Ueber die Differentialgleichung der allgemeineren F-Reihe.

Von

L. Pochhammer in Kiel.

§ 1.

Die Bezeichnung $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$, welche Gauss für die hypergeometrische Reihe

$$1+\frac{\alpha\beta}{1.\gamma}x+\frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1.2.\gamma(\gamma+1)}x^2+\cdots+\text{inf.}$$

angewendet hat, möge in der Art verallgemeinert werden, dass

$$(1)\qquad F(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m;\ \varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_{n-1};\ x)$$
$$=1+\frac{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m}{1.\varrho_1\varrho_2\ldots\varrho_{n-1}}x+\frac{\alpha_1(\alpha_1+1)\alpha_2(\alpha_2+1)\ldots\alpha_m(\alpha_m+1)}{1.2.\varrho_1(\varrho_1+1)\varrho_2(\varrho_2+1)\ldots\varrho_{n-1}(\varrho_{n-1}+1)}x^2+\cdots+\text{inf.}$$

gesetzt, und der letztere Ausdruck eine *F-Reihe* genannt wird*). Die in der Reihe (1) vorkommenden Constanten zerfallen in die zwei Gruppen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ (Zählergruppe) und $\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_{n-1}$ (Nennergruppe), welche bei der obigen abgekürzten Bezeichnung sowohl von einander als vom Argumente x durch je ein Semicolon getrennt sind. In Bezug auf die positiven ganzen Zahlen m und n setzt man voraus, dass $m \leqq n$ sei. Für $m > n$ wird die Reihe (1) divergent. Der Fall $m = n$ ist vom Verfasser in der Abhandlung „Ueber die Differentialgleichung der allgemeineren hypergeometrischen Reihe mit zwei endlichen singulären Punkten"**), und der Fall $m = n - 1$ in der Abhandlung „Ueber eine lineare Differentialgleichung n^{ter} Ordnung mit einem end-

*) In einer im Jahre 1871 veröffentlichten Arbeit „Ueber Relationen zwischen hypergeometrischen Integralen n^{ter} Ordnung" (Crelle's Journal, Bd. 73, pag. 135) habe ich für eine hypergeometrische Reihe n^{ter} Ordnung (mit n endlichen singulären Punkten) das Functionszeichen *F mit dem Index n* angewendet (l. c. p. 137). Es ist zu bemerken, dass diese Bezeichnung mit dem hier definirten Symbol

$$F(\alpha_1, \ldots, \alpha_m;\ \varrho_1, \ldots, \varrho_{n-1};\ x)$$

in keiner Beziehung steht.

**) Crelle's Journal, Bd. 102.

lichen singulären Punkte"*) behandelt worden. Im Fall $m = n$ ist die Reihe (1) — die dann als eine hypergeometrische Reihe bezeichnet wird — innerhalb des um den Nullpunkt mit dem Radius 1 gezogenen Kreises convergent, während sie für mod. $x > 1$ divergirt. Ist $m < n$, so stellt die Reihe (1), unter der Voraussetzung, dass keine der Constanten $\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_{n-1}$ gleich Null oder gleich einer negativen ganzen Zahl ist, eine transcendente ganze Function von x dar. Denn die bekannten Kriterien ergeben, dass die Reihe für jeden endlichen Werth von x convergirt.

Die Reihe (1) genügt, wie im Folgenden gezeigt wird, einer linearen Differentialgleichung n^{ter} Ordnung mit rationalen Coefficienten. Für diese Gleichung ist im Falle $m < n$ der Punkt $x = 0$ der einzige endliche singuläre Werth, während im Falle $m = n$ der singuläre Werth $x = 1$ hinzutritt. Die Zahl m hat auf die Ordnung der Differentialgleichung keinen Einfluss. Die Betrachtung wird auch auf den Fall ausgedehnt, wo die erste Constantengruppe $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ ganz fehlt, die Zahl m also gleich Null ist. Indem man als Functionszeichen dann den Buchstaben $\mathfrak{F}$ anwendet, definirt man

$$\mathfrak{F}(\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_{n-1}; x)$$

als die unendliche Reihe

$$\mathfrak{F}(\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_{n-1}; x) = \tag{2}$$
$$= 1 + \frac{x}{1 \cdot \varrho_1 \varrho_2 \ldots \varrho_{n-1}} + \frac{x^2}{1.2.\varrho_1(\varrho_1+1)\varrho_2(\varrho_2+1)\ldots\varrho_{n-1}(\varrho_{n-1}+1)} + \cdots + \text{inf.}$$

Für dieselbe ergiebt sich ebenfalls eine lineare Differentialgleichung n^{ter} Ordnung mit rationalen Coefficienten, worauf in § 5 näher eingegangen wird.

