

**SUL MOTO SPONTANEO DI UN SOLIDO DI RIVOLUZIONE,
VINCOLATO PER UN PUNTO DELL'ASSE DI SIMMETRIA AD UN CERCHIO FISSO,**

Memoria 2^a di E. DANIELE.

Introduzione.

Questa Memoria fa seguito ad una mia precedente dallo stesso titolo ¹⁾, che contiene un primo studio del moto spontaneo di un solido di cui un punto è assoggettato a mantenersi su una linea fissa. In quella prima Memoria avevo supposto che la linea, sulla quale è trattenuto il punto P del solido, fosse un cerchio, e che l'ellissoide d'inerzia relativo al punto P fosse di rivoluzione rispetto ad un asse contenente il baricentro; inoltre mi ero limitato a ricercare se il sistema ammettesse certi movimenti elementari che chiamai *moti precessionali*, e, dopo aver verificato lo stretto legame di questi coi moti stazionarii del sistema provenienti dalla presenza di due coordinate cicliche, ne avevo studiato la stabilità in base al criterio energetico.

Mi propongo ora di compiere una ricerca analoga per un solido di struttura alquanto diversa. Supporrò che il solido sia ancora simmetrico (s'intende, nel senso meccanico) rispetto ad un asse passante pel punto P, ma che il baricentro G, invece che appartenere all'asse di simmetria, sia situato nel piano perpendicolare a questo asse nel punto P (*piano equatoriale*): in un tale solido la massa è distribuita come nel caso della Kowalevski, salvo l'ulteriore specializzazione dovuta alla nota relazione fra i due momenti principali d'inerzia.

La distinzione fra il caso di un solido del tipo considerato nella Memoria 1^a e quello di un solido del tipo ultimamente detto è veramente essenziale; difatti delle due coordinate cicliche, che un'opportuna scelta di parametri indipendenti mette

1) Nuovo Cimento, 1907 (Giugno, Luglio).

in evidenza nel primo caso, una, come vedremo, va perduta nel secondo; i moti stazionarii, che noi troveremo per i solidi del secondo tipo, saranno quindi meno generali di quelli che abbiamo trovato per i solidi del primo; fra questi vi sono precessioni regolari vere e proprie, mentre quegli altri si riducono tutti a semplici rotazioni uniformi intorno ad un asse.

Si rendeva però interessante un confronto fra i moti stazionarii dell'uno e dell'altro tipo di solidi: s'intende che fra i primi bisognava limitarsi ai movimenti dovuti alla presenza dell'unica coordinata ciclica che figura quando il solido si supponga del secondo tipo. Il confronto mostra che se fra le due classi di movimenti vi sono delle analogie nei caratteri geometrici, si presentano per contro delle divergenze dal punto di vista della stabilità; vi è anzi una rotazione della seconda classe che si scosta, per quest'ultimo riguardo, da una della prima che le è perfettamente analoga, ed invece si comporta allo stesso modo come una rotazione stazionaria che il solido ammette nel caso della Kowalevski ¹⁾,

Nel § 1° sono determinati i moti stazionarii dei solidi del primo tipo che provengono da una sola coordinata ciclica; questi moti si possono ridurre a tre, e consistono in rotazioni uniformi intorno all'asse del cerchio (γ) a cui è vincolato il punto P: in una di queste, nella quale l'asse di simmetria del solido si mantiene parallelo all'asse di rotazione, il punto P deve essere lo stesso baricentro. Rispetto alla stabilità questa rotazione si comporta in modo diverso dalle altre due, il cui comportamento invece è identico. Del resto tutte e tre possono essere, a seconda dei casi, stabili od instabili.

I §§ 2° e 3° sono dedicati al caso del solido col baricentro G situato nel piano equatoriale. Mancando una delle due coordinate cicliche che si avevano nel caso precedente, viene pure a sparire uno dei due integrali primi lineari corrispondenti, e precisamente quello che esprime la costanza della proiezione, sull'asse di simmetria, dell'asse momento della coppia di quantità di moto del solido nella sua rotazione intorno al punto P.

1) Cfr. Levi-Civita: Sui moti stazionarii di un corpo rigido nel caso della Kowalevski; Rend. Acc. Lincei, vol. X, 1° (1901).

I moti stazionarii, che provengono dall'integrale rimanente, sono studiati nel § 2°, e si riducono a tre rotazioni uniformi intorno all'asse del cerchio (7): nella prima quest'asse sta nel piano equatoriale ed è perpendicolare all'asse baricentrico PG; nelle rimanenti due l'asse di rotazione è contenuto nel piano meridiano passante pel baricentro. L'analisi completa di queste rotazioni vien fatta al n. 7. Nel numero seguente si dimostra poi che, aggiungendo ai movimenti ora detti la precessione regolare che si trova quando si tenga fisso il punto P, si hanno tutti i moti precessionali compatibili col sistema.

