Beweis der Existenz einer Lösung der Differentialgleichung $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ ohne Hinzunahme der Cauchy-Lipschitz'schen Bedingung.

Von **W. F. Osgood** in Cambridge (Amerika).

Definiert man das bestimmte Integral nach Riemann, so empfiehlt es sich bekanntlich zum Zweck des Nachweises eines Grenzwertes die beiden Summen einzuführen:

$$M_1(x_1 - x_0) + M_2(x_2 - x_1) + \cdots + M_n(x_n - x_{n-1}),$$
$$m_1(x_1 - x_0) + m_2(x_2 - x_1) + \cdots + m_n(x_n - x_{n-1}),$$

wobei $a = x_0 < x_1 < x_2 \cdots < x_n = A$ die Theilungspunkte des Intervalls $a \leqq x \leqq A$ sind und M_i, m_i die obere respective untere Grenze der als endlich vorausgesetzten Function $f(x)$ im Unterintervall $x_{i-1} \leqq x \leqq x_i$ bedeuten. Diese Summen nähern sich stets beide einem Grenzwert G respective K, wenn die Unterintervalle gegen Null convergieren. Ist $G = K$, so existiert das bestimmte Integral von $f(x)$ und es ist $\int\limits_a^A f(x)\,dx = G = K$.[1]) Dies wird stets der Fall sein, wenn $f(x)$ eine stetige Function von x ist, was hier angenommen werden soll.

Lässt man an Stelle der festen Größe A die Veränderliche x, wo $a \leqq x \leqq A$ ist, treten und setzt man

$$y = b + \int\limits_a^x f(x)\,dx,$$

so ist y eine Lösung der Differentialgleichung

[1]) Man vergleiche etwa Stolz, Grundzüge der Differential- und Integralrechnung, Bd. I, X. Abschnitt, wo auch eine ausführliche Literaturangabe sich findet.

$$\frac{dy}{dx} = f(x)$$

und zwar die einzige Lösung, die im Punkte $x = a$ den Wert b annimmt und im Intervall $a \leqq x \leqq A$ verläuft, wie man mittelst der Mittelwertsätze zeigt.

Durch die soeben besprochene Definition des bestimmten Integrals war von vornherein am allerwenigsten ein Existenzbeweis für diese Differentialgleichung in Aussicht genommen. Man kann aber in Anlehnung an Cauchy der Grenzbetrachtung eine solche Form geben, dass die wesentlichen Momente bei dieser Fragestellung signalisiert werden. Man theile nämlich die x, y-Ebene in n Streifen durch die Linien $x = x_i$. Der Maximal- resp. Minimalwert von $f(x)$ im i^{ten} Streifen wird M_i resp. m_i sein. Bildet man die Function

$$S_n(x) = S_n(x_{i-1}) + M_i(x - x_{i-1}), \quad x_{i-1} \leqq x \leqq x_i$$
$$S_n(x_0) = b,$$

so wird die entsprechende Curve, $y = S_n(x)$, stetig sein und aus n Stücken von geraden Linien bestehen. Und nun wird man beweisen, dass

$$S_{n+1}(x) \leqq S_n(x)$$
$$S_n(x) \leqq b + m(x - a),$$

wobei m den kleinsten Wert von $f(x)$, $a \leqq x \leqq A$, bedeutet. daraus ergibt sich, dass $S_n(x)$ für jeden dieser Werte von x bei unbegrenzt wachsendem n gegen einen Grenzwert $\varphi(x)$, convergiert. — In ähnlicher Weise verfährt man mit den unteren Grenzen, m_i, indem man die Function

$$\mathfrak{S}_n(x) = \mathfrak{S}_n(x_{i-1}) + m_i(x - x_{i-1}), \qquad \mathfrak{S}_n(x_0) = b$$

bildet und zeigt, dass auch $\mathfrak{S}_n(x)$ gegen einen Grenzwert und zwar gegen denselben Grenzwert $\varphi(x)$ convergiert. — So viel umfasst der Existenzbeweis des bestimmten Integrals einer stetigen Function. Des Weiteren zeigt man dann durch die Mittelwertsätze, dass diese Grenzfunction $\varphi(x)$ der Differentialgleichung

$$\varphi'(x) = f(x)$$

genügt.

Ich habe mir die Aufgabe vorgelegt, die allgemeinere Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y),$$

wobei $f(x, y)$ eine in der Umgebung des Punktes $x = a$, $y = b$ stetige Function bedeutet, nach einer ähnlichen Methode zu behandeln und es ist mir gelungen, auch für diese Differentialgleichung eine Lösung $y = \varphi(x)$ nachzuweisen, die im Punkte $x = a$ den Wert b annimmt. Doch kann es hier bekanntlich nicht bloß eine, sondern unendlich viele solche Lösungen geben, deren alle dann zwischen einer Maximal- und einer Minimallösung, wie ich mich ausdrücke, liegen. Sucht man endlich eine hinreichende Bedingung, damit diese beiden Lösungen zusammenfallen, so wird man zu einer allgemeineren als der Cauchy-Lipschitz'schen Bedingung geführt. Dieselbe umfasst jene Bedingung als einen speciellen Fall.

