Sur le développement en séries des intégrales des équations différentielles linéaires.

(*par Mr.* L. Fuchs, *prof. à Greifswald en Poméranie*).

Le développement des fonctions en séries ordonnées suivant les puissances de la variable indépendante est incontestablement en général la manière la plus simple, soit de les évaluer pour une valeur donnée de la variable, soit de les examiner par rapport à leur caractère dans le voisinage d'un point de discontinuité. Mais de plusieurs raisons ce développement est assujeti à des inconvénients considérables. L'un de ces inconvénients consiste en ce, que sous cette forme de représentation certaines propriétés des fonctions restent cachées. C'est pourquoi en diverses recherches l'on s'est procuré différentes autres espèces de représentation qui font ressortir les propriétés que l'on a en vue; par exemple la représentation par la série de Fourier pour faire voir la périodicité immédiatement par la forme. Un autre plus grave inconvénient des séries à puissances, qui est aussi la cause essentielle du premier, consiste en ce que l'on ne peut pas leur conserver la même forme dans tout le plan infini, qui sert à la représentation de la variable indépendante; mais il faut au contraire la changer tant dans le voisinage des divers points de discontinuité que dans l'infini. Une représentation qui évite cet inconvénient, soit entièrement, soit en partie, est donc digne de quelque attention, lors même qu'elle est moins propre au calcul numérique. Par cette raison il ne sera pas tout-à-fait superflu de donner dans ce mémoire une classe de développements des intégrales des équations différentielles linéaires qui conservent leur forme, du moins pour toute valeur finie de la variable qui ne coïncide pas avec un des points de discontinuité. Les termes de ces séries sont formés par des quadratures réitérées, ils sont donc naturellement compliqués quant au calcul, mais ils jouissent d'une loi de formation très-claire. Dans le journal de Liouville (année 1864) Mr. Caqué en se plaçant à un point de vue tout différent du notre, a donné un développement en série des integrales des équations différentielles linéaires qu'il trouve par le passage d'une équation à différences finies. En essayant de remplacer cette voie naturellement épineuse par une autre plus commode et plus courte, nous reconnûmes bientôt que la série de Mr. Caqué peut etre conçue comme cas special de la classe indiquée de représentations; et par là elle nous servira dans ce qui va suivre comme un simple exemple.

1.

Avant d'entrer dans la matière particulière de ce mémoire nous allons préciser la forme d'une intégrale de l'équation différentielle:

$$y^{(m)}=p_{m-1}y^{(m-1)}+p_{m-2}y^{(m-2)}+\cdots+p_0 y+p \tag{1}$$

de sorte que y, y', y'',... $y^{(m-1)}$ prennent pour $x=x_0$ respectivement les valeurs η_0, η_1, η_2,.., η_{m-1}; en signifiant les dérivées prises par rapport à x par d'accents supérieurs, et supposant que les fonctions de x arbitrairement données p_{m-1}, p_{m-2},... p_0, p ne deviennent pas infinies pour $x=x_0$, ou, ce qui veut dire le même, que x_0 n'est pas un point singulier de l'équation différentielle (voir à l'égard de cette dénomination le n.° 1 de mon mémoire dans le Journal de Crelle-Borchardt, t. 66).

Soit y_1, y_2,... y_m un système fondamental d'intégrales (dans le sens de mon mémoire dejà cité, n.° 2) de l'équation différentielle

$$y^{(m)}=p_{m-1}y^{(m-1)}+p_{m-2}y^{(m-2)}+\cdots+p_0 y, \tag{2}$$

on sait que l'on trouve d'après Lagrange les intégrales de l'équation (1) en considérant dans l'expression:

$$y=c_1 y_1+c_2 y_2+\cdots+c_m y_m$$

les coëfficients c_1, c_2,... c_m comme dépendants de x et en les déterminant ainsi que

$$y^{(i)}=c_1 y_1^{(i)}+c_2 y_2^{(i)}+\cdots+c_m y_m^{(i)} \text{ pour } i=0,\ 1,\ 2,\ldots\ m-1. \tag{3}$$

A cet effet les fonctions c doivent satisfaire aux équations:

$$c'_1 y_1^{(i)} + c'_2 y_2^{(i)} + \cdots + c'_m y_m^{(i)} = 0 \text{ pour } i = 0, 1, 2, \ldots m-2. \tag{4}$$

A ces équations on doit adjoindre encore une équation qui exprime que y est une intégrale de l'équation (1).

