Ueber das Problem der Nachbargebiete.

Von

L. Heffter in Giessen.

Einleitung.

Wenn wir eine Gruppe von Gebieten auf einer Oberfläche, deren jedes an alle andern grenzt und zwar je längs einer Linie, nicht nur in Punkten, „*Nachbargebiete*“ und — in dualistischer Uebertragung — eine Gruppe von Punkten auf einer Oberfläche, deren jeder mit allen andern durch einander nicht schneidende Linien auf der Oberfläche verbunden ist, „*Nachbarpunkte*“ nennen, so ist das Problem, dem die folgenden Untersuchungen gewidmet sind, dieses:

„*Welches ist der Minimalwerth des Geschlechtes**) *einer Oberfläche, die eine gegebene Anzahl von Nachbargebieten* (bezw. *Nachbarpunkten*) *zulässt?*“ und umgekehrt:

„*Welches ist die Maximalzahl der Nachbargebiete* (bezw. *Nachbarpunkte*) *auf einer Fläche von gegebenem Geschlecht?*“

In der Litteratur war diese Frage bis vor Kurzem noch kaum berührt worden. Baltzer**) hatte in dem Möbius'schen Nachlass eine Notiz von Möbius' Freund Weiske gefunden, die den Satz enthielt: „Fünf spatia confinia (Nachbargebiete) sind unmöglich in einer Fläche“, der richtig ist, wenn man unter „Fläche“ nur eine solche vom Geschlecht Null versteht. Baltzer identifizirt diesen Satz geradezu mit dem bekannten Vier-Farben-Problem, für dessen Beweis derselbe in der That nothwendig, aber nicht ohne Weiteres als hinreichend zu erkennen ist, und Herr Dingeldey***) hat sich neuerdings diesem Ausspruch angeschlossen. — Ausserdem hatte nur noch

*) Ueber die Bedeutung, in welcher das Wort „*Geschlecht*“ hier stets gebraucht wird, vergl. die Bemerkung am Schluss der Einleitung.

**) Eine Erinnerung an Möbius und seinen Freund Weiske, Ber. d. math.-phys. Classe d. kgl. sächs. Ges. d. Wiss. 12. Januar 1885.

***) F. Dingeldey, Topologische Studien über die aus ringförmig geschlossenen Bändern durch gewisse Schnitte erzeugbaren Gebilde. Leipzig, 1890.

Herr Kempe*) in einem Aufsatz über das Vier-Farben-Problem beiläufig bemerkt, auf einer Fläche wie der Oberfläche eines Ringes würden 6 Farben nothwendig sein, da er auf einer solchen 6 Nachbargebiete construiren konnte, während es übrigens, wie wir sehen werden, deren 7 giebt. Von ihm rührt auch (a. a. O. p. 200) der Gedanke her, solchen Problemen eine dualistische Fassung zu geben, wie sie oben schon benutzt wurde.

Endlich hat ganz kürzlich Herr Heawood**) das Farbenproblem für Flächen von beliebigem Geschlecht behandelt. Er hat einmal gezeigt, dass der erwähnte Kempe'sche Beweis eine Lücke hat, und sodann bewiesen, dass für alle Flächen, deren Geschlecht grösser als Null, die Maximalzahl von Nachbargebieten, die auf einer solchen Fläche *nicht überstiegen werden kann*, mit der aus andern Gründen sicher hinreichenden Zahl erforderlicher Farben zusammenfällt. Damit wäre also sowohl das Problem, mit dem wir uns jetzt befassen wollen, als auch das Farbenproblem für Flächen aller Geschlechter, die grösser als Null, endgültig erledigt, wenn nicht — abgesehen von dem Fall dass das Geschlecht gleich Eins — bei Herrn Heawood der Nachweis fehlte, dass auf einer Fläche beliebigen Geschlechtes jene Maximalzahl von Nachbargebieten auch thatsächlich auftritt. Denn ohne diesen Nachweis steht ja nicht fest, dass jene beiden Zahlen wirklich zusammenfallen; es könnte ja sein, dass es thatsächlich weniger Nachbargebiete auf einer Fläche giebt als die Maximalzahl der *höchstens* möglichen beträgt. Diese Lücke ist aber eine wesentliche; denn der fehlende Nachweis liegt keineswegs auf der Hand.

In Anbetracht dieser Umstände und da ausserdem die aufgeworfene Frage wohl auch abgesehen vom Farbenproblem ein selbständiges Interesse hat und vielleicht zu anderweitigen Anwendungen geeignet werden könnte, dürfte es gestattet sein, eine eingehende Untersuchung über dieses Problem zu veröffentlichen, auch wenn damit noch keine erschöpfende Lösung erzielt wird.

Der Inhalt der folgenden Paragraphen ist kurz der folgende. Um die Untersuchung auf geschlossene Flächen beschränken zu können, wird zunächst (§ 1) eine Beziehung zwischen dem Geschlecht, der Randcurvenzahl und dem Zusammenhang einer Fläche hergeleitet, die zwar schon implicite in einer von Herrn Dyck gegebenen Formel enthalten ist, auch auf andere Art leicht herzuleiten wäre, jedoch bei ihrer Ableitung hier zur Einführung gewisser Curven auf einer Fläche Anlass giebt, deren Eigenschaften noch nicht bemerkt zu sein scheinen. —

---

*) American Journal of Mathematics, Bd. II, (1882) p. 193.

**) Map-Colour Theorem. Quarterly Journal of pure and applied Mathematics. No. 96, June 1890.

Nach Begründung der schon beim Ausspruch des Problems angedeuteten Dualität wird (§ 2) bewiesen, dass das Geschlecht einer Fläche, die n Nachbargebiete enthalten soll, nicht kleiner als $\frac{(n-3)(n-4)}{12}$ sein kann, und es werden Folgerungen aus der Annahme gezogen, dass auf einer Fläche von solchem Geschlecht (bezw. der nächstgrösseren ganzen Zahl) wirklich n Nachbargebiete existiren; insbesondere wird auf reguläre Eintheilungen von Oberflächen hingewiesen, welche die Verallgemeinerung des Tetraeders im Sinne der Analysis Situs bilden. — Im § 3 wird die weitere Behandlung ins Arithmetische übertragen und so der Beweis jener Umkehrung für die Geschlechtswerthe $1, 2, \ldots, 6$, bezw. für die Werthe von n bis einschliesslich $n = 12$ gegeben. — Nachdem im vorhergehenden Paragraphen das Problem dahin transformirt ist, dass es sich um die Herstellung einer Zahlenanordnung handelt, werden nun (§ 4) diejenigen Fälle, d. h. diejenigen Werthe von n ausgesondert, bei denen allein jene Zahlenanordnung einen gewissen sehr einfachen Charakter annehmen *kann*, und es wird gezeigt, dass für eben diese Zahlen n ein arithmetisches Theorem besteht, dessen Bestehen umgekehrt die Herstellbarkeit jener Anordnung zur Folge hat. — Im letzten Paragraphen endlich wird diese Zahlenanordnung für alle Werthe von n, die der vorher bezeichneten Kategorie angehören und ausserdem noch einer von zwei bestimmten Bedingungen genügen, wirklich hergestellt, sodass also die genannte Ergänzung des in § 2 bewiesenen Satzes, wenn auch nicht allgemein, so doch für zwei ganze Kategorien von Zahlen n dargethan ist.

Um den Geltungsbezirk dieser Untersuchungen genau zu bezeichnen, *wollen wir uns auf Flächen mit nicht umkehrbarer Indicatrix**) *beschränken.* Es ist dies in der That *dann keine* Beschränkung, *wenn* man die Flächen der entgegengesetzten Art derart als „Doppelflächen" auffasst, als bestände allenthalben die Fläche aus zwei getrennten über einander liegenden Blättern und ebenso die eventuell vorhandenen Randcurven allenthalben aus zwei parallel laufenden Rändern, weil man auf diese Art eben an Stelle jeder Fläche mit umkehrbarer Indicatrix eine bestimmte andere Fläche mit *nicht* umkehrbarer Indicatrix substituirt. Das Problem gestaltet sich dagegen wesentlich anders auf Flächen mit umkehrbarer Indicatrix selbst, wenn man diese als aus nur *einem* Blatt an jeder Stelle bestehend ansieht.**) Ich möchte auf die hierbei in Betracht kommenden Unterschiede bei nächster Gelegen-

*) Vergl. W. Dyck, Beiträge zur Analysis Situs. Math. Ann. Bd. 32, (1888) p. 473 u, d. Anm. p. 462.

**) Das sog. Möbius'sche Blatt z. B. wird bei der *ersteren* Auffassung eine 2-rändrige, 2-fach zusammenhängende Fläche vom Geschlecht 0 und lässt daher nach § 2 nicht mehr als 4 Nachbargebiete zu. Bei der *zweiten* Auffassung dagegen (wo man sich doch vorstellen muss, dass jede eingezeichnete Linie ebenso gut heit weiter eingehen, für jetzt also lediglich Flächen mit *nicht* umkehrbarer Indicatrix betrachten.

Endlich mag zum Schluss dieser einleitenden Bemerkungen ausdrücklich hervorgehoben werden, welche Definition des *Geschlechtes* und des *Zusammenhanges* einer Fläche hier zu Grunde gelegt wird. Wir wollen sowohl bei geschlossenen, als auch bei berandeten Flächen vom „*Geschlecht*“ (p) sprechen und darunter die grösste Anzahl der die Fläche nicht zerstückenden und einander nicht schneidenden Rückkehrschnitte verstehen. Es sei nämlich gestattet, die so *rein geometrisch* definirte Zahl, in Anlehnung an die für geschlossene Flächen analytisch eingeführte Bezeichnung, „Geschlecht“ der Fläche zu nennen. — Der „*Zusammenhang*“ (z) wird bei einer berandeten Fläche durch die um 1 vermehrte Maximalzahl der die Fläche nicht zerstückenden Querschnitte gegeben, bei einer geschlossenen Fläche durch die um 1 verminderte Zusammenhangszahl der aus der vorgelegten durch Ausstechen eines Punktes entstehenden berandeten Fläche. Der Zusammenhang einer geschlossenen Fläche ist nach dieser von Herrn Schläfli eingeführten Art der Zählung*) stets eine *gerade* Zahl.

Die beiden Zahlen, z und p, von denen im folgenden die letztere die Hauptrolle spielen wird, sind nach den Untersuchungen des Herrn Dyck**) als Bestimmungsstücke *nothwendig und hinreichend*, um eine Fläche mit *nicht* umkehrbarer Indicatrix im Sinne der Analysis Situs vollständig zu beschreiben.

---

§ 1.

Ueber ein gewisses Curvensystem auf einer Fläche.

1. Denkt man sich auf einer beliebigen Fläche durch einen beliebigen Punkt alle geschlossenen Curven gelegt, welche, ohne sonst irgendwo mit einander zusammenzutreffen, sich in diesem Punkt

---

auf der einen Seite der Fläche wie auf der andern existirt) kann man schon fünf Nachbargebiete herstellen, was die folgende Skizze veranschaulicht, bei der Seite ab an Seite $a'b'$ so zu heften ist, dass a mit a' und b mit b' zusammenfällt:

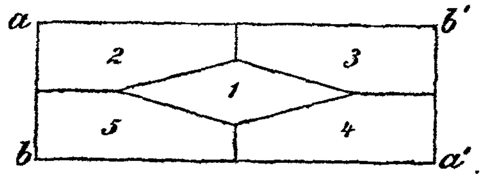

Fig. 1.

*) Vergl. C. Neumann, Vorlesungen über Riemann's Theorie der Abel'schen Integrale. 2te Aufl. Leipzig, 1884. p. 185, 186.