Im Anschluss an die bekannte Bezeichnung des Binomialcoefficienten (r beliebig, k eine positive ganze Zahl)

$$(r)_k = \frac{r(r-1)(r-2)\ldots(r-k+1)}{1.2.3\ldots k}, \quad (r)_0 = 1, \tag{3}$$

wird hier (wie in den früheren Arbeiten des Verfassers) der Zähler von $(r)_k$ kurz $[r]_k$ genannt; man setzt also

$$[r]_k = r(r-1)(r-2)\ldots(r-k+1), \quad [r]_0 = 1. \tag{4}$$

Ausserdem wird unter $[r]_k^+$, ebenfalls für ein beliebiges r und ein positives ganzzahliges k, das Product

$$[r]_k^+ = r(r+1)(r+2)\ldots(r+k-1), \quad [r]_0^+ = 1, \tag{5}$$

verstanden. Bei Anwendung dieser Bezeichnung nehmen die Gleichungen (1) und (2) die Gestalt

*) Crelle's Journal, Bd. 108.

$$(1a)\quad \begin{cases} F(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m;\ \varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_{n-1};\ x) \\ = \sum\limits_{k=0}^{k=\infty} \dfrac{[\alpha_1]_k^+ [\alpha_2]_k^+ \ldots [\alpha_m]_k^+}{[1]_k^+ [\varrho_1]_k^+ [\varrho_2]_k^+ \ldots [\varrho_{n-1}]_k^+} x^k, \end{cases}$$

$$(2a)\quad \mathfrak{F}(\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_{n-1};\ x) = \sum_{k=0}^{k=\infty} \frac{x^k}{[1]_k^+ [\varrho_1]_k^+ [\varrho_2]_k^+ \ldots [\varrho_{n-1}]_k^+}$$

an.

§ 2.

Es möge die lineare Differentialgleichung n^{ter} Ordnung

$$(6)\quad \begin{cases} x^{n-1} \dfrac{d^n y}{dx^n} + L_1 x^{n-2} \dfrac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + L_2 x^{n-3} \dfrac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} \\ + \cdots + L_{n-2} x \dfrac{d^2 y}{dx^2} + L_{n-1} \dfrac{dy}{dx} \\ = x^m \dfrac{d^m y}{dx^m} + K_1 x^{m-1} \dfrac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + K_2 x^{m-2} \dfrac{d^{m-2} y}{dx^{m-2}} \\ + \cdots + K_{m-2} x^2 \dfrac{d^2 y}{dx^2} + K_{m-1} x \dfrac{dy}{dx} + K_m y \end{cases}$$

betrachtet werden, in welcher $K_1, \ldots, K_m$, $L_1, \ldots, L_{n-1}$ Constante bedeuten, und $m \leqq n$ vorausgesetzt wird. Integrirt man diese Gleichung durch einen Ausdruck von der Form

$$(7)\quad y = x^q + c_1 x^{q+1} + \cdots + c_\nu x^{q+\nu} + \cdots,$$

so findet man die Reihe (1) als eine particuläre Lösung derselben, falls die Constanten $K_1, \ldots, K_m$ mit $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$, die Constanten $L_1, \ldots, L_{n-1}$ mit $\varrho_1, \ldots, \varrho_{n-1}$ durch gewisse algebraische Gleichungen verbunden werden.

Durch die Substitution der Potenzreihe (7) entsteht aus (6), da (cfr. (4))

$$x^{i-1} \frac{d^i y}{dx^i} = [q]_i x^{q-1} + c_1 [q+1]_i x^q + \cdots + c_\nu [q+\nu]_i x^{q+\nu-1} + \cdots$$

ist, die Gleichung

$$\sum_{i=n}^{i=1} L_{n-i} \left\{[q]_i x^{q-1} + c_1 [q+1]_i x^q + \cdots + c_\nu [q+\nu]_i x^{q+\nu-1} + \cdots\right\}$$

$$= \sum_{i=m}^{i=0} K_{m-i} \left\{[q]_i x^q + c_1 [q+1]_i x^{q+1} + \cdots + c_{\nu-1} [q+\nu-1]_i x^{q+\nu-1} + \cdots\right\},$$

woselbst man

$$K_0 = L_0 = 1$$

zu nehmen hat.

Indem man den Coefficienten der Potenz x^{q-1}, der niedrigsten vorkommenden Potenz von x, gleich Null setzt, erhält man die den Exponenten q bestimmende Gleichung

$$(8)\quad [q]_n + L_1[q]_{n-1} + L_2[q]_{n-2} + \cdots + L_{n-2}[q]_2 + L_{n-1}[q]_1 = 0.$$

Eine Wurzel der letzteren Gleichung ist $q = 0$. Die übrigen $n-1$ Wurzeln derselben werden, da nach (4) die Factorielle $[q]_i$ gleich dem Producte aus q und $[q-1]_{i-1}$ ist, durch die Gleichung

$$[q-1]_{n-1} + L_1[q-1]_{n-2} + L_2[q-1]_{n-3} + \cdots + L_{n-2}[q-1]_1 + L_{n-1} = 0$$

bestimmt. Man bezeichne die $n-1$ Wurzeln durch

$$-s_1,\ -s_2,\ \cdots,\ -s_{n-1},$$

so dass für einen beliebigen Werth von ξ die Relation

$$(9)\quad \begin{cases} [\xi-1]_{n-1} + L_1[\xi-1]_{n-2} + \cdots + L_{n-2}[\xi-1]_1 + L_{n-1} \\ \qquad = (\xi+s_1)(\xi+s_2)\cdots(\xi+s_{n-1}) \end{cases}$$

besteht.