En posant le déterminant

$$\begin{vmatrix} y_1^{(m-1)} & y_1^{(m-2)} & y_1 \\ y_2^{(m-1)} & y_2^{(m-2)} & y_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ y_m^{(m-1)} & y_m^{(m-2)} & y_m \end{vmatrix} = \Delta$$

et en signifiant le coëfficient de $y_i^{(m-1)}$ en Δ avec Δ_i on a (comme il suit des mémoires de Malmstèn et de Joachimsthal dans le journal de Crelle-Borchardt t. 39 et 40)

$$c_i = \int \frac{p\,\Delta_i}{\Delta}\, dx \text{ pour } i = 1, 2, \ldots m. \tag{5}$$

L'on peut poser

$$c_i = \int_{x_0}^{x} \frac{p\,\Delta_i}{\Delta}\, dx + \gamma_i \text{ pour } i = 1, 2, \ldots, m, \tag{6}$$

où $\gamma_1, \gamma_2, \ldots \gamma_m$ sont des constantes arbitraires. D'après les équations (3) on a

$$y^{(k)} = \sum_{1}^{m}{}_i\, y_i^{(k)} \int_{x_0}^{x} \frac{p\,\Delta_i}{\Delta}\, dx + \sum_{1}^{m}{}_i\, \gamma_i y_i^{(k)} \text{ pour } k = 0, 1, 2, \ldots m-1. \tag{7}$$

Pour que $y, y', y'', \ldots y^{(m-1)}$ aient pour $x = x_0$ respectivement les valeurs $\eta_0, \eta_1, \eta_2, \eta_{m-1}$, les costantes γ se déterminent par le système suivant d'équations:

$$\gamma_1 \eta_{1i} + \gamma_2 \eta_{2i} + \cdots + \gamma_m \eta_{mi} = \eta_i \text{ pour } i = 0, 1, 2, \ldots m-1 \tag{8}$$

en signifiant par η_{ki} la valeur de $y_k^{(i)}$ pour $x = x_0$.

Ces équations sont toujours resolubles, parce que leur déterminant est égal à la valeur de Δ pour $x = x_0$, qui ne s'évanouit pas (v. mon mém. cit. n.° 2). L'integrale cherchée a donc la forme:

$$y = \sum_{1}^{m} {}_i\, y_i \int_{x_0}^{x} \frac{p\,\Delta_i}{\Delta}\, dx + \sum_{1}^{m} {}_i\, \gamma_i y_i, \tag{9}$$

où les γ sont déterminées par les équations (8).

Si en particulier η_0, η_1, η_2, η_{m-1} sont toutes zéro, le déterminant des équations (8) ne s'évanouissant pas, il suit que $\gamma_1, \gamma_2, \dots \gamma_m$ sont toutes zéro, donc l'intégrale (9) devient:

$$y = \sum_{1}^{m} {}_i\, y_i \int_{x_0}^{x} \frac{p\,\Delta_i}{\Delta}\, dx. \tag{9^a}$$

Dans ce mémoire nous appelerons l'intégrale (9^a^) l'intégrale principale appartenant à x_0. De l'équation (9^a^) il suit, que, si l'équation différentielle est homogène, l'intégrale principale est indentiquement zéro, puisque $p = 0$.

Il est essentiel de remarquer que la première somme dans l'équation (9) ne varie pas quand on y remplace le système fondamental $y_1, y_2, \dots y_m$ par un autre.

En effet, en remplaçant y_i par $c_{i1} y_1 + c_{i2} y_2 + \dots + c_{im} y_m$, où les quantités c_{ik} sont des constantes arbitraires ainsi choisies que le déterminant:

$$C = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{21} & c_{1m} \\ c_{21} & c_{22} & c_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{m1} & c_{m2} & c_{mm} \end{vmatrix}$$

ne devienne pas zéro, Δ se change en $C\Delta$ et Δ_i en

$$\sum_{1}^{m} {}_k\, \frac{\partial C}{\partial c_{ik}} \frac{\partial \Delta}{\partial y_k^{(m-1)}} = \sum_{1}^{m} {}_k\, \frac{\partial C}{\partial c_{ik}} \Delta_k.$$

