

Sitzungsberichten der niederrhein. Ges. für Natur und Heilkunde vom 24. Nov. keine Kenntniß hatte, den Namen *Dewalquit* in Vorschlag gebracht hat. Ueber die Priorität unseres Namens kann hier kein Zweifel seyn, umso mehr aber muß der Name, den Pisani vorschlug, wieder verschwinden, als die chemische Analyse, die er an genannter Stelle mittheilt, durchaus die Constitution des Minerals nicht wiedergiebt. Pisani's Zahlen sind fast alle fehlerhaft, besonders gilt das aber vom Vanad (1,80 Proc. Vanadinsäure) und dadurch ist natürlich auch der Gehalt an Thonerde um etwa 5 Proc. zu hoch ausgefallen. Es dürfte somit auf die Mittheilung Pisani's in Bezug auf dieses neue Mineral durchaus kein Werth zu legen seyn. Mit dem Masonit hat unser Mineral auch nicht die geringste Gemeinschaft, wie dies Pisani zu glauben scheint.

VII. *Der elektrische Leitungswiderstand des Quecksilbers in absolutem Maafse; von L. Lorenz in Kopenhagen.*

Die verschiedenen von Weber¹⁾, von der Commission der *British Association*²⁾ und von Kohlrausch³⁾ ausgeführten Bestimmungen des elektrischen Leitungswiderstandes des Quecksilbers in absolutem Maafse haben trotz der großen Sorgfalt, mit welcher alle diese Messungen ausgeführt sind, doch zu ziemlich abweichenden Resultaten geführt. Man hat bei diesen Messungen verschiedene von Weber angegebene Methoden in Anwendung gebracht, welche Methoden jedoch alle darin übereinstimmen, daß inducirte *Ströme* von *veränderlicher* Stromstärke gebraucht

1) Abb. der K. Ges. d. Wiss. zu Göttingen, 1862.

2) *Rep. of the Brit. Ass.* 1863 und 1864.

3) Nachrichten von der K. Ges. d. Wiss. zu Göttingen 1870.

werden. Da ich gerade in diesem Umstande die Ursache der erwähnten ziemlich räthselhaften Abweichungen vermuthete, und da zudem die Ausführung genauer Versuche nach diesen Methoden mit sehr bedeutenden Schwierigkeiten verbunden ist, so habe ich es versucht einen anderen Weg einzuschlagen, wobei allein eine *constante* elektromotorische Kraft *ohne* Strom zur Anwendung kommen sollte und wo zudem die Bestimmung eines Leitungswiderstandes, welcher in absolutem elektromagnetischem Maaße ausgedrückt eine Geschwindigkeit ($\frac{\text{Millimeter}}{\text{Secunde}}$) ist, auch bei der practischen Ausführung des Versuches allein zur Messung einer Geschwindigkeit zurückgeführt wurde.

Fig. 10 Taf. I stellt den von mir für diese Messungen construirten, in der Jünger'schen Werkstätte hierselbst ausgeführten Apparat dar. Eine Messingscheibe *A*, 200^{mm} im Durchmesser, ist an dem einen Ende einer sehr leicht umdrehbaren Axe *B* befestigt, die durch ein Räderwerk mit einer anderen Axe verbunden ist. Eine jede dieser Axen ist mit einer dicken Messingscheibe, die als Schwungrad dient, versehen. Die Scheibe *A* bewegt sich innerhalb einer Rolle von Mahagoniholz, deren innerer Durchmesser nur sehr wenig größer ist als der Durchmesser der Scheibe. Die Rolle, die an einem in der Richtung der Axe verschiebbaren Fußgestelle *D* befestigt ist, ist in sehr regelmäßigen Schichten mit einem 1^{mm} dicken, mit Seide doppelt übersponnenen Kupferdraht umwickelt. Das Fußgestell *D* dient ferner als Träger einer dünnen zugespitzten Messingstange, die mit ihrer amalgamirten Spitze gegen das Centrum der rotirenden Scheibe gedrückt werden kann, und in dieser Weise die Scheibe in leitende Verbindung mit der Klemmschraube *g* setzt. Eine andere nahe bei dieser angebrachte Klemmschraube ist in leitender Verbindung mit einer dünnen Messingfeder *f*, die an der inneren Fläche des hölzernen Ringes quer über denselben geht und leicht gegen die Scheibe schleift. Zwei

andere Klemmschrauben h sind mit den beiden Enden des auf die Rolle gewickelten Drahtes verbunden.