Durch Vergleichung der Coefficienten von $x^{q+\nu-1}$ auf der linken und der rechten Seite der oben angegebenen Gleichung findet man (für $\nu = 1, 2$ etc.)

$$\{[q+\nu]_n + L_1[q+\nu]_{n-1} + \cdots + L_{n-2}[q+\nu]_2 + L_{n-1}[q+\nu]_1\}\, c_\nu$$
$$= \{[q+\nu-1]_m + K_1[q+\nu-1]_{m-1} + \cdots + K_{m-1}[q+\nu-1]_1 + K_m\}\, c_{\nu-1}.$$

Der Factor von c_ν ist hierin gleich dem Producte

$$(q+\nu)(q+\nu+s_1)(q+\nu+s_2)\cdots(q+\nu+s_{n-1}).$$

Denn derselbe unterscheidet sich von der linken Seite der Gleichung (8) nur dadurch, dass $q+\nu$ an Stelle von q steht. Man nenne ferner

$$-b_1,\ -b_2,\ \cdots,\ -b_m$$

die Wurzeln der Gleichung m^{ten} Grades in ξ

$$[\xi-1]_m + K_1[\xi-1]_{m-1} + K_2[\xi-1]_{m-2} + \cdots + K_{m-1}[\xi-1]_1 + K_m = 0,$$

woraus (für ein beliebiges ξ) die Identität

$$(10)\quad \begin{cases} [\xi-1]_m + K_1[\xi-1]_{m-1} + \cdots + K_{m-1}[\xi-1]_1 + K_m \\ \qquad = (\xi+b_1)(\xi+b_2)\cdots(\xi+b_m) \end{cases}$$

folgt. Wird die letztere Gleichung für $\xi = q+\nu$ angewendet, so ergiebt sich

$$c_\nu = \frac{(q+\nu+b_1)(q+\nu+b_2)\ldots(q+\nu+b_m)}{(q+\nu)(q+\nu+s_1)(q+\nu+s_2)\ldots(q+\nu+s_{n-1})}\, c_{\nu-1},$$

woselbst q einen der Werthe $0,\ -s_1,\ -s_2,\ \cdots,\ -s_{n-1}$ bedeutet. Um diejenige particuläre Lösung von (6), die zum Anfangsexponenten $q=0$ gehört, auch in Bezug auf die Bezeichnung mit der Reihe (1) übereinstimmen zu lassen, definirt man die Constanten $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$, $\varrho_1, \ldots, \varrho_{n-1}$ durch die Gleichungen

(11) $\quad b_1 = \alpha_1 - 1,\ b_2 = \alpha_2 - 1, \cdots, b_m = \alpha_m - 1,$

(12) $\quad s_1 = \varrho_1 - 1,\ s_2 = \varrho_2 - 1, \cdots, s_{n-1} = \varrho_{n-1} - 1,$

so dass die Werthe

$$0,\ 1 - \varrho_1,\ 1 - \varrho_2\ \ldots, 1 - \varrho_{n-1}$$

die Wurzeln der Gleichung (8) sind. Dann ist c_ν mit $c_{\nu-1}$ durch die Relation

$$(13)\quad c_\nu = \frac{(q+\alpha_1+\nu-1)(q+\alpha_2+\nu-1)\ldots(q+\alpha_m+\nu-1)}{(q+\nu)(q+\varrho_1+\nu-1)(q+\varrho_2+\nu-1)\ldots(q+\varrho_{n-1}+\nu-1)}\, c_{\nu-1}$$

verbunden.

Im Fall $q = 0$ folgt hieraus

$$c_1 = \frac{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m}{1\,.\,\varrho_1\varrho_2\ldots\varrho_{n-1}},$$

$$c_\nu = \frac{[\alpha_1]_\nu^+[\alpha_2]_\nu^+\ldots[\alpha_m]_\nu^+}{[1]_\nu^+[\varrho_1]_\nu^+[\varrho_2]_\nu^+\ldots[\varrho_{n-1}]_\nu^+}.$$

Mithin ist die Reihe (1)

$$F(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m;\ \varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_{n-1};\ x)$$

eine particuläre Lösung der Differentialgleichung (6).

Die übrigen particulären Integrale haben, nach (8) und (12), die Anfangsexponenten $1 - \varrho_1,\ 1 - \varrho_2, \ldots 1 - \varrho_{n-1}$. Ist $q = 1 - \varrho_1$, so wird

$$c_\nu = \frac{(\alpha_1-\varrho_1+\nu)(\alpha_2-\varrho_1+\nu)\ldots(\alpha_m-\varrho_1+\nu)}{\nu(\nu+1-\varrho_1)(\varrho_2-\varrho_1+\nu)(\varrho_3-\varrho_1+\nu)\ldots(\varrho_{n-1}-\varrho_1+\nu)}\, c_{\nu-1},$$

und eine analoge Gleichung gilt in den Fällen $q = 1 - \varrho_2, \ldots, 1 - \varrho_{n-1}$. Die Gleichung (6) hat also die $n - 1$ mehrdeutigen Integrale

$$x^{1-\varrho_1} F\begin{pmatrix}\alpha_1 - \varrho_1 + 1,\ \alpha_2 - \varrho_1 + 1, \ldots, \alpha_m - \varrho_1 + 1; & \\ 2 - \varrho_1,\ \varrho_2 - \varrho_1 + 1,\ \varrho_3 - \varrho_1 + 1, \ldots, \varrho_{n-1} - \varrho_1 + 1; & x\end{pmatrix},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$x^{1-\varrho_{n-1}} F\begin{pmatrix}\alpha_1 - \varrho_{n-1} + 1,\ \alpha_2 - \varrho_{n-1} + 1, \ldots, \alpha_m - \varrho_{n-1} + 1; & \\ 2 - \varrho_{n-1},\ \varrho_1 - \varrho_{n-1} + 1,\ \varrho_2 - \varrho_{n-1} + 1, \ldots, \varrho_{n-2} - \varrho_{n-1} + 1; & x\end{pmatrix}.$$