Par là la première somme de l'équation (9) se change par la substitution indiquée en

$$\sum_{1}^{m} {}_i\, (c_{i1} y_1 + c_{i2} y_2 + \dots + c_{in} y_m) \sum_{1}^{m} {}_k\, \frac{\partial C}{\partial c_{ik}} \int_{x_0}^{x} \frac{p\,\Delta_k}{\Delta C}\, dx.$$

Puisque $\sum_1^m {}_i c_{il}\frac{\partial C}{\partial c_{ik}} = C$ ou $=0$ selon que $l=k$ ou $l \gtrless k$, cette expression se transforme en

$$\sum_1^m {}_i C y_k \int_{x_0}^{x} \frac{p\Delta_k}{C\Delta} dx = \sum_1^m y_k \int_{x_0}^{x} \frac{p\Delta_k}{\Delta} dx; \qquad \text{c. q. f. d.}$$

2.

Reprenons l'équation différentielle:

$$D(y)-p = y^{(m)} - p_{m-1}y^{(m-1)} - p_{m-2}y^{(m-2)} - \cdots - p_0 y - p = 0 \tag{1}$$

et transformons d'une manière arbitraire $D(y)$ dans une différence

$$D(y) = D_1(y) - D_2(y) \tag{2}$$

de manière que $D_1(y)$ et $D_2(y)$ soient des fonctions linéaires et homogènes de y et de ses dérivées, et que $D_1(y)$ contienne le terme $y^{(m)}$ et dans les autres termes des dérivées d'ordre inférieur, de sorte que $D_2(y)$ contiendra seulement les dérivées jusqu'à l'ordre $m-1$, l'équation (1) est alors

$$D_1(y) = D_2(y) + p. \tag{3}$$

Soit maintenant u_0 une intégrale de l'équation différentielle

$$D_1(y) = 0 \tag{3^a}$$

telle que $u_0, u_0', u_0'', \ldots u_0^{(m-1)}$ prennent pour $x=x_0$ respectivement les valeurs arbitrairement données $\eta_0, \eta_1, \eta_2, \ldots \eta_{m-1}$, et posons dans l'équation (3)

$$y = u_0 + u,$$

il s'ensuit que u est l'intégrale principale appartenant a x_0 de l'équation différentielle

$$D_1(u) = D_2(u) + F_0(x) \tag{4}$$

où

$$F_0(x) = D_2(u_0) + p.$$

Soit u_1 l'intégrale principale appartenant à x_0 de l'équation

$$D_1(u) = F_0(x) \tag{4^a}$$

et posons dans l'équation (4)

$$u = u_1 + v$$

il s'ensuit que v est l'intégrale principale de l'équation:

$$D_1(v) = D_2(v) + F_1(x) \tag{5}$$

où

$$F_1(x) = D_2(u_1).$$

Soit u_2 l'intégrale principale de l'équation

$$D_1(v) = F_1(x) \tag{5^a}$$

et posons dans l'équation (5)

$$v = u_2 + v_1,$$

il s'ensuit que v_1 est l'intégrale principale de l'équation

$$D_1(v_1) = D_2(v_1) + F_2(x) \tag{6}$$

où

$$F_2(x) = D_2(u_2).$$

Soit de nouveau u_3 l'intégrale principale de l'équation:

$$D_1(v_1) = F_2(x) \tag{6^a}$$

et posons dans l'équation (6)

$$v_1 = u_3 + v_2,$$

il s'ensuit que v_2 est l'integrale principale de l'équation:

$$D_1(v_2) = D_2(v_2) + F_3(x) \tag{7}$$

où

$$F_3(x) = D_2(u_3), \text{ etc.}$$

En continuant ces opérations on trouve que

$$y = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_r + v_{r-1} \tag{8}$$

est une intégrale de l'équation (1) telle que pour $x = x_0$ les fonctions y, y', y'',... $y^{(m-1)}$ prennent respectivements les valeurs η_0, η_1, η_2,... η_{m-1}, en supposant que u_ρ est l'intégrale principale appartenante à x_0 de l'équation différentielle

$$D_1(y) = F_{\rho-1}(x) \text{ pour } \rho > 0 \tag{9}$$

et u_0 l'intégrale de l'équation:

$$D_1(y) = 0 \tag{9^a}$$

telle que pour $x = x_0$ les fonctions u_0, u_0', u_0'',... $u_0^{(m-1)}$ prennent respectivement les valeurs η_0, η_1, η_2,... η_{m-1}, et que les fonctions F soient liées par la relation:

$$\left.\begin{aligned} F_\rho(x) &= D_2(u_\rho) \text{ pour } \rho > 0 \\ F_0(x) &= D_2(u_0) + p \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

et enfin que v_{r-1} est l'intégrale principale appartenante à x_0 de l'équation

$$D_1(y) = D_2(y) + F_r(x). \tag{11}$$

Par les équations (9)-(11) on obtient successivement u_0, $F_0(x)$; u_1, $F_1(x)$; u_2, $F_2(x)$, etc. Mais il faut qu'à ces relations on en substitue d'autres, au moyen desquelles on puisse calculer directement ces fonctions sans recourir chaque fois aux équations différentielles; voilà le but du numero suivant.

3.

Soit y_1, y_2,... y_m un système fondamental d'intégrales de l'équation:

$$D_1(y) = 0, \tag{1}$$

on a, en conservant les notations Δ et Δ_i du n. 1,

$$u_\rho = \sum_1^m {}_i\, c_{\rho i} y_i \text{ pour } \rho > 0 \tag{2}$$

où

$$c_{\rho i} = \int_{x_0}^x \frac{F_{\rho-1}(x) \cdot \Delta_i}{\Delta}\, dx.$$

Puisque d'après l'équation (3) du n. 1

$$u_\rho^{(k)} = \sum_1^m {}_i\, c_{\rho i} y_i^{(k)} \text{ pour } k = 0, 1, 2, \ldots m-1$$

il suit

$$D_2(u_\varrho) = \sum_1^m {}_i c_{\varrho i} D_2(y_i) \text{ pour } \rho > 0, \tag{3}$$

la dérivée la plus élevée contenue en $D_2(y)$ étant la $m-1^{\text{ième}}$.

En remplaçant en $c_{\varrho i}$ sous le signe d'intégration la variable x par t, et en désignant par $v_1, v_2, \ldots v_n$ respectivement les mêmes fonctions de t que $y_1, y_2, \ldots y_m$ de x, en désignant enfin par $\Delta(t, x)$ le déterminant que l'on obtient en remplaçant dans $\Delta(t)$ les dérivées

$$\frac{d^{n-1}v_1}{ds^{m-1}}, \frac{d^{n-1}v_2}{ds^{m-1}}, \ldots \frac{d^{n-1}v_m}{ds^{m-1}} \text{ resp. par } D_2(y_1),\ D_2(y_2), \ldots D_2(y_m)$$

quantités dans lesquelles la variable est x, il s'ensuit de l'équation (3) de ce n.° et de l'équation (10) du n.° précédent

$$F_\varrho(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{F_{\varrho-1}(t)\Delta(t, x)}{\Delta(t)} ds \text{ pour } \rho > 0. \tag{A}$$

En remplaçant dans le déterminant $\Delta(t)$ les dérivées $\frac{d^{n-1}v_1}{ds^{m-1}}, \frac{d^{m-1}v_2}{ds^{m-1}}, \ldots \frac{d^{m-1}v_m}{ds^{m-1}}$ resp. par $y_1, y_2, \ldots y_m$ fonctions de x et désignant le déterminant resultant par $\Delta_1(t, x)$, il suit de l'équation (2)

$$u_\varrho = \int_{x_0}^{x} \frac{F_{\varrho-1}(t)\Delta_1(t, x)}{\Delta(t)} ds \text{ pour } \rho > 0. \tag{B}$$

Par l'équation (A) on peut trouver successivement $F_1(x)$, $F_2(x)$, etc., et alors l'équation (B) donne u_1, u_2, etc. Enfin il suit également de l'équation (11) du n.° précedent et de l'équation (9^a) du n.° 1:

$$v_{r-1} = \int_{x_0}^{x} \frac{F_r(t)\Delta_1(t, x)}{\Delta(t)} ds. \tag{C}$$

Que l'on remarque que la $i^{\text{ième}}$ dérive de $\Delta_1(t, x)$ prise par rapport à x se forme, si l'on remplace en $\Delta_1(t, x)$ les fonctions $y_1, y_2, \ldots y_m$ respectivement par $y_1^{(i)}, y_2^{(i)}, \ldots y_m^{(i)}$, et les dérivées $\frac{d^{n-2}v_1}{ds^{n-2}}, \frac{d^{m-2}v_2}{ds^{m-2}}, \ldots \frac{d^{m-2}v_m}{ds^{m-2}}$ respectivement par $\frac{d^{m-1}v_1}{ds^{n-1}}, \frac{d^{m-1}v_2}{ds^{m-1}}, \ldots \frac{d^{n-1}v_m}{ds^{n-1}}$.