Nachdem ich diese Arbeit vollendet hatte, (den Grundgedanken hatte ich bereits vor drei Jahren), bemerkte ich, dass Herr Arzelà Untersuchungen angestellt und veröffentlicht hatte, wodurch er zu Resultaten gelangt ist, die sich mit den meinigen zum Theile decken. Das Wesentliche an der gegenwärtigen Arbeit erblicke ich aber darin, dass der Analysis eine deutliche, anschauliche Motivierung stets voranleuchtet, während andererseits für die analytischen Beweise nur die geläufigen analytischen Hilfsmittel in Anspruch genommen werden. — Mit den Peano'schen Methoden haben die hier benutzten fast nichts gemeinsam.

Herr Prof. Stolz hat in freundschaftlicher Weise das Manuscript durchgesehen und mich auf einige Stellen aufmerksam gemacht, wo eine ausführliche Darlegung wünschenswert erschien. Durch die entsprechenden Ergänzungen hat die Darstellung an Klarheit gewonnen.

1. Theorem. Es möge $f(x, y)$ eine reelle stetige Function der beiden reellen unabhängigen Variabeln (x, y) sein, wobei der Bereich des Punktes (x, y) aus den Punkten des Rechtecks $|x - a| \leqq R$, $|y - b| \leqq S$ bestehen soll. Dann hat die Differentialgleichung

$$(A) \qquad \frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

mindestens eine Lösung, $y = \varphi(x)$, wofür $b = \varphi(a)$ ist. Genauer gesagt: Ist M der Maximalwert von $|f(x, y)|$ in dem obigen Bereich und bedeutet ρ die kleinere der beiden Größen $R, \frac{S}{M}$, so gibt es stets mindestens eine eindeutige Function $\varphi(x)$, die in jedem Punkte des Intervalls $|x - a| \leqq \rho$ eine Ableitung $\varphi'(x)$ besitzt, den Relationen

$$b - S \leqq \varphi(x) \leqq b + S,$$
$$\varphi'(x) = f\big(x, \varphi(x)\big)$$

genügt und im Punkte $x = a$ den Wert b annimmt.

2. Zunächst ist klar, dass, wofern eine solche Lösung existiert, dieselbe, als Curve gedeutet (Fig. 1), im schraffierten

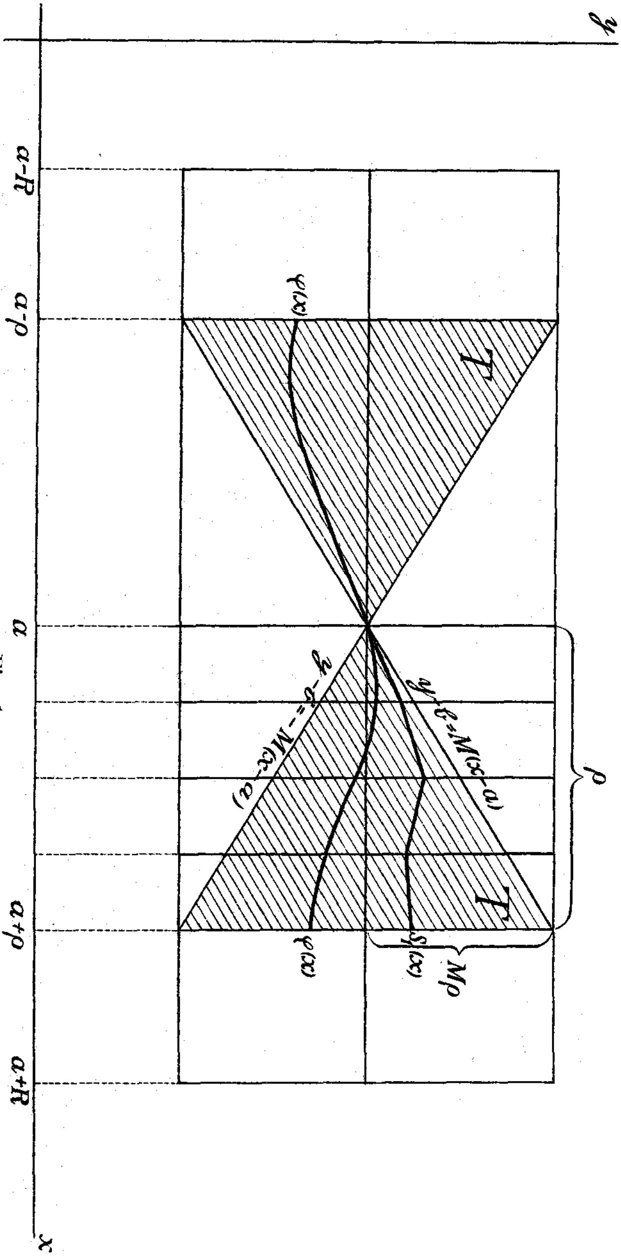

Fig. 1.

