Ueber transfinite Zahlen.

Von

Wilhelm Killing in Münster i./W.

Bekanntlich haben in neuerer Zeit die Herren Cantor und Veronese den Versuch gemacht, das Gebiet der gewöhnlichen Zahlen ins Transfinite zu erweitern, und sind dabei zu ganz verschiedenen Ergebnissen gelangt, so dass es unmöglich ist, die von dem einen erhaltenen Zahlen durch die des andern darzustellen. Gewiss muss dies Resultat Befremden erregen, da es sich in beiden Fällen im Wesen doch um die Anzahl handelt. Aber diese Verschiedenheit zwingt noch nicht dazu, die Berechtigung der einen Theorie von vornherein zu leugnen; denn es kommt öfters vor, dass dasselbe Gebiet auf mannigfaltige Weise erweitert wird. Man darf aber keineswegs annehmen, dass die Verschiedenheit des Ergebnisses in der Ungleichheit der Methode begründet sei. Herr Cantor geht nämlich nur von der Gesammtheit der natürlichen (positiven ganzen) Zahlen aus, während Herr Veronese neben den positiven auch die negativen ganzen Zahlen von vornherein der Untersuchung zu Grunde legt. Da beide Wege natürlich sind, muss man jede Erweiterung, die überhaupt berechtigt ist, auf beiden Wegen gewinnen können. Sollte es also unmöglich sein, von den natürlichen Zahlen aus zu der Veronese'schen Erweiterung zu gelangen, so würde das schon einen schwerwiegenden Grund gegen diese Theorie abgeben. Indessen will ich darauf nicht eingehen, da der Zweck der folgenden Zeilen ein anderer ist.

Nachdem ich in einer kleinen Arbeit, die dem Vorlesungs-Verzeichniss unserer Akademie für das Wintersemester 1895/96 vorgedruckt ist, einzelnen meiner Bedenken gegen die Veronese'sche Theorie Ausdruck gegeben hatte, hat Herr Veronese darauf im 47. Bande dieser Annalen geantwortet (S. 423—432). Um namentlich denjenigen Lesern, denen meine Programm-Arbeit nicht zu Gebote steht, eine Prüfung meiner Bedenken zu ermöglichen, möchte ich diejenigen Punkte, die mir für die Beurtheilung der Theorie am wesentlichsten zu sein scheinen, hier in einiger Ausführlichkeit mittheilen. Dabei behalte ich mir vor, die übrigen Punkte an einem andern Orte ausführlicher darzulegen, als es im Programme bei der Beschränktheit des mir zur Verfügung stehenden Raumes möglich war.

1. Mit Herrn Veronese gehen wir von der Gesammtheit der positiven und negativen ganzen Zahlen aus. Demnach denken wir in einem eindimensionalen Gebilde (etwa einer Geraden) zwei Punkte A_0 und A_1 gegeben, führen die Punkte $A_2, A_3, \ldots A_\mu, \ldots$ der Reihe nach durch die Forderung ein:

$$A_0 A_1 = A_1 A_2 = A_2 A_3 = \cdots = A_{\mu-1} A_\mu = \cdots,$$

und gelangen auf entsprechendem Wege zu den Punkten $A_{-\mu}$, indem wir die Forderungen stellen:

$$A_1 A_0 = A_0 A_{-1} = A_{-1} A_{-2} = \cdots = A_{-\mu+1} A_{-\mu} = \cdots;$$

wobei die Gleichheit in der Uebereinstimmung nach Grösse und Richtung bestehen soll. Die so gewonnenen Punkte A_μ bilden nach Herrn Veronese eine geordnete Gruppe; ein Punkt P, der entweder mit einem Punkte A_μ zusammenfällt oder zwischen zwei Punkten A_μ und $A_{\mu+1}$ liegt, gehört dem Gebiet der Scala in Bezug auf das Segment $A_0 A_1$ an. Beide Ausdrücke wollen auch wir der Kürze wegen benutzen.