**) a. a. O. p. 488. 2a) und 3) in Verbindung mit Formel (2) p. 478 und (4) p. 484.

sämmtlich durchschneiden, und ist s die Anzahl derselben, so lässt sich zunächst leicht erkennen, dass s eine ungerade Zahl ist. Giebt es nämlich 2μ solcher Curven, so lässt sich stets noch eine $(2\mu+1)^{\text{te}}$ hinzufügen, da man noch aus dem einen Winkelraum des Schnittes der 1^{ten} und 2^{ten} Curve etwa, wenn diese beiden einen ungetheilten Winkel mit einander bilden, in den Scheitelwinkelraum gelangen kann, ohne die Fläche zu verlassen oder eine der vorhandenen Curven zu schneiden. Nennen wir, um dies darzuthun, die Winkelräume, welche man beim Umkreisen des Schnittpunktes der 2μ Curven der Reihe nach passirt,

$$1, 2, 3, \ldots, 4\mu,$$

so gelangt man aus 1, der einen von beiden Curven folgend, welche diesen Winkelraum einschliessen, in $1+2\mu-1$, von dort ebenso in $1+2(2\mu-1)$, von dort in $1+3(2\mu-1)$ u. s. w. Der Scheitelwinkelraum von 1 ist aber $2\mu+1$ und wird daher erreicht, wenn die Congruenz

$$\varkappa(2\mu-1) \equiv 2\mu \text{ mod. } 4\mu$$

durch einen ganzzahligen Werth von $\varkappa$ erfüllt werden kann. Dies ist aber wirklich der Fall und zwar zuerst für $\varkappa = 2\mu$. — Hätte man statt 2μ die ungerade Zahl $2\mu+1$ gehabt, so würde man kein ganzzahliges $\varkappa$ finden, welches der entsprechenden Bedingung genügt. — Auf die gleiche Weise erkennt man, dass man bei 2μ Curven durch dasselbe Verfahren aus einem beliebigen Winkelraum in jeden beliebigen andern gelangt, bei $2\mu+1$ dagegen von 1 z. B. nur nach

$$3, 5, \ldots, 4\mu+1,$$

dass also die Fläche durch eine *gerade* Anzahl solcher geschlossener Curven jedenfalls noch nicht zerfällt.

2. Nachdem hiermit gezeigt ist, dass die Anzahl s unserer Curven eine ungerade ist, wollen wir nun ihre Beziehung zu der Anzahl z des Zusammenhanges und zu der Anzahl r der Randcurven der Fläche ermitteln. Denkt man $s-1$ der Curven als Schnitte ausgeführt, so ist dadurch, weil $s-1$ eine gerade Zahl, die Anzahl der Randcurven nur um 1 vermehrt, also $r+1$. Der Zusammenhang wurde durch die erste der $s-1$ Curven, die einen Rückkehrschnitt bildet, nicht geändert, durch jede der $s-2$ folgenden aber, da diese nun Querschnitte sind, um 1 erniedrigt; also ist für die so zerschnittene Fläche der Zusammenhang

$$z-s+2.$$

Zieht man nun von dem Schnittpunkt der $s-1$ Curven noch einander und sich selbst nicht schneidende Linien nach den r ursprünglichen Randcurven, so hat man jetzt eine Fläche mit *einer* Randcurve und dem Zusammenhang

$$z-s-r+2.$$

Diese Zahl ist aber $= 1$. Denn könnte man einen Querschnitt ziehen, der die Fläche noch nicht zerstückt, so könnte man dessen Endpunkte auf dem Rand beliebig verschieben, also auch derart, dass dieser Schnitt eine s^{te} geschlossene Curve darstellte, welche alle $s - 1$ andern in ihrem Schnittpunkt schneidet, und die Fläche noch nicht zerfallen liesse. Dann könnte man also auch noch eine $(s + 1)^{\text{te}}$ Curve derselben Art ziehen, während die Zahl solcher Curven nach Voraussetzung nur s ist. Also ist

$$z - s - r + 2 = 1$$

oder

$$s = z - r + 1,$$

d. h. „*die Anzahl der geschlossenen Curven, die man auf einer Fläche durch einen beliebigen Punkt legen kann, sodass sich in diesem alle unter einander schneiden, ohne sonst einen Punkt mit einander gemein zu haben, ist um Eins grösser als die Differenz zwischen Zusammenhang und Randcurvenzahl*) der Fläche. Erst die letzte der Curven bewirkt ein Zerfallen der Fläche.*“**)

Nur eine Modification dieses Ausspruches ist der folgende:

„*Auf einer Fläche vom Zusammenhang z und der Randcurvenzahl r kann man 2 beliebige Punkte durch $z - r + 1$ Curven so verbinden, dass dadurch die Fläche nicht zerfällt.*“ Denn die $2(z - r)$ Enden von $z - r$ jener geschlossenen Curve münden in ihren Schnittpunkt (A) in der Weise ein, dass man, um diesen in kleinem Kreise herumgehend, von Curve 1 aus etwa zunächst die Enden aller $z - r$ verschiedenen Curven trifft, dann erst die andern Enden in derselben Reihenfolge. Hält man nun die ersteren in ihrem Schnittpunkt A fest, verschiebt aber den vereinigten Endpunkt der $z - r$ andern Enden auf der Fläche aus A heraus nach einem Punkt B und fügt als $(z - r + 1)^{\text{te}}$ Verbindungslinie zwischen A und B diesen Weg hinzu, so hat man die genannten $z - r + 1$ Verbindungslinien zwischen A und B, und die Fläche ist natürlich bei dieser Verschiebung nicht zerfallen.

3. Wir können die Zahl s auch zu dem Geschlecht der Fläche p in Beziehung setzen. Führt man eine der s Curven als Schnitt aus,

---

*) Die ja, wie schon Riemann (Ges. Werke, Leipzig, 1878, p. 12) gezeigt hat, stets eine gerade Zahl ist.

**) Nach diesem Satz beruht die bei Möbius, Ges. Werke, Bd. II, p. 541, angegebene von Gauss bemerkte Eigenschaft einer gewissen Fläche einfach darauf, dass bei derselben $z = 3$, $r = 1$ ist. Man kann daher ausser den zwei Punktepaaren PR, QS auch noch ein drittes, UV, auf dem Rand annehmen, sodass U und V durch 2 der 4 Punkte $PQRS$ getrennt werden, und U und V mit einander verbinden, ohne die schon gezogenen Linien zu schneiden.

so wächst die Zahl der Randcurven um 2, während der Zusammenhang derselbe bleibt. Nennt man also für die so zerschnittene neue Fläche die Zahl unserer Curven s_1, so ist nach der obigen Formel

$$s_1 = s - 2.$$

Führt man von den s_1 Curven wieder eine als Schnitt aus, so ist für die jetzt entstehende neue Fläche ebenso

$$s_2 = s_1 - 2 = s - 4$$

u. s. w. Endlich gelangt man zu einer Fläche, für die die Anzahl unserer Curven nur noch 1 ist, und dies wird offenbar eintreten, nachdem man im Ganzen $\frac{s-1}{2}$ solche Rückkehrschnitte ausgeführt hat. Diese Fläche zerfällt also bei jedem Rückkehrschnitt, und man konnte auf der ursprünglichen Fläche demnach gerade $\frac{s-1}{2}$ Rückkehrschnitte ausführen, ohne dass sie zerfiel, aber nicht mehr; folglich ist

$$\frac{s-1}{2} = p,$$

d. h.

$$s = 2p + 1,$$

„*die Zahl der geschlossenen Curven der genannten Art ist gleich der um Eins vermehrten doppelten Geschlechtszahl.*“

Durch Verbindung dieses Resultates mit dem im vorigen Artikel abgeleiteten ergiebt sich die Beziehung

$$z - r = 2p,$$

„*Zusammenhang weniger Randcurvenzahl einer Fläche ist gleich dem doppelten Geschlecht*“, welche bereits in einer Formel des Herrn Dyck*) enthalten ist, auch sonst aus der Definition von z, r, p leicht abzuleiten wäre, und von der wir im Folgenden Gebrauch zu machen haben.

Auf Grund dieser Relationen zwischen den vier Zahlen s, z, r, p kann man nun den in der Einleitung schon erwähnten Ausspruch des Herrn Dyck auch so formuliren: *Zur vollständigen Beschreibung einer Fläche mit nicht umkehrbarer Indicatrix im Sinne der Analysis Situs sind nothwendig und hinreichend zwei Zahlen, von denen die eine der Gruppe* z, p, s, *die andere der Gruppe* z, r (natürlich unter Ausschluss der Wahl z, z) *entnommen ist.*

4. Der Nachweis, dass $s - 1 = 2p$ ist, und der Umstand, dass man beim Durchlaufen des Randes einer durch die $2p$ geschlossenen Curven zu einer einfach zusammenhängenden aufgeschnittenen geschlossenen Fläche die $4p$ Ufer jener Schnitte in der Reihenfolge passirt, dass man zunächst je ein Ufer aller $2p$ Curven durchläuft und dann in *derselben* Reihenfolge die entsprechenden anderen Ufer — ein

*) a. a. O. p. 478 Formel (2) unter Berücksichtigung von Formel (4) p. 484.

Umstand, von dem man sich durch eine der in 1. angestellten ganz analoge Betrachtung überzeugt, — lassen uns erkennen, dass die $2p$ Curven bereits anderwärts implicite erscheinen. Es sind dies hiernach dieselben Curven, die entstehen, wenn man das Poincaré'sche polygone générateur der groupes fuchsiens mit einer geraden Anzahl von Seiten der 1ten Sorte, von denen immer 2 Gegenseiten einander conjugirt sind*), längs je zweier conjugirten Seiten wirklich zusammenheftet, — und dieselben Curven, die entstehen, wenn man die Polygone, die in den Untersuchungen des Herrn Dyck über regulär verzweigte Riemann'sche Flächen**) gewisse Wurzelirrationalitäten darstellen, längs je zweier Symmetrielinien der regulären Verzweigung zusammenheftet. Es ist also hiermit gezeigt, dass gerade die hier eingeführten Curven es sind, wodurch jene übersichtlichste Zerschneidung einer geschlossenen Fläche vom Geschlecht p zu einem regulären Polygon mit $4p$ oder $4p+2$ Seiten erzielt wird, bei dem sich immer die Gegenseiten entsprechen.

Da jede der $2p+1$ Curven für sich einen die Fläche nicht zerstückenden Rückkehrschnitt bildet und die Gesammtheit von $2p$ derselben die geschlossene Fläche zu einer einfach zusammenhängenden aufschneidet, so liefern dieselben als Integrationswege eines Abel'schen Integrals I. Gattung auf der zugehörigen Riemann'schen Fläche vom Geschlecht p ein System von $2p$ linear unabhängigen Periodicitätsmoduln. Man kann von diesem Ausgangspunkt z. B. auf sehr einfache Weise die Resultate gewinnen, die Clebsch in der Abhandlung „Zur Theorie der Riemann'schen Fläche" ***) § 6 auf andere Art hergeleitet hat.

§ 2.

Minimalwerth von p bei n Nachbargebieten.

5. Wir haben in der Einleitung das zu behandelnde Problem so gefasst, dass nur nach dem *Geschlecht* der Fläche gefragt wird, auf welcher n Nachbargebiete möglich sind. In der That hängt die Lösung des Problems auch nur von der Geschlechtszahl der Fläche ab. Denn wenn auf einer geschlossenen Fläche vom Geschlecht p n Nachbargebiete möglich sind, so ist dasselbe offenbar der Fall auf jeder aus derselben durch Ausschneidung einer beliebigen Anzahl einfach zusammenhängender Flächenstücke entstehenden Fläche möglich und umgekehrt. Man kann aber jede beliebige Fläche mit dem Geschlecht p,

*) Théorie des groupes fuchsiens. Acta Math. Bd. 1, (1882) § 8.