Raume T: $|x-a| \leqq \rho$, $|y-b| \leqq M|x-a|$, verläuft. Denn so lange dieselbe überhaupt im Rechteck $|x-a| \leqq \rho$, $|y-b| \leqq M\rho$ verläuft, gelten die Relationen

$$\varphi(x)-\varphi(a)=(x-a)\varphi'\big(a+\Theta(x-a)\big)$$
$$=(x-a)f\big(a+\Theta(x-a), \varphi(a+\Theta(x-a))\big);$$
$$|\varphi(x)-\varphi(a)| \leqq M|x-a|$$

und die Curve müsste also schon aus dem Rechteck heraustreten, um T zu verlassen. [1])

Allgemeiner sei $\Phi(x)$ eine beliebige stetige Function von x deren Differenzenquotient zwischen Unbestimmtheitsgrenzen liegt, welche absolut genommen nicht größer als M sind. Mit anderen Worten: die Function $\Phi(x)$ soll so beschaffen sein, dass nach Annahme eines beliebigen Wertes x' im Intervall $(a-\rho, a+\rho)$ und einer beliebigen positiven Größe ε eine positive Größe δ sich finden lässt, derart dass

$$\left|\frac{\Phi(x)-\Phi(x')}{x-x'}\right| < M+\varepsilon, \qquad \begin{array}{l} 0<|x-x'|<\delta \\ |x-a| \leqq \rho. \end{array}$$

Nimmt man dann irgend zwei ungleiche Werte x, X im Intervalle an, so besteht die Beziehung

$$\left|\frac{\Phi(x)-\Phi(X)}{x-X}\right| \leqq M.$$

Ist insbesondere $X=a$ und $\Phi(a)=b$, so ist

$$|\Phi(x)-b| \leqq M|x-a|$$

und die Curve $y=\Phi(x)$ verläuft im schraffierten Raume.

Zu beweisen ist, dass

$$|\Phi(x)-\Phi(X)| \leqq M|x-X|$$

ist. Man zerlege das Intervall $x-X$ in 2^n gleiche Theile, $x_{i+1}-x_i$:

$$x-X=(x-x_1)+(x_2-x_1)+\dots+(x_{2^n-2}-X)$$

und setze dementsprechend

$$\Phi(x)-\Phi(X)=\sum_{i=0}^{2^n-1}\Phi(x_{i+1})-\Phi(x_i).$$

[1]) Diesem Beweis kann man nach dem Vorbilde von § 4 eine andere Form geben, die einigen Lesern bequemer sein dürfte.

Es handelt sich nun darum zu zeigen, dass bei passender Annahme von n

$$|\Phi(x_{i+1}) - \Phi(x_i)| < (M+\varepsilon)\,|x_{i+1} - x_i|$$

für alle Werte von i ist. Wäre dem nicht so, so müsste es bei beliebig wachsendem n stets Punkte $\overline{x}_i$ geben, deren zugehöriges δ kleiner als $|x_{i+1} - \overline{x}_i|$ genommen werden müsste. Diese Punkte müssten mindestens eine Häufungsstelle $\overline{x}$ besitzen, in deren Nähe δ für eine gewisse aus der Menge $\overline{x}_i$ gewählte Folge von Punkten, $\overline{x}'_i$, mit $\lim\limits_{i=\infty} \overline{x}'_i = \overline{x}$, die untere Grenze Null haben müsste. Das geht aber nicht an, denn das dem Punkte $\overline{x}$ entsprechende δ ist positiv.

Man hat also

$$|\Phi(x) - \Phi(X)| \leqq \Sigma\,|\Phi(x_{i+1}) - \Phi(x_i)| < (M+\varepsilon)\,\Sigma\,|x_{i+1} - x_i|$$

$$(M+\varepsilon)\,\Sigma\,|x_{i+1} - x_i| = (M+\varepsilon)\,|x - X|,$$

denn die Differenzen $x_{i+1} - x_i$ sind ja alle gleichstimmig. Da aber ε hier beliebig klein angenommen werden darf, so muss

$$|\Phi(x) - \Phi(X)| \leqq M\,|x - X|$$

und der Satz ist bewiesen.

3. Jetzt fasse ich das Intervall $a \leqq x \leqq a+\rho$ ins Auge, theile dasselbe in 4^n gleiche Theile und bilde der n^{ten} Eintheilung entsprechend eine Function $s_n(x)$, deren Grenzwert für $n=\infty$, $y_1 = \varphi_1(x)$, eine Lösung der Differentialgleichung (A) abgeben wird, und zwar die Maximallösung, wie ich sie nennen will, da sie die Eigenschaft hat, dass jede andere Lösung $y = \varphi(x)$ an die Relation

$$\varphi(x) \leqq \varphi_1(x), \qquad a \leqq x \leqq a+\rho,$$

gebunden ist.

Ist (ξ, η) ein beliebiger Punkt von T, so möge der Bereich des Rechtecks $|x-\xi| \leqq \frac{\rho}{4^n}$, $|y-\eta| < 2\,\frac{M\rho}{4^n}$ respective so viel davon, wie dem Rechteck $|x-a| \leqq \rho$, $|y-\eta| \leqq M\rho$ angehört, mit $T^{(n)}_{(\xi,\eta)}$, der Maximalwert von $f(x,y)$ auf $T^{(n)}_{(\xi,\eta)}$ mit $M^{(n)}_{(\xi,\eta)}$ bezeichnet werden. Dann soll $s_n(x)$, wie folgt, erklärt werden.

$$s_n(x) = \eta_i + M^{(n)}_{(\xi_i,\eta_i)}(x - \xi_i),\ \ \xi_i < x \leqq \xi_{i+1};\ \ s_n(a) = b;$$

wobei

$$\xi_i = a + i\,\frac{\rho}{4^n},\quad \eta_i = s_n(\xi_i)\,;\quad i = 0, 1, 2, \cdots, 4^n.$$

ist. Die Function $s_n(x)$ wird also durch eine stetige Curve dargestellt, die aus 4^n Stücken von geraden Linien besteht und aus dem Bereiche T, wie man leicht beweist, nicht heraustritt.