Wenn nun ein elektrischer Strom durch die Drahtrolle geleitet und die Scheibe in Rotation gesetzt wird, so entsteht durch Induction ein elektrischer Spannungsunterschied zwischen dem Centrum und der Peripherie der rotirenden Scheibe, und sind die Klemmschrauben g in Verbindung mit einem Multiplicator, so wird sich hier ein Ausschlag zeigen. Man leitet nun den Hauptstrom durch eine Leitung, deren Widerstand gemessen werden soll, zum Beispiel durch eine in einer cylindrischen Glasröhre eingeschlossene Quecksilbersäule, welche an zwei Punkten durch zwei dünne in der Wand der Glasröhre eingeschmolzene Platindrähte abgeleitet ist. Dieser abgeleitete Strom wird in den Stromkreis des inducirten Stromes eingeschaltet, in der Weise, daß der abgeleitete und der durch die Rotation der Scheibe inducirte Strom beide durch dieselbe Leitung zum Multiplicator geführt werden. Man läßt nun die Scheibe in einer solchen Richtung rotiren, daß diese beiden Ströme entgegengesetzt werden, und bei einer bestimmten Umdrehungsgeschwindigkeit werden sie einander gerade *aufheben* können, so daß die Multiplicatornadel zum Nullpunkte zurückgeht. Die in dieser Weise gefundene Umdrehungsgeschwindigkeit wird alsdann, mit einer für den Apparat berechneten constanten Zahl multiplicirt, den absoluten Widerstand der zwischen den beiden Platindrähten in der Glasröhre eingeschlossenen Quecksilbersäule angeben. Es sey nämlich w dieser Widerstand und s die Stromstärke des Hauptstromes, alsdann ist in dem erwähnten Versuche der elektrische Spannungsunterschied in den beiden ableitenden Platindrähten gleich sw . Es sey ferner P der Spannungsunterschied zwischen Centrum und Peripherie der Scheibe, wenn die Intensität des Hauptstromes gleich eins ist, und die Scheibe mit gleichförmiger Geschwindigkeit in der Secunde umgedreht wird. Wenn also die Intensität des Hauptstromes gleich s ist und die

Scheibe n Mal in der Secunde rotirt, so wird die durch Induction entstandene elektromotorische Kraft gleich Psn . Nun ist $sw = Psn$, also $w = Pn$, wenn der Multiplicator keinen Strom anzeigt. Der Widerstand ist also von der Intensität des Hauptstromes unabhängig, und die Messungen allein sind darauf beschränkt, wenn einmal die Constante P des Apparats bekannt ist, die Zahl der Umdrehungen der Scheibe in der Secunde bei jedem zu messenden Widerstande zu ermitteln.

Ich hatte ursprünglich beabsichtigt, die Umdrehungsgeschwindigkeit der Scheibe durch einen besonderen elektrischen Apparat zu messen, es zeigte sich aber gleich bei den ersten vorläufigen Versuchen, daß ich in ganz einfacher Weise eine unerwartet große Genauigkeit erreichen konnte, nämlich durch Drehen mit der Hand und Zählen der Umdrehungen, während die Zeit durch die Minutenschläge einer Pendeluhr angegeben wurde. Mit weniger Uebung brachte ich es bald dahin, daß die zufälligen Fehler bei dieser Bestimmung der Umdrehungsgeschwindigkeit nicht 0,2 Procent überstiegen.

Als Stromerreger dienten gewöhnlich 4 Bunsen's Elemente, doch war schon der Strom eines einzigen doppelt chromsauren Kali-Elements genügend. Es zeigte sich kein Unterschied in den Resultaten bei der Anwendung von Strömen verschiedener Intensität, und die Genauigkeit war bei den schwächeren Strömen fast dieselbe. Der Multiplicator hatte nur wenige Windungen und eine Doppelnadel, deren Empfindsamkeit durch das Anbringen eines Magnets in einigen Abstand von derselben erhöht war. Der Stand der Nadel wurde durch einen über dieselbe angebrachten festen Spiegel von dem Orte ab, wo der Umdrehungsapparat angebracht war, mit einem Fernrohre beobachtet. Die Entfernung des Umdrehungsapparates vom Multiplicator betrug 3 bis 4 Meter und der Apparat war so aufgestellt, daß ein starker durch die Drahtrolle desselben geleiteter Strom keine merkbare Wirkung auf die Nadel des Multiplicators ausübte.

Der Ausschlag der Nadel des Multiplicators bei der Hindurchleitung des vom Hauptstrome abgeleiteten Stromes betrug in meinen Versuchen 40 bis 60 Grade. Während ich mit der einen Hand die Scheibe in Rotation setzte, beobachtete ich durch das Fernrohr den Stand der Multiplicatornadel, und es war jetzt darum zu thun die Umdrehungsgeschwindigkeit so anzupassen, daß die Nadel genau am Nullpunkte festgehalten wurde, was mit einiger Uebung nicht schwer zu erreichen war. Während des Umdrehens der Scheibe entstand ein thermo-elektrischer Strom, welcher leicht durch Unterbrechung des Hauptstromes beobachtet werden konnte und einen Ausschlag an dem Multiplicator von ohngefähr einem Grade erzeugte. Der Nullpunkt des Multiplicators wurde deshalb um dieselbe GröÙe verschoben, in der Weise, daß die Nadel bei allen Versuchen den Nullpunkt anzeigte, wenn der Hauptstrom unterbrochen war, während das Umdrehen der Scheibe ungeändert fortgesetzt wurde. Dagegen war die inducirende Wirkung des Erdmagnetismus auf die rotirende Scheibe so klein, daß sie an dem Multiplicator nicht beobachtet werden konnte.

