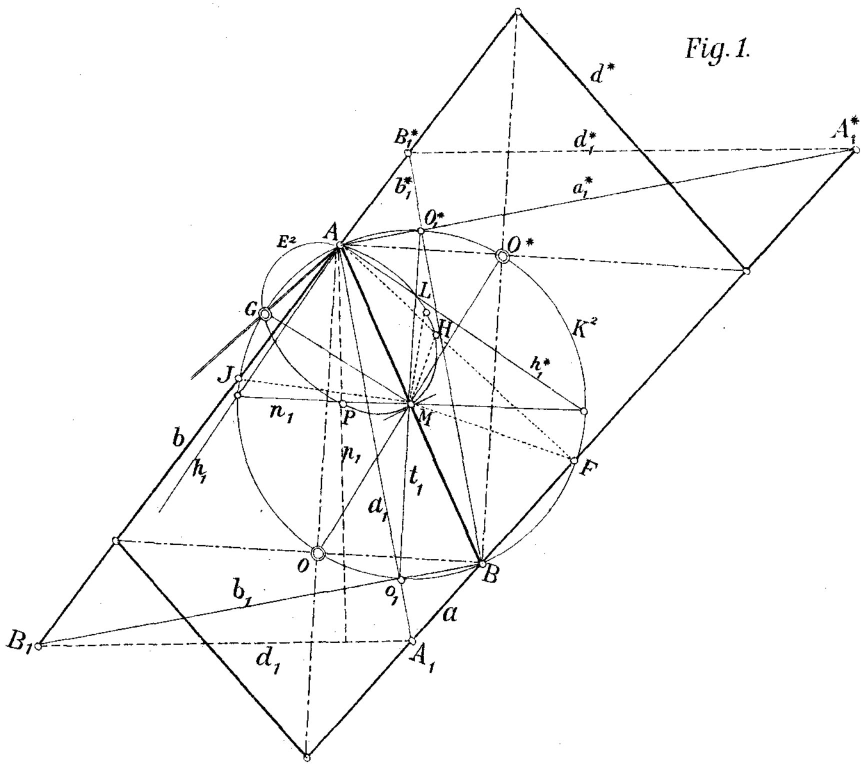
Eine Aufgabe über ein besonderes Viereck.[1]

Von **Christian Beyel** in Zürich.

Von einem Viereck sind zwei aufeinanderfolgende Ecken A, B und die Seiten a, b gegeben, welche resp. durch diese Ecken gehen. Die Diagonalen des Vierecks sollen aufeinander senkrecht stehen und von der Seite d, welche $\overline{AB}$ gegenüberliegt, unter gleichen Winkeln geschnitten werden. Man sucht die möglichen Lagen der vierten Seite d. (Fig. 1.)



[1]) Theodor Schmid in Wien behandelt im XIV. Jahrgange dieser Zeitschrift pag. 343 ff. „eine Aufgabe über trilinear verwandte Felder". Wir haben dieser Aufgabe eine etwas andere Form gegeben, welche von der darstellenden Geometrie unabhängig ist. Wir entwickeln eine Lösung, welche sich bequem konstruieren läßt und für drei Schnittpunkte eines Kreises mit einem Kegelschnitt je zwei Lösungen gibt.

Wir ziehen durch A, B die resp. Geraden a_1, b_1, welche zueinander senkrecht stehen. Schneiden sie aus a, b die resp. Punkte $A_1 B_1$, so ist die Verbindungslinie d_1 die vierte Seite eines Vierecks $A B A_1 B_1$, dessen Diagonalen zueinander senkrecht stehen. Ziehen wir durch A die Linie $a_1^* \parallel b_1$ und durch B die Gerade $b_1^* \parallel a_1$, so treffen diese Linien die Geraden a, b in den resp. Punkten $A_1^* B_1^*$, deren Verbindungslinie $d_1^* \parallel d_1$. Wir haben auf diese Weise ein zweites Viereck $A B A_1^* B_1^*$ gefunden, dessen Diagonalen zueinander senkrecht stehen. Sollen diese Vierecke von der verlangten Art sein, d. h. soll d die Diagonalen unter Winkeln von 45^0 schneiden, so muß d zu einer der Halbierungslinien $h_1 h_1^*$ des Linienpaares $a_1 a_1^*$ senkrecht stehen.