È da notare che delle tre rotazioni del n. 7 ve ne sono due [la 1) e la 3)] che si possono considerare come analoghe di una [la 1)] del § 1°; esiste, cioè, una rotazione stazionaria del solido del primo tipo che si sdoppia, nel passare al secondo tipo, in due altre: la ragione di tale sdoppiamento sta nel fatto che l'asse di simmetria nel primo caso è lo stesso asse baricentrico PG; questi due assi sono invece distinti nel secondo caso.

I risultati, contenuti nel § 3°, sulla stabilità delle tre rotazioni stazionarie del § precedente, permettono un nuovo raffronto fra queste rotazioni e quelle del § 1°; ne risulta, secondo si accennò poco addietro, che le analogie geometriche di due movimenti non bastano perchè si possa affermare l'analogia dei loro caratteri meccanici. Si trova difatti che la rotazione 2) del § 2° è sempre instabile, pur essendo geometricamente del tutto analoga alla 2) del § 1°, che può essere invece, variando le condizioni, stabile od instabile.

Nel n. 13 della Memoria, ove tali raffronti vengono accennati, si precisano pure le analogie della rotazione instabile da noi trovata con una consimile che si incontra nel caso della Kowalevski. Aggiungeremo, a questo proposito, che la rotazione ora nominata è l'unico movimento stazionario noto del caso Kowalevski che sia suscettibile di confronto coi moti spontanei stazionarii da noi incontrati.

§ 1°. *Il baricentro del solido cade sull'asse di simmetria. Moti stazionarii provenienti da un solo integrale primo lineare, e studio della loro stabilità.*

1. L' integrale, di cui vogliamo studiare i corrispondenti moti stazionarii, è il (7) della Mem. 1^a, cioè

$$(1) \quad \begin{aligned} & MRU\omega' + (V \operatorname{sen} \vartheta + C \cos^2 \vartheta) \psi' + C \phi' \cos \vartheta - \\ & - MER \vartheta' \cos \vartheta \cos \chi = K, \end{aligned}$$

essendo

$$U = R + E \operatorname{sen} \vartheta \operatorname{sen} \chi, \quad V = A \operatorname{sen} \vartheta + MER \operatorname{sen} \chi.$$

Questo integrale deve la sua esistenza alla presenza della coordinata ciclica ψ : noi otterremo dunque i movimenti che c'interessano col porre, nelle equazioni (A) del movimento (Mem. 1^a), eguali a costanti la velocità ψ' e le coordinate ϕ, ϑ, χ . Le (A) danno luogo alle seguenti due relazioni:

$$(2) \quad \begin{cases} ER\omega' \operatorname{sen} \vartheta \cos \chi = 0 \\ \{(A - C) \operatorname{sen} \vartheta + MER \operatorname{sen} \chi\} \omega' \cos \vartheta = 0, \end{cases}$$

di cui la prima coincide colla prima del sistema (15'), che definiva, nella Mem. 1^a, i moti stazionarii provenienti da entrambi gli integrali (6) e (7). Si trovano quindi, com'è naturale, i movimenti di quella Memoria colla specializzazione $\phi' = 0$.

Si vede subito che non c'è da occuparsi dell'ipotesi $\omega' = 0$, poichè da questa e da $\chi = \text{cost.}$ segue $\psi' = 0$, ed il solido allora sta in quiete.

Non staremo neppure a studiare in dettaglio il caso $E = 0$, di cui si dirà sommariamente al n. 3; ed allora non ci rimane che occuparci delle due ipotesi $\operatorname{sen} \vartheta = 0$ e $\cos \chi = 0$, cioè dei movimenti che furono indicati nella Mem. 1^a con 3) e 4).

Essendo $\phi' = 0$, entrambi questi movimenti si riducono ora a rotazioni uniformi intorno all'asse z , col quale l'asse del solido sta costantemente in un piano.

La condizione complementare da aggiungersi a $\operatorname{sen} \vartheta = 0$ è

$$(3) \quad ER\omega' = 0,$$

e poichè è da escludersi, come s'è detto, il caso del punto P fisso, la (3) dice che la rotazione stazionaria in questione è possibile solo quando il punto vincolato sia lo stesso baricentro; con ciò l'attuale rotazione rientra nei moti stazionarii del sistema particolare $E = 0$.