Um in jedem Falle den Einfluß dieser Fehlerquellen auf das endliche Resultat durch die Versuche selbst aufheben zu können, wurden diese stets in folgender Weise angestellt. Nachdem die Scheibe in Umdrehung gesetzt war und diejenige Geschwindigkeit erreicht hatte, bei welcher die Nadel des Multiplicators auf den Nullpunkt zurückkommt, fing mit dem Minutenschlage der Pendeluhr das Zählen der Umdrehungen der Kurbel an; bei jedem folgenden Minutenschlage wurde die *ganze* Zahl, die der Anzahl der Umdrehungen am nächsten entsprach, gemerkt, während das Zählen von 0 an fortgesetzt wurde, wonach der Hauptstrom, nach dem Verlaufe von 2 oder 3 Minuten, durch einen Commutator umgekehrt wurde, während das Umdrehen und das Zählen ununterbrochen noch in 2 oder 3 Minuten fortgesetzt wurden. Bei dem letzten Minutenschlage wurde außerdem der Bruchtheil einer Um-

drehung geschätzt und notirt. Es war nun das Umdrehen für einen Augenblick unterbrochen, die zum Multiplicator führenden Leitungsdrähte wurden umgetauscht, so daß die Nadel den entgegengesetzten Ausschlag machte, der Multiplicator wurde aufs Neue, während die Scheibe gedreht wurde und der Hauptstrom unterbrochen war, eingestellt, und der Versuch wurde nun in derselben Weise wie vorher wiederholt.

Alle Längenmessungen wurden mit einem Kathetometer gemacht, dessen Fernrohr ich mit *zwei* achromatischen Objectiven versehen hatte, um den zu messenden Gegenstand dem Fernrohre hinlänglich nahe (150 bis 200^{mm}) bringen zu können. Zuerst wurden die Dimensionen der Scheibe und der hölzernen Rolle gemessen, nachher wurde die Rolle auf der Drehbank mit dem Kupferdrahte in 484 Windungen (16 Schichten) umwickelt, und, nachdem der Durchmesser dieser „inneren“ Rolle gemessen war, in derselben Weise noch mit 410 Windungen (14 Schichten) umwickelt. Die Resultate der Messungen waren folgende:

Dicke der Scheibe	3,40 ^{mm}
Durchmesser der Scheibe	200,00
Innerer Durchmesser der Drahtrolle	205,78
Durchmesser der inneren Rolle	237,6
Durchmesser der ganzen Rolle	266,0
Breite der Windungen	36,5.

Hieraus berechnet man, wie ich am Schlusse dieses Aufsatzes zeigen werde, die Constanten des Apparats. Für die innere Rolle findet man die Constante gleich

$$1,3433 \cdot 10^6,$$

und für die ganze Rolle

$$2,2115 \cdot 10^6.$$

Die Messungen, welche ich mit diesem Apparate ausgeführt habe, sind vornehmlich auf die Bestimmung des Leitungswiderstandes des Quecksilbers ausgegangen. Als Behälter für das Quecksilber dienten gerade cylindrische, an dem einen Ende zugeschmolzene Glasröhren. Drei Platindrähte waren in die Wände der Röhren eingeschmolzen,

der eine nahe am Boden und die beiden anderen, deren Dicke nur 0^{mm},20 betrug, ungefähr $\frac{1}{3}$ und $\frac{2}{3}$ der Länge der Röhre vom Boden entfernt. Die letzteren Drähte reichten nur gerade innerhalb der Wand der Glasröhre. Das Quecksilber war durch Hinstehen in längerer Zeit mit Salpetersäure gereinigt; das specifische Gewicht desselben fand ich bei 5°,3 C. gleich 13,586, was bei 0° 13,598, also fast genau der Regnault'schen Zahl, entspricht.

Das Calibrieren der Röhren wurde auf folgende Weise ausgeführt. Nachdem die Röhre bis an den oberen Platindraht mit Quecksilber angefüllt war, wurde dieselbe mit einer Quecksilberluftpumpe verbunden, um durch Auspumpen der Luft und Schütteln alle Luftblasen vollständig zu entfernen. Die Röhre wurde nun auf eine feste Unterlage aufgestellt, und die Höhe des Quecksilbers mit dem Kathetometer gemessen. Nachdem wurde eine kleine Menge des Quecksilbers mit einer geraden Glasröhre, die als Heber diente, weggenommen und auf die Waage gebracht, die Höhe des Quecksilbers wurde wieder gemessen, und so fort weiter bis die Oberfläche des Quecksilbers den zweiten Platindraht erreicht hatte. Ich gebe hier die Einzelheiten der Messungen für die Röhre No. 1.

h mm	p gr	$\frac{\Delta h}{\Delta p}$
152,91		
149,18	2,938	1,2696
144,55	6,355	1,3550
137,89	11,317	1,3422
130,30	16,980	1,3403
119,41	25,073	1,3444
108,77	33,010	1,3418
96,60	42,080	1,3418
83,28	51,992	1,3438
72,04	60,356	1,3439
60,60	68,848	1,3471
54,61	73,303	1,3445
52,15	75,113	1,3591
49,42	77,278	1,2610

h ist die am Kathetometer gemessene Höhe des Quecksilbers, p das Gewicht des weggenommenen Quecksilbers, Δh die Höhendifferenzen und Δp die entsprechenden Gewichts-differenzen. Die Mitte der beiden dünnen Platindrähte an dem Orte gemessen, wo sie inwendig in die Röhre hineintreten, waren bei 151,18^{mm} und 49,02^{mm}, die Entfernung derselben war also 102,16. Die Temperatur des Quecksilbers war 8°,80 C.

