Der Staudt-Clausen'sche Satz.

Von

J. C. Kluyver in Leiden.

Der von Herrn K. Schwering in den Annalen Bd. 52, pag. 171 gegebene Beweis des obigen Satzes veranlafst mich zur Mittheilung des nachstehenden Beweises.

Aus der Definitionsgleichung der Bernoulli'schen Zahlen

$$\frac{x}{2}\cdot\frac{e^x+1}{e^x-1}-1=\sum_{n=1}^{n=\infty}(-1)^{n-1}\frac{B_n}{2n!}x^{2n}$$

liest man sofort ab

$$(-1)^n B_n = D_{x=0}^{2n}\frac{x e^x}{1-e^x} = D_{x=0}^{2n}\frac{e^x}{1-e^x}\log\left[1-(1-e^x)\right]$$

$$= -D_{x=0}^{2n}\sum_{h=1}^{h=\infty}\frac{1}{h}e^x(1-e^x)^{h-1},$$

oder auch, da man offenbar hat

$$D_{x=0}^{\alpha}e^x(1-e^x)^{\beta}=0, \qquad (\alpha<\beta).$$

$$(-1)^{n+1}B_n=\sum_{h=1}^{h=2n+1}\frac{1}{h}D_{x=0}^{2n}e^x(1-e^x)^{h-1}.$$

Zur Bestimmung der gebrochenen Bestandtheile, die rechts auftreten, sind zwei Fälle zu unterscheiden.

I. *h ist theilbar,* etwa gleich $a\times b$. Mit Ausnahme des Falles $h=4$ ist $a+b\leq h-1$, folglich sind in

$$D_{x=0}^{2n}e^x(1-e^x)^{h-1}=D_{x=0}^{2n}(1-e^x)^a\times(1-e^x)^b\times e^x(1-e^x)^{h-1-a-b}$$

alle Exponenten positiv. Nach Ausführung der Differentiation und Nullsetzen des x verschwinden alle Glieder, in welchen nicht beide Factoren $(1-e^x)^a$ und $(1-e^x)^b$ differentiirt worden sind. Die übrigen Glieder aber enthalten sämmtlich den Factor $a\times b$, mithin ist

$$\frac{1}{h}D_{x=0}^{2n}e^x(1-e^x)^{h-1}$$

ganzzahlig. Der Fall $h = 4$ liefert keine wirkliche Ausnahme, denn man hat

$$D^{2n}_{x=0}\, e^x(1-e^x)^3 = 1 - 3\cdot 2^{2n} + 3\cdot 3^{2n} - 4^{2n} \equiv 0. \quad (\text{mod. } 4)$$

II. *h ist eine Primzahl.* Wir setzen

$$2n = k(h-1) + \alpha. \qquad (0 \leqq \alpha < h-1)$$

Aus den beiden Gleichungen

$$D^{2n}_{x=0}\, e^x(1-e^x)^{h-1} = 1^{2n} - (h-1)_1 2^{2n} + (h-1)_2 3^{2n} - \cdots + h^{2n},$$

$$D^{\alpha}_{x=0}\, e^x(1-e^x)^{h-1} = 0 = 1^{\alpha} - (h-1)_1 2^{\alpha} + (h-1)_2 3^{\alpha} - \cdots + h^{\alpha}$$

ergiebt sich durch Subtraction

$$D^{2n}_{x=0}\, e^x(1-e^x)^{h-1} = -(h-1)_1 2^{\alpha}[2^{k(h-1)}-1] + (h-1)_2 3^{\alpha}[3^{k(h-1)}-1] + \cdots + h^{\alpha}[h^{k(h-1)}-1].$$

Wenn nun $\alpha > 0$ ist, so ist dem Fermat'schen Satze zufolge die rechte Seite durch h theilbar, für $\alpha = 0$ aber giebt das letzte Glied einen Rest, man findet in diesem Falle

$$D^{2n}_{x=0}\, e^x(1-e^x)^{h-1} \equiv -1. \quad (\text{mod. } h)$$

Hieraus schliesst man, dass nur diejenigen Glieder des Ausdrucks für $(-1)^{n+1} B_n$ gebrochene Bestandtheile $\left(\text{von der Form } -\frac{1}{h}\right)$ liefern, für welche h eine Primzahl und $h-1$ ein Theiler von $2n$ ist (der Fall $h = 2$ eingerechnet), und daher

$$B_n = \text{ganze Zahl} + (-1)^n \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} + \cdots\right],$$

wo h_i Primzahl und $2n$ durch $h_i - 1$ theilbar ist.