Es wird vorausgesetzt, dass keiner der Werthe ϱ_i, $\varrho_i - \varrho_k$ gleich einer positiven oder negativen ganzen Zahl oder gleich Null sei. Dann stellen die obigen n Reihen das vollständige Integral der Gleichung (6) dar.

§ 3.

Die Beziehungen zwischen den Constanten $K_1, \ldots, K_m$ und $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ werden durch (10) und (11), die Beziehungen zwischen $L_1, \ldots, L_{n-1}$ und $\varrho, \ldots, \varrho_{n-1}$ durch (9) und (12) angegeben. Es bleibt übrig, die Werthe $K_1, \ldots, K_m, L_1, \ldots, L_{n-1}$ als Functionen von $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$, resp. von $\varrho_1, \ldots, \varrho_{n-1}$ herzustellen.

Man bezeichne durch $A_1, A_2, \ldots, A_m$ die elementaren symmetrischen Functionen der Grössen $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$, durch $R_1, R_2, \ldots, R_{n-1}$ die der Grössen $\varrho_1, \ldots, \varrho_{n-1}$, so dass für ein beliebiges z die Gleichungen

$$(14)\qquad \begin{cases} (z+\alpha_1)(z+\alpha_2)\ldots(z+\alpha_m) \\ = z^m + A_1 z^{m-1} + \cdots + A_{m-1}z + A_m, \end{cases}$$

$$(15)\qquad \begin{cases} (z+\varrho_1)(z+\varrho_2)\ldots(z+\varrho_{n-1}) \\ = z^{n-1} + R_1 z^{n-2} + \cdots + R_{n-2}z + R_{n-1} \end{cases}$$

bestehen. Wird in die aus (10) und (11) folgende Identität

$$\begin{aligned} &[\zeta-1]_m + K_1[\zeta-1]_{m-1} + \cdots + K_{m-1}[\zeta-1]_1 + K_m \\ &= (\zeta-1+\alpha_1)(\zeta-1+\alpha_2)\cdots(\zeta-1+\alpha_m) \end{aligned}$$

$\zeta - 1 = z$ substituirt, und die Gleichung (14) berücksichtigt, so hat man

$$(16)\qquad \begin{cases} [z]_m + K_1[z]_{m-1} + \cdots + K_{m-1}[z]_1 + K_m \\ = z^m + A_1 z^{m-1} + \cdots + A_{m-1}z + A_m. \end{cases}$$

In derselben Weise wird aus (9), (12) und (15) mittelst der Substitution $\zeta - 1 = z$ die Gleichung

$$(17)\qquad \begin{cases} [z]_{n-1} + L_1[z]_{n-2} + \cdots + L_{n-2}[z]_1 + L_{n-1} \\ = z^{n-1} + R_1 z^{n-2} + \cdots + R_{n-2}z + R_{n-1} \end{cases}$$

abgeleitet. Da die Gleichungen (16) und (17) für jeden Werth von z gelten, so kann man durch Vergleichung entsprechender Ausdrücke der betreffenden linken und rechten Seiten Relationen zwischen den Constanten gewinnen. Allerdings würde die Vergleichung der Coefficienten der einzelnen Potenzen von z (nachdem man die Factoriellen $[z]_i$ ausmultiplicirt hat) nicht die gesuchten Werthe von $K_1, \ldots, L_1, \ldots$ ergeben, da vielmehr Gleichungen für $A_1, \ldots, R_1, \ldots$, entstehen würden. Um die Ausdrücke von $K_1, \ldots, L_1, \ldots$ als Functionen von $A_1, \ldots, R_1, \ldots$ zu erhalten, entwickelt man in (16) und (17) die rechts stehenden Potenzen von z nach Factoriellen und setzt dann die Coefficienten der einzelnen Factoriellen links und rechts einander gleich.

Zunächst wird aus den genannten Gleichungen, indem man den Werth $z = 0$ benutzt, der Schluss gezogen, dass

$$(18)\qquad \begin{cases} K_m = A_m \;\; = \alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_m, \\ L_{n-1} = R_{n-1} = \varrho_1\varrho_2\cdots\varrho_{n-1} \end{cases}$$

ist. Nach Forthebung der Summanden K_m, A_m, L_{n-1}, R_{n-1} lassen sich die Gleichungen (16), (17) durch z dividiren, da nach (4)

$$[z]_i = z[z-1]_{i-1}$$

gesetzt werden kann. Man gelangt auf diese Weise zu den Identitäten

$$(19)\quad \begin{cases}[z-1]_{m-1} + K_1[z-1]_{m-2} + \cdots + K_{m-2}[z-1]_1 + K_{m-1} \\ = z^{m-1} + A_1 z^{m-2} + \cdots + A_{m-2}z + A_{m-1},\end{cases}$$

$$(20)\quad \begin{cases}[z-1]_{n-2} + L_1[z-1]_{n-3} + \cdots + L_{n-3}[z-1]_1 + L_{n-2} \\ = z^{n-2} + R_1 z^{n-3} + \cdots + R_{n-3}z + R_{n-2}.\end{cases}$$

