

PHYSIK UND CHEMIE.

NEUE FOLGE. BAND 66.

1. *Gravitationsconstante und mittlere Dichtigkeit
der Erde, bestimmt durch Wägungen;
von Franz Richarz und Otto Krigar-Menzel.*

(Sitzungsbericht der königl. preuss. Akademie der Wissenschaften zu
Berlin, 26. Nov. 1896.)

Die in Spandau im Jahre 1884 auf Kosten der königlichen Akademie der Wissenschaften und mit Unterstützung des königlich preussischen Kriegsministeriums, welches die Bleimasse und den Beobachtungsraum zur Verfügung stellte, begonnene Bestimmung der Gravitationsconstante und der mittleren Dichtigkeit der Erde ist nunmehr zu Ende geführt. Nachdem H. v. Helmholtz in der Sitzung vom 23. März 1893¹⁾ bereits die Resultate einer ersten Reihe von Wägungen, aus denen sich die Abnahme der Schwere mit der Höhe ergab, der Akademie vorgelegt hat, geben wir im Folgenden einen kurzen Ueberblick über die ganze Arbeit und theilen das endgültige Resultat derselben mit. In betreff der ausführlichen Begründungen und Ableitungen, sowie auch der Mittheilung des gesammten Beobachtungsmateriales muss auf die später erscheinende vollständige Veröffentlichung der Arbeit verwiesen werden. (Vgl. Bemerkung am Schluss dieses Berichtes.)

1. Die bei den maassgebenden Versuchen angewandte Methode.

In unserer erwähnten früheren Mittheilung¹⁾ hatten wir zu Eingang das Princip der ursprünglich geplanten Methode auseinander gesetzt. Da bei den definitiven Messungen aber eine wesentlich veränderte Methode zur Ausführung gelangte, wollen wir zunächst deren Sinn in Worten angeben.

Den zur Anwendung kommenden Messapparat haben wir

1) F. Richarz u. O. Krigar-Menzel, Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wiss. zu Berlin p. 163. 1893; Wied. Ann. 51. p. 559. 1894.

„Doppelwaage“ genannt; er besteht aus einer gewöhnlichen Waage, an deren beiden Schalen mittelst je einer Stange von 226 cm Länge noch eine zweite, untere Schale hängt.

Ist diese Doppelwaage zunächst frei aufgestellt, so kommt für das Gleichgewicht bei Belastung in Betracht, dass die Beschleunigung durch die Schwerkraft am Orte der oberen Waageschalen einen kleineren Werth hat, als am Orte der unteren. An einem ersten Wägungstage befinden sich die beiden Kilogrammkgeln¹⁾ auf den Waageschalen links oben und rechts unten; es werden dann gewöhnliche Gauss'sche Doppelwägungen mit horizontaler Umsetzung der Massen von rechts nach links und umgekehrt angestellt. Die hieraus als Resultat folgende Gewichts-differenz rührt her von der Differenz der beiden Massen und von der Differenz der Schwerkraft oben und unten. Am Schluss eines solchen ersten Wägungstages wird die oben befindliche Masse nach unten, die unten befindliche nach oben gebracht, und man führt an einem zweiten Wägungstage wiederum Doppelwägungen mit Vertauschung im gleichen Niveau aus, deren Resultat von demjenigen des ersten Tages verschieden sein muss; denn während die Differenz der Massen unverändert geblieben ist, hat die Differenz der Schwere durch die verticale Umsetzung der Massen ihr Zeichen gewechselt. Subtrahirt man also die Resultate der beiden Tage, so hebt sich die Massendifferenz heraus, und es bleibt übrig die doppelte Abnahme der Schwere zwischen beiden Niveaus. Dies ist der Sinn der Gleichungen (4), (4'), (5) p. 175 und 176 unserer früheren Mittheilung in den Sitzungsberichten.²⁾

Bei den *Gravitationsbestimmungen* befindet sich zwischen den oberen und unteren Schalen ein nahezu würfelförmiger Bleiklotz von fast 9 cbm Inhalt und mehr als 100 000 kg Masse, welcher den zwischen dem oberen und unteren Schalenpaar vorhandenen Platz bis auf einen kleinen Spielraum ausfüllt; die beiden erwähnten Verbindungsstangen der Waageschalen gehen durch röhrenförmige Aussparungen in der Mitte des Klotzes hindurch (näheres folgt weiter unten). Durch die Anwesenheit dieser grossen anziehenden Masse erscheint die Schwere am Orte der oberen Waageschalen um die

1) Vgl. l. c. p. 171. 1893; Wied. Ann. 51, p. 568. 1894.

2) Wied. Ann. 51, p. 574 u. 575. 1894.

Attraction der Bleimasse vermehrt, am Orte der unteren Waageschalen um dieselbe vermindert. Die Abnahme der Schwerebeschleunigung von unten nach oben erscheint daher um die doppelte Attraction vermindert; die Combination zweier Wägungstage mit ganz denselben Anfangsstellungen und Vertauschungen der Kilogrammkgeln, wie ohne Bleiklotz, ergiebt daher jetzt statt der doppelten Abnahme der Schwere mit der Höhe ein um die vierfache Attraction des Bleiklotzes vermindertes Resultat. Aus der Vereinigung der Resultate ohne Bleiklotz und mit Bleiklotz findet man also die reine vierfache Attraction des letzteren, befreit von den ungleichen Wirkungen der irdischen Schwere über und unter demselben.

