arg x < \omega$ sollen alle betrachteten Functionen eindeutig fixirt sein.

Die Gleichung $f(x)=0$ schreibt sich

$$e^{2ix}x^{\mu_1-\mu_2}=-\frac{c_2}{c_1}\frac{\sum_{\nu=0}^{n}\frac{B_\nu}{x^\nu}+\frac{\beta_n}{x^n}}{\sum_{\nu=0}^{n}\frac{A_\nu}{x^\nu}+\frac{\alpha_n}{x^n}}$$

oder

$$2ix+(\mu_1-\mu_2)\log x=\log\left(-\frac{c_2}{c_1}\frac{B_0}{A_0}\right)$$
$$+\log\frac{1+\frac{B_1}{B_0x}+\cdots+\frac{B_n}{B_0x^n}+\frac{\beta_n}{B_0x^n}}{1+\frac{A_1}{A_0x}+\cdots+\frac{A_n}{A_0x^n}+\frac{\alpha_n}{A_0x^n}}+2k\pi i;$$

hierbei ist $\log x$ durch die Festsetzung $-\omega<\arg x<\omega$ bestimmt, von $\log\left(-\frac{c_2 B_0}{c_1 A_0}\right)$ ist ein beliebiger Werth zu nehmen, und k ist eine ganze positive Zahl; der zweite Logarithmus ist so fixirt, dass er für $x=\infty$ verschwindet.

Wir führen die Bezeichnung ein:

$$\mu=\frac{\mu_1-\mu_2}{2i},\quad c=\frac{1}{2i}\log\left(-\frac{c_2B_0}{c_1A_0}\right). \tag{2}$$

Setzt man

$$\frac{1}{2i}\log\left(1+\frac{B_1}{B_0x}+\cdots+\frac{B_n}{B_0x^n}+\frac{\beta_n}{B_0x^n}\right)$$
$$-\frac{1}{2i}\log\left(1+\frac{A_1}{A_0x}+\cdots+\frac{A_n}{A_0x^n}+\frac{\alpha_n}{A_0x^n}\right)$$
$$=\frac{K_1}{x}+\cdots+\frac{K_n}{x^n}+\frac{\varkappa_n}{x^n}\text{*)},$$

so convergiren $\varkappa_n$ und $x\frac{d\varkappa_n}{dx}$ für $\lim|x|=\infty$ zur Grenze Null und zwar gleichmässig für $-\omega<\arg x<\omega$.

Die Gleichung $f(x)=0$ lautet jetzt

$$\varphi_k(x)=x+\mu\log x-c-k\pi-\sum_{\nu=1}^{n}\frac{K_\nu}{x^\nu}-\frac{\varkappa_n}{x^n}=0. \tag{3}$$

Wenn man die Reihen

$$\sum_\nu\frac{A_\nu}{x^\nu},\quad\sum_\nu\frac{B_\nu}{x^\nu},\quad\sum\frac{K_\nu}{x^\nu}$$

ins Unendliche fortsetzt, α_n, β_n, $\varkappa_n$ weglässt und die Rechnungen ohne Rücksicht auf die Divergenz der auftretenden Reihen formell ausführt, so erhält man für die Nullstellen von

*) Dabei ist $K_1=\frac{A_0B_1-A_1B_0}{2iA_0B_0}$.

$$f(x) = e^{ix} x^{\mu_1} c_1 \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{A_\nu}{x^\nu} + e^{-ix} x^{\mu_2} c_2 \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{B_\nu}{x^\nu}$$

die Gleichung

$$(4) \qquad x + \mu \log x = c + k\pi + \frac{K_1}{x} + \frac{K_2}{x^2} + \cdots,$$

welche durch die Substitution

$$t = \frac{1}{c + k\pi}, \quad x = \frac{1}{t(1+\xi)}$$

übergeht in

$$\frac{1}{1+\xi} - \mu t \log t - \mu t \log(1+\xi)$$
$$= 1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} K_\nu t^{\nu+1} (1+\xi)^{\nu+1};$$

$\log t$ und $\log(1+\xi)$ sind dadurch fixirt, dass für $k = \infty$

$$\arg t = \arg \frac{1}{c + k\pi} = 0$$

und für $\xi = 0$

$$\arg(1+\xi) = 0$$

angenommen wird. Durch Einsetzen der für $|\xi| < 1$ convergenten Reihen für $\frac{1}{1+\xi}$ und $\log(1+\xi)$ erhält man zur Bestimmung der Function ξ von t die Gleichung

$$\begin{aligned} 0 = {} & \mu t \log t + K_1 t^2 + K_2 t^3 + \cdots \\ & + \xi(1 + \mu t + K_1 t^2 + 2K_2 t^3 + \cdots) \\ & + \xi^2 \left(-1 - \tfrac{1}{2}\mu t + K_2 t^3 + 3K_3 t^4 + \cdots\right) + \cdots . \end{aligned}$$

Ersetzt man im ersten Glied $t \log t$ durch z, so wird die Gleichung durch eine Potenzreihe von t und z

$$\xi = \sum_{p+q>0} C_{pq} t^p z^q$$

formell befriedigt. Durch Einsetzung der Reihe von ξ in die Gleichung, Entwicklung der rechten Seite nach Potenzen von t und z und Nullsetzung des Coefficienten von $t^p z^q$ erhält man eine Gleichung, welche C_{pq} durch die Grössen $C_{p'q'}$ ($p' \leqq p$, $q' \leqq q$, $p' + q' < p + q$) ausdrückt; ist $p \leqq n + 1$, so kommen in dieser Gleichung nur $K_1, \ldots K_n$, nicht aber $K_{n+1}, K_{n+2}, \ldots$ vor, d. h. C_{pq} hängt, so lange $p \leqq n + 1$ nur von $K_1, \ldots K_n$ ab. Insbesondere erhält man

$$C_{10} = 0, \qquad C_{01} = -\mu,$$
$$C_{20} = -K_1, \quad C_{11} = \mu^2, \quad C_{02} = \mu^2.$$

Nun ist

$$x_k = \frac{1}{t(1+\xi)} = \frac{1}{t\left(1+\sum C_{pq}\, t^p z^q\right)}$$

$$= \frac{1}{t(1-\mu z - K_1 t^2 + \mu^2 t z + \mu^2 z^2 + \cdots)}$$

$$= \frac{1+\mu z + K_1 t^2 - \mu^2 t z + \cdots}{t} = \frac{\sum\limits_{pq} A_{pq}\, t^p z^q}{t}.$$

Hierbei ist $A_{pq}(p \leqq n+1)$ nur von $K_1, \ldots K_n$ abhängig, ferner $A_{0q} = 0$ für $q > 1$. Um letzteres zu zeigen, bestimmen wir die Gesammtheit ξ' der von t freien Glieder in ξ; es ist

$$0 = z + \xi' - \xi'^2 + \xi'^3 - \cdots,$$

also

$$\xi' = -\frac{\mu z}{1+\mu z}$$

und

$$\frac{1}{1+\xi'} = 1 + \mu z.$$

Hiernach ist

$$x_k = \frac{1}{t} + \mu \log t + K_1 t - \mu^2 t \log t + \cdots$$

$$= c + k\pi - \mu \log(c+k\pi) + \frac{K_1}{c+k\pi} + \mu^2 \frac{\log(c+k\pi)}{c+k\pi} + \cdots$$

oder

$$x_k = c + k\pi - \mu \log(c+k\pi) + \sum_{p+q>0} L_{pq} \left(\frac{1}{c+k\pi}\right)^p \left(\frac{\log(c+k\pi)}{c+k\pi}\right)^q; \tag{5}$$

$L_{pq}(p \leqq n)$ ist nur von $K_1, \ldots K_n$ abhängig; insbesondere ist

$$L_{10} = \frac{A_0 B_1 - A_1 B_0}{2i A_0 B_0}, \quad L_{01} = \mu^2.$$

Da wir bisher lediglich formale Rechnungen mit divergenten Reihen ausgeführt haben, so müssen wir beweisen, dass die Gleichung (3) wirklich für jeden hinreichend grossen positiven Werth von k eine Wurzel x_k besitzt, und untersuchen, welchen Aufschluss die Reihe (5) über den Werth dieser Wurzel giebt.