**) Ueber regulär verzweigte Riemann'sche Flächen und die durch sie definirten Irrationalitäten. In.-Diss. München, 1879. S. insbesondere Tafel VIII, Fig. 2. Fläche I. — Vgl. auch Math. Ann. Bd. 17 (1880) p. 473 ff.

***) Math. Ann. Bd. 6 (1873).

der Randcurvenzahl r und dem Zusammenhang z aus einer geschlossenen Fläche von *demselben* Geschlecht durch Ausschneidung von r einfach zusammenhängenden Stücken entstanden denken. In der That, nach vorigem Paragraph ist

$$z = 2p + r.$$

Jede der r Randcurven kann man zur Begrenzung eines einfach zusammenhängenden Flächenstückes, folglich die Fläche durch Einfügung von r solchen zu einer geschlossenen machen. Dadurch ist der Zusammenhang um r verkleinert worden; also ist der Zusammenhang der neuen geschlossenen Fläche

$$z' = 2p.$$

Da aber bei einer geschlossenen Fläche der Zusammenhang gleich der doppelten Geschlechtszahl ist, so ist das Geschlecht der resultirenden geschlossenen Fläche p geblieben, und man kann umgekehrt die vorgelegte aus dieser Fläche durch Ausschneidung entstanden denken.

Das Problem hängt also wirklich nur von dem *Geschlecht* der Fläche ab, und wir sehen gleichzeitig, dass ohne Beschränkung der Allgemeinheit die Fläche als eine *geschlossene* vorausgesetzt werden darf. Auch ist ohne Weiteres klar, — was für Späteres hier schon bemerkt werden mag, — dass, wenn auf einer Fläche überhaupt n Nachbargebiete möglich sind, dann auch eine Eintheilung der *ganzen* Fläche in solche n Gebiete möglich ist.

6. Ferner wurde schon beim Ausspruch des Problems eine Dualität zwischen Gebieten und Punkten, Grenzlinien und Verbindungslinien als feststehend angenommen, die noch der Begründung bedarf. Giebt es aber zunächst auf einer Fläche n Nachbargebiete, so giebt es auf derselben auch n Nachbarpunkte, wie leicht zu zeigen ist. Denken wir uns zu dem Ende das Netz der Begrenzungslinien etwa in blauer Farbe gezeichnet. Nimmt man dann in jedem Gebiet einen beliebigen Punkt an und führt von diesem aus (etwa in rother Farbe) Linien, die sich selbst und einander nicht schneiden, nach $n-1$ solchen blauen Begrenzungslinien, längs deren das Gebiet an $n-1$ *verschiedene* andere grenzt (denn es ist ja nicht ausgeschlossen, dass ein Gebiet längs mehrerer Linien an *dasselbe* andere grenzt) und zwar so, dass der Punkt im Gebiet a mit demselben Punkt derselben Grenzlinie (ab) verbunden wird, wie der Punkt im Gebiet b, so verbinden die entstehenden $\frac{n(n-1)}{2}$ rothen Linien, die einander nicht schneiden, jeden der n Punkte mit den $n-1$ andern.

Giebt es umgekehrt auf einer Fläche n Nachbarpunkte, so giebt es auch n Nachbargebiete. Umgiebt man nämlich zunächst jeden der n Punkte mit einer auf der Fläche liegenden geschlossenen Contour, die keinen andern der n Punkte enthält, so kann man jedes dieser

n Flächenstücke sich in $n-1$ Streifen ausdehnen lassen längs der $\frac{n(n-1)}{2}$ rothen Verbindungslinien und diese Ausläufer so weit führen, bis je 2 derselben an einander stossen. Dann hat man n *einfach zusammenhängende* Nachbargebiete auf der Fläche.

Hiermit ist das Bestehen der genannten Dualität erwiesen, und es folgt gleichzeitig aus der vorstehenden Betrachtung, dass, wenn überhaupt n Nachbargebiete existiren, dann auch n einfach zusammenhängende Gebiete mit dieser Eigenschaft hergestellt werden können.

7. Wir sind daher berechtigt, bei der Untersuchung unseres Problems bald die eine, bald die andere Auffassung, je nachdem sich dadurch der Ausdruck einfacher gestaltet, vorzuziehen. Wir fragen zunächst nach dem Minimalwerth des Geschlechtes einer Oberfläche, welche wirklich n Nachbarpunkte zulässt, und nennen diese Zahl p_n; d. h. es wird vorausgesetzt, auf einer Fläche vom Geschlecht p_n gäbe es wirklich n Nachbarpunkte, dagegen nicht auf einer solchen von niedrigerem Geschlecht. Dann ist es sehr leicht, für p_n eine untere Grenze zu ermitteln.

Durch die n Nachbarpunkte und ihre $\frac{n(n-1)}{2}$ Verbindungslinien entsteht auf der geschlossenen Fläche ein System von n Punkten oder Ecken, $\frac{n(n-1)}{2}$ Linien oder Kanten und einer Anzahl (F) Flächenstücke oder Seitenflächen. Die letzteren sind sämmtlich einfach zusammenhängend; denn käme dabei ein mehrfach zusammenhängendes Stück vor, so könnte man in demselben einen nicht in einen Punkt zusammenziehbaren Rückkehrschnitt legen, der die ganze Fläche nicht zerstückt. Man hätte also das Geschlecht der Fläche um 1 erniedrigt, und doch gäbe es auf derselben noch n Nachbarpunkte gegen die Voraussetzung. — Für die Anzahl F dieser einfach zusammenhängenden Flächenstücke findet sich nun die obere Grenze

$$F \leqq \frac{n(n-1)}{3};$$

denn um jeden der n Punkte herum liegen $n-1$ Flächenstücke, die sämmtlich mindestens Dreiecke sind, da, wenn Zweiecke vorkämen, 2 der n Punkte doppelt mit einander verbunden wären. Wendet man nun auf das System von Ecken, Kanten, Seiten auf der Fläche vom Geschlecht p_n den erweiterten Euler'schen Polyedersatz an, so folgt

$$2p_n - 2 = \frac{n(n-1)}{2} - n - F,$$

$$2p_n - 2 \geqq \frac{n(n-1)}{2} - n - \frac{n(n-1)}{3},$$

$$p_n \geqq \frac{(n-3)(n-4)}{12},$$

und da p_n jedenfalls eine ganze Zahl sein muss, können wir schreiben

$$\text{(A)} \qquad p_n \geqq \frac{(n-3)(n-4)+2\alpha_n}{12},$$

wo $2\alpha_n$ die kleinste positive ganze Zahl ist, die bewirkt, dass der Zähler durch 12 theilbar wird. Man sieht nämlich leicht, dass diese Zahl nur eine *gerade* sein, und ferner, dass α_n nur einen der Werthe $0, 2, 3, 5$ haben kann.

8. Für die niedrigsten Werthe von n, z. B. $n = 3, 4$ kann nun in der Formel (A) das Ungleichheitszeichen fortgelassen werden. Wir wollen aber im Folgenden nachweisen, dass wenigstens für die Werthe von n bis einschliesslich $n = 12$ und sodann für alle Werthe von n, die gewissen später zu präcisirenden Bedingungen genügen, unser Problem in der That durch die *Gleichung*

$$\text{(B)} \qquad p_n = \frac{(n-3)(n-4)+2\alpha_n}{12}$$

erschöpfend gelöst wird. Für die entsprechenden Werthe von p, nämlich $p = p_n, p_n + 1, p_n + 2, \ldots, p_{n+1} - 1$, wenn n ein solcher Werth ist, für den Gleichung (B) gilt, wird dann also die umgekehrte Frage nach der Maximalzahl n_p der Nachbarelemente auf einer Fläche vom Geschlecht p durch die Gleichung beantwortet

$$\text{(C)} \qquad n_p = \frac{7}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1 + 48p - 8\alpha_p},\text{*)}$$

wobei α_p die kleinste positive ganze Zahl bedeutet, welche den Radicand zu einem Quadrat macht. Wird hierbei $\alpha_p < 6$, so ist der eingesetzte Werth von p derart, dass die gleiche Anzahl von Nachbargebieten n_p nicht schon auf einer Fläche niedrigeren Geschlechtes auftritt. Ist $\alpha_p \geqq 6$, nämlich $= 6\nu + \alpha_p'$, wo $\alpha_p' < 6$, so kommt schon auf einer Fläche vom Geschlecht $p - \nu$ die gleiche Anzahl von Nachbargebieten vor.

Bevor wir aber in den angekündigten Beweis eintreten, müssen noch die folgenden für das Verständniss desselben erforderlichen Bemerkungen vorausgeschickt werden.

9. Die Zahlen α haben in Bezug auf die Natur des Netzes auf der Fläche eine einfache Bedeutung. Hat man auf irgend einer Fläche vom Geschlecht p n Nachbarpunkte und die entstehenden Flächenstücke sind sämmtlich einfach zusammenhängend, so besteht ja immer die Beziehung

$$p = \frac{(n-3)(n-4)+2\alpha}{12},$$

*) In dieser Form, unter Hinzufügung des Zeichens $<$, erscheint das erwähnte Resultat bei Herrn Heawood (a. a. O. p. 334), wenn man daselbst die Grösse $\varkappa$, von der Herr H. nur sagt, dass sie eine „positive von dem Zusammenhang der geschlossenen Fläche abhängige Constante“ sei, $= 2p - 2$ setzt.

wonach die Zahl der Flächenstücke $\frac{n(n-1)-\alpha}{3}$ ist. Da es nun in dem ganzen Netz genau $n(n-1)$ Polygonecken oder Winkel giebt, so ist α die Zahl der Polygonecken, die übrig bleibt, wenn man von jedem Flächenstück 3 Ecken fortnimmt. Gilt also Gleichung (B), so bilden die Flächenstücke entsprechend den 4 möglichen Werthen von α_n (0, 2, 3, 5) entweder

1) lauter Dreiecke;

oder

2) lauter Dreiecke und 2 Vierecke
oder lauter Dreiecke und 1 Fünfeck;

oder

3) lauter Dreiecke und 3 Vierecke
oder lauter Dreiecke, 1 Viereck, 1 Fünfeck
oder lauter Dreiecke, ein Sechseck;

oder

4) lauter Dreiecke und 5 Vierecke
oder u. s. w.
oder endlich: lauter Dreiecke und 1 Achteck.

Von besonderem Interesse sind nun die Fälle, wo $\alpha_n = 0$, wo also, falls Gleichung (B) besteht, die ganze Fläche in $\frac{n(n-1)}{3}$ Dreiecke eingetheilt ist, von denen je $n-1$ in einer Ecke zusammenstossen, bezw. bei der dualistischen Auffassung in n $(n-1)$-Ecke, deren je 3 eine Polyederecke bilden. Wir wollen diese Fälle die *„regulären"* nennen. Sie treten also ein, wenn $\alpha_n = 0$, mithin n eine der vier Formen hat:

$$n = 12\varkappa,$$
$$n = 12\varkappa + 3,$$
$$n = 12\varkappa + 4,$$
$$n = 12\varkappa + 7,$$

während das Geschlecht p der Flächen, auf denen solche reguläre Eintheilung möglich sein soll, der *nothwendigen* Bedingung genügt

$$1 + 48p = \lambda^2$$

oder

$$p = \frac{\lambda^2 - 1}{48},$$

wo

$$\lambda^2 \equiv 1 \text{ mod. } 48.$$

Setzt man $\varkappa = 0$, so hat man aus der dritten Reihe der Werthe von n $n = 4$ und dem entsprechend $p = 0$; d. h. ein solcher regulärer Fall ist z. B. die Oberfläche des Tetraeders. In der That würden alle regulären Fälle die Verallgemeinerung des Tetraeders auf Oberflächen von höherem Geschlecht im Sinne der Analysis Situs bilden, und zwar bei der einen oder andern der beiden dualistischen Auffassungen, jenachdem wir das Tetraeder (bei dem die beiden dualistischen Erscheinungen noch zusammenfallen) als ein System von 4 Flächen, deren jede an die 3 andern grenzt, oder als ein Netz aus 4 Punkten, deren jeder mit den 3 andern auf der Fläche verbunden ist, ansehen.