Der *Auftrieb der Luft*, welcher am Orte der oberen Waageschalen einen erheblich anderen Werth haben kann als am Orte der unteren, wurde zum grössten Theil compensirt durch zwei Hohlkugeln aus Platin von nahezu demselben Volumen wie die Kilogrammkgeln und einer Masse von je 53,318 g. Diese befanden sich bei den Wägungen immer auf den von den Vollkugeln unversetzt gebliebenen Waageschalen und blieben während einer combinirbaren Serie von Wägungstagen immer denselben Vollkugeln zugeordnet. Da die Volumina nicht vollkommen gleich waren, sondern Differenzen bis zu etwa 0,4 ccm übrig blieben, war dann noch eine Correction wegen des Auftriebes an dem aus zwei Wägungstagen gewonnenen Resultate anzubringen. Diese ist in der früheren Mittheilung (l. c. p. 177) durch $\Phi + \Phi'$ bezeichnet. Diese Summe lässt sich am einfachsten und sichersten bestimmen, indem man nicht erst Φ für jeden der beiden Tage aus den Dichtigkeiten der Luft oben und unten einzeln berechnet, vielmehr direct $\Phi + \Phi'$ aus den Thermometer- und Barometerablesungen herleitet; die Luftfeuchtigkeit hat bei den vorliegenden Verhältnissen keinen merklichen Einfluss auf diese Correction.

Aus den Wägungen jedes einzelnen Beobachtungstages ergiebt sich eine Grösse, welche wir α genannt haben. Dieselbe ist folgendermaassen zusammengesetzt:

$$(1)^1) \quad \alpha = \frac{1}{2} \cdot [(z_l - z_r)^I - (z_l - z_r)^{II} + (e^{II} - e^I) \cdot \omega] \text{ mg}$$

1) In dem früheren Sitzungsbericht (l. c. p. 176 u. 177) fehlt der Factor $\frac{1}{2}$ vor der eckigen Klammer.

Dabei bedeuten z_l und z_r die kleinen Zulagegewichte links und rechts, e ist die aus den Umkehrpunkten ermittelte Einstellung der Waage (Scalenablese mit Fernrohr, Spiegel am Waagebalken), ω ist der aus der Empfindlichkeit folgende Werth eines Scalentheiles in Milligrammen. Die oberen Indices I und II beziehen sich auf die beiden Kugelstellungen bei der Gauss'schen Doppelwägung. Nennt man die Beschleunigung der irdischen Schwere unten und oben g_u und g_o , und die absoluten Beträge der Beschleunigungen der Attraction des Bleiklotzes k_u und k_o , und bezeichnet man endlich die auf den zweiten Wägungstag bezogenen Grössen durch ein Häkchen, so erhält man:

$$(2) \quad \left. \begin{array}{l} \text{Ohne Bleiklotz: } g_u - g_o \\ \text{Mit Bleiklotz: } g_u - g_o - (k_o + k_u) \end{array} \right\} = 0,035183 \cdot \{\alpha + \alpha' + \Phi + \Phi'\}_{\text{sec}^2}^{\text{cm}}.$$

Der Factor 0,035183 ist gleich $g/(2\mathfrak{M})$, wo

$$g = 981,27 \text{ cm} \cdot \text{sec}^{-2}$$

die Schwerebeschleunigung für Spandau und $\mathfrak{M} = 946685 \text{ mg}$ die Massendifferenz einer Vollkugel und einer Hohlkugel ist. Die α und Φ sind in Milligramm anzugeben.

Für den Fall, dass dem Leser auffallen sollte, dass hier die Summe $\alpha + \alpha'$ in das Resultat eingeht, während bei der wörtlichen Auseinandersetzung von der Differenz der beiden Tagesergebnisse die Rede war, möge gesagt sein, dass diese Formel für diejenigen mit I bezeichneten Anfangsstellungen gilt, wo stets links oben und rechts unten die Kilogramm-kugeln liegen, während bei der Veranschaulichung der Methode ein Verticaltransport am Schluss des ersten Tages angenommen wurde, bei welchem also am zweiten Tage die Kilogramme ihre Anfangsstellung rechts oben und links unten haben. Wir haben, um Schutz vor einseitigen thermischen Fehlerquellen zu haben, auch mit dieser letzteren Anfangsstellung gearbeitet; dies entspricht aber einer Vertauschung der oberen Indices I' und II', und α' wechselt dabei sein Vorzeichen.

Um der geschweiften Klammer der vorstehenden Gleichung mehr Anschaulichkeit zu geben, sei gesagt, dass dieselbe den doppelten Werth der Gewichtszunahme bezeichnet, welche die Masse \mathfrak{M} (Vollkugel minus Hohlkugel), befreit vom Auftriebe, beim Transport von oben nach unten erfährt. Dieser Begriff

gilt auch bei Anwesenheit des Bleiklotzes, wenn unter Gewicht dabei die Superposition der irdischen Schwere und der Attractionswirkung der Bleimasse verstanden wird. Diese doppelte Zunahme beträgt ohne Bleiklotz etwa $+ 1,25$ mg, mit Bleiklotz dagegen $- 0,12$ mg; d. h. die Zunahme der irdischen Schwere wird durch die Massenanziehung um ein wenig übercompensirt und in eine geringe Abnahme verwandelt.