Dreht sich nun das rechtwinklige Linienpaar $a_1 a_1^*$ um A, so gehören zu jeder Lage zwei parallele Linien d, zu denen es einen Rechtwinkelstrahl p aus A gibt. Die Geraden $a_1 a_1^*$ bilden also eine Rechtwinkelinvolution J_a, welche den Strahlen p projektivisch zugeordnet ist. Die Halbierungslinien $h_1 h_1^*$ bilden ebenfalls Paare einer Rechtwinkelinvolution J_h. Es gehört daher zu jedem Strahle p auch ein Paar der Involution J_h. So oft nun ein Strahl p mit einem entsprechenden Strahle der Involution J_h zusammenfällt, gibt es ein diesem Strahle korrespondierendes Paar der Involution J_a, zu dem zwei zueinander parallele Seiten $d d^*$ eines Vierecks der gesuchten Art gehören.

Wir suchen nun die gemeinsamen Strahlen der Involution J_h und des Büschels A_p der Strahlen p. Wir übertragen zu diesem Zwecke die Involution J_h auf einen Kreis K^2 durch A. Dann schneiden die Paare der J_a und J_h aus diesem Kreise Punktepaare, welche auf Geraden durch den Mittelpunkt M des Kreises liegen. Gehört zu der Geraden p_1 das Strahlenpaar $a_1 a_1^*$, so liegen seine Schnittpunkte mit K^2 auf einer Geraden t_1 durch M. Ziehen wir durch M die Normale n_1 zu t_1, so trifft diese den Kreis in zwei Punkten, durch welche das entsprechende Paar h_1, h_1^* geht. Auf diese Weise ist das Büschel der p zu dem Büschel der n projektivisch zugeordnet und beide Büschel bringen einen Kegelschnitt E^2 hervor. Derselbe geht durch A. Er schneidet also K^2 im allgemeinen in drei weiteren Punkten. Durch diese gehen die drei gesuchten gemeinsamen Strahlen. Zu jedem derselben gehören zwei Vierecke, welche die Aufgabe lösen.

Die Konstruktion gestaltet sich besonders einfach, wenn wir den Kreis K^2 über $A B$ als Durchmesser beschreiben. Dann geht E^2 durch A und M. Die Tangente in M steht zu $A M$ senkrecht. Schneidet a den Kreis K^2 in F, so ziehen wir durch M die Senkrechte zu $M F$. Diese Linie trifft $A F$ in einem Punkte H von E^2. Ist J der Schnittpunkt von b mit K^2, so ziehen wir durch M die

Senkrechte zu MJ und durch A die Senkrechte zu b. Beide Linien schneiden sich in einem Punkte L von E^2. Durch diese fünf Elemente ist E^2 bestimmt.

Wir bemerken noch, daß der Kreis K^2 mit dem Kegelschnitt E^2 außer A mindestens noch einen reellen Punkt gemeinsam hat, dem zwei reelle Vierecke entsprechen. In der Figur 1 ist G dieser reelle gemeinsame Punkt. Verbinden wir ihn mit M und ziehen wir in M die Senkrechte zu MG, so schneidet diese aus K^2 die zwei Lagen O, O^*, welche Schnittpunkte der gesuchten Diagonalen sind.

Zur Berechnung des Winkels φ, welchen eine Diagonale AT des Vierecks (Fig. 2) mit der Seite AB oder c bildet, läßt sich eine kubische Gleichung ableiten, welche wir ihrer symmetrischen Form wegen kurz entwickeln.