§ 3.

Arithmetische Einkleidung der Untersuchung. — Beweis der Gleichung (B) für $n = 4, 5, \ldots, 12$.

10. Die Schwierigkeiten, welche der Versuch, Gleichung (B) allgemein zu beweisen, bereitet, haben ihren Grund in der arithmetischen Natur des Problems. Man kann diesem in der That eine rein arithmetische Einkleidung geben. Man denke sich n $(n-1)$-Ecke (dualistisch n einfach zusammenhängende Flächenstücke als die Träger von n Punkten, von deren jedem $n-1$ Linien nach dem Rand gehen), bezeichne dieselben durch die darauf geschriebenen Zahlen $1, 2, \ldots, n$ und jede der Seitenkanten beim Polygon $\varkappa$ durch eine andere der Zahlen $1, 2, \ldots, \varkappa - 1, \varkappa + 1, \ldots, n$, welche angiebt, an welches andere Polygon das Polygon $\varkappa$ längs dieser Kante anzuheften ist. Heftet man nun so zusammen, dass man von der mit Zahlen beschriebenen Seite eines Polygones beim Passiren der Zusammenheftungslinien immer wieder auf die beschriebene Seite der andern gelangt, so erhält man stets eine geschlossene Oberfläche, welche in n Nachbargebiete getheilt ist; aber das Geschlecht derselben wird im Allgemeinen $> \frac{(n-3)(n-4)+2\alpha_n}{12}$ sein; es sei denn, dass die Anordnung derart getroffen worden, dass die Anzahl der Polyederecken $= \frac{n(n-1)-\alpha_n}{3}$ wird. Nun drückt sich die Eigenschaft, dass die λ Polygone $1, 2, \ldots, \lambda$ z. B. in einer Ecke zusammenstossen (oder die λ Punkte $1, 2, \ldots, \lambda$ Ecken desselben Polygones werden), wenn die Reihenfolge derselben beim Umkreisen dieser Ecke im Sinne des Uhrzeigers etwa die natürliche $1, 2, \ldots, \lambda$ ist, dadurch arithmetisch aus, dass bei den $n-1$ Zahlen, welche die Randstücke von 1 bezeichnen, in demselben Sinn $2, \lambda$, bei 2 $3, 1$ bei 3 $4, 2$ u. s. w. bei λ $1, \lambda - 1$ auf einander folgen. Wir wollen sagen: diese λ Zahlenpaare

$$(2, \lambda),\ (3\,1),\ (4\,2),\ (5, 3), \ldots, (1, \lambda - 1)$$

bilden einen „*Cyklus von λ Elementen oder Paaren*“. Eine dreiseitige Ecke oder ein Dreieck insbesondere giebt also einen dreielementigen Cyklus

$$(i\varkappa),\ (\varkappa l),\ (li)$$

und ist daran kenntlich, dass bei den Randstücken des Polygones i im Sinne des Uhrzeigers auf einander folgen $\varkappa, l$; bei $\varkappa$ in demselben Sinne l, i und bei l endlich $i, \varkappa$.

Dann ist unser Problem jetzt dieses:

(D) 1) Die Zahlen $2, 3, \ldots, n$ (welche die Seiten des Polygones 1 bedeuten),
2) „ „ $1, 3, \ldots, n$ („ „ „ „ „ 2 „),
u. s. w.
n) Die Zahlen $1, 2, \ldots, n-1$ (welche die Seiten des Polygones n bedeuten),

wobei man sich die Zahlen jeder Zeile zu einem Kreis geschlossen denken muss, so anzuordnen, dass die Anzahl der entstehenden Cyklen genau $= \frac{n(n-1)-\alpha_n}{3}$ wird. — Wir wollen eine solche Anordnung der Kürze halber mit (D) bezeichnen. —

11. Die folgenden Tabellen geben für jede der Zahlen

$$n = 4, 5, 6, \ldots, 11, 12$$

eine Anordnung (D), womit also die Gültigkeit des Satzes (B) (und gleichzeitig (C)) zunächst für die Werthe von n bis einschliesslich $n = 12$ dargethan ist. Ueber jeder Tabelle steht neben dem Werth von n der von p_n, α_n und $F = \frac{n(n-1)-\alpha_n}{3}$. In der Tabelle sind immer die Zahlenpaare, welche zu Cyklen von mehr als 3 Elementen gehören, durch einen darunter gesetzten Bogen gekennzeichnet, und unter jeder Tabelle sind ausser der Zahl der Dreiecke die mehrelementigen Cyklen selbst angegeben.

$n = 4$, $p_4 = 0$, $\alpha_4 = 0$, $F = 4$
regulär (Tetraeder)

1) 2 3 4
2) 3 1 4
3) 4 1 2
4) 2 1 3

4 Dreiecke.

$n = 5$, $p_5 = 1$, $\alpha_5 = 5$, $F = 5$.

1) 3 2 4 5
2) 4 3 5 1
3) 5 4 1 2
4) 1 5 2 3
5) 2 1 3 4

(wobei eigentlich unter jedem Paar ein Bogen stehen müsste, die deshalb alle fortgelassen sind.)

5 Vierecke [1 3 4 2], [1 2 5 4], [1 4 3 5], [1 5 2 3], [3 2 4 5].

Fig. 2 veranschaulicht diese Anordnung für $n = 5$.

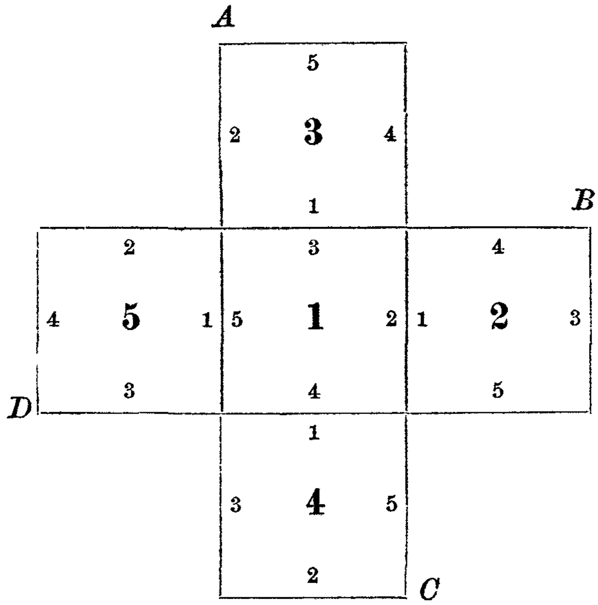

Fig. 2.

Die geschlossene Fläche vom Geschlecht 1 entsteht durch Zusammenheften der Linien AB und DC, BC und AD (vergl. § 1, Art. 4). Sie bildet ein „*Pentaeder*“, bei dem gerade wie beim Tetraeder die beiden dualistischen Erscheinungen zusammenfallen; denn die 5 Ecken dieses Pentaeders sind Nachbarpunkte.*)

$$n = 6, \quad p_6 = 1, \quad \alpha_6 = 3, \quad F = 9$$

$$\begin{array}{ll}
1) & 3\ 5\ \underbrace{2\ 6}\ 4 \\
2) & 4\ 6\ \underbrace{3\ 1}\ 5 \\
3) & 5\ 1\ \underbrace{4\ 2}\ 6 \\
4) & 6\ 2\ \underbrace{5\ 3}\ 1 \\
5) & 1\ 3\ \underbrace{6\ 4}\ 2 \\
6) & 2\ 4\ \underbrace{1\ 5}\ 3
\end{array}$$

8 Dreiecke und das Sechseck [1 2 3 4 5 6].

---

*) Wir haben also hier noch eine *regulär* (nämlich in 5 Vierecke) eingetheilte Oberfläche von höherem Geschlecht als Null, die *nicht* in den oben angeführten 4 Serien regulärer Fälle enthalten ist, und man kann sich leicht davon überzeugen, dass innerhalb unseres jetzigen Problems, wo immer nach dem *niedrigsten* Geschlecht gefragt wird, andere reguläre Eintheilungen nicht mehr vorkommen können. Lässt man dagegen jene Beschränkung fallen, so bilden das Tetraeder und dieses Pentaeder nur die untersten Fälle in einer unendlichen Reihe regulärer Oberflächen, auf die ich bei anderer Gelegenheit zurückzukommen hoffe: Oberflächen vom Geschlecht $\frac{(n-1)(n-4)}{4}$ $(n = 4, 5, 8, 9, \ldots, 4\varkappa, 4\varkappa+1, \ldots)$ die in n benachbarte $(n-1)$-Ecke so eingetheilt sind, dass nur n Polyederecken entstehen, die gleichzeitig Nachbarpunkte sind. — Vergl. zu der obigen Figur und der folgenden Fig. 3 auch die Figuren des Herrn W. Dyck, Math. Ann. Bd. 20, Taf. III, Fig. 2 und 3.

$$n = 7, \quad p_7 = 1, \quad \alpha_7 = 0, \quad F = 14$$

regulär

1) 2 4 3 7 5 6
2) 3 5 4 1 6 7
3) 4 6 5 2 7 1
4) 5 7 6 3 1 2
5) 6 1 7 4 2 3
6) 7 2 1 5 3 4
7) 1 3 2 6 4 5

14 Dreiecke.

Fig. 3 veranschaulicht diese Anordnung für $n = 7$ auf einer Fläche vom Geschlecht 1.

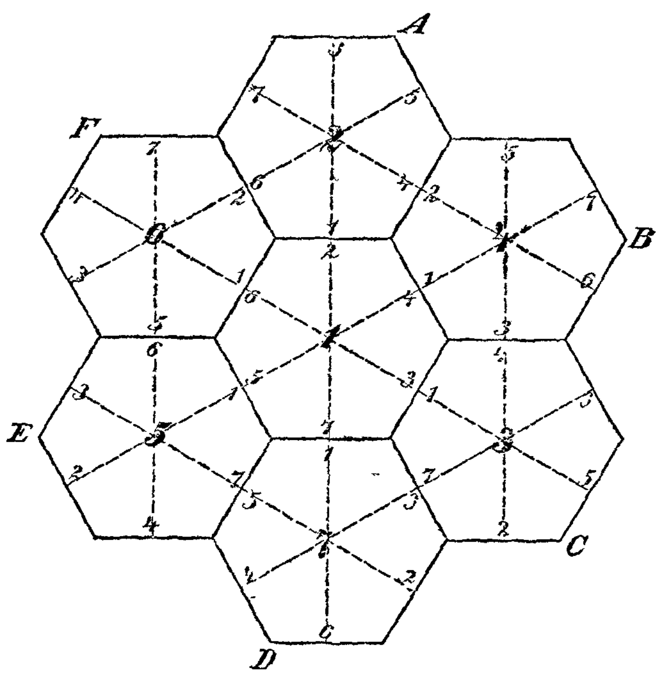

Fig. 3.