II. Ueber die experimentelle Ausführung der Versuche.

In Bezug auf die Einrichtung des Beobachtungsraumes, die Anordnung der Apparate, die Construction der Waage von Stückrath und die Beschaffenheit der Gewichtsstücke müssen wir auf die frühere Mittheilung und auf die künftige vollständige Abhandlung (vgl. p. 193) verweisen.

Der Bleiklotz hatte die Gestalt einer quadratischen Säule von 200 cm Höhe und 210 cm horizontaler Kantenlänge, und bestand aus einzelnen Stücken von der Form $10 \times 10 \times 30$ cm; diese waren in liegender Stellung unter Vermeidung durchlaufender Verticalfugen zu einem schönen, glattwandigen und geradkantigen Bau zusammengefügt, dessen exacte Begrenzungen bei der genauen Ausmessung des Klotzes sehr zu statten kamen. Wegen der in Schutzröhren eingeschlossenen Verbindungsstangen der unteren mit den oberen Waageschalen mussten in der Mitte des Klotzes durchschnittene Stücke mit halbcylindrischen Aussparungen verwendet werden. Um die saubere Ausführung des Aufbaues hat sich der Mechanikergehülfe Hermann verdient gemacht. Die Bleistücke wurden von der königlichen Geschützgiesserei in Spandau in zerlegbaren gehobelten Eisenformen gegossen, die Schwundflächen nach dem Erkalten besonders bearbeitet. Dem Augenschein nach ist der Guss durchaus blasenfrei, auch ist die Uebereinstimmung der Masse der einzelnen Stücke, welche auf einer empfindlichen Centnerwaage gewogen wurden, eine sehr vollkommene; bei einem Mittel von 34,2 kg betragen die grössten Abweichungen, welche höchst selten sind, nur $\pm 0,2$ kg.

Um die grosse Last dieser Bleimasse zu tragen, wurde ein Fundament gemauert, welches anderthalb Meter tief in der Erde steckt und ein halbes Meter hoch herausragt. Die quadratische Oberfläche von 2,5 m Kantenlänge ist durch eine

eben und horizontal gearbeitete Cementschicht gebildet, welche die Basis für den Bleiklotz bildete. Die unteren Schalen schweben in der Mitte eines im Fundamente dicht unter dessen Oberfläche ausgesparten Canals, welcher zugleich den Verkehr der Gewichtskugeln bei den automatischen Vertauschungen ermöglicht. Uebrigens ist dieser Canal zur Vermeidung von Luftströmungen durch eine Längsscheidewand getheilt und durch Fallthüren verschlossen.

Da eine Senkung des Fundamentes unter der grossen Belastung zu erwarten war, wurde erstens bei der Aufstellung der Waage und des optischen Beobachtungsapparates jeder directe Zusammenhang der festen Stützpunkte mit dem Fundamente vermieden, und zweitens eine Nivellirungseinrichtung angebracht, welche die Lageveränderung des Fundamentes und Bleiklotzes zu messen erlaubt. Es wurden nämlich drei eiserne Stangen mit den einen Enden auf verschiedene Randpunkte des Fundamentes, mit den anderen auf feste Lager in entfernten, festen Mauernischen aufgesetzt, und die Senkung der betreffenden Randpunkte des Fundamentes aus den Neigungen dieser Stangen mittels einer Röhrenlibelle ermittelt. Die Senkung der Mitte des Fundamentes betrug 8 mm, auch war eine Neigung der verticalen Axe nach rechts vom Beobachter im Betrage von etwa 8 Bogenminuten nachweisbar. Diese nicht unbeträchtlichen Lageänderungen störten indessen die Functionen der verschiedenen Apparattheile in keiner Weise. Nach dem Abbruch des Bleiklotzes zeigte das Fundament wieder eine kleine Hebung von etwa 0,7 mm, welche durch Elasticität des Mauerwerkes oder der unterliegenden Erdschichten erklärbar ist.

III. Mathematischer Ausdruck für die Attraction des Bleiklotzes.

Die Gestalt des Bleiklotzes ist so gewählt, dass derselbe bei vorgeschriebener Masse und bei der Form einer quadratischen Säule ungefähr das Maximum der Attraction für die Gegend der Waageschalen liefert.¹⁾ Dies bietet ausser der

1) Nach Lampe, Verh. d. Physik. Ges. zu Berlin Nr. 114. p. 60. 1884 ist das Maximum sehr nahe erreicht, wenn das Verhältniss der Höhe zur Horizontalkante zwischen 0,885 und 0,966 liegt; bei unserem Bleiklotz ist dasselbe 200:210, also 0,952.

grösstmöglichen Ausnutzung der verwendeten Masse noch den allen Maximalformen eigenen Vortheil, dass kleine Variationen der Gestalt ohne merklichen Einfluss auf die Wirkung sind.

Im Folgenden geben wir zuerst das Resultat der analytischen Berechnung der Attraction des homogen und ganz massiv gedachten Bleiklotzes von der Dichtigkeit ρ auf die in einer Waagschale ruhende Masse \mathfrak{M} nach dem Newton'schen Gesetze. Dabei bedeutet G die zu bestimmende Gravitationsconstante. Wir legen durch das Centrum der angezogenen kugeligen Masse \mathfrak{M} ein Axensystem, die z -Axe vertical, die x -Axe horizontal und parallel dem Waagebalken, die y -Axe in der übrigbleibenden Richtung; der rechtwinkelig-parallelepipedische Bleikörper fülle den Raum von x_1 bis x_2 , von y_1 bis y_2 und von z_1 bis z_2 .