Jetzt wollen wir annehmen, die Gerade enthalte einen Punkt B_0, der dem Gebiet der ersten Scala nicht angehört. Indem wir eine Strecke $B_0 B_1 (= A_0 A_1)$ zu Grunde legen, gelangen wir auf die angegebene Weise für jede ganze Zahl ν zu einem Punkte B_ν, der ebenfalls ausserhalb des Gebiets der ersten Scala liegt. Ist diese Annahme berechtigt, so haben wir betreffs der Anordnung der einzelnen Gruppen in der Geraden zwei Fälle zu unterscheiden: entweder geht jeder Gruppe eine andere unmittelbar voraus und eine andere folgt unmittelbar auf sie; oder zwischen zwei beliebigen Gruppen liegen jedesmal unendlich viele gleichartige Gruppen. Hiernach kann nur eine von vier Möglichkeiten bestehen: a) beide Fälle sind zu verwerfen; b) der erste Fall ist berechtigt, der zweite nicht; c) nur die zweite Annahme ist zulässig; d) beide Fälle sind möglich. Somit sind auch die transfiniten Zahlen entweder unberechtigt, oder sie können nur auf einem der bezeichneten Wege gewonnen werden, oder beide Wege führen zu transfiniten Zahlen. Wofern die Untersuchung zu dem letzten Ergebniss führt, müssen die beiden Systeme wesentlich verschieden sein, da ihre Grundlagen sich gegenseitig ausschliessen.

2. Wir wollen jetzt die beiden Annahmen einzeln prüfen und wenden uns zunächst der ersten zu. Ausserhalb des Gebiets, welches unter Zugrundelegung der Strecke $A_0 A_1$ den Zahlen $0, \pm 1, \pm 2, \ldots \ldots \pm \mu, \ldots$ entspricht, aber in der positiven Richtung liege ein Punkt B_0, von dem aus eine Messung in gleicher Weise und mit einer gleichen Längeneinheit durchgeführt werden kann, wobei wir zu den

Punkten B_ν gelangen. Beide Gebiete sollen vollständig getrennt liegen; wir setzen jedoch voraus, dass zwischen ihnen kein neues Gebiet derselben Art eingeschoben werden kann. Dann soll in Bezug auf die Einheit A_0A_1 dem Punkte B_0 die Zahl ω, dem Punkte B_ν die Zahl $\omega + \nu$ zugeordnet sein. Für positive Werthe von μ und ν gehören die Gebiete, in denen die den Zahlen μ und $\omega - \nu$ entsprechenden Punkte liegen, der Strecke A_0B_0 an. Zwischen dem Gebiet der Zahlen μ und dem der Zahlen $\omega - \nu$ liegt kein Gebiet einer Scala; auch sind sie nicht durch eine Strecke getrennt, deren Masszahl endlich ist; also müssen sie durch einen Punkt verbunden sein. Diesem Punkte legen wir das Zeichen ∞ bei und müssen annehmen, dass ihm auch der Werth $\omega - \infty$ entspricht. Hiernach dürfen wir sagen: Alle Punkte, welche den positiven Zahlen μ entsprechen, haben ihre Grenze in einem festen Punkte der Geraden; derselbe Punkt bildet die Grenze für die Punkte $\omega - \nu$ bei einem positiven, unbegrenzt wachsenden Werthe von ν.

Auf demselben Wege gelangt man zu den Zahlen $\mu\omega + \nu$, $\lambda\omega^2 + \mu\omega + \nu$ u. s. w. Obwohl man unmittelbar übersieht, dass hier die Eindeutigkeit und Stetigkeit vollständig gewahrt wird, möge es gestattet sein, dieselben Zahlen auf einem andern Wege herzuleiten.