Die ausgezogenen Linien theilen die Fläche in 7 benachbarte Sechsecke, die punktirten verbinden deren Mittelpunkte mit einander. Die geschlossene Fläche entsteht durch Aneinanderheften der Linien

AB und ED, BC und FE, CD und AF.

$$n = 8, \quad p_8 = 2, \quad \alpha_8 = 2, \quad F = 18.$$

1) 2 3 4 5 6 7 8
2) 3 1 8 5 4 7 6
3) 4 1 2 6 7 5 8
4) 2 1 3 8 6 5 7

5) 6 1 2 8 3 7 4
6) 2 1 5 4 8 7 3
7) 8 1 2 4 5 3 6
8) 2 1 7 6 4 3 5

16 Dreiecke und die beiden Vierecke [1 4 2 5], [1 6 2 7].

$n = 9, \quad p_9 = 3, \quad \alpha_9 = 3, \quad F = 23.$

1) 2 3 4 5 6 7 8 9
2) 6 1 9 7 3 5 8 4
3) 4 1 2 7 6 8 5 9
4) 5 1 3 9 6 2 8 7
5) 6 1 4 7 9 3 8 2
6) 7 1 5 2 4 9 8 3
7) 8 1 6 3 2 9 5 4
8) 9 1 7 4 2 5 3 6
9) 2 1 8 6 4 3 5 7

22 Dreiecke und das Sechseck [3 1 2 6 5 2].

$n = 10, \quad p_{10} = 4, \quad \alpha_{10} = 3, \quad F = 29.$

1) 2 3 4 5 6 7 8 9 10
2) 3 1 4 6 9 7 10 5 8
3) 4 1 2 10 7 6 8 5 9
4) 5 1 3 9 6 2 10 8 7
5) 6 1 4 7 9 3 8 2 10
6) 7 1 5 10 2 4 9 8 3
7) 8 1 6 3 10 2 9 5 4
8) 9 1 7 4 10 2 5 3 6
9) 10 1 8 6 4 3 5 7 2
10) 4 1 9 6 5 2 7 3 8

26 Dreiecke und 3 Vierecke [2 1 10 4], [2 6 10 9], [2 8 10 3].

$n = 11, \quad p_{11} = 5, \quad \alpha_{11} = 2, \quad F = 36.$

1)	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
2)	3	1	11	7	4	10	6	9	8	5
3)	4	1	2	5	9	11	7	6	10	8
4)	5	1	3	8	6	11	10	2	7	9
5)	6	1	4	9	3	2	8	10	7	11
6)	7	1	5	4	8	11	9	2	10	3
7)	8	1	6	3	5	10	9	4	2	11
8)	9	1	7	11	6	4	3	10	5	2
9)	10	1	8	2	6	11	3	5	4	7
10)	11	1	9	7	5	8	3	6	2	4
11)	2	1	10	4	5	3	9	6	8	7

34 Dreiecke und 2 Vierecke [3 11 5 7], [5 11 4 6].

$n = 12, \quad p_{12} = 6, \quad \alpha_{12} = 0, \quad F = 44.$

regulär

1)	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
2)	3	1	12	4	9	8	5	11	7	10	6
3)	4	1	2	6	5	8	10	7	12	11	9
4)	5	1	3	9	2	12	8	7	11	6	10
5)	6	1	4	10	12	7	9	11	2	8	3
6)	7	1	5	3	2	10	4	11	8	12	9
7)	8	1	6	9	5	12	3	10	2	11	4
8)	9	1	7	4	12	6	11	10	3	5	2
9)	10	1	8	2	4	3	11	5	7	6	12
10)	11	1	9	12	5	4	6	2	7	3	8
11)	12	1	10	8	6	4	7	2	5	9	3
12)	2	1	11	3	7	5	10	9	6	8	4

44 Dreiecke.

Es mag zu den Tabellen noch bemerkt werden, dass, wenn dieselben mit Ausnahme derjenigen für $n = 5, 6, 7$, von denen später noch die Rede sein wird, eine wesentliche Gesetzmässigkeit nicht erkennen lassen, damit noch nicht gesagt ist, dass eine solche nicht vielleicht doch erreichbar wäre. Denn einmal sind ja die Zahlen der ersten Zeile (ausgenommen bei $n = 5, 6, 7$) *willkürlich* in der natürlichen Folge genommen, und zweitens kann man die Zahlen jeder Zeile noch cyklisch verschieben. Wir werden aber bald sehen, dass *die* Gesetzmässigkeit, die man bei $n = 5, 6, 7$ wahrnimmt, auch *nur* in diesen Fällen unter den bis jetzt behandelten zu erreichen war.

§ 4.

Nachweis, dass eine cyklische Anordnung höchstens im Fall $n = 12\varkappa + 7$ möglich ist.

12. Die Methode, nach der die Anordnungen (D) im vorigen Paragraphen gefunden sind, war die folgende: Man nimmt auf einer geschlossenen Fläche des Geschlechtes $\frac{(n-3)(n-4)+2\alpha_n}{12}$ n Punkte beliebig an und zieht auf irgend eine Art so viele der $\frac{n(n-1)}{2}$ Verbindungslinien als möglich sind, ohne dass zwei derselben sich schneiden. Dann werden im Allgemeinen nicht alle $\frac{n(n-1)}{2}$ gezogen sein, sondern etwa λ weniger. Dafür kann man aber, — wie eine einfache Ueberlegung auf Grund des Euler'schen Polyedersatzes zeigt, — noch gerade $\lambda + \alpha_n$, also stets mindestens λ, Verbindungslinien ziehen, nach deren Herstellung die ganze Oberfläche erst in Dreiecke eingetheilt wäre. Zieht man nun eine solche, so kann diese nur 2 Punkte verbinden, die schon anderweitig verbunden sind; löscht man daher die frühere Verbindungslinie, so kann man dadurch wieder mindestens eine andere Verbindung herstellen, und es ist möglich, dass diese 2 bisher noch nicht verbundene Punkte verbindet, sodass man also um einen Schritt weiter gekommen wäre. Im entgegengesetzten Falle wird dadurch an anderer Stelle eine Verbindung aufgehoben und in Folge dessen wieder eine oder mehrere neue Verbindungen möglich werden u. s. w.

Da sich aber nicht allgemein zeigen liess, dass diese Methode stets dahin führt, die sämmtlichen λ fehlenden Verbindungen noch herzustellen, womit ja der Beweis für die ganz allgemeine Gültigkeit der Gleichung (B) erbracht wäre, so wollen wir uns darauf beschränken, den letzteren für Werthe von n eines solchen Charakters zu führen, bei denen die Anordnung (D) sich besonders einfach und übersichtlich gestalten lässt.

13. Für $n = 5, 6, 7$ (s. Art. 11) ist die Anordnung (D) derart hergestellt worden, dass jede Zeile aus der vorhergehenden durch einfache cyklische Vertauschung der Zahlen $1, 2, 3, \ldots$ in der natürlichen Reihenfolge hervorgeht. Wir wollen eine Anordnung (D) mit diesem Charakter eine „*cyklische*“ nennen und werden nachweisen, dass ausser bei $n = 5$ und $n = 6$ nur, wenn n die Form $12\varkappa + 7$

hat, eine solche cyklische Anordnung (D) herstellbar sein *kann*, und bei bestimmter Beschaffenheit von $\varkappa$ dann auch wirklich herstellbar *ist*.

Zunächst sieht man leicht, dass wir, wenn $n > 20$, jedenfalls nur in den regulären Fällen die Möglichkeit einer cyklischen Anordnung (D) erwarten dürfen. Denn bei den nicht regulären Fällen treten Cyklen von mehr als 3 Zahlenpaaren auf. Gehört nun etwa in Zeile 1) $\varkappa l$ einem mehr als dreielementigen Cyklus an, so gilt bei einer cyklischen Anordnung dasselbe von $\varkappa + 1$, $l + 1$ in Zeile 2), von $\varkappa + 2$, $l + 2$ in Zeile 3) u. s. w., endlich von $\varkappa - 1$, $l - 1$ in Zeile n). Man hätte also mindestens n Zahlenpaare, die Cyklen von mehr als 3 Elementen angehören. Nach Art. 9 kommen nun höchstens 20 Zahlenpaare dieser Art vor, nämlich, wenn $\alpha_n = 5$ und 5 Vierecke vorhanden sind. Selbst wenn es also möglich wäre, dass diese 20 Zahlenpaare bei einer cyklischen Anordnung in derselben Colonne über einander ständen, so folgt hieraus, dass bei $n > 20$ in nicht regulären Fällen eine cyklische Anordnung ausgeschlossen ist. Wir übergehen, um nicht zu weitläufig zu werden, den nicht schwierigen Nachweis, dass auch bei den nicht regulären Fällen für $n \leqq 20$ eine cyklische Anordnung, ausser bei $n = 5$ und $n = 6$, unmöglich ist.

Die Frage lautet also jetzt: Wie muss die Zahl n beschaffen sein, damit die cyklische Anordnung

$$(\mathrm{E}) \qquad \left\{ \begin{array}{lllll} 1) & 2, \; i_3, & i_4, & \ldots, & i_n, \\ 2) & 3, \; i_3+1, & i_4+1, & \ldots, & i_n+1, \\ \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot \\ n) & 1, \; i_3+n-1, & i_4+n-1, & \ldots, & i_n+n-1, \end{array} \right.$$

wobei $i_3, i_4, \ldots, i_n$ eine Permutation der Zahlen $3, 4, \ldots, n$ bedeuten, und alle Zahlen, die $> n$, durch ihre kleinsten Reste mod. n zu ersetzen sind, in $\frac{n(n-1)}{3}$ Dreiecke zerfällt? *)

14. Wir weisen zunächst die Identität dieser Aufgabe mit einer andern rein arithmetischen nach.

Angenommen, für die Zahl n existire eine Anordnung (E), so möge etwa $i_\lambda = n$ sein. In Zeile 1) steht dann die Folge

$$i_{\lambda-1}, \quad n, \quad i_{\lambda+1}.$$

Also enthält Zeile n) wegen des cyklischen Fortganges die Folge

$$i_{\lambda-1} + n - 1, \quad n - 1, \quad i_{\lambda+1} + n - 1$$

---

*) Diese Frage ist eine ähnliche wie die von Steiner, Ges. Werke, Bd. II, pag. 436 unter a) aufgestellte, von der sich die unsrige nur dadurch unterscheidet, dass bei ihr 1) die Verbindung je zweier Elemente zweimal, nämlich sowohl in der Folge $i\varkappa$, wie in der Folge $\varkappa i$ auftreten muss und 2) die im Artikel 16 angegebene Forderung noch zu erfüllen ist.

und, weil die ganze Anordnung in Dreiecke zerfällt, die Folge

$$i_{\lambda+1},\ 1,\ i_{\lambda-1}.$$

Zeile n) zeigt also die Eigenschaft: Die beiden Nachbarn von 1 sind um 1 grösser als die beiden Nachbarn von $n-1$; die beiden Nachbarn von $n-1$ sind um $n-1$ grösser als die beiden Nachbarn von 1, wenn Alles mod. n verstanden wird und immer die beiden einander zugekehrten Nachbarn mit einander verglichen werden, also der rechte von 1 mit dem linken von $n-1$ und umgekehrt.

Durch dieselben Schlüsse findet man allgemein für Zeile n):

„Die beiden Nachbarn von $\varkappa$ sind bezw. um $\varkappa$ grösser als diejenigen von $(n-\varkappa)$ für $\varkappa = 1, 2, \ldots, n-1$.“

Lassen umgekehrt die Zahlen $1, 2, \ldots, n-1$ eine derartige Anordnung zu, wählt man diese als Zeile n) und leitet daraus durch cyklische Vertauschung $n-1$ Zeilen $1), 2), \ldots, n-1)$ ab, so bilden diese eine Anordnung (E), weil die $n(n-1)$ Zahlenpaare lauter Dreiecke bilden. Ist nämlich a, b ein beliebiges Paar der Zeile n), so enthält diese nach Voraussetzung noch die beiden Paare $n-b,\ a-b$ und $n-a+b,\ n-a$. Folglich enthält auf Grund der cyklischen Vertauschung Zeile a) das Paar bn und Zeile b) das Paar na; d. h. jedes beliebige Paar der Zeile n), also jedes beliebige Paar einer beliebigen Zeile gehört einem Dreieck an.