Die Verticalbeschleunigung, welche die Attraction auf die Masse \mathfrak{M} äussert, ist dann

$$(3) \quad K = G \cdot \rho \cdot \sum_{a, b, c=1, 2} (-1)^{a+b+c} \cdot \varphi(x_a, y_b, z_c).$$

In der Summe sind für a, b, c alle möglichen Zusammenstellungen der Indices 1, 2 zu bilden, dieselbe besteht also aus acht Summanden, von denen vier positiv und vier negativ sind. Die zur Abkürzung eingesetzte Function φ hat folgende Form:

$$(3a) \quad \varphi(x, y, z) = x \cdot \log(r-y) + y \cdot \log(r-x) + z \cdot \operatorname{arctg} \frac{xy}{x \cdot r};$$

darin ist $r = +\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ zu setzen.

Der vorstehende Ausdruck K bildet die Grundlage für die numerische Berechnung.

Die Dichtigkeit ρ wird berechnet aus der durch Auswägung gefundenen und um das berechnete Gewicht der ausgebohrten Cylinder vermehrten Bleimasse, dividirt durch das Product der drei Kantenlängen. Bei der sehr guten Uebereinstimmung der Bleistücke giebt dieses Verfahren zu keinerlei Unsicherheit Anlass. Die Attractionen der in den beiden Hohlcyllindern fehlenden Massen, welche aus der Wägung der Hohlstücke ermittelt werden, müssen besonders ermittelt und von der des massiven Klotzes abgezogen werden. Eine analytische Discussion ergibt, dass man einen gegen die Genauigkeit des Hauptresultates zu vernachlässigenden Fehler begeht,

wenn man diese Cylinder von etwa 4 cm Durchmesser als Massenlinien in den Axen derselben concentrirt denkt. Bezeichnet λ die Längendichtigkeit dieser Massenlinien, so hat die Beschleunigung der Attraction derselben auf die in der Verlängerung der Axe befindliche Masse \mathfrak{M} folgenden Betrag:

$$(4) \quad \mathfrak{k} = G \cdot \lambda \cdot \left(\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2} \right)$$

und die Verticalcomponente der Beschleunigung, welche von der seitwärts liegenden Massenlinie herrührt, ist

$$(4a) \quad \mathfrak{t} = G \cdot \lambda \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{h^2 + x_1^2}} - \frac{1}{\sqrt{h^2 + x_2^2}} \right).$$

Dabei bedeutet h den horizontalen Abstand der beiden Cylinderaxen voneinander oder, was dasselbe ist, die Länge des Waagebalkens von einer Seitenschneide bis zur anderen.

Die thatsächliche Attractionbeschleunigung, welche der zweifach durchbohrte Bleiklotz äussert, ist dann:

$$k = K - (\mathfrak{k} + \mathfrak{t}).$$

Man hat dieselbe für die oberen und für die unteren Waageschalen getrennt zu berechnen, da die Kugelcentra oben und unten nicht gleich weit von dem Bleiklotz abstehen, also verschiedene Zahlen für z_1 und z_2 gelten. Nennen wir, entsprechend der früheren Bezeichnung, diese beiden Attractionen k_0 und k_u , so ist:

$$(5) \quad k_0 + k_u = K_0 + K_u - (\mathfrak{k}_0 + \mathfrak{k}'_0 + \mathfrak{k}_u + \mathfrak{k}'_u).$$

In der rechten Seite steckt der gemeinsame Factor G , alle übrigen Bestandtheile derselben sind der Messung zugänglich: ρ und λ lassen sich genauer bestimmen, als das Endresultat der Arbeit; die x_a, y_b, z_c folgen aus den Abmessungen an Bleiklotz und Kugelstellungen bei gelöster Waage; diese Messungen wurden theils mit einem stählernen Bandmaass, theils mit einem Kathetometer ausgeführt, welches die Versuchsstation für Sprengstoffe in Spandau bereitwilligst zur Verfügung stellte. Da mit dem Fernrohr des letzteren an jeder Kugel nur ein Rand anvisirt werden konnte, war noch der Radius der Kugeln zu bestimmen, welcher aus dem bekannten Volumen derselben abgeleitet wurde.

Eine analytische Voruntersuchung über die zulässigen Fehler der nöthigen Längenmessungen ergab folgende Bestim-

mungen: Damit der berechnete Werth von $(k_0 + k_u)$ bis auf 1,6 pro mille (wahrsch. Fehler des Hauptresultates) genau sei, dürfen die Abmessungen folgende Fehler haben:

Horizontale Kanten des Bleiklotzes	0,3 cm
Verticale Kanten des Bleiklotzes	1,0 „
Abstand der Kugelcentra oben bis unten	0,3 „
Höhenlage (Senkung) des Bleiklotzes	4,0 „
Neigung des Bleiklotzes	2 Winkelgrad.

Diese Fehlergrenzen wurden weder von der Lagenänderung des Bleiklotzes, noch von der Unsicherheit der Ausmessungen erreicht.