Per $\cos \chi = 0$ la seconda (2) diventa:

$$(4) \quad \{(A - C) \sin \vartheta \pm MER\} \cos \vartheta = 0 ,$$

e fornisce per ϑ due valori mediante le due equazioni

$$(5) \quad \cos \vartheta = 0$$

$$(5') \quad (A - C) \sin \vartheta \pm MER = 0 .$$

Per l'inclinazione mutua dei due assi non sono dunque possibili che due valori: cioè l'angolo retto, oppure l'angolo ϑ_0 definito da

$$\sin \vartheta_0 = \pm \frac{MER}{C - A} .$$

La prima rotazione può aver luogo qualunque sia il tipo dell'ellissoide d'inerzia relativo al punto P e qualunque sia la posizione rispettiva dei punti P, G, Q¹⁾; la seconda invece richiede, (a causa di $\sin \vartheta_0 > 0$) che il punto P stia internamente al segmento QG ($\sin \chi = +1$) quando l'ellissoide suddetto è schiacciato ($C > A$), ed esternamente al segmento QG ($\sin \chi = -1$) quando quell'ellissoide è allungato ($C < A$). Inoltre, siccome $\sin \vartheta_0 < 1$, dovrà aversi in ogni caso

$$MER < |C - A| ;$$

nel solido sferico ($C = A$), p. es., questa rotazione non si presenta.

2. Cominceremo a studiare la stabilità delle rotazioni $\cos \chi = 0$; perciò ricaveremo ψ' dalla (1) e sostituiremo nella espressione della forza viva, che è data dalla (5) della Mem. 1^a.

1) Per $\cos \vartheta = 0$ il punto Q coincide, naturalmente, con O. Si osservi la fig. 2 della Mem. 1.^a

La forza viva T diventa allora una funzione $T(\omega', \phi', \vartheta', \chi, \vartheta)$, le cui derivate prime si annullano identicamente in corrispondenza dei moti studiati. Quanto alle derivate seconde, se noi vi poniamo ϑ, ϕ costanti, $\cos \chi = 0$ e teniamo conto della (4), prendono le espressioni seguenti:

$$(6) \left\{ \begin{array}{l} (\omega' \omega') = \frac{MR^2}{W^2} \left\{ W^2 \mp 2MEUW \sin \vartheta + M(A \sin^2 \vartheta + C \cos^2 \vartheta) U^2 \right\} \\ (\phi' \phi') = \frac{C}{W^2} \left\{ W^2 - 2CW \cos^2 \vartheta + (A \sin^2 \vartheta + C \cos^2 \vartheta) C \cos^2 \vartheta \right\} \\ (\vartheta' \vartheta') = A, \quad (\omega' \phi') = \mp \frac{CMER \sin \vartheta \cos \vartheta}{W} \left(1 + \frac{MRU}{W} \right) \\ (\omega' \vartheta') = (\phi' \vartheta') = 0 \\ (\omega' \chi) = (\omega' \chi) = (\vartheta' \chi) = (\vartheta' \chi) = (\phi' \chi) = (\phi' \chi) = 0 \\ (\vartheta \vartheta) = (C - A) \omega'^2 \cos^2 \vartheta, \quad (\chi \chi) = \pm MER \omega'^2 \sin \vartheta \\ (\chi \vartheta) = 0, \end{array} \right.$$

avendo posto, per abbreviare,

$$\begin{aligned} W &= V \sin \vartheta + C \cos^2 \vartheta \\ &= A \sin^2 \vartheta + C \cos^2 \vartheta + MER \sin \vartheta \sin \chi. \end{aligned}$$

La forma quadratica d^2T è così a cinque variabili, e se noi scriviamo il suo discriminante in modo da avere come diagonale principale

$$(\omega' \omega') (\phi' \phi') (\vartheta' \vartheta') (\chi \chi) (\vartheta \vartheta),$$

non è difficile dimostrare che, se indichiamo con $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_5$ i minori principali a partire dall'elemento $(\omega' \omega')$ e andando fino al discriminante stesso, risultano positivi $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ tanto per la rotazione (5) quanto per la (5')¹⁾; inoltre δ_4 riceve, per entrambe le rotazioni, il segno di $\sin \chi$, o, che è lo stesso (v. n. 1), di $C - A$. Quanto a δ_5 , esso è positivo per la (5') e si annulla

1) Bisognerà tener presente che la differenza $A - ME^2$, già incontrata più volte nella Mem. I.a, è positiva, perchè rappresenta il momento d'inerzia del solido rispetto ad un asse baricentrico perpendicolare all'asse ξ .

per la (5), ma in quest'ultimo caso la forma d^2T si riduce ad una forma quaternaria di discriminante δ_1 .