En posant donc

$$D_2(y) = q_{m-1} y^{(m-1)} + q_{m-2} y^{m-2} + \cdots + q_0 y$$

l'on dérive de la première remarque

$$\Delta(t, x) = q_0 \Delta_1(t, x) + q_1 \frac{\partial \Delta_1(t, x)}{\partial x} + q_2 \frac{\partial^2 \Delta_1(t, x)}{\partial x^2} + q_{m-1} \frac{\partial^{m-1} \Delta_1(t, x)}{\partial x^{m-1}}. \quad (D)$$

4.

Les intégrales du n.° précédent sont prises toutes le long d'une même ligne d'integration qui ne traverse aucun point singulier de l'équation différentielle (1) du n.° 2. Par là $\frac{\Delta(t, x)}{\Delta(t)}$ et $F_0(t)$ sont toujours finies le long de cette ligne, $\Delta(t)$ ne s'évanouissant et $\Delta(t, x)$ et $F_0(t)$ ne devenant infinies que pour les points singuliers (v. mon mém. cité n.° 2). C'est porquoi l'on peut assigner deux quantités positives M et N telles que le module de $\frac{\Delta(t, x)}{\Delta(t)}$ ne surpasse pas M et le module de $F_0(t)$ ne surpasse pas N le long de la ligne indiquée. Soit de plus s l'arc de cette ligne pris de x_0 jusqu'à x, ds étant le module de dx, nous avons, en employant itérativement l'équation (A) du n.° précédent,

$$\left.\begin{array}{l}
\mathrm{mod} F_1(x) < N \cdot Ms \\
\mathrm{mod} F_2(x) < \frac{N \cdot (Ms)^2}{1 \cdot 2} \\
\mathrm{mod} F_3(x) < \frac{N (Ms)^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \\
\dots\dots\dots\dots \\
\dots\dots\dots\dots \\
\mathrm{mod} F_\varrho(x) < \frac{N (Ms)^\varrho}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots \varrho}.
\end{array}\right\} \quad (1)$$

Puisque, comme l'on sait, la série

$$\frac{N(Ms)}{1}, \ \frac{N(Ms)^2}{1 \cdot 2}, \ \frac{N(Ms)^3}{1 \cdot 2 \cdot 3}, \text{ etc. in inf.} \quad (2)$$

est convergente, la série

$$F_1(x), \quad F_2(x), \quad F_3(x), \text{ etc. in inf.} \tag{3}$$

est aussi convergente.

D'une manière semblable Mr. Caqué a démontré la convergence de sa série particulière.

Mais il faut ajouter une remarque à cette démonstration. En effet l'arc de la ligne d'intégration peut être infini, quand même x est finie, l'intégration s'approchant du point x par des tortillements en nombre infini. Alors la démonstration précédente serait en défaut. Mais, x n'étant pas un point singulier, on sait que la valeur d'une telle intégrale égale la valeur d'une autre prise de x_0 à x sur une ligne de longueur finie et qui constitue avec la première un contour ne contenant aucun point singulier dans son intérieur.

De l'équation (B) du n.° précédent et des inégalités (1) de ce n.° il suit

$$\operatorname{mod} u_\varrho < \frac{N(Ms)^\varrho}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots \varrho} \tag{4}$$

et de là on tire que la série

$$y = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots \text{ in inf.} \tag{5}$$

est aussi convergente.

Il nous reste encore a démontrer que la série (5) satisfait à l'équation différentielle (1) du n.° 2. A cet effet il faut et il suffit que le module de la fonction v_{r-1} de l'équation (8) du n.° 2 décroisse indéfinément avec r. C'est que l'on déduit immédiatement de l'équation (C) du n.° précédent et des inégalités (1) de ce n.°, parce que l'on a

$$\operatorname{mod} v_{r-1} < \frac{N(Ms)^{r+1}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (r+1)}$$

quantité décroissante indéfinément avec r à cause de la convergence de la série (2).

5.