Ersetzt man in der formalen Gleichung (4) $K_{n+1}, K_{n+2}, \ldots$ durch Null, oder, was dasselbe ist, ersetzt man in der Gleichung (3) $\varphi_k(x) = 0$ $\varkappa_n$ durch Null, so erhält man die Gleichung

$$\Phi_k(x) = x + \mu \log x - c - k\pi - \sum_{\nu=1}^{n} \frac{K_\nu}{x^\nu} = 0, \tag{6}$$

welche, wenn k hinreichend gross angenommen wird, eine folgendermassen zu bestimmende Wurzel x_k besitzt.

Setzt man

$$t = \frac{1}{c + k\pi}, \quad x = \frac{1}{t(1+\bar{\xi})},$$

so erhält man zwischen $\bar{\xi}$ und t eine Gleichung von der Form

$$0 = \mu t \log t + \mathfrak{P}(t, \bar{\xi}),$$

welche aus der obigen Gleichung zwischen ξ und t durch Nullsetzen von K_{n+1}, $K_{n+2}, \ldots$ hervorgeht. Jetzt ist aber $\mathfrak{P}(t, \bar{\xi})$ eine Potenzreihe, welche für hinreichend kleine Werthe von $|t|$ und $|\bar{\xi}|$ convergirt. Setzt man wieder $z = t \log t$, so ergiebt sich für $\bar{\xi}$ eine Potenzreihe

$$\bar{\xi} = \sum_{p+q>0} \bar{C}_{pq} t^p z^q,$$

welche für hinreichend kleine Werthe von $|t|$ und $|z|$ convergent ist. $\bar{C}_{pq}$ geht aus C_{pq} durch Nullsetzen von K_{n+1}, $K_{n+2}, \ldots$ hervor; d. h. es ist $\bar{C}_{pq} = C_{pq}$ für $p \leqq n+1$. Nun ist

$$X_k = \frac{1}{t(1+\bar{\xi})} = \frac{1}{t\left(1 + \sum \bar{C}_{pq} t^p z^q\right)} = \frac{\sum\limits_{pq} \bar{A}_{pq} t^p z^q}{t},$$

und zwar ist

$$\bar{A}_{pq} = A_{pq} \quad (p \leqq n+1),$$

und schliesslich

$$X_k = c + k\pi - \mu \log(c + k\pi) + \sum_{p+q>0} \bar{L}_{pq} \left(\frac{1}{c+k\pi}\right)^p \left(\frac{\log(c+k\pi)}{c+k\pi}\right)^q; \tag{7}$$

letztere Reihe ist für hinreichend grosse Werthe von k convergent, und es ist

$$\bar{L}_{pq} = L_{pq} \quad (p \leqq n).$$

Wir zeigen nun, dass der Wurzel X_k der Gleichung $\Phi_k(x) = 0$, wenn k hinreichend gross genommen wird, eine Wurzel x_k der Gleichung $\varphi_k(x) = 0$ entspricht. Wir beschreiben, unter ε eine beliebig kleine positive Grösse verstehend, um X_k einen Kreis vom Radius $\frac{\varepsilon}{k^n}$, vom Umfang $\mathfrak{C}_k$, und zeigen, dass innerhalb $\mathfrak{C}_k$ eine Wurzel der Gleichung $\varphi_k(x) = 0$ liegt, wenn k hinreichend gross ist. Da die über den Kreisumfang $\mathfrak{C}_k$ erstreckten Integrale

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\mathfrak{C}_k} d \log \varphi_k(x), \quad \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathfrak{C}_k} d \log \Phi_k(x)$$

die Anzahl der innerhalb $\mathfrak{C}^k$ gelegenen Wurzeln der Gleichungen

$\varphi_k(x) = 0$ bezw. $\Phi_k(x) = 0$ angeben, so brauchen wir nur nachzuweisen, dass

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathfrak{C}_k}\big(d \log \varphi_k(x) - d \log \Phi_k(x)\big)$$

verschwindet. Da dieses Integral aber nur einen ganzzahligen Werth haben kann, so genügt der Nachweis, dass

$$J_k = \int\limits_{\mathfrak{C}_k}\left(\frac{d \log \varphi_k(x)}{dx} - \frac{d \log \Phi_k(x)}{dx}\right) dx$$

für hinreichend grosses k dem absoluten Betrage nach beliebig klein wird.

Nun ist

$$F_k = \frac{d \log \varphi_k(x)}{dx} - \frac{d \log \Phi_k(x)}{dx}$$

$$= \frac{\varkappa_n\left(1 + \frac{\mu}{x} - \sum\limits_{\nu=1}^{n}\frac{K_\nu}{x^\nu}\right) + \left(n\varkappa_n - x\frac{d\varkappa_n}{dx}\right)\left(1 + \mu\frac{\log x}{x} - \frac{c + k\pi}{x} - \sum\limits_{\nu=1}^{n}\frac{K_\nu}{x^{\nu+1}}\right)}{x^n\, \varphi_k(x)\, \Phi_k(x)}.$$

Setzt man auf $\mathfrak{C}_k$

$$x = X_k + \frac{\varepsilon e^{i\varphi}}{k^n},$$

so ist

$$\Phi_k(x) = \Phi_k\left(X_k + \frac{\varepsilon e^{i\varphi}}{k^n}\right) - \Phi_k(X_k)$$

$$= \frac{\varepsilon e^{i\varphi}}{k^n} + \mu\left[\log\left(X_k + \frac{\varepsilon e^{i\varphi}}{k^n}\right) - \log X_k\right]$$

$$- \sum_{\nu=1}^{n} K_\nu\left[\frac{1}{\left(X_k + \frac{\varepsilon e^{i\varphi}}{k^n}\right)^\nu} - \frac{1}{X_k^\nu}\right]$$

$$= \frac{\varepsilon e^{i\varphi}}{k^n} + \mu \log\left(1 + \frac{\varepsilon e^{i\varphi}}{k^n X_k}\right)$$

$$+ \sum_{\nu=1}^{n}\frac{K_\nu}{X_k^\nu}\left[\frac{\nu\varepsilon e^{i\varphi}}{k^n X_k} + \cdots\right],$$

also

$$k^n\Phi_k(x) = \varepsilon e^{i\varphi} + \left(\frac{\mu\varepsilon e^{i\varphi}}{X_k} + \cdots\right),$$

$$|k^n\Phi_k(x)| > \varepsilon - \left|\frac{\mu\varepsilon e^{i\varphi}}{X_k} + \cdots\right|.$$

Nimmt man k so gross, dass der Subtrahend auf der rechten Seite kleiner als $\frac{\varepsilon}{2}$ wird, so ist auf $\mathfrak{C}_k$

$$|k^n \Phi_k(x)| > \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ferner ist

$$\varphi_k(x) = \Phi_k(x) - \frac{\varkappa_n}{x^n},$$

$$|k^n \varphi_k(x)| > |k^n \Phi_k(x)| - \left|\frac{k^n}{x^n} \varkappa_n\right|;$$

nun ist aber $\lim\limits_{k=\infty} \frac{X_k}{k} = \pi$ und, wenn x auf $\mathfrak{C}_k$ liegt, $\lim\limits_{k=\infty} \frac{x}{k} = \pi$; da auf $\mathfrak{C}_k$ $|\varkappa_n|$ beliebig klein wird*), wenn man k hinreichend gross nimmt, so kann man erreichen, dass

$$\left|\frac{k^n}{x^n} \varkappa_n\right| < \frac{\varepsilon}{4}$$

und demnach auf $\mathfrak{C}_k$

$$|k^n \varphi_k(x)| > \frac{\varepsilon}{4}$$

wird. Bedeutet δ eine beliebig kleine positive Grösse, so ist für hinreichend grosses k der Zähler von F_k dem absoluten Betrage nach kleiner als $\frac{1}{8} \delta \varepsilon$, also da

$$k^{2n} |\varphi_k(x) \; \Phi_k(x)| > \frac{1}{8} \varepsilon^2$$

ist,

$$|F_k| < \frac{\delta k^n}{\varepsilon}.$$

Weiter ist

$$|J_k| = \left| \int\limits_{\mathfrak{C}_k} F_k \, dx \right| < \frac{2\pi\varepsilon}{k^n} \cdot \frac{\delta k^n}{\varepsilon} = 2\pi\delta,$$

d. h. für hinreichend grosses k wird $|J_k|$ beliebig klein, w. z. b. w.