Nun besteht, wenn p eine positive ganze Zahl, und z eine beliebige Grösse ist, die Gleichung

$$(21)\quad z^p = \begin{cases} d_0^{(p)} + d_1^{(p)}[z-1]_1 + d_2^{(p)}[z-1]_2 + \cdots \\ + d_\nu^{(p)}[z-1]_\nu + \cdots + d_{p-1}^{(p)}[z-1]_{p-1} + d_p^{(p)}[z-1]_p,\end{cases}$$

in der $d_0^{(p)}$, $d_1^{(p)}, \ldots, d_p^{(p)}$ positive ganzzahlige Constanten sind, und $z-1]_\nu$ nach (4) das Product

$$[z-1]_\nu = (z-1)(z-2)\cdots(z-\nu)$$

bedeutet. Für die Grössen $d_\nu^{(p)}$ hat man, bei Anwendung der Bezeichnungen (3) und (4), den Ausdruck*)

$$(22)\quad d_\nu^{(p)} = \frac{1}{[\nu]_\nu}\left\{\begin{array}{l}(\nu+1)^p - (\nu)_1\nu^p + (\nu)_2(\nu-1)^p - \cdots \\ + (-1)^i(\nu)_i(\nu-i+1)^p + \cdots + (-1)^{\nu-1}(\nu)_{\nu-1}2^p \\ + (-1)^\nu 1^p\end{array}\right\},$$

und es gilt die Gleichung

$$(23)\qquad d_\nu^{(p+1)} = (\nu+1)\,d_\nu^{(p)} + d_{\nu-1}^{(p)},$$

welche die Grundlage weiterer Formeln für diese Constanten bildet**). Die rechte Seite der Gleichung (19) nimmt, wenn man gemäss (21) die Potenzen von z nach den Factoriellen $[z-1]_\nu$ entwickelt, die Gestalt

---

*) Cfr. Th. Clausen, „Beweise der ersten Sätze der numerischen Facultäten", Crelle's Journal, Bd. 7, pag. 234.

**) Man vergleiche § 8 der Abhandlung des Verfassers „Ueber die Differentialgleichung der allgemeineren hypergeometrischen Reihe etc.", Crelle's Journal, Bd. 102, S. 114—123, woselbst auch der Anfang der Tafel der Coefficienten $d_\nu^{(p)}$ angegeben ist. Man bemerke die Gleichungen

$$d_0^{(p)} = 1,\ d_1^{(p)} = 2^p - 1,\ d_p^{(p)} = 1,\ d_{p-1}^{(p)} = \frac{(p+1)p}{1.2},$$

$$d_{p-2}^{(p)} = \frac{(p+1)p(p-1)}{1.2.3}\,\frac{3p-2}{4},\quad d_{p-3}^{(p)} = \frac{(p+1)p(p-1)(p-2)}{1.2.3.4}\,\frac{(p-1)(p-2)}{2}.$$

Für $\nu > p$ ist $d_\nu^{(p)} = 0$.

$$
\begin{aligned}
& d_{m-1}^{(m-1)}[z-1]_{m-1} + \{d_{m-2}^{(m-1)} + A_1 d_{m-2}^{(m-2)}\}[z-1]_{m-2} \\
& + \{d_{m-3}^{(m-1)} + A_1 d_{m-3}^{(m-2)} + A_2 d_{m-3}^{(m-3)}\}[z-1]_{m-3} + \cdots \\
& + \{d_{\mu-1}^{(m-1)} + A_1 d_{\mu-1}^{(m-2)} + A_2 d_{\mu-1}^{(m-3)} + \cdots + A_{m-\mu} d_{\mu-1}^{(\mu-1)}\}[z-1]_{\mu-1} \\
& + \cdots + \{d_1^{(m-1)} + A_1 d_1^{(m-2)} + \cdots + A_{m-2} d_1^{(1)}\}[z-1]_1 \\
& + d_0^{(m-1)} + A_1 d_0^{(m-2)} + A_2 d_0^{(m-3)} + \cdots + A_{m-2} d_0^{(1)} + A_{m-1} d_0^{(0)}
\end{aligned}
$$

an. Der Vergleich mit der linken Seite von (19)

$$
\begin{aligned}
& [z-1]_{m-1} + K_1[z-1]_{m-2} + K_2[z-1]_{m-3} + \cdots \\
& + K_{m-\mu}[z-1]_{\mu-1} + \cdots + K_{m-2}[z-1]_1 + K_{m-1}
\end{aligned}
$$

liefert also für $K_1, K_2, \ldots, K_{m-1}$ die Ausdrücke

$$
\begin{aligned}
K_1 &= d_{m-2}^{(m-2)} A_1 + d_{m-2}^{(m-1)} = A_1 + \frac{m(m-1)}{1.2}, \\
K_2 &= d_{m-3}^{(m-3)} A_2 + d_{m-3}^{(m-2)} A_1 + d_{m-3}^{(m-1)}, \\
& \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\
K_{m-1} &= d_0^{(0)} A_{m-1} + d_0^{(1)} A_{m-2} + \cdots + d_0^{(m-2)} A_1 + d_0^{(m-1)} \\
&= A_{m-1} + A_{m-2} + \cdots + A_2 + A_1 + 1.
\end{aligned}
$$