Die gefundenen Daten sind folgende:

Horizontale Kanten des Bleiklotzes	211,10 cm
Verticale Kanten des Bleiklotzes	200,48 „
Mittlere Höhe der oberen Kugelcentra über dem Bleiklotz	17,051 „
Mittlere Höhe der unteren Kugelcentra unter dem Bleiklotz	—8,746 „
Abstand der Seitenschneiden der Waage (h)	23,320 „
Dichtigkeit des Bleies (ρ)	11,2526 g/cm ³
Längendichtigkeit der Cylinder (λ)	149,80 g/cm.

Daraus kann man auf Grund der vorstehend mitgetheilten Formeln (3) bis (5) das numerische Resultat der Attraction aus dem Newton'schen Gravitationsgesetze folgendermaassen berechnen:

$$(6) \quad k_0 + k_u = 10594,0 \cdot G \frac{\text{cm}}{\text{sec}^2}.$$

Wir haben nun die experimentelle Bestimmung von $k_0 + k_u$ aus Wägungen zu besprechen.

IV. Resultate.

Die einzelnen Wägungsergebnisse aus je zwei Tagen, welche nach Formel (2) (p. 174) gefunden werden, zeigen, sowohl ohne wie mit Bleiklotz, einen deutlichen Einfluss der verschiedenen, jeweilig herrschenden Temperaturverhältnisse, dessen Vernachlässigung bei nicht gleichmässiger Vertheilung der Beobachtungen über alle Jahreszeiten den wahren Werth des Resultates verschieben muss (systematischer Fehler), aber auch bei gleichmässiger Vertheilung die Streuung der Einzelwerthe und damit

den wahrscheinlichen Fehler des Resultates vergrössert. Dieser Einfluss rührt erstens von der Differenz der Temperatur bei den oberen und den unteren Waageschalen her; wir bezeichnen diese Differenz durch $(\vartheta_0 - \vartheta_u)$. Dieselbe ist in dem benutzten Local zweimal jährlich für einige Tage im Frühsommer und Spätherbst unmerklich, erreicht aber im Spätsommer Beträge bis zu $+0,7^\circ$ und im Spätwinter ebenso grosse negative Beträge. Wir haben in unserer ersten Mittheilung vom 23. März 1893 (p. 172 und 180—181)¹⁾ schon erwähnt, dass dadurch die Ausführung der ursprünglich geplanten Methode der directen Verticalvertauschungen²⁾ vereitelt wird. Wir haben zwar jedesmal zu Zeiten der annähernden Gleichheit von ϑ_0 und ϑ_u einige derartige Wägungen angestellt, dürfen dieselben jedoch wegen der immerhin wenige Hunderstel Grade betragenden Differenz nicht für die Resultate berücksichtigen, weil die gefundenen Werthe den Einfluss dieser Differenz in auffälliger und regelmässiger Weise zeigen. Die Wirkung dieser Temperaturdifferenzen ist leicht einzusehen: wenn $\vartheta_0 > \vartheta_u$ ist (Sommer), so entsteht nach der Verticalvertauschung um die von oben nach unten transportirte wärmere massive Kugel ein aufsteigender Luftstrom und lässt die Kugel zu leicht erscheinen, die von unten nach oben transportirte kältere erscheint zu schwer; die Abnahme des Gewichtes mit der Höhe ergibt sich also zu klein. Ist umgekehrt $\vartheta_0 < \vartheta_u$ (Winter), so erscheint die Abnahme des Gewichtes mit der Höhe zu gross. Die dünnwandigen Hohlkugeln nehmen die Temperatur der umgebenden Luft ungleich viel schneller an und können deshalb diese Wirkung nicht compensiren. Dieser zuerst bei den Wägungen mit verticaler Vertauschung bemerkte störende Einfluss scheint nun auch bei der oben beschriebenen definitiven Methode, wenn auch in schwächerem Grade hervortreten. Die Wägungen verlaufen nämlich so, als ob die Vollkugeln nach der am Schlusse eines Wägungstages ausgeführten verticalen Umsetzung bis zum nächsten Wägungstage noch nicht vollkommen die Temperatur ihrer veränderten Umgebung angenommen hätten.

1) F. Richarz u. O. Krigar-Menzel, Wied. Ann. 51. p 570 u. 579—580. 1894.

2) A. König u. F. Richarz, Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wiss. zu Berlin 1884. p. 1202; Wied. Ann. 24. p. 664. 1885.

Die Tendenz zu kleinen Sommerwerthen und grossen Winterwerthen ist in der Zusammenstellung der Einzelresultate deutlich zu erkennen.

Ein zweiter Einfluss ist in der zeitlichen Veränderung der Temperatur zu suchen, deren Grösse durch den Differentialquotienten $d\vartheta/dt$ ausgedrückt ist. Auch diese Beeinflussung der Werthe zeigte sich zuerst durch starke Fehler unter Verhältnissen, welche später peinlich vermieden wurden. Sobald nämlich Menschen und Licht in dem Zinkkasten gewesen waren, welcher die Waage und den Raum für den Bleiklotz umschloss, gleicht sich die dadurch herbeigeführte Erwärmung namentlich der oberen Schichten erst nach mehreren Tagen genügend aus, und Wägungen, welche nach einem solchen Besuche des inneren Raumes ohne etwa fünftägige Pause unternommen wurden, gaben ein unbrauchbares Resultat. Diese Störungen finden ihre Erklärung darin, dass leider durch den nur für die ursprünglich geplante unverwendbare Methode construirten Vertauschungsmechanismus die Kugeln zur Ausführung der gewöhnlichen Gauss'schen Vertauschung zwischen rechts und links jedesmal anderthalb Meter weit bis vor die vordere Wand des Bleiklotzes vorgefahren werden müssen, d. h. an einen Ort, welcher bei nicht ausgeglichenen Wärmeverhältnissen andere Temperatur hat als die Waageschalen. Nun kann man zwar während einer glatten Reihe von Wägungstagen das Betreten dieses inneren Zinkkastens vermeiden, man kann aber trotz der vielfachen Schutzeinrichtungen, welche in unserer früheren Mittheilung besprochen sind, nicht verhindern, dass bei unvermitteltem Eintreten andauernd heissen oder kalten Wetters selbst in unserem geschützten Locale Temperaturdifferenzen vorkommen zwischen dem Orte der Waageschalen und dem im gleichen Niveau gelegenen Orte, wo die Kugeln vertauscht werden.