Man findet hieraus den Widerstand der zwischen den beiden Platindrähten eingeschlossenen Quecksilbersäule bei 0° C. gleich

$$0,0018587 \text{ Q. E.},$$

indem durch Q. E. die Siemens'sche Quecksilbereinheit bezeichnet ist.

In derselben Weise wurde mit zwei anderen Röhren verfahren. Für die Röhre No. 2 war die Entfernung der beiden Platindrähte 102,54^{mm} und der Widerstand der Quecksilbersäule

$$0,0005826 \text{ Q. E.},$$

für die Röhre No. 3 war die Entfernung der Drähte 156,06^{mm} und der Widerstand

$$0,00079067 \text{ Q. E.}$$

Die Röhre No. 1 wurde nun vollständig mit Quecksilber gefüllt, und nachdem die Luftblasen in der oben angegebenen Weise weggeschafft waren, wurde die Quecksilbersäule ihrer ganzen Länge nach durch den in den Boden eingeschmolzenen und einen anderen an das offene Ende der Röhre angebrachte Platindraht in einen von 4 Bunsen's Elementen, einem Commutator und der ganzen Drahtrolle des Apparates gebildeten Stromkreis eingeschaltet. Die beiden Ableitungsdrähte der Röhre wurden mit der Scheibe des Apparats und dem Multiplicator verbunden; die Nadel des letzteren zeigte hierbei einen Ausschlag von 57½°. Beim Umdrehen der Scheibe wurde die Nadel zum Nullpunkte zurückgeführt, und es ergab sich als Resultat des auf die oben beschriebene Weise

ausgeführten Versuches genau 117 Umdrehungen der Kurbel in jeder Minute bei einem in 4 Minuten fortgesetzten Umdrehen, und wiederum genau dieselbe Zahl nach Umkehren des zum Multiplicator führenden Stromes. Die Temperatur des Quecksilbers war $6^{\circ},84$ C. Bei einem anderen Versuche, der genau dasselbe Resultat herbeiführte, war die Temperatur des Quecksilbers $6^{\circ},40$; das Mittel dieser beiden Temperaturen ist $6^{\circ},62$ C.

Jede Umdrehung der Kurbel entsprach 4 Umdrehungen der Scheibe. Die Uhr gab nicht genau die mittlere Zeit an, indem der Verlauf zwischen jedem Minutenschlage 59,185 Secunden betrug. Die Zahl der Umdrehungen der Scheibe war also in den obigen Versuchen

$$\frac{4 \cdot 117}{59,185} = 7,9074,$$

welche Zahl mit der für die ganze Rolle berechneten Constante ($2,2115 \cdot 10^6$) multiplicirt giebt

$$17,487 \cdot 10^6$$

für den in absoluten Einheiten gerechneten Widerstand der Quecksilbersäule bei $6^{\circ},62$ C. Dieser Widerstand wird durch die Multiplication mit $1 - 0,00075 t$, wo $t = 6,62$ ist, auf 0° reducirt. Bezeichnen wir ferner 10^{10} absolute Widerstandseinheiten $\left(\frac{\text{Millimeter}}{\text{Secunde}}\right)$ durch O. E. (eine Ohm's Einheit), so erhalten wir

$$0,0018587 \text{ Q. E.} = 0,0017400 \text{ O. E.},$$

woraus folgt

$$1 \text{ Q. E.} = 0,9362 \text{ O. E.}$$

Für die Röhre No. 2 fand ich, wenn nur die innere Drahtrolle in den Hauptstrom eingeschaltet war,

$$60, 60, 61 \mid 60, 60, 61$$

Umdrehungen der Kurbel bei einem in 6 Minuten fortgesetzten Zählen, wobei der Hauptstrom nach dem Verlaufe der ersten 3 Minuten umgekehrt war, und nach Umtauschung der zum Multiplicator führenden Leitungsdrähte

$$60, 61, 60 \mid 60, 61, 60.$$

Die Temperatur des Quecksilbers war $9^{\circ} 1 \text{ C.}$ Hieraus ergibt sich, indem die Constante hier gleich $1,3433 \cdot 10^6$ ist,

$$1 \text{ Q. E.} = 0,9338 \text{ O. E.}$$

Für dieselbe Röhre mit der ganzen Drahtrolle verbunden war die Anzahl der Umdrehungen

$$36, 37, 36 \quad | \quad 37, 37, 36$$

$$36, 36, 37 \quad | \quad 37, 37, 37\frac{1}{4},$$

bei $6^{\circ},60 \text{ C.}$, woraus man findet

$$1 \text{ Q. E.} = 0,9339 \text{ O. E.}$$

Die Versuche mit der Röhre No. 3 und der inneren Drahtrolle allein ergaben

$$81, 81, 82 \quad | \quad 81, 82, 82$$

$$81, 82, 81 \quad | \quad 81, 82, 82\frac{1}{4}$$

Umdrehungen bei $5^{\circ},22 \text{ C.}$, und für dieselbe Röhre mit der ganzen Drahtrolle verbunden wurden

$$49, 50, 50 \quad | \quad 49, 49, 50$$

$$49, 50, 50 \quad | \quad 49, 49, 50$$

Umdrehungen bei derselben Temperatur gemacht. Die hieraus berechneten Resultate sind

$$1 \text{ Q. E.} = 0,9324 \text{ O. E.}$$

$$1 \text{ Q. E.} = 0,9320 \text{ O. E.}$$

Als Mittel dieser fünf Versuche ergibt sich

$$1 \text{ Q. E.} = 0,9337 \text{ O. E.,}$$

oder die Quecksilbereinheit ist $0,9337 \cdot 10^{10}$ absoluten Einheiten gleich.