3. Zu dem Ende ordnen wir vermittelst der Gleichung:

$$v = \operatorname{tg} \frac{u\pi}{2} \tag{1}$$

allen werthen von u, die zwischen $+1$ und -1 liegen, die sämmtlichen reellen Werthe von v zu. Um dieselbe Gleichung aber auch für die übrigen Werthe von u zur Festsetzung einer eindeutigen Beziehung zwischen u und v zu benutzen, führe man eine neue Zahl ω ein, die dem gewöhnlichen Zahlgebiet nicht angehört, bilde aus ihr durch Addition und Subtraction der gewöhnlichen Zahl ν die Zahlen $\omega \pm \nu$, die unter einander und von den gewöhnlichen Zahlen verschieden sind, und treffe folgende Festsetzung: Dem Werthe $v = \omega$ ordne man den Werth $u = 2$ und jeder Zahl $v = \omega + \nu$ einen Werth von u zu, der zwischen $+1$ und $+3$ liegt und der der Gleichung $\nu = \operatorname{tg} \frac{u\pi}{2}$ genügt. Dadurch ist auch die Zuordnung innerhalb dieses Bereiches von u eindeutig. Nur dem Werthe $u = 1$ ist kein Werth von v zugeordnet; man lasse ihm den Werth $v = +\infty$ entsprechen und setze, da 1 sowohl $= 0 + 1$ wie gleich $2 - 1$ ist, fest, dass der Werth $+\infty$ auch durch die Subtraction $\omega - \infty$ erhalten werden soll.

In ähnlicher Weise kann man unbegrenzt fortfahren. Versteht man unter m irgend eine positive oder negative ganze Zahl, so bilde man die Zahlen $m\omega + \nu$ für beliebige endliche Werthe von ν und ordne jedem Werthe von u zwischen $2m + 1$ und $2m - 1$ diejenige

Zahl $m\omega + v$ zu, für welche $v = \operatorname{tg}\frac{u\pi}{2}$ ist. Zugleich entspricht dem Werthe $u = 2m + 1$ der Werth $v = m\omega + \infty$.

Das so gewonnene Zahlgebiet kann aber noch erweitert werden, indem man von den n Gleichungen ausgeht

$$u_1 = \operatorname{tg}\frac{u_0\pi}{2},\ u_2 = \operatorname{tg}\frac{u_1\pi}{2}, \cdots, u_n = \operatorname{tg}\frac{u_{n-1}\pi}{2},$$

und entsprechend den frühern Festsetzungen die Zahlen

$$m_0\omega^n + m_1\omega^{n-1} + \cdots + m_{n-1}\omega + v$$

bildet. Indessen glaube ich dies hier nicht näher darlegen zu sollen; ich will nur noch für die einfachsten unter diesen Zahlen eine Darstellung geben, die nicht ohne jedes Interesse sein dürfte.

4. In einer euklidischen Ebene ziehen wir eine Reihe von unendlich vielen parallelen Geraden. Jeder Geraden ordne man eine ganzzahlige, positive oder negative Marke m derartig zu, dass die Linien in der Reihenfolge der zugehörigen Marken auf einander folgen. Hiernach liegt die Gerade 0 zwischen den Geraden -1 und $+1$, die Gerade $+1$ zwischen den Geraden 0 und $+2$ u. s. w. Um diese Geraden zu einem einzigen Zuge zu vereinigen, setzen wir fest, dass jede Gerade m zwei unendlich ferne Punkte hat, und dass der eine zugleich der Geraden $m - 1$, der andere zugleich der Geraden $m + 1$ angehört. Jetzt soll der Punkt $m\omega + v$ der Geraden m angehören und von einem in ihr gewählten Punkte den Abstand v haben, der in der einen Richtung als positiv, in der andern als negativ angenommen wird. Der Punkt $m\omega + \infty = (m+1)\omega - \infty$ soll derjenige Punkt sein, in welchem die Geraden m und $m + 1$ mit einander verbunden sind.

Auch die höheren transfiniten Zahlen lassen sich in ähnlicher Weise darstellen, wofern man die Fiction eines mehr-dimensionalen euklidischen Raumes benutzt. Man sieht, dass der erste Fall, auf den wir in 1. geführt sind, durchaus berechtigt ist. Es verdient bemerkt zu werden, dass wir auf diesem Wege die Cantor'schen Zahlen gewonnen haben; der hier benutzten Zahl ω legt Herr Cantor das Zeichen $\omega^* + {}^*\omega$ bei.