Im Innern des Kreises vom Radius $\frac{\varepsilon}{k^n}$ um X_k liegt eine Wurzel x_k von $\varphi_k(x) = 0$, es ist also

$$|x_k - X_k| < \frac{\varepsilon}{k^n}$$

oder

$$\lim_{k=\infty} k^n (x_k - X_k) = 0.$$

Wir hatten gefunden (7)

---

*) Wegen $\lim\limits_{k=\infty} \arg X_k = 0$ gehört $\mathfrak{C}_k$ dem Gebiet $-\omega \arg x < \omega$ an.

$$X_k = c + k\pi - \mu \log (c + k\pi) + \sum_{p+q \leqq n} L_{pq} \left(\frac{1}{c+k\pi}\right)^p \left(\frac{\log (c+k\pi)}{c+k\pi}\right)^q$$
$$+ \sum_{p+q > n} \overline{L}_{pq} \left(\frac{1}{c+k\pi}\right)^p \left(\frac{\log (c+k\pi)}{c+k\pi}\right)^q;$$

setzen wir nun

$$(8) \qquad x_k = c + k\pi - \mu \log (c + k\pi) + \sum_{p+q \leqq n} L_{pq} \left(\frac{1}{c+k\pi}\right)^p \left(\frac{\log (c+k\pi)}{c+k\pi}\right)^q$$
$$+ \frac{\varepsilon_n}{(c+k\pi)^n},$$

so ist

$$x_k - X_k = \frac{\varepsilon_n}{(c+k\pi)^n} - \sum_{p+q > n} \overline{L}_{pq} \left(\frac{1}{c+k\pi}\right)^p \left(\frac{\log (c+k\pi)}{c+k\pi}\right)^q,$$

also

$$\lim_{k=\infty} k^n (x_k - X_k) = \frac{1}{\pi^n} \lim_{k=\infty} \varepsilon_n,$$

d. h.

$$(8') \qquad \lim_{k=\infty} \varepsilon_n = 0.$$

Wir haben also den Satz:

Das Integral $y = c_1\eta_1 + c_2\eta_2$*) *der Differentialgleichung besitzt in der Nähe von* $x = \infty$ *unendlich viele Nullstellen* x_k ($\lim k = +\infty$), *welche durch die Reihe* (5) *asymptotisch dargestellt werden, d. h. es bestehen die Gleichungen* (8) *und* (8').

Setzen wir in der Formel (8) $n = 0$, so haben wir, wenn wir χ_k für ε_0 schreiben,

$$x_k = c + k\pi - \mu \log (c + k\pi) + \chi_k, \qquad \lim_{k=\infty} \chi_k = 0.$$

Setzen wir weiter

$$x_k = \xi_k + i\eta_k,$$
$$c = a + ib, \quad \chi_k = \chi_k' + i\chi_k'', \quad \mu = \mu' + i\mu'',$$

so haben wir

$$\xi_k = a + k\pi - \mu' \log \sqrt{(a+k\pi)^2 + b^2}$$
$$+ \mu'' \operatorname{arctg} \frac{b}{a+k\pi} + \chi_k',$$
$$\eta_k = b - \mu'' \log \sqrt{(a+k\pi)^2 + b^2}$$
$$- \mu' \operatorname{arctg} \frac{b}{a+k\pi} + \chi_k'';$$

$$\arg x_k = \operatorname{arctg} \frac{\eta_k}{\xi_k}, \quad |x_k| = \sqrt{\xi_k^2 + \eta_k^2},$$

*) c_1 und c_2 sind von Null verschieden vorausgesetzt.

Hieraus ergiebt sich

$$\lim_{k=\infty} |x_k| = \infty, \qquad \lim_{k=\infty} \arg x_k = 0;$$

ferner ist $\lim\limits_{k=\infty} \xi_k = \infty$, $\lim\limits_{k=\infty} \eta_k$ hat den endlichen Werth b, wenn $\mu'' = 0$, also μ reell ist, einen unendlich grossen Werth im Falle eines imaginären μ. Aus der Gleichung

$$x_{k+1} - x_k = \pi - \mu \log\left(1 + \frac{\pi}{c + k\pi}\right) + \chi_{k+1} - \chi_k$$

folgt noch

$$\lim_{k=\infty} (x_{k+1} - x_k) = \pi.$$

Im Falle $\mu = 0$ (bei der Differentialgleichung der Bessel'schen Functionen) fallen in der Reihe (5) die mit Logarithmen behafteten Glieder fort; denn da in der Gleichung zwischen ξ und t der Logarithmus nur in der Verbindung $\mu t \log t = \mu z$ vorkommt, so erhält man für ξ eine Potenzreihe von t und μz, so dass die Reihe (5), von den beiden ersten Gliedern abgesehen, nach Potenzen von $\frac{1}{c + k\pi}$ und $\mu \frac{\log(c + k\pi)}{c + k\pi}$ fortschreitet; es besteht demnach im Falle $\mu = 0$ die asymptotische Gleichung

$$x_k = c + k\pi + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{L_p}{(c + k\pi)^p}$$

mit der Bedeutung

$$x_k = c + k\pi + \sum_{p=1}^{n} \frac{L_p}{(c + k\pi)^p} + \frac{\varepsilon_n}{(c + k\pi)^n}, \quad \lim_{k=\infty} \varepsilon_n = 0 \text{*)}.$$

---

*) Im 9. Band der amerikanischen Annals of Mathematics (ich kenne nur das Referat im Jahrbuch der Fortschritte der Mathematik) hat Mc Mahon die Gleichung

$$\sqrt{\frac{1}{2}\pi x}\, J_n(x) = \cos\left(x - \frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}n\pi\right) \varphi_n(x) + \sin\left(x - \frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}n\pi\right) \psi_n(x) = 0,$$

wo $\varphi_n(x)$, $\psi_n(x)$ die bekannten divergenten Potenzreihen von $\frac{1}{x}$ sind, mit Benutzung der Lagrange'schen Umkehrungsformel aufgelöst und für x_k eine Reihe nach fallenden Potenzen von $\frac{\pi}{4}(2n - 1 + 4k)$ aufgestellt. Die Arbeit enthält wohl nur die formale Ausführung der Rechnungen, denn das Referat bemerkt, dass sich nichts über die Convergenz der Reihen finde.

§ 2.

Wir haben uns bisher mit der Untersuchung derjenigen Nullstellen der Integrale der Differentialgleichung beschäftigt, deren absoluter Betrag gross ist und deren Argument zwischen $-\omega$ und ω $(\omega < \pi)$ liegt. Wir betrachten jetzt ein Integral $y = \bar{f}(x)$, welches für $\pi - \omega < \arg x < \pi + \omega$ eindeutig fixirt sei, und untersuchen die in diesem Gebiete in der Nähe von $x = \infty$ gelegenen Nullstellen $\bar{x}_k$. Es giebt zwei particuläre Integrale $\bar{\eta}_1$, $\bar{\eta}_2$, welche in dem jetzigen Gebiet durch die Reihen $\varrho_1 S_1$, $\varrho_2 S_2$*) asymptotisch dargestellt werden, d. h. es ist

$$\bar{\eta}_1 = e^{ix} \; x^{\mu_1} \varrho_1 \left(A_0 + \frac{A_1}{x} + \cdots + \frac{A_n}{x^n} + \frac{\alpha_n}{x^n} \right),$$

$$\bar{\eta}_2 = e^{-ix} x^{\mu_2} \varrho_2 \left(B_0 + \frac{B_1}{x} + \cdots + \frac{B_n}{x^n} + \frac{\beta_n}{x^n} \right);$$

α und β_n convergiren für $\lim |x| = \infty$ zur Grenze Null und zwar gleichmässig für alle Argumente von x zwischen $\pi - \omega$ und $\pi + \omega (\omega < \pi)$.