Ich habe zugleich versucht den Widerstand eines Etalons von Siemens in absolutem Maasse zu bestimmen, doch gelang es mir nicht die erwünschte Genauigkeit bei dieser Bestimmung zu erreichen, indem der Widerstand des Etalons viel zu groß war, um mit meinem Apparate unmittelbar gemessen werden zu können. Ich werde mich deshalb nicht bei den Einzelheiten dieser Messungen, die außerdem nur von geringfügigem Belange sind, aufhalten. Zur Vergleichung diente ein 66 Meter langer, $1,79^{\text{mm}}$ dicker Kupferdraht, dessen specifischen Leitungswiderstand ich durch mehrere an verschiedenen Stellen des Drahtes mit

meinem Apparate ausgeführte Messungen gleich 193500 bei $9^{\circ},2$ C. fand; derselbe war also 48,25 Mal kleiner als derjenige des Quecksilbers bei 0° . Dieser Draht wurde nun nach der Wheatstone'schen Methode mit dem Etalon verglichen, wobei der Widerstand dieses Etalons gleich 0,943 O. E. gefunden wurde.

Das oben angegebene Resultat meiner unmittelbaren Bestimmungen des absoluten Widerstandes der Quecksilbereinheit, wo der Fehler des resultirenden Mittelwerthes kaum über 0,2 Procent wird hinausgehen können, ist ungefähr um 2 Procent niedriger als der von dem britischen Comité gefundene Werth (0,9629 und 0,9564 O. E.), der wiederum niedriger ist als die von anderen Beobachtern (vielleicht mit Ausnahme von Kirchhoff) ¹⁾ gefundenen Werthe, indem Weber den Werth 1,0257 O. E. und zuletzt Kohlrausch 0,9705 O. E. gefunden haben. Es hat sich also durch meine Messungen die von mir im Anfange dieses Aufsatzes ausgesprochene Vermuthung bestätigt, nämlich daß die Nichtübereinstimmungen der bisherigen Resultate in den angewendeten Methoden selbst ihren Grund haben und namentlich von dem Umstande herrühren, daß die früheren Versuche mit inducirten Strömen von veränderlicher Intensität ausgeführt worden sind. Zum Theil wird diese Annahme schon durch die von dem britischen Comité veröffentlichte Beobachtungsreihe ²⁾ bekräftigt, indem die mit den größeren Umdrehungsgeschwindigkeiten angestellten Versuche ein im Verhältniß zum Mittelwerthe um etwas zu hohes Resultat und die anderen Versuche ein zu niedriges Resultat gegeben haben.

In einem früheren Aufsatz „Bestimmung der Wärmegrade in absolutem Maasse“ ³⁾ hatte ich schon einen Zweifel über die Richtigkeit der mit veränderlichen Inductionsströmen ausgeführten Widerstandsmessungen ausgesprochen,

1) Pogg. Ann. Bd. 76, Berliner Berichte 1851, S. 781.

2) *Rep. of the Brit. Ass.* 1864. Pogg. Ann. Bd. 126.

3) Pogg. Ann. Bd. 147.

allein es zeigt sich nun, daß die Abweichungen in dem entgegengesetzten Sinne von dem, was ich damals vermuthete, gehen. In welcher Weise es sich nun mit der Wärmeentwicklung eines elektrischen Stromes in einem Leiter, dessen Widerstand in absoluten Einheiten bestimmt ist, verhält, darüber können nur zukünftige Versuche die entscheidende Antwort geben. Aus den Versuchen, die wir bis jetzt haben, nämlich von v. Qu. Icilius¹⁾ und H. Weber²⁾ scheint hervorzugehen, daß die beobachtete Wärmeentwicklung größer sey als die aus der Theorie berechnete.

Einige andere Versuche, die ich mit meinem Apparat angestellt habe, werde ich nur noch kürzlich erwähnen. Wenn der Hauptstrom unterbrochen wird, während die Scheibe gedreht wird und die Nadel des Multiplicators auf dem Nullpunkt steht, so empfängt die Nadel einen Stoß und sie macht einen Ausschlag von mehreren Graden. Die Richtung des Ausschlages zeigt an, daß der abgeleitete Strom im Augenblicke der Unterbrechung des Hauptstromes das Uebergewicht über den in der Scheibe inducirten Strom hat. Umgekehrt verhält es sich beim Schließen des Hauptstromes

Auch wurden Versuche mit intermittirendem Hauptstrom angeestellt, indem ein Selbstunterbrecher in den Stromkreis eingeschaltet wurde. Um einen ruhigen Stand der Multiplicatornadel zu erhalten ist hierbei aufzupassen, daß der Contact zwischen Scheibe und Feder gut hergestellt ist, wovon man sich leicht überzeugt, wenn man bei constantem Hauptstrom die Scheibe so herumdreht, daß der inducirte und der abgeleitete Strom einander verstärken. Wenn alsdann ein größerer und zugleich ein ruhiger Ausschlag der Nadel erhalten wird, so kann man den Contact als gut ansehen, da in entgegengesetztem Falle die Nadel sich sehr unruhig zeigen würde. Meine mit intermittirendem Hauptstrom ausgeführten Versuche ga-

1) Pogg. Ann. Bd. 101.