5. Wir gehen jetzt zur Prüfung des zweiten Falles über und fragen uns, ob es gestattet ist, zwischen je zwei geordneten Gruppen, die auf einer Geraden liegen, jedesmal unendlich viele Gruppen derselben Art vorauszusetzen, mit andern Worten, ob wir das Gebiet einer Scala als *Element* eines eindimensionalen Systems betrachten dürfen. Sobald diese Frage bejaht ist, sind allerdings noch einige Nebenfragen zu erledigen; einigen Folgerungen, die Herr Veronese aus seiner Theorie zieht, wird man nicht ganz beistimmen können; auch muss die

Anwendbarkeit auf den Raum noch eigens geprüft werden. Aber die arithmetische Berechtigung der Veronese'schen Zahlen wird man alsdann nicht mehr bestreiten können. Damit ist nämlich die Zulässigkeit der Zahl ∞_1 bewiesen; mit Nothwendigkeit folgen daraus die Zahlen

$$\infty_1^n \cdot m_0 \pm \infty_1^{n-1} \cdot m_1 \pm \infty_2^{n-2} \cdot m_2 \pm \cdots;$$

es scheint sogar, als ob man alsdann die Zahlen

$$\infty_1, \quad \infty_1^{\infty_1}, \quad \infty_1^{\infty_1^{\infty_1}} \ldots$$

als berechtigt anerkennen müsse. Auch besteht jetzt kein wesentlicher Unterschied zwischen endlichen und unendlich grossen Segmenten; daher muss man auch umgekehrt die unendlich kleinen Segmente zulassen. Es ist also angebracht, alle weiteren Fragen bei Seite zu lassen und nur zu prüfen, ob die angegebene Annahme zulässig ist oder nicht.

Zu dem Zwecke müssen wir etwas weiter ausholen.

6. Die Punkte einer einfach zusammenhängenden Mannigfaltigkeit haben die Eigenschaft, dass man sie in eine Reihe ordnen kann, welche den beiden Gesetzen genügt:

a) von zwei verschiedenen Punkten ist der eine jedesmal der spätere,

b) wenn auf den ersten Punkt ein zweiter, auf diesen ein dritter folgt, so folgt auch der dritte Punkt auf den ersten.

Um die gewöhnlichen Zahlen nach diesem Gesetze zu ordnen, setze man fest, dass von zwei Zahlen a und b die erste die grössere sein soll, wenn die Differenz $a - b$ positiv ist, und lasse die grössere Zahl auf alle kleineren folgen. Die Zahlen des Herrn Veronese bilden, wie man sofort erkennt, eine Reihe derselben Art. Indessen ist diese Eigenschaft keineswegs für die eindimensionalen Gebilde charakteristisch; vielmehr kann eine derartige Zuordnung für beliebig viele Dimensionen durchgeführt werden. Ist z. B. in einem n-dimensionalen Raume jedem Punkte ein einziges Werthsystem $(x_1 \ldots x_n)$ zugeordnet und entspricht umgekehrt jedem Werthsystem ein einziger Punkt, so setze man fest, dass für $y_n > x_n$ der Punkt $(y_1 \ldots y_n)$ auf den Punkt $(x_1 \ldots x_n)$ folgen soll; ebenso soll für $y_n = x_n$ und $y_{n-1} > x_{n-1}$ der Punkt $(y_1 \ldots y_{n-1}, y_n)$ eine spätere Stelle erhalten als der Punkt $(x_1 \ldots x_{n-1}, x_n)$. In gleicher Weise fahre man fort, bis man zu Punkten gelangt, für welche nur die Werthe von x_1 ungleich sind und die man nach der Grösse dieser Coordinate ordnet. Die Möglichkeit dieser Anordnung, welche, wie ich bemerken möchte, in den Arbeiten des Herrn Cantor eine wichtige Rolle spielt, genügt demnach für sich noch nicht, um die oben gestellte Frage bejahen zu können.

7. Ebensowenig folgt dies aus einer Eigenschaft, welche Herr Levi-Cività in seiner Arbeit: Sugli infiniti e infinitesimi attuali quali elementi analitici, (Atti del R. Istituto Veneto, 1893) für die von ihm eingeführten Zahlzeichen beweist. Da Herr Veronese sich mehrmals mit besonderem Nachdruck auf diese Arbeit beruft, so müssen wir ihr einige Worte widmen. Dabei glaube ich dem Leser das Verständniss zu erleichtern, wenn ich von einer geometrischen Darstellung ausgehe, die zwar in der Arbeit selbst nicht erwähnt wird, die aber sehr nahe liegt.