Und nun behaupte ich, dass

(1) $$s_{n+1}(x) \leqq s_n(x),\quad a \leqq x \leqq a + \rho$$

ist. Für das erste Intervall der $(n+1)^{\text{ten}}$ Eintheilung:

$$a \leqq x \leqq a + \frac{\rho}{4^{n+1}}$$

ist die Behauptung sicher richtig. Bliebe sie es nicht mehr für die späteren Intervalle, so sei das Intervall $\bar{\xi}_k \leqq x \leqq \bar{\xi}_{k+1}$ das erste dieser Eintheilung, welches eine Ausnahme bildet; sei

$$\xi_i \leqq \bar{\xi}_k,\ \bar{\xi}_{k+1} \leqq \xi_{i+1}\,;\ \bar{\eta}_k = s_{n+1}(\bar{\xi}_k).$$

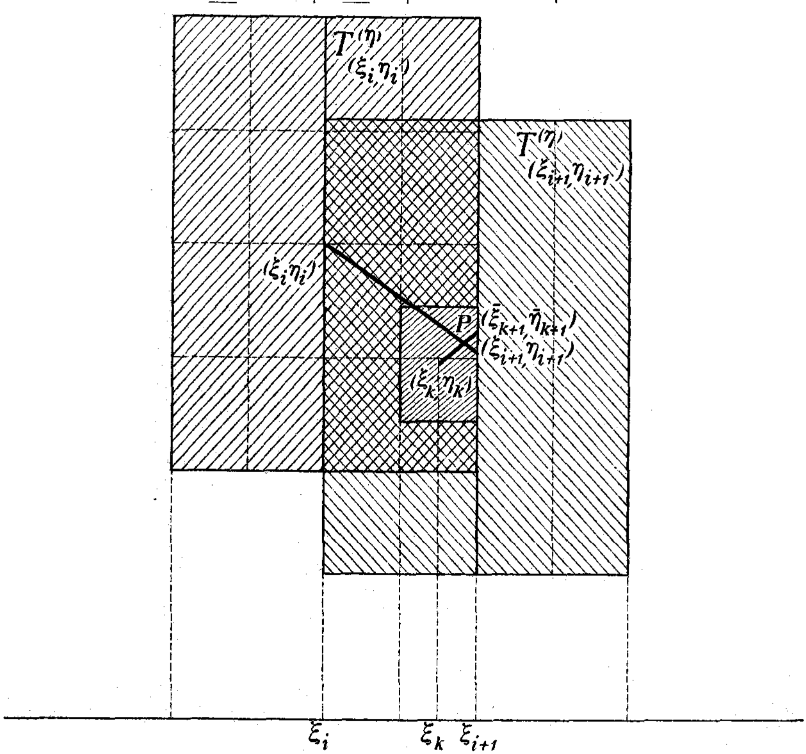

Fig. 2.

Dabei soll i, wofern es angeht, stets so angenommen werden, dass $\xi_i = \overline{\xi}_k$.

Das heißt aber nichts anders, als dass bei einem gewissen Werte x_P (Fig. 2)

$$s_{n+1}(\overline{\xi}_k) \leqq s_n(\overline{\xi}_k),\ s_{n+1}(x_P) = s_n(x_P),\ s_{n+1}(\overline{\xi}_{k+1}) > s_n(\overline{\xi}_{k+1}),$$

ist, wobei

$$\overline{\xi}_k \leqq x_P < \overline{\xi}_{k+1}$$

ist. Dass sich daraus ein Widerspruch ergiebt, zeige ich, wie folgt: Der Punkt $(\overline{\xi}_k\ \overline{\eta}_k)$ und sogar noch der ganze Bereich $T^{(n+1)}_{(\overline{\xi}_k,\ \overline{\eta}_k)}$ liegt in $T^{(n)}_{(\xi_i,\ \eta_i)}$; darum ist $M^{(n+1)}_{(\overline{\xi}_k,\ \overline{\eta}_k)} \leqq M^{(n)}_{(\xi_i,\ \eta_i)}$. Die Strecke der Curve $s_{n+1}(x)$, die dem Intervall $\xi_k \leqq x \leqq \xi_{k+1}$ angehört, geht also von einem Punkte $(\overline{\xi}_k,\ \overline{\eta}_k)$ aus, der nicht oberhalb der Curve $S_n(x)$ liegt, und schreitet nach einer Richtung fort, die mit der x-Axe keinen größeren Winkel bildet, als die entsprechende Strecke von $S_n(x)$. Diese Strecken können sich daher nicht schneiden. — Will man diesen Beweis arithmetisieren, so mögen folgende Relationen dazu dienen.