Um die Gleichung $\bar{f}(x) = 0$ aufzulösen, haben wir an der Entwicklung von § 1 nur einige Aenderungen anzubringen. Es sei

$$\bar{f}(x) = \bar{c}_1 \bar{\eta}_1 + \bar{c}_2 \bar{\eta}_2.$$

Die Gleichung

$$\begin{aligned}(9) \qquad \bar{f}(x) = e^{ix} \; x^{\mu_1} \varrho_1 \bar{c}_1 \left(\sum_{\nu=0}^{n} \frac{A_\nu}{x^\nu} + \frac{\alpha_n}{x^n} \right) \\ + e^{-ix} x^{\mu_2} \varrho_2 \bar{c}_2 \left(\sum_{\nu=0}^{n} \frac{B_\nu}{x^\nu} + \frac{\beta_n}{x^n} \right) = 0\end{aligned}$$

schreibt sich

$$x + \mu \log x = \bar{c} - k\pi + \sum_{\nu=1}^{n} \frac{K_\nu}{x^\nu} + \frac{\varkappa_n}{x^n};$$

$\log x$ ist durch die Festsetzung $\pi - \omega < \arg x < \pi + \omega$ bestimmt, k ist eine positive ganze Zahl, während in

$$(10) \qquad \bar{c} = \frac{1}{2i} \log \left(- \frac{\varrho_2 \bar{c}_2}{\varrho_2 \bar{c}_1} \frac{B_0}{A_0} \right)$$

ein beliebiger Werth des Logarithmus zu nehmen ist. Um zunächst die Auflösung der Gleichung

$$x + \mu \log x = \bar{c} - k\pi + \frac{K_1}{x} + \frac{K_2}{x^2} + \cdots$$

---

*) Für unsere specielle Differentialgleichung (A) ist unter Beibehaltung der früheren Bezeichnung $\varrho_1 = e^{2\pi i \lambda_1}$, $\varrho_2 = 1$.

formal auszuführen, setzen wir

$$t = \frac{1}{\bar{c} - k\pi}, \quad x = \frac{1}{t(1+\xi)}$$

und erhalten

$$\frac{1}{1+\xi} - \mu t \log t - \mu t \log(1+\xi) = 1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} t^{\nu+1}(t+\xi)^\nu;$$

für $k = +\infty$ wird $\arg t = -\pi$, wodurch $\log t$ fixirt ist; wegen $\arg x = \pi$ für $k = \infty$ und $\arg x = -\arg t - \arg(1+\xi)$ muss für $k = \infty$ $\arg(1+\xi) = 0$ sein, so dass für $\log(1+\xi)$ die Logarithmenreihe zu setzen ist. Die frühere Rechnung liefert die Wurzel

$$\bar{x}_k = \frac{1}{t} + \mu \log t + \sum_{p+q>0} L_{pq} t^p (-t \log t)^q.$$

Nun ist aber, da für $k = \infty$ $\arg t = -\pi$ sein soll,

$$\log t = -\pi i - \log(k\pi - \bar{c})$$

zu setzen, wenn $\log(k\pi - \bar{c})$ durch die Bestimmung $\arg(k\pi - \bar{c}) = 0$ für $k = \infty$ fixirt wird. Demnach erhält man eine Reihenentwicklung von der Form

$$(11) \quad \begin{aligned} \bar{x}_k = \bar{c} - \mu\pi i - k\pi - \mu \log(k\pi - \bar{c}) \\ + \sum_{p+q>0} \bar{L}_{pq} \left(\frac{1}{k\pi - \bar{c}}\right)^p \left(\frac{\log(k\pi - \bar{c})}{k\pi - \bar{c}}\right)^q \end{aligned}$$

mit der Bedeutung

$$(12) \quad \begin{aligned} \bar{x}_k = \bar{c} - \mu\pi i - k\pi - \mu \log(k\pi - \bar{c}) \\ + \sum_{p+q \geqq n} \bar{L}_{pq} \left(\frac{1}{k\pi - \bar{c}}\right)^p \left(\frac{\log(k\pi - \bar{c})}{k\pi - \bar{c}}\right)^q \\ + \frac{\bar{\varepsilon}_n}{(k\pi - \bar{c})^n}, \quad \lim_{k=\infty} \bar{\varepsilon}_n = 0. \end{aligned}$$

Das Integral $y = \bar{c}_1\bar{\eta}_1 + \bar{c}_2\bar{\eta}_2$ *besitzt**) *in der Umgebung von* $x = \infty$ *unendlich viele Nullstellen* $\bar{x}_k$ ($\lim k = +\infty$), *welche durch die Reihe* (11) *asymptotisch dargestellt werden, d. h. es besteht die Gleichung* (12).

Nach (12) ist $\lim\limits_{k=\infty} \arg \bar{x}_k = \pi$, während in § 1 $\lim\limits_{k=\infty} \arg x_k = 0$ war. Wir nehmen nun an, das Integral $\bar{f}(x)$ der Differentialgleichung (A), welches für $\pi - \omega < \arg x < \pi + \omega$ fixirt sein sollte, falle mit dem für $-\omega < \arg x < \omega$ fixirten Integral $f(x)$ für $\pi - \omega < \arg x < \omega$ zusammen (wobei ω zwischen $\frac{\pi}{2}$ und π liegen soll). Zwischen den von der positiven reellen Axe zur negativen reellen Axe fortgesetzten

*) Falls $\bar{c}_1$ und $\bar{c}_2$ von Null verschieden sind.

Functionen η_1, η_2 und den auf der negativen reellen Axe definirten Functionen $\overline{\eta}_1$, $\overline{\eta}_2$ besteht der Zusammenhang:

$$\overline{\eta}_1 = e^{2\pi i\lambda_1}\eta_1, \qquad \overline{\eta}_2 = \eta_2 + (e^{2\pi i\lambda_2} - 1)\eta_1$$

oder

$$\eta_1 = e^{-2\pi i\lambda_1}\overline{\eta}_1, \quad \eta_2 = \overline{\eta}_2 - e^{-2\pi i\lambda_1}(e^{2\pi i\lambda_2} - 1)\overline{\eta}_1.$$

Die Fortsetzung des Integrals $f(x)$ ist daher auf der negativen reellen Axe

$$\overline{f}(x) = c_1\eta_1 + c_2\eta_2 = e^{-2\pi i\lambda_1}\Big((c_1 - c_2(e^{2\pi i\lambda_2} - 1)\Big)\overline{\eta}_1 + c_2\overline{\eta}_2,$$

also durch Vergleichung mit $\overline{f}(x) = \overline{c}_1\overline{\eta}_1 + \overline{c}_2\overline{\eta}_2$

$$\overline{c}_1 = e^{-2\pi i\lambda_1}\Big(c_1 - c_2(e^{2\pi i\lambda_2} - 1)\Big), \quad \overline{c}_2 = c_2.$$

Lässt man die Veränderliche eine volle positive Umdrehung um $x = 0$ ausführen, so geht die Function $f(x)$ über in

$$f_1(x) = c_1\eta_1' + c_2\eta_2'$$

oder, da

$$\eta_1' = \alpha\eta_1 + \beta\eta_2,$$
$$\eta_2' = \gamma\eta_1 + \beta\eta_2$$

ist, wo die Coefficienten die früher bestimmten Werthe haben,

$$f_1(x) = (c_1\alpha + c_2\gamma)\eta_1 + (c_1\beta + c_2\delta)\eta_2 = c_1'\eta_1 + c_2'\eta_2,$$

so dass in den Formeln des § 1 an Stelle von c_1, c_2 die Werthe

$$c_1' = c_1\alpha + c_2\gamma,$$
$$c_2' = c_1\beta + c_2\delta$$

treten.

Um die in der Nähe von $x = \infty$ gelegenen Nullstellen der ganzen transcendenten Functionen $G_1(x)$ und $G_2(x)$ zu finden, hat man in den Formeln von § 1 und § 2 zu setzen:

$$c_1 = e^{2\pi i\lambda_2} - 1, \qquad c_2 = -(e^{2\pi i\lambda_1} - 1),$$
$$\overline{c}_1 = e^{2\pi i\lambda_2} - 1, \qquad \overline{c}_2 = -(e^{2\pi i\lambda_1} - 1)$$

für $G_1(x)$ und

$$c_1 = e^{2\pi i\lambda_2}, \qquad c_2 = 1,$$
$$\overline{c}_1 = e^{-2\pi i\lambda_1}, \quad \overline{c}_2 = 1$$

für $G_2(x)$.