Die beiden Probleme sind also in der That identisch.

15. Wir erstreben die Lösung bei der ursprünglichen Form der Frage.

Die Gesammtheit der Zahlenpaare $(i\varkappa)$, welche die Dreiecksseiten oder die Nachbarpaare in der Anordnung (E) bilden müssen, ordnen wir in der Weise in $n-1$ Zeilen, dass wir in die erste Zeile [1] alle Paare $(i\varkappa)$ mit der Differenz $\varkappa - i = 1$, in die zweite [2] alle mit der Differenz $\varkappa - i = 2$ u. s. w. stellen:

$$(\mathrm{F})\quad \begin{cases} [1] & (1\,2)\ (2\,3)\ \ldots\ (n-1,\ n)\quad (n\,1), \\ [2] & (1\,3)\ (2\,4)\ \ldots\ (n-1,\ 1)\quad (n\,2), \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ [n-1] & (1\,n)\ (2\,1)\ \ldots\ (n-1,\ n-2)\ (n,\ n-1). \end{cases}$$

Dann erhält man ein Dreieck, wenn man Paare aus 3 Zeilen $[i]$, $[\varkappa]$, $[l]$ verbindet, bei denen

$$i + \varkappa + l \equiv 0 \text{ mod. } n,$$

also z. B. (1 2) aus [1] mit (2 4) aus [2] mit (4 1) aus $[n-3]$. Soll nun die Anordnung cyklisch werden, so muss das Vorkommen eines Dreiecks $(a\,b\,c)$ dasjenige der $n-1$ andern

$$\begin{array}{lll}(a+1, & b+1, & c+1),\\ (a+2, & b+2, & c+2),\\ \cdots & \cdots & \cdots \\ (a+n-1, & b+n-1, & c+n-1)\end{array}$$

nach sich ziehen. Diese entstehen aber alle, indem man jedesmal denselben 3 Zeilen von (F), die zur Bildung von (a, b, c) dienten, in derselben Reihenfolge je ein Paar entnimmt. Es müssen also zunächst die Zeilen von (F) so zu je dreien zusammengefasst werden können, dass die Summe der Repräsentationszahlen der drei immer $\equiv 0 \bmod. n$ ist. Dies erfordert also einmal, dass $n-1$ durch 3 theilbar ist, und dann dass $1+2+\cdots+n-1=\frac{n(n-1)}{2}$ ein ganzzahliges Vielfaches von n, also $n-1$ auch durch 2 theilbar ist.

Wir kommen also zunächst zu dem Resultat, dass für die Möglichkeit einer Anordnung (E) n *nothwendig* die Form haben muss

$$n = 6\lambda + 1.$$

Da nun von den regulären Fällen $n = 12\varkappa + 7$ der einzige ist, wo n diese Form hat, so sehen wir:

„*Höchstens in den Fällen* $n = 12\varkappa + 7$ *ist eine cyklische Anordnung* (E) *möglich*“

und gleichzeitig, wenn wir den Ausspruch des andern Theorems nur dadurch der Uebersichtlichkeit wegen modificiren, dass wir alle Zahlen, die $> \frac{n-1}{2}$ sind, durch die negativen, ihnen mod. n congruenten ersetzen:

„*Höchstens, wenn* $n = 12\varkappa + 7$, *ist es möglich, die Zahlen* $\pm 1, \pm 2, \ldots, \pm \frac{n-1}{2}$ *derart in einen Cyklus zu ordnen, dass die beiden Nachbarn von* λ $\left(\lambda = \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm \frac{n-1}{2}\right)$ *bezw. um* λ *grösser sind als die von* $-\lambda$.“

§ 5.

Herstellung einer cyklischen Anordnung für $n = 12\varkappa + 7$, wenn $\varkappa$ gewissen Bedingungen genügt.

16. Die Gruppirung der Zahlen $1, 2, \ldots, n-1$ zu je dreien mit einer durch n theilbaren Summe muss aber noch eine andere Bedingung erfüllen, wenn sie wirklich zu einer cyklischen Anordnung (E) führen soll. Da nämlich die Zahlen $1, 2, \ldots, n-1$ nur die einzelnen Zeilen von (F) repräsentiren, so müssen in der gedachten Gruppirung die Zahlen noch innerhalb der einzelnen Zeilen von je

drei Elementen (die wir wieder als geschlossene Zeilen ansehen) so festgelegt werden können, dass, wenn man nun zur Dreiecksbildung gemäss dieser Gruppirung der Zeilen von (F) zu je dreien in bestimmter Folge schreitet, die $n-1$ Dreiecke mit der gemeinsamen Spitze 1 z. B. einen *einzigen* Cyklus bilden, d. h. wenn man mit einem Dreieck $(1\alpha\beta)$ beginnt, woran sich $(1\beta\gamma)$, dann $(1\gamma\delta)$ schliesst u. s. w., so darf erst das $(n-1)^{\text{te}}$ Dreieck, etwa $(1\nu\alpha)$ wieder die Ecke α enthalten. Ist dies für *eine* Zahl, z. B. für 1, erfüllt, so gilt es für alle zufolge des cyklischen Charakters der Anordnung. Für die gedachte Gruppirung der Zahlen $1, 2, \ldots, n-1$ drückt sich diese Forderung folgendermassen aus: Geht man von einer Zeile $a\,b\,c$ (bei der also die Reihenfolge a, b, c abgesehen von cyklischer Verschiebung festgelegt ist) zu einer andern über, dadurch dass man die Zeile aufsucht, welche die Zahl $a+b$ enthält (Summe von a und der rechts daneben stehenden), dann von hier, wenn rechts von $a+b$ b' steht, zu der Zeile mit $a+b+b'$ u. s. w., so darf man erst beim $(n-1)^{\text{ten}}$ Schritt wieder zu der Ausgangszahl a zurückkehren.

Wir wollen nun unter Zugrundelegung einer *bestimmten*, besonders übersichtlichen Gruppirung der Zahlen $1, 2, \ldots, n-1$, bei der die Reihenfolge innerhalb der Zeilen zunächst noch nicht endgültig festgelegt ist, zeigen, dass, wenn n einer von zwei bestimmten Bedingungen genügt, und nur in diesen beiden Fällen die gewählte Gruppirung durch eine geeignete endgültige Festlegung innerhalb der Zeilen zu einer cyklischen Anordnung führt, welche selbst unmittelbar gegeben wird. Wir führen diese Untersuchung bei der allgemeineren Annahme, dass n die Form $6\lambda+1$ hat, so weit als möglich, um erst dann, wenn sich dies von selbst gebietet, die Voraussetzung $\lambda = 2\varkappa + 1$ hinzuzunehmen und so wieder zu dem speciell vorliegenden Fall zurückzukehren.

17. Wenn $n-1 = 6\lambda$, so lassen sich die Zahlen $1, 2, \ldots, 6\lambda$ der Forderung des Artikels 15 gemäss in folgender Weise gruppiren

$$
\text{(G)}\qquad
\left\{
\begin{array}{ccc}
1 & 2 & 6\lambda-2 \\
3 & 4 & 6\lambda-6 \\
\cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot \\
2\lambda-3 & 2\lambda-2 & 2\lambda+6 \\
2\lambda-1 & 2\lambda & 2\lambda+2 \\
 & & \\
2\lambda+1 & 4\lambda+1 & 6\lambda \\
2\lambda+3 & 4\lambda+3 & 6\lambda-4 \\
\cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot \\
4\lambda-3 & 6\lambda-3 & 2\lambda+8 \\
4\lambda-1 & 6\lambda-1 & 2\lambda+4
\end{array}
\right.
$$

Diese Gruppirung (G) hat folgende Eigenschaften, von denen wir später Gebrauch zu machen haben, und deren Beweis so einfach ist, dass er wohl unterdrückt werden darf:

1) Die Summe von 3 nebeneinander stehenden Zahlen ist

in den λ ersten Zeilen $= n$,
in den λ letzten Zeilen $= 2n$.

2) die Summe zweier in Bezug auf die Mittellinie (die das ganze System der Höhe nach in 2 Hälften theilt) symmetrisch stehenden Zahlen ist

in der ersten Colonne $= 4\lambda$,
in der zweiten Colonne $= 6\lambda + 1$ $(= n)$,
in der dritten Colonne $= 2\lambda + 1$ (mod. n natürlich).

3) Die Summe je zweier Zahlen derselben Zeile kommt einmal in der Gruppirung vor. Jede Zahl ist die Summe eines und nur eines bestimmten Paares von Zahlen derselben Zeile.

4) Die Summe zweier Zahlen, welche in der ersten und dritten Colonne in gleicher Zeile stehen, ist diejenige Zahl der zweiten Colonne, welche in der zu jener obigen symmetrischen Zeile steht. — Die Summe zweier Zahlen, die in der ersten und zweiten Colonne nebeneinander stehen, ist eine Zahl der ersten Colonne, die Summe zweier Zahlen, die in der zweiten und dritten Colonne nebeneinander stehen, ist eine Zahl der dritten Colonne, und zwar, wenn $a\,b\,c$ eine Zeile und $a'\,b'\,c'$ diejenige andere ist, bei der

$$a' = a + b,$$

so ist gleichzeitig

$$c = b' + c'.$$

5) Geht man von einer Zeile $a\,b\,c$ zu einer andern dadurch über, dass man die Zeile wählt, welche die Summe irgend zweier dieser drei Zahlen enthält, so gelangt man von der zu $a\,b\,c$ symmetrisch stehenden Zeile $4\lambda - a$, $6\lambda + 1 - b$, $2\lambda + 1 - c$ bei demselben Fortschreitungsmodus auch zu der symmetrischen Zeile der vorher erreichten.

Geht man z. B. von $a\,b\,c$ zu der Zeile, die an erster Stelle $a + b$ hat, so gelangt man von $4\lambda - a$, $6\lambda + 1 - b$, $2\lambda + 1 - c$ durch Addition der beiden ersten Zahlen zu $4\lambda - (a + b)$ in der ersten Colonne, d. h. zu der symmetrischen Zahl von $a + b$ u. s. w.

18. Durchlaufen wir nun die Gruppirung (G), bei der wir uns die Reihenfolge innerhalb der Zeilen vorläufig so, wie sie geschrieben ist, festgelegt denken, in der vorher angedeuteten Weise, indem wir etwa beginnen mit $1, 2$ aus der ersten Zeile, dann also $3, 4$, dann $7, 8$ u. s. w. folgen lassen, so schliesst sich diese Folge nach Eigen-

schaft 4) spätestens beim $2\lambda^{\text{ten}}$ Schritt dadurch, dass die Summe der beiden letzten Zahlen (es sind dies dann $2\lambda+1$, $4\lambda+1$) $\equiv 1 \bmod. n$ wird. Schliesst sie sich früher, dann beginnen wir auf's Neue mit einem nebeneinander stehenden Zahlenpaar der ersten und zweiten Colonne, das noch nicht benutzt ist, u. s. w., bis alle Paare von Zahlen aus der ersten und zweiten Colonne verbraucht sind, sodass wir aus diesen eine oder mehrere solche geschlossenen Folgen bekommen. Nach Eigenschaft 5) folgt nun, dass eine solche Folge entweder „in sich selbst symmetrisch" ist, d. h. zu jedem Zahlenpaar a, b auch das symmetrische $4\lambda - a$, $6\lambda+1-b$ enthält, und zwar so, dass, wenn auf a, b a_1, b_1 folgt, dann auch auf $4\lambda - a$, $6\lambda+1-b$, das Paar $4\lambda - a_1$, $6\lambda+1-b_1$ folgt, — oder es existirt eine zu jener Folge in diesem Sinn symmetrische andere. Beidemal ist also die Zahl der Zeilen, die verbraucht wurde für die eine in sich symmetrische oder für das Paar symmetrischer Folgen, eine gerade $=2\mu$.