$$s_n(x) = \eta_i + M^{(n)}_{(\xi_i,\ \eta_i)}(x - \xi_i),$$
$$s_n(\overline{\xi}_k) = \eta_i + M^{(n)}_{(\xi_i,\ \eta_i)}(\overline{\xi}_k - \xi_i);$$

also ist

$$s_n(x) = s_n(\overline{\xi}_k) + M^{(n)}_{(\xi_i,\ \eta_i)}(x - \overline{\xi}_k),\quad \overline{\xi}_k \leqq x \leqq \overline{\xi}_{k+1},$$
$$s_{n+1}(x) = \overline{\eta}_k + M^{(n+1)}_{(\overline{\xi}_k,\ \overline{\eta}_k)}(x - \overline{\xi}_k)$$

und

$$s_n(x) - s_{n+1}(x) = [s_n(\overline{\xi}_k) - \overline{\eta}_k] + [M^{(n)}_{(\xi_i,\ \eta_i)} - M^{(n+1)}_{(\overline{\xi}_k,\ \overline{\eta}_k)}](x - \overline{\xi}_k).$$

Die eckigen Klammern sind beide positiv oder Null, beide Terme rechterseits sind also positiv oder Null und

$$s_n(x) \geqq s_{n+1}(x), \qquad \xi_k \leqq x \leqq \xi_{k+1}.$$

Damit ist der Satz bewiesen.

4. Es möge der Beweis des später anzuwendenden Satzes an dieser Stelle eingeschoben werden, dass keine Lösung $\varphi(x)$ der Differentialgleichung (A), die für $x = a$ den Wert $b = \varphi(a)$ hat, ganz oder abtheilungsweise oberhalb $s_n(x)$ liegen kann. In der That ist $\varphi(a) = s_n(\mathrm{a})$. Sei $\xi_i \leqq x \leqq \xi_{i+1}$ das erste Intervall, in dem ein Wert x_1 vorkäme, wofür

$\varphi(x_1) \not\leqq s_n(x_1)$ wäre. Dann müsste wegen der Stetigkeit von $\varphi(x)$ und $s_n(x)$, $\varphi(\xi_i) \leqq s_n(\xi_i)$ sein. Nun ist

$$\varphi(x) = \varphi(\xi_i) + \varphi'(x').(x - \xi_i), \qquad \xi_i < x' < x.$$

Der Punkt x_1 kann so nahe an ξ_i gewählt werden, dass die Curve

$$y = \varphi(x), \quad \xi_i \leqq x \leqq x_1$$

ganz im Bereich $T^{(n)}_{(\xi_i\,\eta_i)}$ verläuft. Dann wird aber

$$\varphi'(x') = f(x', \varphi(x')) \leqq M^{(n)}_{(\xi_i,\ \eta_i)}$$

und also

$$\varphi(x_1) \leqq \varphi(\xi_i) + M^{(n)}_{(\xi_i,\ \eta_i)}\,(x_1 - \xi_i)$$

Andrerseits ist

$$s_n(x_1) = s_n(\xi_i) + M^{(n)}_{(\xi_i,\ \eta_i)}\,(x_1 - \xi_i)$$

also ist

$$\varphi(x_1) - s_n(x_1) \leqq \varphi(\xi_i) - s_n(\xi_i) \leqq o$$

und der Satz ist bewiesen.

5. Kehren wir zu der Function $s_n(x)$ zurück!

Satz: Die Function $s_n(x)$ nähert sich bei unbeschränkt wachsendem n gleichmäßig einem Grenzwert $\varphi_1(x)$ und diese Grenzfunction ist eine Lösung und zwar die Maximallösung der Differentialgleichung (A).

Es sei zunächst bemerkt, dass nach §. 2

(2) $$| s_n(x) - s_n(x_1) | \leqq M \,| x - x_1 |$$

ist für $n = 1, 2, 3, \ldots$; $a \leqq x \leqq a + \rho$; $a \leqq x_1 \leqq a + \rho$. Insbesondere ist, wenn $x_1 = a$ gesetzt wird,

(3) $$b - M(x - a) \leqq s_n(x) \leqq b + M(x - a).$$

Der erste Theil des Satzes behauptet, dass nach Annahme einer beliebigen positiven Größe ε eine positive ganze Zahl m sich derart bestimmen lässt, dass

(4) $$| s_n(x) - s_{n'}(x) | < \varepsilon, \quad n, n' \geqq m$$

ist, wie auch immer x im Intervall $a \leqq x \leqq a + \rho$ nachträglich angenommen werden mag. Dass $s_n(x)$ für jeden Wert von x im

Intervall $a \leqq x \leqq a + \rho$ überhaupt gegen einen Grenzwert $\varphi_1(x)$ convergiert, ersieht man aus (1) und (3).

$$b - M(x-a) \leqq s_{n+1}(x) \leqq s_n(x).$$

Wegen (3) hat man außerdem die Relation:

$$b - M(x-a) \leqq \varphi_1(x) \leqq b + M(x-a). \tag{5}$$

Man nehme μ so an, dass

$$\xi_{i+1}^{(\mu)} - \xi_i^{(\mu)} < \frac{1}{3}\frac{\varepsilon}{M}, \quad \xi_i^{(\mu)} = a + i\frac{\rho}{4^\mu}$$

ist. Dann wird wegen (2), indem man $x_1 = \xi_i^{(\mu)}$ setzt:

$$| s_n(x) - s_n(\xi_i^{(\mu)}) | < \frac{1}{3}\varepsilon, \quad \xi_i^{(\mu)} \leqq x \leqq \xi_{i+1}^{(\mu)} \tag{6}$$

für $i = 0, 1, \ldots 4^\mu - 1$. Fasst man den i^{ten} dieser 4^μ Werte von $\xi_i^{(\mu)}$ ins Auge, so kann man n_i so bestimmen, dass

$$| s_n(\xi_i^{(\mu)}) - s_{n'}(\xi_i^{(\mu)}) | < \frac{1}{3}\varepsilon, \quad n, n' \geqq n_i \tag{7}$$

ist. Und nun genügt es, m als die größte der $4^\mu + 1$ Größen μ, n_i anzunehmen; denn aus (6), geschrieben erst für n, dann für n', und aus (7) ergibt sich dann (4).[1]