§ 3.

Die Differentialgleichung (A) besitzt die Integrale

(13) $$y_1 = G_1(x), \qquad y_2 = x^{-\lambda_1-\lambda_2-1}G_2(x),$$

wo $G_1(x)$, $G_2(x)$ ganze transcendente Functionen sind. Wir stellen uns die Aufgabe, *mit Hülfe der asymptotischen Darstellungen das Geschlecht dieser ganzen Functionen zu bestimmen**).

---

*) Auch diese Untersuchung wird im Hinblick auf allgemeinere lineare Differentialgleichungen geführt.

Die Differentialgleichung

$$x\frac{d^2y}{dx^2}+(a_1x+b_1)\frac{dy}{dx}+(a_2x+b_2)y=0$$

mit den Integralen

$$y_1=F_1(x),\qquad y_2=x^{1-b_1}F_2(x),$$

wo $F_1(x)$, $F_2(x)$ ganze transcendente Functionen sind, geht durch die Substitution

$$y=e^{-\frac{a_1}{2}x},\qquad x=\frac{2\xi}{\sqrt{4a_2-a_1^2}}$$

über in

$$\xi\frac{d^2\eta}{d\xi^2}+(\lambda_1+\lambda_2+2)\frac{d\eta}{d\xi}+\big(\xi+(\lambda_1-\lambda_2)i\big)\,\eta=0,$$

wo

$$\lambda_1+\lambda_2+2=b_1,$$
$$(\lambda_1-\lambda_2)i=\frac{2b_2-a_1b_1}{\sqrt{4a_2-a_1^2}}\ ^{*)}$$

ist, während man durch die Substitution

$$y=e^{\alpha x}\mathfrak{y},\qquad x=-\frac{\mathfrak{x}}{2\alpha+a_1},$$

wo α eine der beiden (als verschieden vorausgesetzten) Wurzeln der quadratischen Gleichung $\alpha^2+a_1\alpha+a_2=0$ darstellt, die Gleichung

$$\mathfrak{x}\frac{d^2\mathfrak{y}}{d\mathfrak{x}^2}=(\mathfrak{x}-q)\frac{d\mathfrak{y}}{dx}+p\mathfrak{y}$$

erhält, worin

$$q=b_1,\quad p=\frac{b_1\alpha-b_2}{2\alpha+a_1}$$

gesetzt ist. Unter Einführung der ganzen transcendenten Function

$$(14)\qquad F(p,q,x)=1+\frac{p}{1.q}x+\frac{p(p+1)}{1.2.q(q+1)}x^2+\cdots$$

erhält man für letztere Differentialgleichung die Integrale

$$\mathfrak{y}_1=F(p,q,x),$$
$$\mathfrak{y}_2=x^{1-q}F(p-q+1,\,2-q,\,x)\ ^{**)}.$$

Eine ganze transcendente Function $F(x)$ mit den Nullstellen $\omega_\nu(\nu=1,2,\ldots\infty)$ ist vom Geschlecht m, wenn die Reihe $\sum_\nu|\omega_\nu|^{-m}$ divergent, die Reihe $\sum_\nu|\omega_\nu|^{-m-1}$ convergent ist, so dass das Weierstrass'sche Product

---

*) Es wird vorausgesetzt, dass $4a_2-a_1^2$ von Null verschieden ist und dass λ_1, λ_2 die früheren Bedingungen erfüllen.

**) Pochhammer, Math. Ann, Bd. 36.

$$\Pi(x) = \prod_\nu \left(1 - \frac{x}{\omega_\nu}\right) e^{\frac{x}{\omega_\nu} + \frac{1}{2}\left(\frac{x}{\omega_\nu}\right)^2 + \cdots + \frac{1}{m}\left(\frac{x}{\omega_\nu}\right)^m}$$

convergirt, und wenn weiter

$$F(x) = e^{g(x)}\,\Pi(x)$$

ist, wo $g(x)$ eine ganze rationale Function bedeutet, deren Grad nicht grösser als m ist.

Die Function $G_1(x)$ besitzt nach § 1 und § 2 unendlich viele Nullstellen

$$x_k = c + k\pi - \mu \log(c + k\pi) + \varepsilon_k, \qquad \lim_{k=\infty} \varepsilon_k = 0,$$
$$\bar{x}_k = \bar{c} - \mu\pi i - k\pi - \mu \log(k\pi - \bar{c}) + \bar{\varepsilon}_k, \quad \lim_{k=\infty} \bar{\varepsilon}_k = 0.$$

Die Reihe

$$\sum_k \frac{1}{|x_k|}$$

ist divergent; denn es ist

$$x_k = k\pi(1 + \delta_k), \quad \lim_{k=\infty} \delta_k = 0,$$

also

$$\sum_k \frac{1}{|x_k|} = \frac{1}{\pi} \sum_k \frac{1}{k|1 + \delta_k|} \geq \frac{1}{\pi} \sum_k \frac{1}{k(1 + |\delta_k|)};$$

für $k > k'$ ist $|\delta_k|$ kleiner als die beliebig kleine positive Grösse δ, also

$$\sum_{k > k'} \frac{1}{|x_k|} > \frac{1}{\pi(1 + \delta)} \sum_{k > k'} \frac{1}{k}.$$

Dagegen ist die Reihe

$$\sum_k \frac{1}{|x_k|^2}$$

convergent; denn es ist

$$\sum_k \frac{1}{|x_k|^2} = \frac{1}{\pi^2} \sum_k \frac{1}{k^2 . |1 + \delta_k|^2} < \frac{1}{\pi^2} \sum_k \frac{1}{k^2 . \left|1 - |\delta_k|^2\right|},$$

also

$$\sum_{k > k'} \frac{1}{|x_k|^2} < \frac{1}{\pi^2(1 - \delta^2)} \sum_{k > k'} \frac{1}{k^2}.$$

Ebenso ist von den Reihen

$$\sum_k \frac{1}{|\bar{x}_k|}, \qquad \sum_k \frac{1}{|\bar{x}_k|^2}$$

die erste divergent, die zweite convergent. Wenn wir sämmtliche Nullstellen von $G_1(x)$ mit ω_ν ($\nu = 1, 2, \cdots \infty$) bezeichnen, so convergirt das Product

$$\Pi(x) = \prod_\nu \left(1 - \frac{x}{\omega_\nu}\right) e^{\frac{x}{\omega_\nu}}$$

und es ist

$$G_1(x) = e^{g(x)}\Pi(x),$$

wo $g(x)$ eine ganze rationale oder transcendente Function darstellt. Um zu zeigen, dass $G_1(x)$ das Geschlecht 1 besitzt, bedarf es noch des Nachweises, dass $g(x)$ eine ganze Function ersten Grades ist.