Man bestimme die Lage eines Punktes auf einem geraden Kreiskegel 1) durch den Abstand a des Punktes vom Scheitel, indem man diese Grösse auf dem einen Mantel positiv, auf dem andern negativ sein lässt, und 2) durch die Zahl $\nu = \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}$, wo die durch den Punkt und die Axe gelegte Ebene mit einer festen Ebene den Winkel φ bildet. Hängt man die Marke ν an a an, so genügt das Zeichen a_ν, um die Lage des Punktes zu bestimmen. Alle Punkte $o_\nu = 0$ fallen im Scheitel zusammen. Sollen die Punkte $a_{-\infty}$ und $a_{+\infty}$ verschieden sein, so muss man durch den Kegelmantel einen Schnitt längs einer Erzeugenden führen.

Das Gebiet dieser Zahlen kann in folgender Weise erweitert werden. Man lasse der Gruppe

$$G = a^{(1)}_{\nu_1} + a^{(2)}_{\nu_2} + a^{(3)}_{\nu_3} + \cdots,$$

die eine endliche oder unendliche Anzahl von Elementen enthält, alle Punkte $a^{(1)}_{\nu_1}$, $a^{(2)}_{\nu_2}$ ... angehören und betrachte die Gesammtheit dieser Punkte wieder als eine Zahl, wenn entweder die Anzahl der Marken $\nu_1, \nu_2, \ldots,$ die grösser ist als eine beliebig gewählte Zahl, endlich ist, oder wenn in der Gruppe nur eine endliche Anzahl von Marken vorkommt, die kleiner sind als eine beliebig gewählte Zahl. Im ersten Falle wird die Zahl eine elliptische, im zweiten eine hyperbolische genannt. Alle elliptischen Zahlen (und ebenso alle hyperbolischen) können in eine Reihe von der in 6. angegebenen Eigenschaft gebracht werden. Herr Levi-Cività zeigt aber weiter, dass man auf die neuen Zahlen die Addition, Subtraction und Multiplication anwenden kann, ohne dass die für die reellen endlichen Zahlen geltenden Gesetze eine Aenderung erleiden. So kann man mehrere Punktmengen, die elliptischen Zahlen entsprechen, durch Operationen, die vollständig auf ganze rationale Functionen hinauskommen, zu einer neuen Punktmenge vereinigen, welche wieder durch eine elliptische Zahl dargestellt wird. Dasselbe gilt für transcendente Functionen, welche im Endlichen überall den Charakter ganzer Functionen haben.

Obwohl dies Resultat an sich ohne Zweifel Interesse beanspruchen darf, ist es für die Frage, ob die elliptischen Zahlen eine eindeutige stetige Mannigfaltigkeit bilden, ohne jede Bedeutung. Denn das gefundene Ergebniss gilt im erhöhten Masse für die complexen Zahlen. Auch lassen diese sich in eine Reihe der angegebenen Art bringen. Dennoch hat bisher niemand aus diesen beiden Eigenschaften der complexen Zahlen den Schluss ziehen wollen, dass sie eine eindimensionale stetige Mannigfaltigkeit bilden; auch ist hierfür meines Wissens bisher kein Beweis versucht, viel weniger erbracht wordeen.

8. Herr Veronese glaubt die Stetigkeit durch seine sechste und achte Hypothese begründen zu können. Die sechste Hypothese geht von einer endlichen Strecke XX' aus und lässt ihre Endpunkte sich in entgegengesetztem Sinne bewegen, und zwar so, dass die Strecke unbegrenzt klein wird; dann wird angenommen, die Strecke enthalte einen Punkt (und damit eine unendlich kleine Strecke) ausserhalb des Gebiets der Veränderlichkeit der Endpunkte.