Um nun zu erkennen, in welcher Weise sich die andern Paare (d. h. die Paare b, c und c, a, wobei wir die Buchstaben a, b, c bezw. immer für die erste, zweite, dritte Colonne festhalten) dieser 2μ Zeilen zu Folgen zusammenschliessen, — denn man wird gleichzeitig sehen, dass die eventuell übrigen Zeilen dabei gar nicht mitspielen, — bezeichnen wir die 2μ Paare aus der ersten und zweiten Colonne, wie sie sich als aufeinanderfolgend ergeben haben, durch

$$a_1 b_1,\ a_2 b_2,\ a_3 b_3,\ \ldots,\ a_\mu b_\mu$$

und die dazu bezw. symmetrischen durch

$$a_1' b_1',\ a_2' b_2',\ a_3' b_3',\ \ldots,\ a_\mu' b_\mu'.$$

Dann ist also

$$a_1 + b_1 = a_2,\quad a_2 + b_2 = a_3,\ \ldots,\ a_{\mu-1} + b_{\mu-1} = a_\mu,$$
$$a_1' + b_1' = a_2',\quad a_2' + b_2' = a_3',\ \ldots,\ a_{\mu-1}' + b_{\mu-1}' = a_\mu$$

und ferner *entweder* a) $a_\mu + b_\mu = a_1'$, $a_\mu' + b_\mu' = a_1$,

oder b) $a_\mu + b_\mu = a_1$, $a_\mu' + b_\mu' = a_1'$.

Beginnt man nun eine andere Folge etwa mit $b_\mu c_\mu$, so schliesst sich daran nach Eigenschaft 4) $c_{\mu-1}\, a_{\mu-1}$, dann $b_{\mu-1}'\, c_{\mu-1}'$ u. s. w. Also es folgen auf einander

$$\begin{array}{ll} b_\mu & c_\mu \\ & c_{\mu-1}\, a_{\mu-1} \\ b_{\mu-1}' & c_{\mu-1}' \\ & c_{\mu-2}'\, a_{\mu-2}' \\ b_{\mu-2} & c_{\mu-2} \end{array}$$

u. s. w.

Ist nun I. μ *ungerade*, so kommt schliesslich

$$b_1 c_1$$

und dann im Falle a) $\quad c'_\mu a'_\mu,$

worauf wieder b_μ folgt, also die Reihe sich mit 2μ Paaren schliesst, deren jedes einer andern der 2μ Zeilen von (G) entstammt. Da die Folge nicht in sich selbst symmetrisch ist, bekommen wir sogleich eine zweite, wenn einfach alle gestrichenen Buchstaben durch die ungestrichenen ersetzt werden und umgekehrt.

Im Fall I. b) dagegen folgt auf $b_1 c_1$, $c_\mu a_\mu$, dann $b'_\mu c'_\mu$, $c'_{\mu-1} a'_{\mu-1}$ u. s. w. symmetrisch wie vorher, bis die Reihe sich nach $c'_\mu a'_\mu$ schliesst. In diesem Fall hat man also eine sich selbst symmetrische Folge von 4μ Paaren, 2 aus jeder der 2μ Zeilen; und wenn man irgend 2μ aufeinander folgende Paare der Folge nimmt, so hat man damit Vertreter aller 2μ Zeilen.

Ist II. μ *gerade*, so kommt man, wie vorher mit $b_\mu c_\mu$ anfangend, zuerst zu

$$b_1' c_1'$$

worauf im Fall a)

$$\begin{array}{ll} & c_\mu \quad a_\mu \\ b'_\mu\ c'_\mu & \\ & c'_{\mu-1} a'_{\mu-1} \\ & \text{u. s. w.} \end{array}$$

also die symmetrische Wiederholung des Anfangs folgt, bis die Reihe sich schliesst wie im Fall I. b).

Im Fall b) dagegen folgt auf

$$\begin{array}{ll} b_1'\ c_1' & \\ & c'_\mu a'_\mu \end{array}$$

und dann schliesst die Reihe schon mit b_μ nach 2μ Schritten, und es giebt wieder eine zweite ihr symmetrische.

Fassen wir aus dieser Betrachtung zusammen, was für das Folgende wichtig ist, so lautet es:

„*Jeder in sich selbst symmetrischen Folge oder jedem Paar symmetrischer Folgen von 2μ Zahlenpaaren aus den beiden ersten Colonnen von* (G) *treten an die Seite eine in sich selbst symmetrische Folge oder ein Paar symmetrischer Folgen von Zahlenpaaren aus denselben Zeilen der zweiten und dritten und aus der dritten und ersten Colonne, sodass alle 6μ Zahlenpaare dieser 2μ Zeilen erschöpft werden.*"

19. Da wir nun die Fälle aufsuchen, in denen wir aus der ganzen Gruppirung (G) nur eine einzige solche geschlossene Folge erhalten, aber nur noch innerhalb der Zeilen von (G) umstellen wollten, so ist nach dem Vorstehenden klar, dass jene 2μ Zeilen die ganze Gruppirung (G)

erschöpfen müssen, d. h. dass $\mu = \lambda$ sein muss. Denn sonst könnte man ja auf keine Weise durch Umstellung innerhalb der Zeilen die aus den 2μ Zeilen herrührenden geschlossenen Folgen mit den noch ausserdem vorhandenen in Verbindung bringen. Dies wird nach dem Folgenden noch klarer hervortreten, wo wir untersuchen, unter welchen Bedingungen und auf welche Art die verschiedenen Folgen, die wir aus den 2μ Zeilen zunächst erhalten, durch blosse Umstellung innerhalb der Zeilen zu einer einzigen zusammenzuschliessen sind.

Fall I, a). — Wir haben drei Folgen, deren jede aus jeder Zeile ein Paar enthält. Nehmen wir aber in einer Zeile von (G) eine wesentliche Umstellung vor, d. h. nicht eine nur cyklische Aenderung, so schliessen sich die 3 Folgen zu einer einzigen zusammen. In der That, ist $a\ b\ c$ etwa die Zeile in der alten Ordnung, so hat man in der einen der drei geschlossenen Reihen die Aufeinanderfolge

$$\cdot\cdot\,|\,a,\, b\,|\,a+b,\,\cdot\,|\,\cdot\cdot$$

in der zweiten

$$\cdot\cdot\,|\,b,\, c\,|\,b+c,\,\cdot\,|\,\cdot\cdot$$

in der dritten

$$\cdot\cdot\,|\,c,\, a\,|\,c+a,\,\cdot\,|\,\cdot\cdot\cdot.$$

Wird nun $a\ b\ c$ in $a\ c\ b$ umgestellt, so wird aus $|\,a\,b\,|$ $|\,a\,c\,|$; denn a bleibt ja als durch das vorhergehende Paar bedingt an seiner Stelle stehen; aus $|\,b\,c\,|$ wird $|\,b\,a\,|$, aus $|\,c\,a\,|$ wird $|\,c\,b\,|$. Beginnt man nun die erste Folge mit $|\,a+b,\,\cdot\,|\cdot\cdot\cdot$, so kommt man endlich zu $|\,a\,c\,|$; daran schliesst sich jetzt $|\,c+a,\,\cdot\,|\cdot\cdot\cdot$ bis $|\,c\,b\,|$, daran $|\,b+c,\,\cdot\,|\cdot\cdot\cdot$ bis $|\,b\,a\,|$ und hieran wieder der Anfang $|\,a+b,\,\cdot\,|\cdot\cdot\cdot$, womit die Behauptung erwiesen ist.

Es werden also hierbei gleichsam drei gleich grosse Kreise, auf deren Peripherie wir uns die drei Folgen aufgetragen denken können, aufgeschnitten, aber gleichzeitig die 6 Enden anders als vorher mit einander verbunden und zwar in diesem Falle so, dass ein einziger neuer Kreis entsteht. Es sei gestattet, der Kürze wegen im Folgenden diese bildliche Ausdrucksweise zu gebrauchen, die jeden Augenblick wieder durch die rein arithmetische ersetzt werden kann.

Fall I, b). — Zwei einander symmetrische Folgen aus der ersten und zweiten Colonne und eine in sich selbst symmetrische aus den übrigen Zahlenpaaren derselben Zeilen.

Wir können hier keinen Schnitt legen, der alle drei Kreise, von denen 2 einander gleich sind, während die Peripherie des dritten doppelt so lang ist als die der beiden andern zusammen, gleichzeitig trifft. Legt man aber erst einen Schnitt, der den einen der beiden kleinen Kreise einmal, den grossen also zweimal schneidet, so schliessen sich die Stücke zu 2 Kreisen zusammen, deren einer aus der Hälfte des früheren grossen, deren anderer aus der anderen Hälfte und dem kleinen Kreis besteht. — Die drei jetzt vorhandenen Kreise können also durch einen zweiten Schnitt gleichzeitig getroffen und daher (ebenso wie vorher) zusammengeschlossen werden.

Fall II, a). — Zwei Kreise, deren einer alle 2μ Zeilen einmal, deren zweiter alle zweimal berührt.

Jeder beliebige Schnitt wird beide Kreise treffen, nämlich den kleinen einmal, den grossen zweimal; aber die Stücke schliessen sich wieder zu 2 Kreisen zusammen, und eine Wiederholung kann natürlich nur immer wieder zu demselben Resultat führen.

In diesem Fall ist also die Herstellung einer einzigen geschlossenen Folge aus der Gruppirung (G) unmöglich.

Fall II, b). — Zwei gleich grosse Kreise, welche zusammen alle Zeilen einmal und 2 andere doppelt so grosse Kreise, deren jeder alle Zeilen einmal berührt.

Durch jeden beliebigen Schnitt wird einer der beiden kleinen Kreise mit den beiden grossen zusammengeschlossen, sodass nun wieder dieselbe Situation wie im vorigen Fall herrscht; auch hier ist also die Herstellung einer einzigen Folge unmöglich.

Fall I, in dessen beiden Unterfällen die Ausführung möglich war, ist aber gerade der unsrige, da bei uns $\lambda = 2\varkappa + 1$, also ungerade ist. Das Resultat dieser Betrachtung ist also dieses:

„*Wenn bei einer Zahl* $n = 12\varkappa + 7$ *die Gruppirung* (G) *bewirkt, dass die Zahlenpaare der beiden ersten Colonnen sich zu einer einzigen Folge zusammenschliessen oder zu zwei einander symmetrischen Folgen, — und nur in diesen beiden Fällen, — wird durch eine blosse Umstellung in einer, bezw. in zwei Zeilen die Gruppirung erreicht, welche eine cyklische Anordnung* (E) *liefert.*“

20. Es bleibt daher nur noch die Frage zu beantworten: Wie muss die Zahl $n = 12\varkappa + 7$ beschaffen sein, damit die beiden ersten Colonnen von (G) eine einzige oder zwei einander symmetrische Folgen von Zahlenpaaren ergeben?