Supposons que l'on connaît dans toute l'étendue du plan de x le système fondamental d'integrales $y_1, y_2, \ldots y_m$ de l'équation différentielle (1) du n.° 3, alors la série

$$y = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots \text{ in inf.}$$

represente pour toute valeur finie de x, excepté les points singuliers, une intégrale de l'équation (1) du n.° 2, telle que pour $x = x_0$ les fonctions y, y', y'',... y^{m-1} prennent respectivement les valeurs η_0, η_1, η_2,... η_{m-1}. On obtient les termes de la série par des intégrations réitérées, comme l'indiquent les équations (A) et (B) du n.° 3.

En choisissant convénablement $D_1(y)$ et partant y_1, y_2,... y_m, on peut obtenir que les termes de la série reçoivent des formes prescrites, telles qu'une recherche particulière les demande. En tout cas, il est clair qu'il y a une infinité de représentations différentes du genre indiqué des intégrales d'une équation differentielle linéaire.

6.

Nous allons maintenant déduire, comme simple exemple des formules exposées dans les n.^{os} précédents, la série que Mr. Caqué a trouvé dans son mémoire cité antérieurment.

En effet en choisissant

$$D_1(y) = y^{(m)}$$

l'équation (1) du n.° (3) devient

$$y^{(m)} = 0. \tag{1}$$

L'intégrale u_0 de cette équation est:

$$u_0 = \eta_0 + \eta_1 \frac{x - x_0}{1} + \eta_2 \frac{(x - x_0)^2}{1 \cdot 2} + \eta_3 \frac{(x - x)^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \cdots + \eta_{m-1} \frac{(x - x_0)^{m-1}}{1 \cdot 2 \cdot 3 (m-1)}. \tag{2}$$

En prenant les intégrales

$$y_1 = 1, \quad y_2 = x, \quad y_3 = x^2, \ldots, \quad y_m = x^{m-1}$$

pour système fondamental, on a

$$\Delta = (-1)^{\frac{m(m-1)}{2}} 1!\, 2!\, 3! \ldots (m-1)!$$

en désignant le produit $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots k$ par $k!$

En formant, d'après la remarque faite à la fin du n.° 3, les dérivées de $\Delta_1(t, x)$ par rapport à x et t, il resulte dans le cas présent immédiatement:

$$\frac{\partial \Delta_1(t, x)}{\partial x} = -\frac{\partial \Delta_1(t, x)}{\partial t}. \tag{4}$$

En outre il est clair que

$$\frac{\partial^m \Delta_1(t, x)}{\partial x^m} = 0. \tag{5}$$

De l'équation (4) on déduit que la fonction $\Delta_1(x, t)$ est une fonction entière de $x - t$ seul, et de l'équation (5) que cette fonction est du degré $m-1$ au plus. Puisque $\Delta_1(x, t)$ et ses $m-2$ premieres dérivées prises par rapport à x s'évanouissent pour $x = t$, on a

$$\Delta_1(t, x) = C(x-t)^{m-1},$$

où C est indépendante de x et t. Il est clair que

$$\frac{\partial^{m-1}\Delta_1(t, x)}{\partial x^{m-1}} = \Delta,$$

donc

$$\Delta_1(t, x) = \frac{\Delta}{(m-1)!}(x-t)^{m-1}. \tag{6}$$

Par l'équation (D) du n.° 3 on trouve

$$\frac{\Delta(t, x)}{\Delta(t)} = \frac{p_0}{(m-1)!}(x-t)^{m-1} + \frac{p_1}{(m-2)!}(x-t)^{m-2} +$$
$$+ \frac{p_2}{(m-3)!}(x-t)^{m-3} + \cdots + \frac{p_{m-2}}{1!}(x-t) + p_{m-1} = f(x, t). \tag{7}$$

Par les équations (6) et (7) les équations (A) et (B) du n.° (3) deviennent pour le cas présent:

$$F_\varrho(x) = \int_{x_0}^{x} F_{\varrho-1}(t) f(x, t)\, ds \tag{A'}$$

$$u_\varrho = \int_{x_0}^{x} F_{\varrho-1}(t) \frac{(x-t)^{m-1}}{1\cdot 2\cdot 3 \cdots m-1}\, ds. \tag{B'}$$

7.