Man fasst dieses Resultat in die Gleichung

$$
(24) \quad \begin{cases}
K_{m-\mu} = \sum\limits_{i=\mu}^{i=m} d_{\mu-1}^{(i-1)} A_{m-i} \\
\qquad = d_{\mu-1}^{(\mu-1)} A_{m-\mu} + d_{\mu-1}^{(\mu)} A_{m-\mu-1} + d_{\mu-1}^{(\mu+1)} A_{m-\mu-2} + \cdots \\
\qquad\quad + d_{\mu-1}^{(m-2)} A_1 + d_{\mu-1}^{(m-1)},
\end{cases}
$$

die für $\mu = 1, 2, \ldots, m-1$ gilt, zusammen, wobei

$$
(25) \qquad A_0 = R_0 = 1
$$

gesetzt wird.

Durch das nämliche Verfahren formt man die rechte Seite der Gleichung (20) um. Da dieselbe aus der rechten Seite von (19) erhalten wird, wenn man m durch $n-1$ und $A_1, A_2, \ldots$ durch $R_1, R_2, \ldots$ ersetzt, so folgt aus (24) auch die Gleichung

$$
L_{n-\nu-1} = d_{\nu-1}^{(\nu-1)} R_{n-\nu-1} + d_{\nu-1}^{(\nu)} R_{n-\nu-2} + \cdots + d_{\nu-1}^{(n-3)} R_1 + d_{\nu-1}^{(n-2)}
$$

für $\nu = 1, 2, \ldots, n-2$. Man substituirt hierin $\nu = \mu - 1$; dann entsteht die Formel

$$
(26) \quad \begin{cases}
L_{n-\mu} = \sum\limits_{i=\mu}^{i=n} d_{\mu-2}^{(i-2)} R_{n-i} \\
\qquad = d_{\mu-2}^{(\mu-2)} R_{n-\mu} + d_{\mu-2}^{(\mu-1)} R_{n-\mu-1} + d_{\mu-2}^{(\mu)} R_{n-\mu-2} + \cdots \\
\qquad\quad + d_{\mu-2}^{(n-3)} R_1 + d_{\mu-2}^{(n-2)},
\end{cases}
$$

in der die Zahl μ nach einander die Werthe $2, 3, \ldots, n-1$ annimmt. Es ist also

$$L_1 = d_{n-3}^{(n-3)} R_1 + d_{n-3}^{(n-2)} = R_1 + \frac{(n-1)(n-2)}{1.2},$$

$$L_2 = d_{n-4}^{(n-4)} R_2 + d_{n-4}^{(n-3)} R_1 + d_{n-4}^{(n-2)},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$L_{n-2} = R_{n-2} + R_{n-3} + \cdots + R_2 + R_1 + 1.$$

Die Gleichungen (18), (24) und (26) geben die gesuchten Ausdrücke für die in (6) vorkommenden Coefficienten $K_1, \ldots, K_m$, $L_1, \ldots, L_{n-1}$ vollständig an.

§ 4.

Es soll für die Grössen K_i, L_i noch je ein zweiter Ausdruck, der dieselben als Functionen von $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$, resp. $\varrho_1, \ldots, \varrho_{n-1}$ darstellt, abgeleitet werden.

Nach (11) und (12) bedeuten $b_1, \ldots, b_m$, $s_1, \ldots, s_{n-1}$ die Werthe

$$\alpha_1 - 1, \ldots, \alpha_m - 1, \ \varrho_1 - 1, \ldots, \varrho_{n-1} - 1.$$

Es mögen nun unter $B_1, B_2, \ldots, B_m$ und $S_1, S_2, \ldots, S_{n-1}$ die elementaren symmetrischen Functionen der Grössen $b_1, \ldots, b_m$, resp. $s_1, \ldots, s_{n-1}$ verstanden werden, so dass für jeden Werth von ζ

$$(27) \quad \begin{cases} (\zeta + b_1)(\zeta + b_2) \ldots (\zeta + b_m) \\ = \zeta^m + B_1 \zeta^{m-1} + \cdots + B_{m-1}\zeta + B_m, \end{cases}$$

$$(28) \quad \begin{cases} (\zeta + s_1)(\zeta + s_2) \ldots (\zeta + s_{n-1}) \\ = \zeta^{n-1} + S_1 \zeta^{n-2} + \cdots + S_{n-2}\zeta + S_{n-1} \end{cases}$$

ist. Durch Combination der letzteren Gleichungen mit (10) und (9) findet man die Identitäten

$$(29) \quad \begin{cases} [\zeta - 1]_m + K_1 [\zeta - 1]_{m-1} + \cdots + K_{m-1}[\zeta - 1]_1 + K_m \\ = \zeta^m + B_1 \zeta^{m-1} + \cdots + B_{m-1}\zeta + B_m, \end{cases}$$

$$(30) \quad \begin{cases} [\zeta - 1]_{n-1} + L_1 [\zeta - 1]_{n-2} + \cdots + L_{n-2}[\zeta - 1]_1 + L_{n-1} \\ = \zeta^{n-1} + S_1 \zeta^{n-2} + \cdots + S_{n-2}\zeta + S_{n-1}. \end{cases}$$