2) Inauguraldissertation, Leipzig 1863.

ben zwar für den gemessenen Widerstand ein etwa um ein Procent zu hohes Resultat, allein ich schreibe diesen Unterschied auf die Rechnung der Beobachtungsfehler, indem es bei diesen Versuchen schwieriger war die Nadel in völliger Ruhe zu halten, und bei einem unruhigen Stande der Nadel ist man meiner Erfahrung nach geneigt die Scheibe um etwas zu schnell herumzudrehen.

Da man vielleicht einiges Bedenken gegen die Anwendung der ziemlich (7 bis 14^{mm}) dicken Quecksilbersäulen hegen könnte, stellte ich einige Versuche an um zu untersuchen, ob die Länge der über dem oberen Platindraht stehenden Quecksilbersäule auf das Resultat einigen Einfluß ausüben konnte. Diese Länge war in den oben beschriebenen Versuchen ungefähr eben so groß wie die Entfernung der beiden ableitenden Platindrähte. Ich wiederholte nun die Versuche mit der Röhre No. 3 bei kleineren Höhen des Quecksilbers, allein es zeigte sich kein Unterschied in den Resultaten bevor ich so viel von dem Quecksilber weggenommen hatte, daß dasselbe nur gerade den oberen Platindraht deckte und mit seiner Kuppe ungefähr um ein Millimeter darüber stand. In diesem Falle war der gefundene Widerstand um ein Procent zu klein, das heißt, die elektromotorische Kraft des abgeleiteten Stromes war jetzt um ein Procent verringert. Seitdem habe ich die Richtigkeit dieses Resultates durch Berechnung bestätigt gefunden, indem ich die Fortpflanzung eines constanten elektrischen Stromes in einem geraden circularen Cylinder, an dessen Endflächen der Strom durch eine Drahtleitung zu- und abgeleitet wird, berechnet habe. Da indessen diese Berechnung hier kein besonderes Interesse haben kann, werde ich mich auf die Bemerkung beschränken, daß die erwähnte mathematische Aufgabe durch Hülfe der Bessel'schen Funktion sich in voller Allgemeinheit lösen läßt.

Berechnung der Constanten des Apparates. Man denke sich durch einen circularen Leiter einen elektrischen Strom,

dessen Intensität gleich Eins ist, geleitet. Concentrisch mit diesem Leiter und in einer parallelen Ebene sey ferner eine unendlich dünne circular Scheibe mit gleichförmiger Geschwindigkeit ein Mal in der Secunde herumgedreht. Es wird alsdann durch die Induction ein elektrischer Spannungsunterschied p zwischen dem Centrum und der Peripherie der Scheibe entstehen.

Um die GröÙe p zu berechnen, denke man sich die Einheit der Elektrizitätsmenge in jeder Secunde vom Centrum zur Peripherie der Scheibe geleitet; es entsteht alsdann ein elektrodynamischer Widerstand gegen das Umdrehen der Scheibe, wenn dasselbe in dem Sinne der Bewegung der positiven Elektrizität in dem festen Leiter vor sich geht, und diejenige Arbeit, die zur Ueberwindung dieses Widerstandes in der Secunde erfordert wird, ist nun dem gesuchten Spannungsunterschiede p gleich. Da die ganze vom Centrum zur Peripherie der Scheibe hindurchgeleitete Elektrizitätsmenge durch jeden mit der Peripherie concentrischen Kreis der Scheibe hindurchgeht, und da die elektrodynamische Wirkung des festen Stromleiters in jedem Punkte eines solchen Kreises die nämliche ist, so kann man sich auch die Elektrizität allein durch einen linearen Leiter vom Centrum zur Peripherie der Scheibe geleitet denken, und p wird alsdann derjenigen Arbeit gleich seyn, die erfordert wird, um diesen radialen von der Einheit der Stromstärke durchströmten Leiter ein Mal umzudrehen.

Der Radius der Scheibe sey r , der Radius des circularen Leiters R , die Entfernung der Scheibe von der Ebene sey a . Man wird alsdann von den bekannten elektrodynamischen Gesetzen ausgehend finden, daß die erwähnte Arbeit und somit der Spannungsunterschied p durch

$$p = 2\pi \int_0^{2\pi} d\theta \frac{r R \cos \theta}{\sqrt{R^2 + r^2 + a^2 - 2 R r \cos \theta}}$$

ausgedrückt ist.

Man setze in diese Gleichung

$$c = \frac{(R-r)^2 + a^2}{(R+r)^2 + a^2}, \quad c' = 1 - c = \frac{4Rr}{(R+r)^2 + a^2}, \quad \theta = \pi - 2\varphi,$$

ein, wodurch dieselbe in

$$p = 4\pi \sqrt{rRc'} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \frac{2\sin^2 \varphi - 1}{\sqrt{1 - c' \sin^2 \varphi}}$$

übergeht.