Il nous reste a faire voir que les termes de la série de Mr. Caqué coincident avec les termes u_ϱ que nous venons de donner par la formule (B'), si l'on modifie quelques notations. En remplaçant m par $p+1$; $p, p_0, p_1, \ldots, p_{m-1}$ respectivement par $A(x)$, $A_0(x)$, $A_1(x), \ldots, A_p(x)$; $\eta_0, \eta_1, \eta_2, \ldots \eta_{m-1}$ respectivement par $a_0, a_1, a_2, \ldots a_p$; et en nommant $\vartheta(x)$ la fonction u_0 de l'équation (2) du n.° précédent, on voit que la fonction $f(x, t)$ donnée par l'équation (7) du n.° précédent coïncide avec la fonction $f(x, t)$ de Mr. Caqué définie par l'équation (D), chap. II, n.° 6 de son mémoire; de même notre fonction $F_0(x)$ définie généralement par l'équation (10) du n.° 2 coïncide pour le cas présent avec la fonction $F(x)$ de Mr. Caqué donnée par l'équation (C) de son mémoire. Les fonctions $f_q(x, t)$ qu'il a donné par la formule (E) ibid. peuvent être définies plus distinctement par l'équation:

$$f_{q+1}(x, z) = \int_z^x f_q(x, u) f(u, z)\, du. \tag{1}$$

Dans la formule (H) ibid., chap. III n.° 12, Mr. Caqué trouve

$$\frac{d^{p+1}y}{dx^{p+1}} = F(x) + \sum_0^\infty {}_q \int_{x_0}^x F(z) f_q(x, z)\, dz. \tag{2}$$

D'après notre formule (B') du n.° précédent nous avons:

$$\frac{d^{p+1}u_q}{dx^{p+1}} = F_{q-1}(x) \text{ pour } q > 0 \tag{3}$$

$\frac{d^{p+1}u_0}{dx^{p+1}}$ s'évanouissant; donc il faut montrer que

$$F_{q+1}(x) = \int_{x_0}^x F(z) f_q(x, z)\, dz. \tag{4}$$

Pour ce but établissons la formule

$$\int_{x_0}^z d\omega \int_\omega^x \psi(u, \omega)\, du = \int_z^x du \int_{x_0}^z \psi(u, \omega)\, d\omega + \int_{x_0}^z d\omega \int_{x_0}^\omega \psi(\omega, v)\, dv, \tag{A''}$$

où $\psi(u, \omega)$ est une fonction des variables indépendantes u, ω, telle que les fonctions à intégrer ne deviennent pas infinies dans l'étendue de l'intégration.

Les deux membres de cette équation étant des fonctions de x et z dont les dérivées prises par rapport à z sont l'une et l'autre

$$\int_z^x \psi(u,\, z)\, du,$$

et dont les valeurs pour $z = x_0$ s'évanouissent simultanément, sont égales. En posant dans cette équation $z = x$, on obtient la formule particulière:

$$\int_{x_0}^x d\omega \int_{\omega_0}^x \psi(u,\, \omega)\, du = \int_{x_0}^x d\omega \int_{x_0}^\omega \psi(\omega,\, v)\, dv. \tag{B''}$$

En posant en outre:

$$\psi(u,\, \omega) = f_{q-1}(x,\, u)\, f(u,\, \omega)\, F_r(\omega)$$

et partant

$$\psi(\omega,\, v) = f_{q-1}(x,\, \omega)\, f(\omega,\, v)\, F_r(v),$$

il suit

$$\int_{x_0}^x F_r(\omega)\, d\omega \int_\omega^x f_{q-1}(x,\, u) f(u,\, \omega)\, du = \int_{x_0}^x f_{q-1}(x,\, \omega)\, d\omega \int_{x_0}^\omega f(\omega,\, v) F_r(v)\, dv$$

c'est-à-dire, d'après la formule (1) de ce n.° et la formule (A') du n.° précédent,

$$\int_{x_0}^x F_r(\omega) f_q(x,\, \omega)\, d\omega = \int_{x_0}^x f_{q-1}(x,\, \omega)\, F_{r+1}(\omega)\, d\omega. \tag{5}$$

En posant dans cette équation au lieu de r et q premièrement 0 et q, puis 1 et $q-1$, puis 2 et $q-2$, puis 3 et $q-3$, etc., jusqu'à $q-1$ et 1, et en ajoutant, on obtient

$$\int_{x_0}^x F_0(\omega) f_q(x,\, \omega)\, d\omega = \int_{x_0}^x f_0(x,\, \omega),\; F_q(\omega)\, d\omega = F_{q+1}(x),$$

donc l'équation (4) se trouve démontrée.

Greifswald, mai 1870.