Die daraus entspringenden systematischen Fehler der Wägungsergebnisse haben nun thatsächlich bemerkt werden können, und äussern sich bei den Wägungen ohne und mit Bleiklotz in entgegengesetztem Sinne, während der vorher besprochene Einfluss von $(\vartheta_0 - \vartheta_w)$ stets denselben Sinn hat. Dieses zunächst verwunderliche Verhalten ist erklärlich, wenn man auf die räumlichen Verhältnisse unserer Versuchsanord-

nung eingeht: die Waage und die oberen Schalen nämlich sind in einen engen aus schlecht leitendem Holz und Glas bestehenden Kasten eingeschlossen; dringt nun z. B. bei heissem Wetter Wärme in den Zinkkasten ein, so bleibt der Waagekasten thermisch zurück, während der leere Raum des Zinkkastens schneller folgt. Ist aber der grösste Theil des Raumes erfüllt mit der thermisch trägen Bleimasse, so kehren sich die Verhältnisse beim Eindringen der Wärme um; die Waageschalen, welche der Seite der andringenden äusseren Einflüsse näher liegen als die Vertauschungsstation, eilen dieser dann in der Temperatur voraus. Dass nun dergleichen Temperaturveränderungen, denen die Gewichtskugeln während der Umsetzung ausgesetzt werden, die Resultate in ähnlicher Weise beeinflussen müssen, wie die Verschiedenheiten von ϑ_0 und ϑ_u , ist einleuchtend und überdies durch das vorliegende Beobachtungsmaterial bestätigt.

Um die Resultate von diesen trübenden Einflüssen in einer, jede willkürliche Auswahl vermeidenden, einwurfsfreien Weise zu reinigen, wurde angenommen, dass die einzelnen Wägungsergebnisse Functionen von $(\vartheta_0 - \vartheta_u)$, von $d\vartheta_0/dt$ und der Vollständigkeit halber auch von $d\vartheta_u/dt$ seien; wegen der Kleinheit der Abweichungen vom Hauptmittel genügte es folgende lineare Function anzusetzen:

$$(7) \quad p = p_0 + a \cdot (\vartheta_0 - \vartheta_u) + b \cdot \frac{d\vartheta_0}{dt} + c \cdot \frac{d\vartheta_u}{dt}.$$

Dabei bedeutet p das einzelne aus zwei Wägungstagen combinirte Resultat; als Einheit für dt wurde ein Tag gewählt; p_0 , a , b und c sind Constanten, welche aus sämmtlichen vollständigen, bei gutem Zustand der Waage gewonnenen Werthen von p nach der Methode der kleinsten Quadrate berechnet wurden. Die Constante p_0 giebt dann direct das gereinigte Schlussresultat. Da die thermischen Verhältnisse ohne und mit Bleiklotz wesentlich verschieden sind, war eine gesonderte Ausgleichsrechnung für die Werthe von $(g_u - g_0)$ ohne Bleiklotz und für $(g_u - g_0 - (k_0 + k_u))$ mit Bleiklotz von vornherein geboten.

Für die Wägungen vor Aufbau und nach Abbruch des Bleiklotzes ergeben sich die Constanten der vorstehenden Gleichungen aus 52 guten Beobachtungen folgendermaassen:

$$a = -0,0326 \quad p_0 = +1,2456 \text{ mg} \\ b = +0,0448 \quad c = +0,0278.$$

Um den wahrscheinlichen Fehler des Hauptresultates p_0 zu finden, ist jede einzelne Beobachtung von p mit Hülfe der abgeleiteten Werthe von a, b, c für die speciellen $(\vartheta_0 - \vartheta_u)$ und $d\vartheta/dt$ zu corrigiren. Der wahrscheinliche Fehler des Mittels dieser corrigirten p ist dann derjenige von p_0 und ihr Mittelwerth ist selbstverständlich gleich p_0 selbst. So erhält man:

$$p_0 = (+1,2456 \pm 0,0017) \text{ mg}$$

und als wahrscheinlichen Fehler der Einzelbestimmung $\pm 0,0120$. Hätte man die Beobachtungen ohne Ausgleichung einfach zum arithmetischen Mittel vereinigt, so würde man $1,2479 \pm 0,0020$ erhalten haben.

