Quelques remarques sur une certaine question de minimum.

Par

C. Possé à St. Petersbourg.

La question dont il s'agit dans cette note est intimement liée à la théorie des fractions continues algèbriques et ne présente qu'une simple application des résultats connus de cette théorie. Dans le cas le plus simple cette question a été resolue par Mr. Stieltjes dans sa „Note sur la densité de la terre" inserée dans le Bulletin astronomique de M. Tisserand (Octobre 1884) par des considérations particulières et entièrement différentes de celles sur les quelles nous allons nous fonder.

Soit $f(x)$ une fonction de x toujours décroissante dans les limites 0 et 1 de x, c'est à dire telle que sa dérivée $f'(x)$ reste toujours négative dans les mêmes limites. Supposons que la valeur $f(1)$ de cette fonction pour $x = 1$, ainsi que les valeurs des intégrales

$$a_2 = \int_0^1 x^2 f(x)\,dx, \quad a_4 = \int_0^1 x^4 f(x)\,dx, \ldots, \quad a_{2n} = \int_0^1 x^{2n} f(x)\,dx$$

soient données. Il s'agit de trouver la limite inférieure précise de la valeur $f(0)$.

Remarquant que

$$f(0) - f(1) = -\int_0^1 f'(x)\,dx,$$

$$a_2 = \int_0^1 x^2 f(x)\,dx = \frac{1}{3} f(1) - \frac{1}{3}\int_0^1 x^3 f'(x)\,dx,$$

$$a_4 = \int_0^1 x^4 f(x)\,dx = \frac{1}{5} f(1) - \frac{1}{5}\int_0^1 x^5 f'(x)\,dx,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$a_{2n} = \int_0^1 x^{2n} f(x)\,dx = \frac{1}{2n+1} f(1) - \frac{1}{2n+1}\int_0^1 x^{2n+1} f'(x)\,dx$$

nous voyons qu'on peut considerer comme données les valeurs des intégrales

$$\sigma_3 = -\int_0^1 x^3 f'(x)\,dx = 3a_2 - f(1),$$

$$\sigma_5 = -\int_0^1 x^5 f'(x)\,dx = 5a_4 - f(1),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\sigma_{2n+1} = -\int_0^1 x^{2n+1} f'(x)\,dx = (2n+1)a_{2n} - f(1)$$

et comme inconnue la limite inférieure de la valeur de l'integrale

$$-\int_0^1 f'(x)\,dx.$$

Cette question se réduit aisement à une autre dont la solution est connue.

Considérons l'intégrale

$$F(z) = -\int_0^1 \frac{x^3 f'(x)\,dx}{z - x^2};$$

en la développant suivant les puissances descendentes de z, on aura

$$F(z) = -\int_0^1 \frac{x^3 f'(x)\,dx}{z - x^2} = \frac{\sigma_3}{z} + \frac{\sigma_5}{z^2} + \cdots + \frac{\sigma_{2n+1}}{z^n} + \cdots.$$

Posant $x^2 = u$, on aura

$$F(z) = -\int_0^1 \frac{\frac{1}{2} u f'(\sqrt{u})\,du}{z - u}$$

où faisant $\Theta(u) = -\frac{1}{2} u f'(\sqrt{u})$, $\Theta(u)$ restant positive entre 0 et 1,

$$F(z) = \int_0^1 \frac{\Theta(u)\,du}{z - u} = \frac{\alpha_0}{z} + \frac{\alpha_1}{z^2} + \cdots + \frac{\alpha_{n-1}}{z^n} + \cdots -$$

où

$$\alpha_i = \int_0^1 u^i\,\Theta(u)\,du.$$

En comparant les deux developpements de $F(z)$, nous aurons

$$\sigma_3 = \alpha_0,\ \sigma_5 = \alpha_1,\ \ldots,\ \sigma_{2n+1} = \alpha_{n-1}.$$

D'ailleurs

$$f(0) - f(1) = -\int_0^1 f'(x)\,dx = -\int_0^1 \frac{1}{2} f'(\sqrt{u})\,\frac{du}{\sqrt{u}} = \int_0^1 \frac{\Theta(u)\,du}{\sqrt{u^3}}.$$

On voit ainsi que la question se ramène à la recherche de la limite inférieure de la valeur de l'intégrale

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{u^3}}\,\Theta(u)\,du$$

étant données les valeurs de

$$\alpha_i = \int_0^1 u^i \Theta(u)\,du$$

pour

$$i = 0, 1, 2, \ldots, n-1.$$

Quant à cette dernière question elle est complétement résolue dans tous les cas par M. Markoff dans son ouvrage „Sur quelques applications des fractions continues algébriques" publié en russe à St. Petersbourg 1884. Quelques uns des résultats contenus dans ce travail ont été aussi publiés par l'auteur dans sa note plus récente „Sur la méthode de Gauss" (Math. Annalen Bd. XXV).