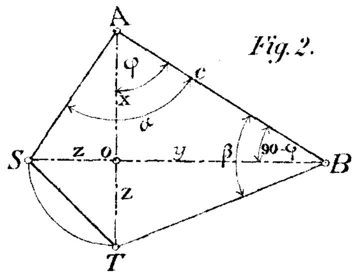


Fig. 2.

Seien α, β die Winkel des Vierecks bei A und B und sei $AO = x$, $OB = y$ und $OT = OS = z$, so ist:

$$\frac{x+z}{c} = \frac{\sin\beta}{\sin\{180 - (\beta+\varphi)\}} = \frac{\sin\beta}{\sin(\beta+\varphi)}$$

$$\frac{y+z}{c} = \frac{\sin\alpha}{\sin\{180 - (\alpha + 90 - \varphi)\}} = \frac{\sin\alpha}{\cos(\alpha-\varphi)}\,.$$

Aber $x = c\cos\varphi$ und $y = c\sin\varphi$. Also folgt:

$$\cos\varphi + \frac{z}{c} = \frac{\sin\beta}{\sin(\beta+\varphi)} \quad \text{und} \quad \sin\varphi + \frac{z}{c} = \frac{\sin\alpha}{\cos(\alpha-\varphi)}\,.$$

Daraus folgt:

$$\frac{z}{c} = \frac{\sin\beta}{\sin(\beta+\varphi)} - \cos\varphi = \frac{\sin\alpha}{\cos(\alpha-\varphi)} - \sin\varphi \quad \text{oder}$$

$$\frac{1}{\operatorname{ctg}\beta\,.\,\sin\varphi + \cos\varphi} - \cos\varphi = \frac{1}{\operatorname{ctg}\alpha\,.\,\cos\varphi + \sin\varphi} - \sin\varphi \quad \text{oder}$$

$$\frac{\sin^2\varphi - \operatorname{ctg}\beta\,.\,\sin\varphi\cos\varphi}{\operatorname{ctg}\beta\,.\,\sin\varphi + \cos\varphi} = \frac{\cos^2\varphi - \operatorname{ctg}\alpha\,.\,\sin\varphi\cos\varphi}{\operatorname{cotg}\alpha\,.\,\cos\varphi + \sin\varphi} \quad \text{oder}$$

$$\frac{\operatorname{tg}\varphi - \operatorname{ctg}\beta}{\operatorname{ctg}\varphi - \operatorname{ctg}\alpha} = \frac{\operatorname{ctg}\beta\,.\,\operatorname{tg}\varphi + 1}{\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{tg}\varphi}\,;$$

lösen wir diese Gleichung nach $\operatorname{tg}\varphi$, so folgt:

$$\operatorname{tg}^3\varphi + \operatorname{tg}^2\varphi(\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{ctg}\beta + \operatorname{ctg}\alpha \, . \, \operatorname{ctg}\beta) + \\ + \operatorname{tg}\varphi(\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{ctg}\beta - \operatorname{ctg}\alpha \, . \, \operatorname{ctg}\beta) = 1 \, .$$

Bemerkung zur „Aufgabe über trilinear verwandte Felder". [1])

Ist auch der Drehungssinn für die Vereinigung der Grund- und Kreuzrißebene mit der Aufrißebene freigestellt, so kommt außer der Parabel p, welche den Punkt H als Brennpunkt und die Gerade $K_3 N$ als Scheiteltangente besitzt, auch noch die Parabel p_r in Betracht, welche H als Brennpunkt und $K_3 M$ als Scheiteltangente besitzt, so daß sie also gegen p um 90^0 gedreht ist. Hieraus ergeben sich wieder drei Lösungen. Nach den im vorangehenden Aufsatze des Herrn Christian Beyel gemachten Untersuchungen ist zu ersehen, daß die drei neuen Lagen des Punktes O auf dem Kreise k diametral zu jenen sind, welche die drei ersten Lösungen bilden.

Theodor Schmid.

---

[1]) XIV. Jahrgang der Monatshefte. S. 343.