Führen wir hier die aus der Theorie der elliptischen Functionen bekannten Bezeichnungen

$$K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - c \sin^2 \varphi}}, \quad K' = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - c' \sin^2 \varphi}},$$

$$E' = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \sqrt{1 - c' \sin^2 \varphi},$$

ein, so erhalten wir

$$p = 4\pi \sqrt{rRc'} \left(\frac{2-c'}{c'} K' - \frac{2}{c'} E' \right).$$

Nun hat man bekanntlich

$$E' = cK' - 2cc' \frac{dK'}{dc},$$

also wird

$$p = 4\pi \sqrt{rRc'} \left(K' + 4c \frac{dK'}{dc} \right).$$

Indem wir jetzt c als eine ziemlich kleine Gröfse betrachten, wird es die Aufgabe seyn, K' in eine Reihe nach steigenden Potenzen von $c = 1 - c'$ zu entwickeln. Man kann sich hierzu der aus der Theorie der elliptischen Functionen bekannten Gleichung

$$cc' \left(K' \frac{dK'}{dc} - K \frac{dK'}{dc} \right) = \frac{\pi}{4}$$

bedienen, welche Gleichung durch Integration

$$K' = -\frac{\pi}{2} K \int \frac{dc}{cc' K^2}$$

gibt, während die Constante dieses Integrales durch den

für unendlich kleine Werthe von c geltenden Gränzwert
 $K' = \frac{1}{2} l \frac{16}{c}$ bestimmt ist.

Man entwickle nun K in eine Reihe nach steigenden Potenzen von c , nämlich

$$K = \frac{\pi}{2} (1 + \frac{1}{4}c + \frac{9}{64}c^2 + \dots),$$

und findet alsdann

$$K' = \frac{1}{2} l \frac{16}{c} (1 + \frac{1}{4}c + \frac{9}{64}c^2 + \dots) - \frac{1}{2}c - \frac{21}{128}c^2 - \dots$$

Dieser Werth von K' in den oben für p gefundenen Ausdruck eingesetzt, macht

$$p = 2\pi \sqrt{rR} \left[l \frac{16}{c} (1 + \frac{1}{4}c + \frac{9}{64}c^2 + \dots) - 4 - \frac{3}{2}c - \frac{9}{64}c^2 - \dots \right].$$

Anstatt des linearen Leiters werden wir nun einen concentrischen Ring mit rectangulärem Durchschnitte annehmen, und derselbe sey von einer m Mal größeren Electricitätsmenge durchströmt. Die Radien der inneren und der äußeren cylindrischen Fläche dieses Ringes seyen R_1 und R_2 , und die Entfernungen der beiden ebenen Flächen des Ringes von der Ebene der rotirenden Scheibe seyen a_1 und a_2 . Wenn wir alsdann den elektrischen Spannungsunterschied zwischen dem Centrum und der Peripherie der Scheibe mit P bezeichnen, so ist

$$P = m \int_{R_1}^{R_2} \frac{dR}{R_2 - R_1} \int_{a_1}^{a_2} \frac{d\alpha}{a_2 - a_1} p.$$

Wir setzen hier

$$R = r(1 + \beta), \quad a = r\alpha,$$

und also

$$c = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{4(1 + \beta)} - \frac{(\alpha^2 + \beta^2)^2}{16}.$$

Das doppelte unbestimmte Integral von $d\alpha d\beta p$ können wir nun auf die Form bringen:

$$\int d\alpha \int d\beta p = 2\pi r \left[A(\alpha, \beta) l \frac{64}{\alpha^2 + \beta^2} + B(\alpha, \beta) \operatorname{arc} \left(\operatorname{tg} = \frac{\alpha}{\beta} \right) + C(\alpha, \beta) \right],$$

indem

$$A(\alpha, \beta) = \alpha\beta + \frac{1}{4}\alpha\beta^2 + \frac{1}{12}\alpha^3 + \frac{1}{48}\alpha\beta^3 + \frac{1}{16}\alpha^3\beta \\ - \frac{1}{128}\alpha(\alpha^2 + \beta^2)^2 + \dots$$

$$B(\alpha, \beta) = \alpha^2 - \beta^2 - \frac{1}{3}\beta^3 + \frac{1}{12}\alpha^4 - \dots$$

$$C(\alpha, \beta) = -\alpha\beta + \frac{1}{12}\alpha\beta^2 + \frac{5}{36}\alpha\beta^3 + \frac{1}{12}\alpha^3\beta \\ - \frac{11}{768}\alpha\beta^4 + \frac{8}{128}\alpha^3\beta^2 - \dots$$

Bezeichnen wir mit $P(\alpha, \beta)$ das obige Integral $\int d\alpha \int d\beta p$, und wird

$R_1 = r(1 + \beta_1)$, $R_2 = r(1 + \beta_2)$, $a_1 = r\alpha_1$, $a_2 = r\alpha_2$ gesetzt, so erhalten wir endlich

$$P = \frac{m}{(\beta_2 - \beta_1)(\alpha_2 - \alpha_1)} \left[P(\alpha_2, \beta_2) - P(\alpha_1, \beta_2) - P(\alpha_2, \beta_1) \right. \\ \left. + P(\alpha_1, \beta_1) \right].$$

Es ist hierbei vorausgesetzt, daß die Scheibe unendlich dünn sey. Denken wir uns dieselbe um die Größe x in die Richtung der Axe verschoben, so werden a_1 und a_2 in $a_1 - x$ und $a_2 - x$ und der zuerst gefundene Ausdruck für P in

$$m \int_{R_2}^{R_1} \frac{dR}{R_2 - R_1} \int_{a_1 - x}^{a_2 - x} \frac{da}{a_2 - a_1} p$$

übergehen.