Bei den Anwendungen dieser Hypothese kommt es darauf an, eine bestimmte unendlich kleine Strecke zu erhalten; zu dem Zwecke muss aber ein Gesetz gegeben sein, nach welchem die Veränderung der Endpunkte vor sich gehen soll; ein solches Gesetz kann doch wohl erst dann angegeben werden, wenn den rationalen Zahlen Punkte zugeordnet sind. Zum mindesten aber muss es möglich sein zu beurtheilen, ob die während der Veränderung erhaltene Strecke jedesmal eine endliche Masszahl in Bezug auf die gegebene Strecke hat. Will man dies feststellen oder will man, was für den ersten Zweck nothwendig ist, den rationalen Zahlen Punkte zuordnen, so muss bewiesen sein, dass jede Strecke in beliebig viele gleiche Theile zerlegt werden kann, was in dem Veronese'schen Werke erst an einer späteren Stelle gezeigt wird.

9. Indessen will ich auf diese Bedenken nicht näher eingehen, auch die achte Hypothese keiner Besprechung unterziehen; vielmehr wende ich mich der Frage zu, ob wirklich vermittelst dieser beiden Hypothesen die Stetigkeit begründet sei. Diese Frage muss verneint werden; denn selbst zugegeben, dass hierdurch jedes *endliche* Segment als stetig erwiesen sei, folgt daraus noch nicht, dass auch die *unendlichen* Segmente dieselbe Eigenschaft haben. Mit andern Worten: Soll die Grundform eine stetige eindimensionale Mannigfaltigkeit bilden, so müssen die einzelnen in ihr enthaltenen (Veronese'schen) Gruppen zu einem zusammenhängenden Ganzen verbunden sein. Eine derartige Verbindung ist aber unmöglich, weil das Gebiet jeder Scala unbegrenzt, ohne festen Anfangs- und Endpunkt, verläuft und zudem zwischen zwei beliebigen derartigen Gebieten unendlich viele Gebiete derselben Art enthalten sind.

Betrachte ich z. B. die Bewegung (Veränderung) eines Punktes auf einer Geraden (Grundform). Der bewegte Punkt gehört stets einem einzigen Gebiete an, geht aber von einem zum andern über. Das letztere ist nur möglich, wenn er beim Uebergange entweder keinem derartigen Gebiete angehört oder wenn er eine Grenzlage zwischen beiden Gebieten annimmt. Beide Möglichkeiten werden in dieser Theorie ausgeschlossen. Somit sind die einzelnen Bestandtheile nicht zu einer einzigen stetigen Mannigfaltigkeit vereinigt.

10. Um dies noch deutlicher einzusehen, bringen wir an der Darstellung, welche Herr Veronese von seinen Zahlen giebt (S. 166 der italienischen, S. 184 der deutschen Ausgabe), eine kleine Aenderung an. (Dass dabei die unendlich kleinen Segmente nicht vorkommen, ist belanglos.) Wir gehen von einer horizontalen Geraden a aus und ordnen jeder reellen, rationalen oder irrationalen Zahl in der bekannten Weise einen einzigen ihrer Punkte zu. Durch jeden rationalen Punkt lege man eine verticale, durch jeden irrationalen Punkt eine horizontale Gerade, und zwar so, dass alle diese Geraden mit der Geraden a rechte Winkel bilden, Jetzt betrachte man die Gesammtheit der Punkte, die auf den so gezogenen Geraden liegen. In jeder verticalen Geraden lasse man die höher gelegenen Punkte auf die niedriger liegenden Punkte folgen, und in jeder horizontalen Geraden lasse man die Punkte von links nach rechts verlaufen. Wenn endlich zwei Punkte P und Q verschiedenen Geraden des Systems angehören, so soll der Punkt Q später zu setzen sein als P, wenn dem Punkte, den die durch Q gelegte Gerade des Systems mit a gemein hat, auf a eine grössere Masszahl zugeordnet ist, als dem Schnittpunkt mit der durch P gehenden Geraden des Systems. Hierdurch sind alle Punkte des Systems in eine feste Ordnung gebracht; zudem sind die endlichen Segmente stetig; aber dem Ganzen kann man keine Stetigkeit beilegen, weil ein Zusammenhang zwischen den einzelnen Geraden nicht besteht und nicht herbeigeführt werden kann.

Münster, den 27. Juni 1896.