Zu dem Ende beobachten wir, wie bei der angegebenen Art des Fortschreitens von Paar zu Paar in der Gruppirung

$$(\mathrm{H})\qquad \left\{\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 12\varkappa+4 \\ 3 & 4 & 12\varkappa \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ 4\varkappa+1 & 4\varkappa+2 & 4\varkappa+4\,. \\ 4\varkappa+3 & 8\varkappa+5 & 12\varkappa+6 \\ 4\varkappa+5 & 8\varkappa+7 & 12\varkappa+2 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ 8\varkappa+3 & 12\varkappa+5 & 4\varkappa+6 \end{array}\right.$$

(die nur eine Wiederholung der Gruppirung (G) für $\lambda = 2\varkappa + 1$ ist) die Zahlen der zweiten Colonne auf einander folgen, wenn man z. B. mit dem Paar 1, 2 anfängt. Es folgen dann 3, 4; 7, 8; 15, 16; u. s. w., also in der zweiten Colonne die Zahlen 2, 4, 8, 16, u. s. w. In der That folgen die Zahlen der zweiten Colonne auch weiterhin als die Potenzen von 2 aufeinander, wenn man diese mod. $(4\varkappa + 3)$ nimmt und jedesmal, wenn der kleinste Rest von 2^λ mod. $(4\varkappa + 3)$ ungerade wird, $8\varkappa + 4$ addirt.

Zunächst sieht man, dass die zweite Colonne wirklich gerade die Zahlen $1, 2, \ldots, 4\varkappa + 2$, die ungeraden nur um $8\varkappa + 4$ vermehrt, enthält. Ist nun a, eine Zahl der zweiten Colonne, in der angegebenen Weise einer bestimmten Potenz von 2 z. B. 2^μ zugeordnet, d. h. so, dass, wenn a der oberen Hälfte angehört,

$$a \equiv 2^\mu \text{ mod. } (4\varkappa + 3),$$

im andern Fall aber

$$a - (8\varkappa + 4) \equiv 2^\mu \text{ mod. } (4\varkappa + 3)$$

ist, so zeigt die folgende Ueberlegung, dass man dann von a bei unserer Art fortzuschreiten zu einer Zahl der zweiten Colonne gelangt, welche in derselben Weise $2^{\mu+1}$ zugeordnet ist. Dabei sind 4 Fälle zu unterscheiden:

1) a sei eine Zahl der oberen Hälfte; $a \equiv 2^\mu$; links von a steht $a - 1$.

α) $2a - 1$ steht auch noch in der oberen Hälfte; dann ist der rechte Nachbar von $2a - 1$, d. h. die in der zweiten Colonne auf a folgende Zahl, $= 2a$, also eine Zahl, die $\equiv 2^{\mu+1}$.

β) $2a - 1$ steht schon in der unteren Hälfte; dann ist ihr rechter Nachbar $2a + 4\varkappa + 1$. Subtrahirt man aber davon $8\varkappa + 4$, so ist die resultirende Zahl $2a - (4\varkappa + 3)$ wieder $\equiv 2^{\mu+1}$.

2) a sei eine Zahl der unteren Hälfte; $a - (8\varkappa + 4) \equiv 2^\mu$; links von a steht $a - (4\varkappa + 2)$. Auf das Paar

$$a - (4\varkappa + 2),\ a$$

folgt aber als Zahl der ersten Colonne

$$2a - (4\varkappa + 2) - (12\varkappa + 7) = 2a - (16\varkappa + 9);$$

denn da die Summe zweier Zahlen einer Zeile der beiden ersten Colonnen in der untern Hälfte stets $> 12\varkappa + 7$, musste $12\varkappa + 7$ substrahirt werden.

α) $2a - (16\varkappa + 9)$ steht in der oberen Hälfte; dann ist der rechte Nachbar, also die in der zweiten Colonne auf a folgende Zahl

$$2a - (16\varkappa + 9) + 1 \equiv 2^{\mu+1}.$$

β) $2a - (16\varkappa + 9)$ stehe in der untern Hälfte; dann ist ihr rechter Nachbar

$$2a - (16\varkappa + 9) + 1 + 4\varkappa + 1 = 2a - (12\varkappa + 7).$$

Subtrahirt man davon $8\varkappa + 4$, so ist die resultirende Zahl

$$2a - (20\varkappa + 11) \equiv 2^{\mu+1}.$$

Nun sind die zuerst auftretenden Zahlen der zweiten Colonne $2, 4, 8, \ldots$ wirklich in der angegebenen Weise den Potenzen von 2 zugeordnet; folglich ist mit der vorstehenden Betrachtung der vier möglichen Fälle unsere Behauptung erwiesen.

Dann aber können wir die zu Anfang dieses Artikels aufgeworfene Frage sogleich beantworten. Die Folge, die mit $|1, 2|$ beginnt, schliesst sich, wenn man zu dem Paar

$$4k + 3, \quad 8\varkappa + 5$$

gelangt ist, also zu der Zahl $8\varkappa + 5$ der zweiten Colonne, die um $8\varkappa + 4$ vermindert $= 1$ wird. Die beiden ersten Colonnen von (H) liefern also eine einzige Folge, wenn erst die $(4\varkappa + 2)^{\text{te}}$ Potenz von 2 $\equiv 1$ mod. $(4\varkappa + 3)$ wird, d. h. wenn 2 primitive Wurzel von $4\varkappa + 3$ ist, und sie liefern zwei einander symmetrische Folgen, wenn $2^{2\varkappa+1}$ als niedrigste Potenz von 2 $\equiv 1$ mod. $(4\varkappa + 3)$ wird. Dass diese beiden Folgen nämlich zu einander und nicht in sich selbst symmetrisch sind, geht einfach daraus hervor, dass die Zahl ihrer Glieder $2\varkappa + 1$, ungerade, ist.

Das Resultat des gegenwärtigen Paragraphen ist also dieses:

„*Wenn in* $n = 12\varkappa + 7$ $\varkappa$ *der einen oder der andern von den beiden obigen Bedingungen genügt, und nur in diesen Fällen führt die Gruppirung* (H) *zu einer cyklischen Anordnung* (E).“

Schluss.

21. Fassen wir die Ergebnisse der vorliegenden Untersuchung kurz zusammen, so sind es die folgenden:

Für jeden Werth von n gilt Formel (A).

Gleichung (B) *gilt sicher bis einschliesslich* $n = 12$, *bezw.*, *Gleichung* (C) *bis einschliesslich* $p = 6$.

Die Lösung des Problems der Nachbargebiete (abgesehen von den Fällen $n = 5, 6$) *durch eine cyklische Anordnung* (E) *und die Lösung des damit identischen Problems, ist höchstens möglich, wenn n die Form* $12\varkappa + 7$ *hat.*

Die Lösung ist wirklich herstellbar, wenn dabei $\varkappa$ *so beschaffen ist, dass entweder*

a) 2 *primitive Wurzel von* $(4\varkappa + 3)$ *ist*

oder

b) $2^{2\varkappa+1}$ *als niedrigste Potenz von* 2 $\equiv 1$ mod. $(4\varkappa + 3)$ *wird.*

Für alle diese Werthe von n gelten somit die Gleichungen (B) *und* (C).

Zur Herstellung der cyklischen Anordnung dient die Gruppirung (H), *bei der im Falle* a) *nur eine Zeile geändert wird, etwa die erste* *unter der Mittellinie, im Falle* b) *noch eine zweite, etwa die letzte Zeile. Fasst man die Zahlen von* (H) *dann als Repräsentanten der Zeilen von* (F) *auf, und verbindet deren Elemente entsprechend, so entsteht eine Anordnung* (E).

Die genannten Fälle erschöpfen alle, in denen (H) *zu einer Anordnung* (E) *führt.*

Als Beispiel möge dienen für a)

$$n = 31.$$

Die Gruppirung (H) ist:

1	2	28
3	4	24
5	6	20
7	8	16
9	10	12
11	21	30
13	23	26
15	25	22
17	27	18
19	29	14

$\varkappa = 2$; $4\varkappa + 3 = 11$; 2 primitive Wurzel mod. 11.

Nach Umstellung der Zeile 11 21 30, was durch den Bogen angedeutet wird, führt die Gruppirung zu einer einzigen geschlossenen Folge von Paaren:

$$\| 1,2 \mid 3,4 \mid 7,8 \mid 15,25 \mid 9,10 \mid 19,29 \mid 17,27 \mid 13,23 \mid 5,6 \mid 11,30 \mid 10,12 \mid 22,15 \mid 6,20 \mid 26,13 \mid 8,16 \mid 24,3 \mid 27,18 \mid 14,19 \mid 2,28 \mid 30,21 \mid 20,5 \mid 25,22 \mid 16,7 \mid 23,26 \mid 18,17 \mid 4,24 \mid 28,1 \mid 29,14 \mid 12,9 \mid 21,11 \|.$$

Hieraus ergiebt sich Zeile (31) der cyklischen Anordnung (E), indem man aus jedem Paar immer die erste Zahl nimmt:

(31) 1 3 7 15 9 19 17 13 5 11 10 22 6 26 8 24 27 14 2 30 20 25 16 23 18 4 28 29 12 21.

Gleichzeitig hat man hierin eine Lösung des äquivalenten Problems, dem man auch die in Art. 15 genannte Form geben kann.

Als Beispiel für Fall b) diene:

$$n = 19.$$

Die Gruppirung (H) ist

1	2	16
3	4	12
5	6	8
7	13	18
9	15	14
11	17	10

$\varkappa = 1$; $4\varkappa + 3 = 7$; bereits $2^3 \equiv 1$ mod. 7; nach den angedeuteten zwei Umstellungen führt die Gruppirung zu einer einzigen geschlossenen Folge von Paaren:

$$\| 1,2 \mid 3,4 \mid 7,18 \mid 6,8 \mid 14,9 \mid 4,12 \mid 16,1 \mid 17,11 \mid 9,15 \mid 5,6 \mid 11,10 \mid 2,16 \mid 18,13 \mid 12,3 \mid 15,14 \mid 10,17 \mid 8,5 \mid 13,7 \|.$$

Also Zeile 19) von (E) wird:

19) 1 3 7 6 14 4 16 17 9 5 11 2 18 12 15 10 8 13

und die Anordnung der Zahlen $\pm 1, \pm 2, \cdots, \pm 9$ mit der angegebenen Eigenschaft:

$$1, 3, 7, 6, -5, 4, -3, -2, 9, 5, -8, 2, -1, -7, -4, -9, 8, -6.$$

Wenn man für die niedrigsten Werthe von $\varkappa$ untersucht, welche der Zahlen $12\varkappa + 7$ die Bedingung a), welche die Bedingung b) erfüllen, so ergiebt sich: das Erstere gilt von $\varkappa = 0$, $n = 7$; $\varkappa = 2$, $n = 31$; $\varkappa = 4$, $n = 55$; dann erst von $\varkappa = 14$, $n = 175$ u. s. w., das Letztere von $\varkappa = 1$, $n = 19$; $\varkappa = 5$, $n = 67$; $\varkappa = 11$, $n = 139$; u. s. w. — Allgemein lässt sich zeigen, dass wenn $\varkappa$ ein Multiplum von 3 ist, die Gruppirung (H) nicht zu einer Lösung führt.

Wir haben also zwar alle Fälle erschöpft, in denen die Gruppirung (H) zu einer Lösung des Problems durch eine cyklische Anordnung führt, aber es bleibt noch die Frage offen, ob nicht eine *andere* Gruppirung als (H) noch in *den* Fällen $n = 12\varkappa + 7$ zum Ziel führt, wo (H) versagt. Hierzu ist übrigens zu bemerken, dass man aus (H) sogleich $n - 2$ andere Gruppirungen, die alle genau dasselbe wie (H), nicht mehr und nicht weniger, leisten, ableiten kann, indem man alle Zahlen in (H) einmal mit 2, einmal mit 3 u. s. w., einmal mit $n - 1$ multiplicirt und mod. n nimmt.

Giessen, November 1890.