Wenn also die Scheibe die Dicke 2ε hat, so erhält man anstatt P den Werth

$$m \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \frac{dx}{2\varepsilon} \int_{R_2}^{R_1} \frac{dR}{R_2 - R_1} \int_{a_1 - x}^{a_2 - x} \frac{da}{a_2 - a_1} p,$$

indem x alle Werthe von $-\varepsilon$ bis $+\varepsilon$ hindurchläuft und die Entfernungen a_1 und a_2 von der Ebene an, die dem $x=0$ entspricht, gerechnet sind.

Wenn die Dicke der Scheibe klein ist, so kann der letztere Ausdruck annäherungsweise gleich

$$P + \frac{\varepsilon^2 m}{6} \int_{R_2}^{R_1} \frac{dR}{R_2 - R_1} \int_{a_1}^{a_2} \frac{da}{a_2 - a_1} \frac{d^2 p}{da^2}$$

gesetzt werden, und man wird also zu dem oben gefundenen Werth von $P(\alpha, \beta)$ die Correction

$$\frac{\varepsilon^2}{6r^2} \frac{d^2 P(\alpha, \beta)}{d\alpha^2}$$

hinzuzufügen haben.

Endlich tritt in dem Apparate eine Drahtrolle an die Stelle des in der Rechnung angenommenen Ringes. Wenn die Anzahl der Windungen der Drahtrolle gleich m ist, und wenn in jeder Secunde die Elektricitätseinheit durch jede Windung hindurchgeht, so werden m Elektricitätseinheiten durch den Durchschnitt der Rolle in der Secunde hindurchgehen, was dieselbe Elektricitätsmenge ist, die wir für den Ring angenommen haben. Der einzige Unterschied zwischen Ring und Drahtrolle ist, daß sich bei der letzteren nichtleitende Zwischenräume zwischen den Windungen befinden. Die hieraus erfolgende Correction für $P(\alpha, \beta)$ wird indess im vorliegenden Falle ohne Bedeutung werden, weshalb ich mich darauf beschränken werde, nur das Resultat der Rechnung anzugeben, nämlich, daß die dem $P(\alpha, \beta)$ hinzuzufügende Correction gleich

$$-\frac{\eta^2}{24r^2} \left(\frac{d^2 P(\alpha, \beta)}{d\alpha^2} + \frac{d^2 P(\alpha, \beta)}{d\beta^2} \right)$$

seyn würde, wenn der Draht der Rolle linear wäre und η die Entfernung zweier benachbarten Windungen ist. Diese Correction beträgt indessen nicht 0,01 Procent, und da der Draht eine endliche Dicke hat, so ist dieselbe in der That noch kleiner.

In meinem Apparate ist für die ganze Drahtrolle
 $m = 894$, $\alpha_2 = -\alpha_1 = 0,1825$, $\beta_2 = 0,330$, $\beta_1 = 0,0289$,
 $\varepsilon = 0,017$, $\eta = 0,0118$,

und für die innere Rolle

$$m = 484$$
, $\beta_2 = 0,188$,

während die anderen Gröfsen die nämlichen bleiben.

Man findet im ersten Falle

$$P = 2,2124 \cdot 10^6,$$

und die Correction wegen der Dicke der Scheibe gleich — 0,04 Procent.

Für die innere Rolle findet man

$P = 1,3440 \cdot 10^6$, die Correction — 0,05 Procent.

VIII. *Gegen eine Bemerkung des Hrn. A. Schrauf über meinen Aufsatz: Zur Lehre von den Krystallzwillingen; von E. Reusch.*

In meinem Aufsatz über Krystallzwillinge habe ich

- 1) Die Anwendung der *stereographischen* Projection auf dieses Problem gezeigt,
- 2) nachgewiesen, wie in einfachster Weise die Hauptformeln für Zwillinge aus dem Fundamentalsatz über vier Pole derselben Zone für *jedes* Krystallsystem abgeleitet werden können.

So viel ich weiß ist Beides neu. Wenn nun bei Anwendung des allgemeinen Satzes auf specielle Fälle einige längst bekannte Formeln sich ergeben, so liegt das in der Natur der Sache, und es ist schwer zu begreifen, wie Jemand hieran Prioritätsansprüche knüpfen konnte. Daß aber Hr. Schrauf überhaupt nicht in der Lage war, meine auf die stereographische Projection basirte Arbeit zu würdigen, dürfte aus S. 229 und 230 seines Lehrbuchs der physikalischen Mineralogie hervorgehen, wo die Erläuterungen der sogenannten Neumann-Miller'schen Kugelprojection deutlich zeigen, daß ihm die geometrischen Principien dieser schönen, von ihm selber vielfach angewandten Darstellungsmethode unbekannt sind.

Tübingen 19. Juni 1873.