Ausser den soeben verwendeten 52 Einzelwerthen liegen noch eine Anzahl von Bestimmungen vor, welche bei weniger gutem Zustand der Waage angestellt sind; einem Zustande, in dem die Einstellungen der Waage, welche identisch sein sollten, recht grosse Unterschiede zeigen. Diese Bestimmungen sind daher als minderwerthige zu bezeichnen. Aus ihnen sind zunächst alle diejenigen auszuschliessen, bei welchen eine einseitig wirkende Störung (ausser den in der Ausgleichungsrechnung berücksichtigten) vorlag. Die übrigbleibenden sind mit den oben abgeleiteten Werthen von a, b, c für den Einfluss der Temperaturverhältnisse zu corrigiren. Diese (21) minderwerthigen Reihen geben

$$p_0 = (+1,2431 \pm 0,0045) \text{ mg}$$

mit einem wahrscheinlichen Fehler der Einzelbestimmung von $\pm 0,0205$. Ohne die Ausgleichung würden sie den Werth $1,2429 \pm 0,0047$ ergeben. Vereinigt man die ausgeglichenen Resultate der besseren und der minderwerthigen Wägungsreihen nach Maassgabe ihrer wahrscheinlichen Fehler, so erhält man als Gesamtergebniss für die Abnahme der Schwere mit der Höhe (vgl. Gl. (2)):

$$(8) \quad g_u - g_0 = 0,035183 \cdot (1,2453 \pm 0,0016) \frac{\text{cm}}{\text{sec}^2}.$$

Für die *Attractionswägungen mit Bleiklotz* berechnen sich die Constanten der Gleichung (7) aus 69 bei gutem Zustand

der Waage gefundenen Einzelwerthen der doppelten Gewichtsabnahme folgendermaassen:

$$a = -0,0219 \quad p_0 = -0,1207 \text{ mg} \\ b = -0,0214 \quad c = -0,0399.$$

Die wahrscheinlichen Fehler der Einzelwerthe und des Resultates p_0 berechnet man ebenso, wie bei dem Resultat ohne Bleiklotz angegeben, und erhält:

$$p_0 = (-0,1207 \pm 0,0014) \text{ mg}$$

mit einem wahrscheinlichen Fehler der Einzelbestimmung von $\pm 0,0115$. Das arithmetische Mittel aller p ohne Ausgleichung würde ergeben haben $(-0,1222 \pm 0,0016) \text{ mg}$. Auch bei 12 minderwerthigen Bestimmungen mit Bleiklotz wurden die gefundenen a , b , c in den Correctionen verwendet, man erhielt dann als ihr Resultat:

$$p_0 = (-0,1254 \pm 0,0053) \text{ mg}.$$

Wahrscheinlicher Fehler der Einzelwerthe $\pm 0,0187$; uncorrectirt würde man das Mittel $(-0,1252 \pm 0,0061)$ erhalten haben.

Das gute und das minderwerthige Resultat, nach Maassgabe der wahrscheinlichen Fehler vereinigt, geben das Schlussresultat der Wägungen mit Bleiklotz:

$$(9) \quad g_u - g_0 - (k_0 + k_u) = -0,035183 \cdot (0,1211 \pm 0,0014) \frac{\text{cm}}{\text{sec}^2}.$$

Hieraus und aus dem Schlussresultat für $g_u - g_0$ folgt

$$(10) \quad k_0 + k_u = +0,035183 \cdot (1,3664 \pm 0,0021) \frac{\text{cm}}{\text{sec}^2}.$$

Dies ist der experimentell gefundene Werth der Attraction. Der aus dem Newton'schen Gravitationsgesetze berechnete war (Gl. (6)):

$$k_0 + k_u = 10594,0 \cdot G.$$

Die Gleichsetzung beider Ausdrücke giebt folgenden Werth der Gravitationsconstante:

$$(11) \quad G = (6,685 \pm 0,011) \cdot 10^{-8} \frac{\text{cm}^3}{\text{g} \cdot \text{sec}^2}.$$

Alle numerischen Rechnungen, welche zu diesem Resultate führen, sind controlirt, theils durch doppelte Berechnung der Einzelresultate aus den Angaben unserer Protocollbücher, theils durch kritische Proben der nach Gl. (7) ausgeführten

Ausgleichsrechnung. Bei allen diesen Zahlenrechnungen waren uns die Herren Cand. astron. Martin Ebell in Berlin und Dr. phil. Walter Leick in Greifswald in anerkennenswerther Weise behülflich.

Um von der Gravitationsconstante auf die mittlere Dichtigkeit der Erde Δ zu kommen, benutzt man die Verbindung, in welcher diese beiden Grössen durch den theoretischen Ausdruck der Schwerebeschleunigung g stehen. Es ist im Meeresniveau:

$$(12) \quad g = \frac{4}{3} \pi \cdot R_p \cdot \Delta \cdot G \cdot (1 + \alpha - \frac{3}{2} c) \cdot \{1 + (\frac{5}{2} c - \alpha) \sin^2 B\}.$$