Nun haben wir für $G_1(x)$ eine Darstellung von der Form

$$G_1(x) = c_1 e^{ix} x^{\mu_1}(A_0 + \alpha_0) + c_2 e^{-ix} x^{\mu_2}(B_0 + \beta_0),$$

wo α_0 und β_0 für $\lim |x| = \infty$ gleichmässig zur Grenze Null convergiren, wenn $\arg x$ zwischen $-\pi + \delta$ und $\pi - \delta$ liegt, und eine Darstellung von derselben Form, nur mit theilweise anderen Coefficienten, welche für $\delta < \arg x < 2\pi - \delta$ gilt. Dabei ist δ eine beliebig kleine positive Grösse. Demnach ist für $-\pi + \delta < \arg x < \pi - \delta$

$$\begin{aligned} |G_1(x) &\leqq e^{|x|}\left\{e^{\Re(\mu_1 \log x)}\,|c_1(A_0+\alpha_0)| + \cdots\right\} \\ &\leqq e^{|x|}\left\{e^{|\mu_1|\,|\log|x|| + |\mu_1|\,|\arg x|}\,|c_1(A_0+\alpha_0)| + \cdots\right\} \\ &= e^{|x|^{1+\varepsilon}}\left\{e^{|\mu_1|\log|x| + |\mu_1|\,|\arg x| - |x|^{\varepsilon}} \cdot |c_1(A_0+\alpha_0)| + \cdots\right\}. \end{aligned}$$

Wenn man unter ε eine beliebige positive Grösse versteht, wird der Klammerausdruck für alle Argumente von x zwischen $-\pi + \delta$ und $\pi - \delta$ kleiner als 1, also

$$|G_1(x)| < e^{|x|^{1+\varepsilon}},$$

wenn man nur $|x|$ hinreichend gross nimmt. Dasselbe zeigt man für $\delta < \arg x < 2\pi - \delta$. Wenn also ε eine beliebig kleine positive Grösse darstellt, ist für alle Werthe von x, deren absoluter Betrag eine gewisse Grenze übersteigt,

$$|G_1(x)| < e^{|x|^{1+\varepsilon}}.$$

Ferner lassen sich*) um den Nullpunkt Kreise mit beliebig grossen Radien beschreiben, auf welchen

$$|\Pi(x)| > e^{-|x|^{1+\varepsilon}}$$

ist. Auf diesen Kreisen ist also

$$|e^{g(x)}| = \left|\frac{G_1(x)}{\Pi(x)}\right| < e^{2|x|^{1+\varepsilon}}.$$

Wenn es aber beliebig grosse Werthe von $|x|$ giebt, für welche

$$|e^{g(x)}| < e^{H|x|^{\lambda}}$$

ist**), so ist $g(x)$ eine ganze rationale Function höchstens λ^{ten} Grades. In unserem Falle ist also $g(x)$ linear oder constant.

Dieselben Schlüsse gelten für $G_2(x)$.

Die Differentialgleichung (A) *besitzt die Integrale*

---

*) Hadamard, Liouv. Journ. 1893, S. 204.

**) Hadamard, a. a. O. S. 187.

$$y_1 = G_1(x), \qquad y_2 = y^{-\lambda_1-\lambda_2-1} G_2(x),$$

wo $G_1(x)$, $G_2(x)$ *ganze transcendente Functionen vom Geschlecht* 1 *sind.*

Ist die Function $F(x)$ vom Geschlecht 1, so gilt das Gleiche für $e^{ax} F(bx)$; also sind auch die oben eingeführten Functionen $F_1(x)$, $F_2(x)$ sowie $F(p, q, x)$ vom Geschlecht 1*). Sind $\omega_\nu (\nu = 1, 2, \cdots \infty)$ die Nullstellen von $F(p, q, x)$, so ist

$$(15) \qquad F(p, q, x) = e^{cx} \prod_{\nu=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x}{\omega_\nu}\right) e^{\frac{x}{\omega_\nu}};$$

durch Reihenentwicklung des Products und Coefficientenvergleichung findet man

$$(15') \qquad c = \frac{p}{q}.$$

Die Bessel'sche Function**)

$$J_n(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2\nu}}{\Gamma(n+\nu+1)\,\Gamma(\nu+1)}$$

habe die Nullstellen $\pm \omega_\nu$ $(\nu = 1, 2 \cdots \infty)$. Unter Einführung des convergenten Productes

$$\prod_\nu \left(1 - \frac{x}{\omega_\nu}\right) e^{\frac{x}{\omega_\nu}} \left(1 + \frac{x}{\omega_\nu}\right) e^{-\frac{x}{\omega_\nu}} = \prod_\nu \left(1 - \frac{x^2}{\omega_\nu^2}\right)$$

haben wir

$$J_n(x) = \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^n}{\Gamma(n+1)} e^{cx} \prod_\nu \left(1 - \frac{x^2}{\omega_\nu^2}\right);$$

die Coefficientenvergleichung ergiebt $c = 0$, also ist

$$(16) \qquad J_n(x) = \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^n}{\Gamma(n+1)} \prod_\nu \left(1 - \frac{x^2}{\omega_\nu^2}\right).$$

Demnach ist $x^{-n} J_n(x)$ eine ganze transcendente Function von x^2 vom Geschlecht 0.

Herr Hadamard stellte sich in seiner bereits angeführten Arbeit (zum Zweck der Untersuchung der Riemann'schen Function $\zeta(s)$) die Aufgabe, aus der Art, wie die Coefficienten einer beständig convergenten Potenzreihe abnehmen, das Geschlecht der ganzen transcen-

---

*) Dabei nehmen wir an, dass die entsprechende Differentialgleichung (A) die früheren Bedingungen erfüllt.

**) Wenn auch der Fall eines ganzzahligen n zu den bisher ausgeschlossenen Fällen gehört, so besitzt $J_n(x)$ doch eine asymptotische Darstellung, welche in der bisher betrachteten enthalten ist.

denten Function zu bestimmen. Herr Poincaré*) hatte den Satz bewiesen:

„Ist die ganze Function

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

vom Geschlecht m, so ist

$$\lim_{n=\infty} a_n \sqrt[m+1]{n!} = 0.“$$

Herr Hadamard stellte den Satz auf:

„Wenn für grosse n

$$|a_n| \cdot \sqrt[\lambda]{n!} < 1$$

ist, so ist das Geschlecht der Function $F(x)$ nicht grösser als λ.“ **)

Wir versuchen, vermittelst dieses Satzes das Geschlecht der Function $F(p, q, x)$ zu bestimmen; hier ist

$$(17) \qquad a_n = \frac{1}{n!} \frac{\Gamma(p+n)}{\Gamma(q+n)} \frac{\Gamma(q)}{\Gamma(p)},$$

also

$$\log(n!\, a_n) = \log \frac{\Gamma(q)}{\Gamma(p)} + \log \Gamma(p+n) - \log \Gamma(q+n).$$

Zur Entwicklung der beiden letzten Glieder benutzen wir die Stirling'sche Reihe

$$\log \Gamma(a) = \left(a - \tfrac{1}{2}\right) \log a - a + \log \sqrt{2\pi} + \frac{B_1}{1.2a} - \frac{B_2}{3.4.a^3} + \cdots;$$

trotz der Divergenz der Reihe hat die Gleichung die folgende Bedeutung: setzt man

$$\log \Gamma(a) = \left(a - \tfrac{1}{2}\right) \log a - a + \log \sqrt{2\pi} + \frac{C_1}{a} + \frac{C_2}{a^2} + \cdots + \frac{C_\nu}{a^\nu} + \frac{\gamma_\nu}{a^\nu} \text{***}),$$

so convergirt γ_ν mit unendlich wachsendem $|a|$ zur Grenze Null und zwar gleichmässig für alle Argumente von a zwischen $-\omega$ und ω $(\omega < \pi)$†). Hiernach ist

*) Bulletin de la Société mathématique 1883.

**) Damit konnte gezeigt werden, dass die Riemann'sche Function $\xi(t)$ eine ganze Function von t^2 vom Geschlecht 0 ist.

***) Dabei ist zur Vereinfachung der Schreibweise $C_1 = \frac{B_1}{1.2}$, $C_2 = 0$ u. s. w. gesetzt.

†) Für complexe a wurde die Reihe von Stieltjes, Liouv. Journ. 1889, behandelt.

$$\log(n!\,a_n) = \log\frac{\Gamma(q)}{\Gamma(p)}$$
$$+ n\log\frac{p+n}{q+n} + \left(p-\tfrac{1}{2}\right)\log(p+n) - \left(q-\tfrac{1}{2}\right)\log(q+n) - p + q$$
$$+ C_1\left(\frac{1}{p+n} - \frac{1}{q+n}\right) + C_2\left(\frac{1}{(p+n)^2} - \frac{1}{(q+n)^2}\right) + \cdots$$
$$+ C_\nu\left(\frac{1}{(p+n)^\nu} - \frac{1}{(q+n)^\nu}\right) + \frac{\gamma_\nu'}{(p+n)^\nu} - \frac{\gamma_\nu''}{(q+n)^\nu},$$
$$\lim_{n=\infty}\gamma_\nu' = 0, \quad \lim_{n=\infty}\gamma_\nu'' = 0.$$