6. Der Grenzwert $\varphi_1(x)$ erweist sich somit als eine stetige Function von x, gegen welche $s_n(x)$ gleichmäßig convergiert. Um noch den Beweis zu liefern, dass $\varphi_1(x)$ eine Lösung der Differentialgleichung (A) ist, führe ich eine Function $\psi_n(x)$ ein, die mit der Ableitung $s'_n(x)$ übereinstimmt, wo letztere überhaupt vorhanden ist. In der That sei

$$\psi_n(x) = M^{(n)}_{(\xi_i\, \eta_i)}, \quad \begin{cases} \xi_i \leqq x < \xi_{i+1}, & i = 0, 1, 2, \ldots 4^n - 2; \\ \xi_i \leqq x \leqq \xi_{i+1}, & i = 4^n - 1 \end{cases}$$

[1] Es möge nebenbei bemerkt werden, dass der soeben bewiesene Satz ein allgemeines Criterion für die gleichmäßige Convergenz einer stetigen Function enthält, welcher sich folgendermaßen fassen lässt. **Ist $s_n(x)$ eine stetige Function von x im Intervall $a \leqq x \leqq b$, die für jeden festen Wert von x bei unendlich wachsendem n gegen einen Grenzwert convergiert; und ist ferner**

$$| s_n(x) - s_n(x') | < M | x - x' |,$$

wobei M eine positive Größe bedeutet, welche von n, x, x' nicht abhängt; so convergiert $s_n(x)$ *gleichmässig* im Intervall $a \leqq x \leqq b$.

Die letzte Bedingung darf durch die engere ersetzt werden, dass die Ableitung $s'_n(x)$, als Function der unabhängigen Veränderlichen (x, n) betrachtet, endlich bleibe.

dann ist

$$s_n(x) = b + \int_a^x \psi_n(x)\,dx \tag{8}$$

Und nun sage ich: Die Function $\psi_n(x)$ convergiert gleichmäßig gegen den Grenzwert $f(x, \varphi_1(x))$. Aus (8) ergibt sich, wenn man n ins Unendliche wachsen lässt, dass

$$\varphi_1(x) = b + \lim_{n=\infty} \int_a^x \psi_n(x)\,dx = b + \int_a^x \{\lim_{n=\infty} \psi_n(x)\}\,dx =$$
$$= b + \int_a^x f(x, \varphi_1(x))\,dx$$

ist. Darum existiert $\varphi'_1(x)$ und es ist

$$\varphi'_1(x) = f(x, \varphi_1(x)) \qquad a \leqq x \leqq a + \rho$$

Der Beweis stützt sich auf die gleichmäßige Stetigkeit von $f(x, y)$. Sei ε' eine beliebige positive Größe und nehme man p so an, dass in jedem Bereich $T^{(p)}_{(\xi, \eta)}$ die Oscillation von $f(x, y)$ (d. h. der Maximalwert von $|f(x, y) - f(x' y')|$) kleiner ist als ε'.

Aus (4) ergibt sich, indem man $n' = \infty$ setzt, dass

$$|\varphi_1(x) - s_n(x)| \leqq \varepsilon, \qquad n \geqq m \tag{9}$$

ist. Jetzt setze man $\varepsilon = \frac{1}{3}\frac{M_\varrho}{4^p}$ und nehme $m > p$ an. Dann wird der Bereich $T^{(n)}_{(\xi_i, \eta_i)}$, $n \geqq m$, (wobei statt $\xi_i^{(n)}$ bloß ξ_i geschrieben ist, und $\eta_i = s_n(\xi_i)$) ganz in dem Bereich $T^{(p)}_{(\xi_i, \varphi_1(\xi_i))}$ liegen; denn wegen (9) ist $|\varphi_1(\xi_i) - \eta_i| < \varepsilon$, also kleiner als der achte Theil der Höhe des Rechteckes $T^{(p)}_{(\xi_i, \varphi_1(\xi_i))}$, während die halbe Höhe von $T^{(n)}_{(\xi_i, \eta_i)}$ ebenfalls nicht größer als jene Achtelhöhe ist. Die stetige Function $f(x, y)$ nimmt ihren Maximalwert $M^{(n)}_{(\xi_i, \eta_i)}$ mindestens in einem Punkt (x', y') von $T^{(n)}_{(\xi_i, \eta_i)}$, also auch im Bereich $T^{(p)}_{(\xi_i, \varphi_1(\xi_i))}$ an:

$$M^{(n)}_{(\xi_i, \eta_i)} = f(x', y').$$

Anderseits verläuft die Curve $y = \varphi^1(x)$ ganz in $T^{(p)}_{(\xi_i, \varphi_1(\xi_i))}$ so lange $\xi_i \leqq x \leqq \xi_{i+1}$.