Dabei bedeutet R_p den polaren Halbmesser, α die Abplattung der Erde, c das Verhältniss von Centrifugalkraft zu Schwerkraft am Aequator und B die geographische Breite. Dieser Ausdruck folgt aus Helmert¹⁾, Gl. (12), unter Benutzung des Theorems von Clairaut und indem die Erdmasse gleich $\frac{4}{3} \pi a^2 R_p \cdot \Delta$ gesetzt wird. Es ist nun nicht einwurfsfrei, in diese Gleichung für g und B die localen Werthe am Beobachtungsort einzusetzen, wie dies von anderen Autoren geschehen ist; denn der specielle Werth von g kann infolge localer Bodenbeschaffenheit einen abnormen Betrag besitzen. Vielmehr muss man mit obiger Gl. (12) diejenige verbinden, welche alle sorgfältigen Pendelmessungen an allen möglichen Orten der Erde (reducirt auf Meereshöhe) berücksichtigt und sich denselben am genauesten anschliesst. Diese empirische Formel, welche g als Function von B darstellt, lautet:

$$(13)^2) \quad g = 978,00 \cdot \{1 + 0,005310 \cdot \sin^2 B\} \frac{\text{cm}}{\text{sec}^2}.$$

Aus der Gleichsetzung dieses empirischen Werthes mit dem vorstehenden theoretischen folgt, frei von dem Einflusse localer Unregelmässigkeiten der Massenvertheilung im Erdinnern:

$$\frac{4}{3} \pi R_p \cdot \Delta \cdot G \cdot \left(1 + \alpha - \frac{3}{2} c\right) = 978,00 \frac{\text{cm}}{\text{sec}^2}.$$

Setzt man:

$$R_p = 635608000 \text{ cm}, \quad \alpha = 0,0033416^2) \quad c = 0,0034672^3)$$

1) Helmert, Theorien der höheren Geodäsie 2. p. 96.

2) l. c. 2. p. 241.

3) l. c. p. 84. Gl. (2*).

und G gleich dem von uns gefundenen Werthe, so folgt die mittlere Dichtigkeit der Erde:

$$(14) \quad A = (5,505 \pm 0,009) \frac{g}{\text{cm}^3}.$$

Wir führen schliesslich zum bequemen Vergleich noch die durch principiell einwandfreie Methoden gefundenen Resultate früherer Beobachter an.

Beobachter	Methode	A	Wahrsch.Fehler
Cavendish	Drehwaage	5,45	
Reich	„	5,49 u. 5,58	
Baily	„	5,67	
Cornu u. Baille	„	5,56 u. 5,50	
Ph. v. Jolly	Waage mit langem Gehänge	5,692	$\pm 0,068$
J. Wilsing	Pendelapparat	5,594	$\pm 0,032$
Derselbe später mit Vermeidung gew.Fehlerquell. }	—	5,577	$\pm 0,013$
J. H. Poynting	Waage	5,4934	} vgl. die folg. Bemerkungen
C. V. Boys	Verbesserte Drehwaage	5,5270	

Die ersten fünf der angeführten Bestimmungen sind durch den Einfluss sehr starker Fehlerquellen recht unsicher, diejenigen von Wilsing, Poynting und Boys sind beträchtlich sicherer. Poynting's Resultat ist das Mittel zweier Beobachtungssätze, welche die abgekürzten Zahlen 5,46 und 5,52 ergeben und jeder in sich eine ausgezeichnete Uebereinstimmung der Einzelwerthe zeigen. Wenn man daher annehmen würde, dass die beträchtliche Differenz der beiden Gruppenmittel nur auf unsymmetrische Massenvertheilung im Inneren der verwendeten gravitirenden Bleikugeln zurückzuführen sei, welche letztere bei beiden Beobachtungssätzen verschiedene Orientirung hatten, und dass in ihrem Mittel sich der Fehler ungleichmässiger Dichtigkeit heraushebe, so würde Poynting's Endresultat einen noch kleineren wahrscheinlichen Fehler haben als unsere Bestimmung. Boys endlich hat von neun gewonnenen Werthen nur zwei ausgewählt und zum Hauptresultat vereinigt, dessen wahrscheinlichen Fehler er auf $\pm 0,002$ schätzt. Wären sämmtliche Werthe nach Maassgabe ihrer inneren wahrscheinlichen Fehler verwendet worden, so würde sich ein

kleinerer Werth für Δ und ein erheblich grösserer wahrscheinlicher Fehler des Hauptresultates ergeben haben.

Der wahrscheinliche Fehler unseres Resultates beträgt 1,6 pro mille. Der Genauigkeit unserer Wägungen war eine Grenze gesteckt vornehmlich durch *Eigenthümlichkeiten* in der Anordnung des Vertauschungsmechanismus der Gewichtskugeln, durch Mängel in der Construction der Waage, welche übrigens nach Maassgabe der zu Beginn unserer Versuche vorliegenden Erfahrungen vortrefflich gebaut war (vgl. den Abschnitt „Waage“ p. 166 unserer ersten Mittheilung)¹⁾, endlich durch die örtlichen und zeitlichen Differenzen der Temperatur. Alle diese Schädlichkeiten, deren Einfluss sich erst während der Arbeit herausstellte, würden sich bei einer etwaigen Wiederholung der Versuche erheblich herabsetzen lassen, sodass bei einer solchen, unter Benutzung der von uns gewonnenen Erfahrungen, eine beträchtlich vermehrte Sicherheit der Wägungen mit Bestimmtheit zu erwarten wäre.

Die ausführliche Veröffentlichung unserer Arbeit, auf welche in der Einleitung vorliegenden Berichtes hingewiesen wurde, ist inzwischen (September 1898) in den Abhandlungen d. k. preuss. Akad. d. Wissensch. zu Berlin erschienen.

1) F. Richarz u. O. Krigar-Menzel, Wied. Ann. 51, p. 563. 1894.
(Eingegangen 22. October 1897.)