Die rechte Seite von (29) geht aber, wenn die Formel (21) auf ζ^m, ζ^{m-1} etc. angewendet wird, in die Summe

$$\begin{aligned} d_m^{(m)} [\zeta - 1]_m &+ \left\{ d_{m-1}^{(m)} + B_1 d_{m-1}^{(m-1)} \right\} [\zeta - 1]_{m-1} \\ &+ \left\{ d_{m-2}^{(m)} + B_1 d_{m-2}^{(m-1)} + B_2 d_{m-2}^{(m-2)} \right\} [\zeta - 1]_{m-2} + \cdots \\ &+ \left\{ d_\mu^{(m)} + B_1 d_\mu^{(m-1)} + B_2 d_\mu^{(m-2)} + \cdots + B_{m-\mu} d_\mu^{(\mu)} \right\} [\zeta - 1]_\mu \\ &+ \cdots + \left\{ d_1^{(m)} + B_1 d_1^{(m-1)} + \cdots + B_{m-1} d_1^{(1)} \right\} [\zeta - 1]_1 \\ &+ d_0^{(m)} + B_1 d_0^{(m-1)} + B_2 d_0^{(m-2)} + \cdots + B_{m-1} d_0^{(1)} + B_m d_0^{(0)} \end{aligned}$$

über. Da dieselbe für ein beliebiges ζ gleich der Function

$$[\zeta-1]_m + K_1[\zeta-1]_{m-1} + \cdots + K_{m-\mu}[\zeta-1]_\mu + \cdots + K_m$$

ist, so werden für $K_1, K_2, \ldots, K_m$ die Werthe

$$K_1 = d_{m-1}^{(m-1)} B_1 + d_{m-1}^{(m)} = B_1 + \frac{(m+1)m}{1.2},$$

$$K_2 = d_{m-2}^{(m-2)} B_2 + d_{m-2}^{(m-1)} B_1 + d_{m-2}^{(m)}, \quad \text{etc.}$$

erhalten. Indem man

(31) $$B_0 = S_0 = 1$$

setzt, hat man für $\mu = 0, 1, 2, \ldots, m-1$ die Gleichung

(32) $$\begin{cases} K_{m-\mu} = \sum\limits_{i=\mu}^{i=m} d_\mu^{(i)} B_{m-i} \\ \qquad = d_\mu^{(\mu)} B_{m-\mu} + d_\mu^{(\mu+1)} B_{m-\mu-1} + \cdots + d_\mu^{(m-1)} B_1 + d_\mu^{(m)}. \end{cases}$$

Analoge Ausdrücke werden für $L_1, L_2, \ldots, L_{n-1}$ mit Hülfe der Gleichung (30) abgeleitet, deren rechte Seite sich aus der von (29) ergiebt, wenn man $m, B_1, B_2, \ldots$ durch $n-1, S_1, S_2, \ldots$ ersetzt. Die rechte Seite der Formel (32) stellt, wenn $n-1, \nu, S_1, \ldots$ an die Stelle von $m, \mu, B_1, \ldots$ treten, den Werth von $L_{n-\nu-1}$ dar; d. h. es ist, für $\nu = 0, 1, 2, \ldots, n-2$,

$$L_{n-\nu-1} = d_\nu^{(\nu)} S_{n-\nu-1} + d_\nu^{(\nu+1)} S_{n-\nu-2} + \cdots + d_\nu^{(n-2)} S_1 + d_\nu^{(n-1)}.$$

Wird also $\nu = \mu - 1$ gesetzt, so hat man die Gleichung

(33) $$\begin{cases} L_{n-\mu} = \sum\limits_{i=\mu}^{i=n} d_{\mu-1}^{(i-1)} S_{n-i} \\ \qquad = d_{\mu-1}^{(\mu-1)} S_{n-\mu} + d_{\mu-1}^{(\mu)} S_{n-\mu-1} + \cdots + d_{\mu-1}^{(n-2)} S_1 + d_{\mu-1}^{(n-1)}, \end{cases}$$

die für $\mu = 1, 2, \ldots, n-1$ gilt.

Der Vergleich der Formeln (24) und (32) zeigt, dass wenn m beliebige Grössen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ mit m anderen Grössen $b_1, b_2, \ldots, b_m$ durch die Beziehungen

$$\alpha_1 = b_1 + 1, \quad \alpha_2 = b_2 + 1, \ldots, \alpha_m = b_m + 1$$

verbunden sind, und $A_1, A_2, \ldots, A_m, B_1, B_2, \ldots, B_m$ die oben angegebenen symmetrischen Summen bedeuten, die Gleichung

(34) $$\sum_{i=\mu}^{i=m} d_\mu^{(i)} B_{m-i} = \sum_{i=\mu}^{i=m} d_{\mu-1}^{(i-1)} A_{m-i}$$

besteht, in der μ irgend einer der Werthe $1, 2, \ldots, m-1$ ist*). Im Fall $\mu = 0$ lautet (da $d_0^{(p)} = 1$ ist) die Gleichung (32)

$$K_m = B_m + B_{m-1} + B_{m-2} + \cdots + B_1 + 1.$$

Andererseits hat man nach (18) für K_m den Ausdruck

$$K_m = A_m = \alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_m = (b_1+1)(b_2+1)\cdots(b_m+1),$$

der in der That mit $B_m + B_{m-1} + \cdots + 1$ identisch ist.