Pour le cas de n pair $= 2m$ on a le résultat suivant: soient donnés

$$a_0 = \int_0^1 \Theta(u)\,du,\ \alpha_1 = \int_0^1 u\,\Theta(u)\,du,\ \ldots,\ \alpha_{2m-1} = \int_0^1 u^{2m-1}\Theta(u)\,du;$$

considerons la m^{me} fraction convergente dans le developpement de $\int_0^1 \frac{\Theta(u)\,du}{z-u}$ en fraction continue; soit $\frac{\psi(z)}{\varphi(z)}$ cette fraction convergente et $z_1, z_2, \ldots, z_m$ les racines de $\varphi(z)$.

En désignant par $\underline{\Omega}(u)$ une fonction quelconque dont la dérivée d'ordre $2m$ reste positive entre les limites 0 et 1 de u, on aura

$$\int_0^1 \underline{\Omega}(u)\,\Theta(u)\,du \geqq \sum_{i=1}^{i=m} \underline{\Omega}(z_i)\,\frac{\psi(z_i)}{\varphi'(z_i)}.$$

(Voir Math. Ann. Bd. XXV, p. 429).

Pour appliquer cette formule à notre question il faut poser

$$\underline{\Omega}(u) = \frac{1}{\sqrt{u^3}}.$$

Dans le cas le plus simple, $m = 1$, on aura

$$\varphi(z) = z - \frac{\alpha_1}{\alpha_0}, \quad \psi(z) = \alpha_0,$$

$$f(0) - f(1) = \int_0^1 \frac{\Theta(u)\,du}{\sqrt{u^3}} \geqq \sqrt{\frac{\alpha_0^5}{\alpha_1^3}},$$

ou

$$f(0) \geqq f(1) + \sqrt{\frac{\sigma_3^5}{\sigma_5^3}}$$

ou enfin

$$f(0) \geqq f(1) + \sqrt{\frac{[3a_2 - f(1)]^5}{[5a_4 - f(1)]^3}}.$$

C'est le résultat de M. Stieltjes.

Occasionellement je remarquerai que les formules

$$\int_{-1}^{+1} \sqrt{1 - x^2}\, f(x)\, dx = \frac{\pi}{n+1} \sum_{k=1}^{k=n} \sin^2\left(\frac{k\pi}{n+1}\right) f\left(\cos\frac{k\pi}{n+1}\right) + \text{corr.}$$

$$\int_{-1}^{+1} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \cdot f(x)\, dx = \frac{4\pi}{2n+1} \sum_{k=1}^{k=n} \sin^2 \frac{k\pi}{2n+1} f\left(\cos\frac{2k\pi}{2n+1}\right) + \text{corr.},$$

que donne M. Stieltjes dans sa note du Novembre 1884 (Bulletin astronomique de M. Tisserand) et dans lesquelles la correction est nulle tant que $f(x)$ est une fonction entière dont le degrè ne surpasse pas $2n - 1$, ont été déduites par moi dans ma note „Sur les quadratures" inserée dans les Nouvelles Annales des Mathematiques en 1875.

St. Petersbourg, 8. Septembre 1885.

Verbesserungen.

Band	XXIII,	Seite 425	Zeile	13	v. u.	lies u statt a.
„	„	„ 427	„	3	„ „	„ (14) „ (1).
„	„	„ 432	„	9	„ „	setze — statt des zweiten =.
„	XXVI	„ 216	„	9	„ „	lies *drei* statt *fünf*.
„	„	„ 217	„	7	v. o.	„ u_x statt a_x.
„	„	„ 564	„	6	v. u.	lies auf der *vorletzten* statt letzten.