Nun ist

$$n\log\frac{p+n}{q+n} = p - q - \frac{p^2-q^2}{2n} + \cdots \pm \frac{p^{\nu+1}-q^{\nu+1}}{(\nu+1)n^\nu} + \frac{\alpha_\nu}{n^\nu},$$
$$\lim_{n=\infty}\alpha_\nu = 0;$$

$$\left(p-\tfrac{1}{2}\right)\log(p+n) - \left(q-\tfrac{1}{2}\right)\log(q+n)$$
$$= (p-q)\log n + \frac{\left(p-\frac{1}{2}\right)p - \left(q-\frac{1}{2}\right)q}{n} + \cdots$$
$$\pm \frac{\left(p-\frac{1}{2}\right)p^\nu - \left(q-\frac{1}{2}\right)q^\nu}{\nu n^\nu} + \frac{\beta_\nu}{n^\nu}, \quad \lim_{n=\infty}\beta_\nu = 0;$$

$$\frac{1}{(p+n)^\mu} - \frac{1}{(q+n)^\mu} = \frac{1}{n^\mu}\left(\left(1+\frac{p}{n}\right)^{-\mu} - \left(1+\frac{q}{n}\right)^{-\mu}\right)$$
$$= \frac{1}{n^\mu}\left(-\mu\,\frac{p-q}{n} + \cdots + \frac{\delta_{\mu\nu}}{n^{\nu-\mu}}\right)$$
$$= -\mu\,\frac{p-q}{n^{\mu+1}} + \cdots + \frac{\delta_{\mu\nu}}{n^\nu}, \quad \lim_{n=\infty}\delta_{\mu\nu} = 0.$$

Durch Einsetzung dieser Ausdrücke erhält man eine Entwickelung von der Form

$$\log(n!\,a_n) = \log\frac{\Gamma(q)}{\Gamma(p)} + (p-q)\log n$$
$$+ \frac{\varkappa_1}{n} + \frac{\varkappa_2}{n^2} + \cdots + \frac{\varkappa_\nu}{n^\nu} + \frac{\varepsilon_\nu}{n^\nu}, \quad \lim_{n=\infty}\varepsilon_\nu = 0$$

oder die asymptotische Gleichung für grosse n

$$\log(n!\,a_n) \sim \log\frac{\Gamma(q)}{\Gamma(p)} + (p-q)\log n + \frac{\varkappa_1}{n} + \frac{\varkappa_2}{n^2} + \cdots,$$

woraus hervorgeht*):

*) Ueber das Rechnen mit asymptotischen Reihen vgl. Poincaré, Act. math. Bd. 8 und Méth. nouv. de la Méc. cél. Bd. II.

(18) $$n!\, a_n \sim \frac{\Gamma(q)}{\Gamma(p)} n^{p-q}\left(1+\frac{\gamma_1}{n}+\frac{\gamma_2}{n^2}+\cdots\right).$$

Hiernach ist insbesondere

$$n!\, a_n = \frac{\Gamma(q)}{\Gamma(p)} n^{p-q}(1+\varepsilon), \quad \lim_{n=\infty} \varepsilon = 0.$$

Bedeutet δ eine beliebig kleine positive Grösse, so ist für grosse n

$$|a_n| \cdot \sqrt[1+\delta]{n!} < 1,$$

so dass nach dem Hadamard'schen Satze das Geschlecht kleiner als $1+\delta$ ist, d. h. gleich 0 oder 1. Wäre unsere Function vom Geschlecht 0, so müsste nach dem Poincaré'schen Satze $\lim\limits_{n=\infty} a_n n! = 0$ sein; im Falle $\Re(p-q) \geqq 0$ ist demnach das Geschlecht sicher gleich 1, während der Fall $\Re(p-q) < 0$ noch unentschieden bleibt. Mit Hülfe des Aufschlusses, welchen die asymptotische Darstellung über die Nullstellen giebt, ersieht man, dass das Geschlecht 0 ausgeschlossen ist.

§ 4.

Wir setzen jetzt die Coefficienten der Differentialgleichung (A) als reell, λ_1 und λ_2 als conjugirt complex voraus, so dass auch

$$\mu_1 = -\lambda_1 - 1 = \varrho + i\sigma,$$
$$\mu_2 = -\lambda_2 - 1 = \varrho - i\sigma$$

conjugirt complex sind. *Wir benutzen die asymptotischen Darstellungen zur Untersuchung der reellen Integrale für grosse reelle positive Werthe von x.* Die zu dem Integral η_1 conjugirte Function ist, wie aus den früher aufgestellten bestimmten Integralen hervorgeht, $-e^{-2\pi i\lambda_1-4\pi i\lambda_2}\eta_2$. Wir wollen die frühere Bezeichnung insofern abändern, als wir η_2 an Stelle von $-e^{-2\pi i\lambda_1-4\pi i\lambda_2}\eta_2$ und entsprechend B_n an Stelle von $-e^{-2\pi i\lambda_1-4\pi i\lambda_2}B_n$ setzen. Die Differentialgleichung besitzt dann zwei conjugirt complexe Integrale η_1, η_2, welche für grosse reelle positive x durch die Reihen

$$S_1 = e^{ix}\ x^{\mu_1}\left(A_0+\frac{A_1}{x}+\frac{A_2}{x^2}+\cdots\right),$$
$$S_2 = e^{-ix}\, x^{\mu_2}\left(B_0+\frac{B_1}{x}+\frac{B_2}{x^2}+\cdots\right)$$

asymptotisch dargestellt ist; die Coefficienten A_n und B_n sind conjugirt complex. Wenn die Constanten c_1, c_2 conjugirt complex sind, stellt

$$y = f(x) = c_1\eta_1 + c_2 y_2$$

ein reelles Integral der Differentialgleichung dar. Die Function $f(x)$ besitzt nach § 1 unendlich viele Nullstellen

$$x_k = c + k\pi - \mu \log (c + k\pi)$$
$$+ \sum_{p+q \leq n} L_{pq} \left(\frac{1}{c+k\pi}\right)^p \left(\frac{\log c + k\pi}{c+k\pi}\right)^q + \frac{\varepsilon_n}{(c+k\pi)^n},$$
$$\lim_{k=\infty} \varepsilon_n = 0;$$

die Coefficienten L_{pq} sind jetzt ebenso wie c reell. Es bedarf noch des Nachweises, *dass für hinreichend grosse k x_k selbst reell ist**). Man hat jetzt

$$f(x) = e^{ix} x^{\mu_1} (A_0 + \alpha_0) + e^{-ix} x^{\mu_2} (B_0 + \beta_0),$$
$$\lim_{x=+\infty} \alpha_0 = 0, \quad \lim_{x=+\infty} \beta_0 = 0$$

oder

$$h(x) = x^{-\varrho} f(x) = \cos (x + \sigma \log x) \cdot (P_0 + \varphi_0)$$
$$- \sin (x + \sigma \log x) \cdot (Q_0 + \psi_0),$$

wo P_0, Q_0 reelle Constante und φ_0, ψ_0 reelle Functionen von x sind, für welche

$$\lim_{x=\infty} \varphi_0 = 0, \qquad \lim_{x=\infty} \psi_0 = 0$$

ist. Setzt man

$$H(x) = P_0 \cos (x + \sigma \log x) - Q_0 \sin (x + \sigma \log x),$$

so ist

$$h(x) = H(x) + \varepsilon_0,$$
$$\varepsilon_0 = \varphi_0 \cos (x + \sigma \log x) - \psi_0 \sin (x + \sigma \log x),$$
$$\lim_{x=\infty} \varepsilon_0 = 0.$$

Die Gleichung $H(x) = 0$ oder

$$x + \sigma \log x = \operatorname{arctg} \frac{P_0}{Q_0} + k\pi$$

hat, einem grossen positiven Werth von k entsprechend, eine grosse positive Wurzel X_k. Wenn δ eine hinreichend kleine positive Grösse bedeutet, hat die Function $H(x)$ für $x = X_k - \delta$ und $x = X_k + \delta$ verschiedene Vorzeichen; dasselbe gilt wegen $\lim\limits_{x=\infty} \varepsilon_0 = 0$ für hinreichend grosse k für $h(x) = H(x) + \varepsilon_0$. Es liegt also zwischen $X_k - \delta$ und $X_k + \delta$ eine reelle Wurzel x_k der Gleichung $f(x) = 0$, wenn k hinreichend gross genommen wird**).