§ 5.

Die Reihe (2)

$$\mathfrak{F}(\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_{n-1}; x)$$

stellt, wie bereits in § 1 angeführt wurde, einen dem Werthe $m = 0$ entsprechenden Grenzfall der Reihe $F(\alpha_1, \ldots, \alpha_m; \varrho_1, \ldots, \varrho_{n-1}; x)$ dar. Setzt man in die Differentialgleichung (6) für m den Werth Null ein, so reducirt sich die rechte Seite derselben auf den Summandus $K_0 y$. Es möge $K_0 = 1$ genommen werden, was keine Beschränkung ist, da die genannte Constante durch Anwendung einer Substitution $x = \gamma x'$ stets gleich 1 gemacht werden kann. Man betrachtet also die Differentialgleichung

$$(35)\qquad \left\{\begin{aligned} & x^{n-1}\frac{d^n y}{dx^n} + L_1 x^{n-2}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + L_2 x^{n-3}\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} \\ & + \cdots + L_{n-2}x\frac{d^2y}{dx^2} + L_{n-1}\frac{dy}{dx} - y \end{aligned}\right\} = 0,$$

in der $L_1, L_2, \ldots, L_{n-1}$ Constante bedeuten.

Die Substitution der Potenzreihe

$$(36)\qquad y = x^q + C_1 x^{q+1} + C_2 x^{q+2} + \cdots + C_\nu x^{q+\nu} + \cdots$$

lässt aus (35), wenn unter L_0 wieder der Werth 1 verstanden wird, die Gleichung

$$\sum_{i=n}^{i=1} L_{n-i}\left\{[q]_i x^{q-1} + C_1[q+1]_i x^q + \cdots + C_\nu[q+\nu]_i x^{q+\nu-1} + \cdots\right\}$$
$$- \left\{x^q + C_1 x^{q+1} + \cdots + C_{\nu-1}x^{q+\nu-1} + C_\nu x^{q+\nu} + \cdots\right\} = 0$$

entstehen. Für den Anfangsexponenten q gilt wiederum die Gleichung (8). Einer der Werthe von q ist also gleich Null; die übrigen werden, wie in § 2, durch $-s_1, -s_2, \ldots, -s_{n-1}$ bezeichnet, so dass auch

---

*) Dieses Resultat ist vom Verfasser auf einem etwas anderen Wege bereits in der obenerwähnten Abh. „Ueber die Differentialgleichung der allgemeineren hypergeometrischen Reihe etc.", Crelle's Journal, Bd. 102, abgeleitet worden (Gleichungen (87) und (96), p. 128 und 134, woselbst $n-1$ statt m steht).

hier die Identität (9) gilt. Werden an Stelle von $s_1, s_2, \ldots, s_{n-1}$ die Constanten $\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_{n-1}$ mittelst der Gleichungen (12)

$$s_1 = \varrho_1 - 1, \; s_2 = \varrho_2 - 1, \ldots, s_{n-1} = \varrho_{n-1} - 1$$

eingeführt, so findet man

$$C_\nu = \frac{C_{\nu-1}}{(q+\nu)(q+\varrho_1+\nu-1)\ldots(q+\varrho_{n-1}+\nu-1)}. \tag{37}$$

Es sei zunächst $q = 0$. Dann ergiebt sich die Reihe (2) als particuläre Lösung von (35). Durch Benutzung der übrigen Werthe von q,

$$1 - \varrho_1, \; 1 - \varrho_2, \ldots, 1 - \varrho_{n-1},$$

erhält man die $n - 1$ mehrdeutigen particulären Integrale der Gleichung (35)

$$x^{1-\varrho_1}\mathfrak{F}(2 - \varrho_1, \varrho_2 - \varrho_1 + 1, \varrho_3 - \varrho_1 + 1, \ldots, \varrho_{n-1} - \varrho_1 + 1;\; x),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$x^{1-\varrho_{n-1}}\mathfrak{F}(2 + \varrho_{n-1}, \varrho_1 - \varrho_{n-1} + 1, \varrho_2 - \varrho_{n-1} + 1, \ldots, \varrho_{n-2} - \varrho_{n-1} + 1;\; x).$$

Die Ausdrücke, welche in §§ 3 und 4 für $L_1, \ldots, L_{n-1}$ abgeleitet wurden, bleiben auch für die Differentialgleichung (35) in Gültigkeit, da die betreffenden Rechnungen ausschliesslich auf den Gleichungen (9) und (12) beruhen. Die Constanten $L_1, \ldots, L_{n-1}$ werden also durch (26) und (18) oder auch durch (33) als Functionen der Grössen $\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_{n-1}$ dargestellt.

Kiel, im Januar 1891.