Denn wegen §. 2 ist

$$|s_n(x) - s_n(\xi_i)| \leqq M|x - \xi_i| \leqq M(\xi_{i+1} - \xi_i),$$

während $\xi_{i+1} - \xi_i < \frac{1}{3}\frac{\varepsilon}{M}$; also ist

$$|s_n(x) - \eta_i| < \frac{1}{3}\varepsilon.$$

Daraus und aus (9) ergibt sich, dass

$$|\varphi_1(x) - \eta_i| < \frac{4}{3}\varepsilon$$

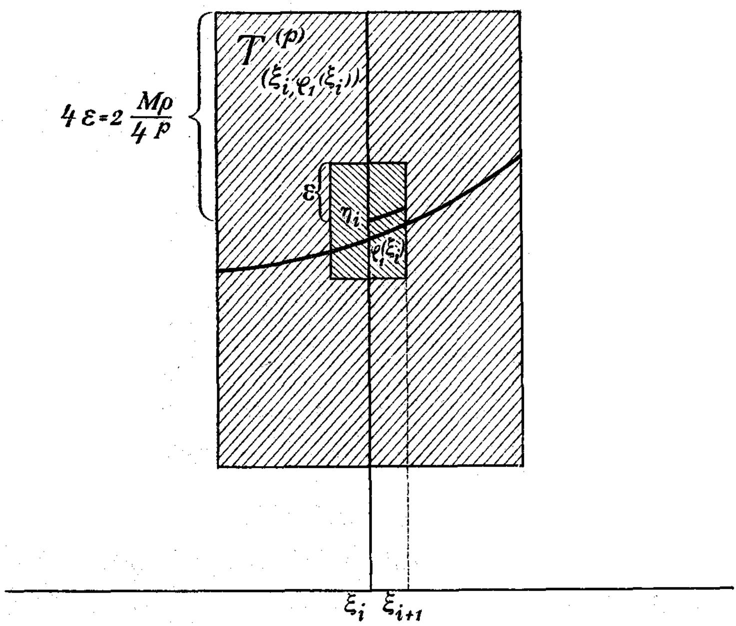

Fig. 3.

oder, da $|\varphi_1(\xi_i) - \eta_i| < \varepsilon$,

$$|\varphi_1(x) - \varphi_1(\xi_i)| < \frac{7}{3}\varepsilon,$$

also jedenfalls $< 4\varepsilon$.

Daraus ergibt sich, dass

$$|M^{(n)}_{(\xi_i, \eta_i)} - f(x, \varphi_1(x))| < \varepsilon', \quad \xi_i \leqq x \leqq \xi_{i+1}, \; i = 0, 1, \ldots, 4^n - 1$$

und also

$$|\psi_n(x) - f(x, \varphi_1(x))| < \varepsilon', \quad a \leqq x \leqq a + \rho, \; n \geqq m.$$

ist. Hiermit ist der Beweis fertig.

Die Lösung $\varphi_1(x)$, deren Existenz nunmehr völlig nachgewiesen ist, ist die Maximallösung. Denn keine Lösung verläuft oberhalb $s_n(x)$ und $\varphi_1(x)$ ist die untere Grenze von $s_n(x)$.

7. In ähnlicher Weise kann man die Existenz einer Minimallösung $\varphi_2(x)$ nachweisen, d. h. einer Lösung, die die Eigenschaft hat, dass jede andere Lösung $\varphi(x)$ der Relation genügt, dass

$$\varphi(x) \geqq \varphi_2(x).$$

Dazu wird man an Stelle von $M^{(n)}_{(\xi,\,\eta)}$ den Minimalwert $m^{(n)}_{(\xi,\,\eta)}$ von $f(x, y)$ auf $T^{(n)}_{(\xi,\,\eta)}$ treten lassen. Endlich kann man dieselbe Untersuchung für das Intervall $a - \rho \leqq x \leqq a$ führen.

Fassen wir das Gesammtresultat in einen Satz zusammen.
Satz: Unter den Bedingungen des Satzes (A) existiert im Intervall $a - \rho \leqq x \leqq a + \rho$ stets eine Maximallösung $\varphi_1(x)$ und eine Minimallösung $\varphi_2(x)$. Jede andere Lösung $\varphi(x)$ verläuft in dem durch $\varphi_1(x)$ und $\varphi_2(x)$ begrenzten Streifen:

$$\varphi_2(x) \leqq \varphi(x) \leqq \varphi_1(x)$$

8. Daran reiht sich noch der weitere Satz: Fallen $\varphi_1(x)$ und $\varphi_2(x)$ nicht stets zusammen und ist (x_1, y_1) ein beliebiger innerer Punkt des Streifens, so geht durch (x_1, y_1) mindestens eine Lösung der Differentialgleichung (A), welche auch durch den Punkt (a, b) geht. Denn sei $(a + \rho) - x_1 = \sigma$. Es geht dann durch den Punkt (x_1, y_1) mindestens eine Lösung $\Phi(x)$ von (A), welche sich nach links bis zur Abscisse $x_2 = x_1 - \sigma$ erstreckt. Schneidet $\Phi(x)$ im Intervall $x_2 \leqq x \leqq a + \rho$ weder $\varphi_1(x)$ noch $\varphi_2(x)$ und bezeichnet man $\Phi(x_2)$ mit y_2, so sieht man, dass durch den Punkt (x_2, y_2) mindestens eine Lösung geht, die sich nach links bis zur Abscisse $x_3 = x_2 - 2\sigma$ erstreckt. Wiederholt man diesen Schritt, so gelangt man nach einer endlichen Anzahl solcher Fortsetzungen zu einem Wert $x' \geqq a$ von x, wofür $\Phi(x')$ mit mindestens einem der Werte $\varphi_1(x')$, $\varphi_2(x')$ zusammenfällt, wobei dann auch $\Phi'(x') = \varphi'_1(x')$ resp. $\varphi'_2(x')$ sein muss. Als weitere Fortsetzung von $\Phi(x)$ darf man dann, wofern $x' > a$ ist, geradezu die Maximal- resp. Minimallösung selbst nehmen. Damit ist der Beweis erbracht.

9. Bezeichnet man die Maximal- resp. Minimallösung mit y_1 resp. y_2, so ist

$$\frac{d(y_1 - y_2)}{dx} = f(x, y_1) - f(x, y_2)$$

Zieht man nun die Cauchy-Lipschitz'sche Bedingung heran, so drängt sich eine besonders einfache Form des Beweises auf, dass y_1 mit y_2 identisch ist, welche zu einer leichten Verallgemeinerung jener Bedingung Anlass gibt.

Es sei nämlich $\omega(u)$ irgend eine stetige Function von u, die folgendermaßen beschaffen ist:

$$\omega(o) = 0; \qquad \omega(u) > 0, \quad u > 0; \qquad \omega(-u) = \omega(u);$$

$$\lim_{\varepsilon=0} \int_{\varepsilon}^{U_0} \frac{du}{\omega(u)} = \infty$$

dann lautet die Bedingung, wie folgt: Eine hinreichende Bedingung, damit die Differentialgleichung (A) nur eine Lösung habe, die im Punkte $x = a$ den Wert b annimmt, besteht darin, dass

$$| f(x, y) - f(x, y') | \leqq \omega(y - y'),$$

für

$$| a - x | \leqq \rho, \qquad | b - y | \leqq s, \qquad | b - y' | \leqq s$$

ist.

Denn in dem Fall wird

$$\left| \frac{d(y_1 - y_2)}{dx} \right| \leqq \omega(y_1 - y_2)$$

sein. Wäre y_1 nicht stets gleich y_2, so sei x_0 ein Wert von x, wofür die Gleichheit nicht bestände, und x' ein zweiter Wert von x, der zwischen a und x_0 liegt und so angenommen ist, dass im Intervalle (x', x_0) $y_1 - y_2$ und somit auch $\omega(y_1 - y_2)$ stets größer als 0 ist. Dann wird, indem man $y_1 - y_2 = u$ setzt,

$$\left| \int_{u'}^{U_0} \frac{du}{\omega(u)} \right| \leqq | x_0 - x' |,$$

wobei die Grenzen u_0, u' den Werten $x = x_0, x'$ entsprechen.

Denn zunächst ist

$$\left| \frac{du}{dx} \right| \leqq \omega(u).$$

Sei nun eine Function U der unabhängigen Variabeln v durch die Gleichung

$$U = \int_{c}^{v} \frac{dn}{\omega(u)}, \qquad c > 0, \quad v > 0,$$

definiert. Setzt man $v = u$, so geht U in eine Function von x über und es ist

$$\frac{dU}{dx} = \frac{dU}{dv}\frac{dv}{dx} = \frac{1}{\omega(u)}\frac{du}{dx};$$

also ist

$$\left|\frac{dU}{dx}\right| = \frac{1}{\omega(u)}\left|\frac{du}{dx}\right| \leqq 1,$$

$$|U_0 - U'| \leqq |x_0 - x'|.$$

Daraus ergibt sich, da v eine eindeutige Function von U ist, dass[1])

$$|U_0 - U'| = \left|\int_{u'}^{U_0} \frac{du}{\omega(u)}\right| \leqq |x_0 - x'|.$$

Rückt nun x' gegen a, so muss schließlich ε gegen Null convergieren und es stellt sich damit ein Widerspruch ein, woraus erhellt, dass die Annahme, $\omega(u)$ sei nicht stets 0, nicht stichhältig ist.

Die Cauchy-Lipschitz'sche Bedingung setzt voraus, dass $\omega(u) = k\,|u|$ ist, wobei k eine willkürliche positive Constante bedeutet. Andere brauchbare Functionen sind z. B. folgende:

$$\omega(u) = k\,|u|\log\frac{1}{|u|},\ k\,|u|\log\frac{1}{|u|}\log\log\frac{1}{|u|},\ \text{u. s. w.}$$

---

1) Man könnte meinen, dass diese Formel sich einfacher ableiten ließe, indem man schlechtweg im Integral $\int_{u'}^{U_0}\frac{du}{\omega(u)}$ die Integrationsvariabel u durch x ersetzte. Ein solches Verfahren würde jedoch ohne weitläufige Untersuchungen nicht erlaubt sein, denn $\frac{du}{dx}$ könnte, während x das Intervall (x', x_0) durchläuft, sein Vorzeichen unendlich oft wechseln.