Es wurde früher gezeigt, dass die asymptotische Gleichung

$$(19) \quad f(x) \sim e^{ix} x^{\mu_1} c_1 \left(A_0 + \frac{A_1}{x} + \cdots\right) + e^{-ix} x^{\mu_2} c_2 \left(B_0 + \frac{B_1}{x} + \cdots\right)$$

---

*) In Betreff sämmtlicher Nullstellen der Bessel'schen Function $J_n(x)$ vgl. Hurwitz, Math. Ann. Bd. 33.

**) Sämmtliche reellen Integrale besitzen unendlich viele reelle Nullstellen. Die Integrale η_1, η_2 ohne Nullstellen in der Nähe von $x = \infty$ sind nicht reell. Vgl. Kneser, Math. Ann. Bd. 42.

differentiirt werden kann; es ist

$$(20)\quad f'(x) \sim e^{ix} x^{\mu_1} c_1\left(A_0' + \frac{A_1'}{x} + \cdots\right) + e^{-ix} x^{\mu_2} c_2\left(B_0' + \frac{B_1'}{x} + \cdots\right),$$

$$(21)\quad f''(x) \sim e^{ix} x^{\mu_1} c_1\left(A_0'' + \frac{A_1''}{x} + \cdots\right) + e^{-ix} x^{\mu_2} c_2\left(B_0'' + \frac{B_1''}{x} + \cdots\right),$$

wobei gesetzt ist:

$$\begin{aligned}
A_0' &= \quad iA_0, \quad A_1' = \quad iA_1 + \mu_1 A_0, \cdots, \\
B_0' &= -iB_0, \quad B_1' = -iB_1 + \mu_2 B_0, \cdots, \\
A_0'' &= -\ A_0, \quad A_1'' = -A_1 + 2i\mu_1 A_0, \cdots, \\
B_0'' &= -\ B_0, \quad B_1'' = -B_1 - 2i\mu_2 B_0, \cdots.
\end{aligned}$$

Die Gleichungen $f'(x) = 0$, $f''(x) = 0$ besitzen unendlich viele reelle positive Wurzeln x_k' bezw. x_k'':

$$(22)\quad x_k' = c' + k\pi - \mu \log(c' + k\pi) + \sum_{p+q \leqq n} L'_{pq}\left(\frac{1}{c' + k\pi}\right)^p \left(\frac{\log(c' + k\pi)}{c' + k\pi}\right)^q + \frac{\varepsilon_n'}{(c' + k\pi)^n}, \quad \lim_{k=\infty} \varepsilon_n' = 0;$$

$$(23)\quad x_k'' = c'' + k\pi - \mu \log(c'' + k\pi) + \sum_{p+q \leqq n} L''_{pq}\left(\frac{1}{c'' + k\pi}\right)^p \left(\frac{\log(c'' + k\pi)}{c'' + k\pi}\right)^q + \frac{\varepsilon_n''}{(c'' + k\pi)^n}, \quad \lim_{k=\infty} \varepsilon_n'' = 0;$$

hierbei ist

$$(24)\qquad c' = c + \frac{\pi}{2}, \quad c'' = c.$$

Aus der obigen asymptotischen Darstellung lässt sich vermittelst einfacher Rechnungen das Verhalten der Curve $y = f(x)$ für grosse reelle x ermitteln. Nachdem asymptotische Ausdrücke für die Abscissen x_k' und x_k'' der Maxima und Minima bezw. der Wendepunkte gefunden sind, wollen wir noch die Maximal- und Minimalwerthe der Function untersuchen, d. h. eine asymptotische Darstellung für $f(x_k')$ ableiten.

Aus (22) folgt, wenn wir vorübergehend

$$\frac{1}{c' + k\pi} = t, \quad \frac{\log(c' + k\pi)}{c' + k\pi} = z$$

setzen,

$$e^{ix_k'} = e^{i(c' + k\pi)} (c' + k\pi)^{-\mu i}\left(1 + \sum_{(0 < p+q \leqq n)} A_{pq}\, t^p z^q + \gamma_n t^n\right),$$

$$\lim_{k=\infty} \gamma_n = 0,$$

sowie

$$x_k'^{\mu_1} = (c' + k\pi)^{\mu_1}(1 - \mu z + L_{10}' t^2 + L_{01}' t z + \cdots)^{\mu_1}$$
$$= (c' + k\pi)^{\mu_1}\Big(1 + \sum_{(0<p+q\leqq n)} B_{pq} t^p z^q + \delta_n t^n\Big),$$
$$\lim_{k=\infty} \delta_n = 0;$$

ferner ist:

$$\frac{1}{x_k'} = \frac{1}{c' + k\pi}(1 + \mu z + \cdots) = t + \mu t z + \cdots$$

und nach Einsetzung dieser Reihe

$$A_0 + \frac{A_1}{x_k'} + \cdots + \frac{A_n}{x_k'^n} + \frac{\alpha_n}{x_k'^n}$$
$$= A_0 + \sum_{(0<p+q\leqq n)} C_{pq} t^p z^q + \zeta_n t^n, \qquad \lim_{k=\infty} \zeta_n = 0;$$

also haben wir eine Entwickelung von der Form

$$e^{i x_k'} x_k'^{\mu_1} c_1 \Big(A_0 + \frac{A_1}{x_k'} + \cdots + \frac{A_n}{x_k'^n} + \frac{\alpha_n}{x_k'^n}\Big)$$
$$= (-1)^k (c' + k\pi)^{\frac{\mu_1+\mu_2}{2}} \Big[\sqrt{c_1 c_2 A_0 B_0} + \sum_{(0<p+q\leqq n)} R_{pq} t^p z^q + \varrho_n t^n\Big],$$
$$\lim_{k=\infty} \varrho_n = 0^{*})$$

und ähnlich

$$e^{-i x_k'} x_k'^{\mu_2} c_2 \Big(B_0 + \frac{B_1}{x_k'} + \cdots + \frac{B_n}{x_k'^n} + \frac{\beta_n}{x_k'^n}\Big)$$
$$= (-1)^k (c' + k\pi)^{\frac{\mu_1+\mu_2}{2}} \Big[\sqrt{c_1 c_2 A_0 B_0} + \sum_{(0<p+q\leqq n)} S_{pq} t^p z^q + \sigma_n t^n\Big],$$
$$\lim_{k=\infty} \sigma_n = 0.$$

Wir haben demnach

$$(25)\quad f(x_k') = (-1)^k (c' + k\pi)^{\frac{\mu_1+\mu_2}{2}} \Big[2\sqrt{c_1 c_2 A_0 B_0}$$
$$+ \sum_{(0<p+q\leqq n)} T_{pq} \Big(\frac{1}{c' + k\pi}\Big)^p \Big(\frac{\log(c' + k\pi)}{c' + k\pi}\Big)^q + \frac{\tau_n}{(c' + k\pi)^n}\Big],$$
$$\lim_{k=\infty} \tau_n = 0$$

---

*) Dabei ist auf die Gleichungen

$$\mu i = \frac{\mu_1 + \mu_2}{2}, \quad c' = \frac{1}{2i} \log \frac{c_2 B_0}{c_1 A_0}$$

Rücksicht genommen.

und insbesondere

$$f(x_k') = (-1)^k \left(2\sqrt{c_1 c_2 A_0 B_0} + \tau_0\right)(c' + k\pi)^{\frac{\mu_1+\mu_2}{2}},$$

$$\lim_{k=\infty} \tau_0 = 0.$$

Ersetzt man in der asymptotischen Reihe für $f(x)$ x durch die asymptotische Reihe für die Wurzel x_k' der Gleichung $f'(x) = 0$ und führt man die Rechnungen nach den für convergente Reihen gültigen Regeln formal aus, so erhält man eine asymptotische Darstellung für $f(x_k')$.

Das Bisherige wird genügen, um zu zeigen, wie sich mit Hülfe der asymptotischen Darstellung der Integrale durch divergente Reihen das Verhalten der reellen Integralcurven im Unendlichen untersuchen lässt.

Charlottenburg, 3. Februar 1897.