Si conclude che per le rotazioni (5) e (5') la forma d^2T è definita oppure no secondochè si ha $C - A \geq 0$ (ossia $\sin \chi = \pm 1$).

3. Per studiare la stabilità della rotazione $\sin \vartheta = 0$ bisogna riferirsi al caso speciale $E = 0$. Qui si trovano ancora, in corrispondenza all'integrale (1), due rotazioni stazionarie, nelle quali ϑ è definito rispettivamente da $\cos \vartheta = 0$ e da $\sin \vartheta = 0$, e sono le analoghe delle (5) e (5'). C'è però da notare che ora non si presenta più la condizione $\cos \chi = 0$, e quindi per $\cos \vartheta = 0$ l'asse ζ si può supporre sghembo con z .

Rispetto alla stabilità, la rotazione $\cos \vartheta = 0$ si comporta esattamente come la (5), cioè si ha stabilità od instabilità secondochè l'ellissoide centrale d'inerzia è schiacciato od allungato (la condizione relativa alla posizione mutua dei punti O, P, G ora non ha più ragion d'essere, perchè P coincide con G).

Per $\sin \vartheta = 0$ si trova invece che la condizione di stabilità si capovolge, cioè la rotazione è stabile od instabile secondochè l'ellissoide centrale d'inerzia è allungato o schiacciato.

Sopprimiamo per brevità i calcoli relativi a questi ultimi casi, non presentando essi alcuna difficoltà.

Naturalmente, una perturbazione della rotazione $\sin \vartheta = 0$ devierà l'asse del solido dalla direzione originaria (parallela a z), facendolo rotare intorno al punto G.

4. Riassumendo quanto precede, possiamo ridurre a tre le rotazioni stazionarie che si sono trovate, ordinandole secondo il valore che in esse ha l'angolo ϑ :

- 1) $\cos \vartheta = 0$
- 2) $\sin \vartheta = \pm \frac{MER}{C-A}$
- 3) $\sin \vartheta = 0$.

Nella 1) il punto vincolato P può essere un punto qualunque di ζ ; se però è diverso da G, l'asse ζ deve incontrare

l'asse di rotazione z ($\cos \chi = 0$). Essa è stabile o instabile secondochè $C - A \geq 0$; per $E \neq 0$ il punto P è, a seconda di questi due casi, interno od esterno al segmento OG .

Nella 2) il punto P è sempre diverso da G , e si richiede che sia

$$MER < |C - A|;$$

si ha stabilità od instabilità secondochè è $C - A \geq 0$.

Nella 3) il punto vincolato è necessariamente G ; la condizione di stabilità od instabilità è ancora quella dei due casi precedenti, ma collo scambio dei segni $>$ e $<$.

Va notato che se queste rotazioni rientrano come casi particolari nei movimenti stazionarii della Mem. 1^a, dall'altro canto il criterio di stabilità che s'intende qui di applicare è più largo di quello applicato allora. Ed invero le perturbazioni alle quali colà s'immagina di assoggettare i movimenti, devono essere tali da lasciare inalterate le costanti r e K nei due integrali (6) e (7); le perturbazioni invece a cui si assoggettano le rotazioni ora studiate consentono che venga alterata la r .

§ 2^o. *Il baricentro del solido cade sul piano equatoriale.*

Moti stazionarii e moti precessionali.

5. Assunti gli assi fissi come nel sistema studiato finora, osserveremo che si presentano ora nell'interno del solido due rette particolarmente notevoli, cioè l'asse di simmetria e la retta che congiunge il punto vincolato P col baricentro G (*asse baricentrico*): noi prenderemo la prima come asse ζ e la seconda come asse ξ , fissando su quest'ultimo il senso positivo da P verso G , per cui sarà sempre $E = PG > 0$. Il piano $\xi\eta$ coinciderà quindi col *piano equatoriale* del solido.

La forza viva T è definita dalla formola

$$2T = MR^2\omega'^2 + A(p^2 + q^2) + Cr^2 + 2ME(vr - wq).$$

Se a e b sono le coordinate del punto P rispetto agli assi x e y , si ha:

$$\begin{aligned} vr - wq &= (\alpha_2 a' + \beta_2 b') r - (\alpha_3 a' + \beta_3 b') q \\ &= a' \alpha_1' + b' \beta_1', \end{aligned}$$

ed allora, esprimendo i coseni direttori α_i e β_i mediante gli angoli d'Eulero, e ponendo

$$\begin{aligned} a &= R \cos \omega, & b &= R \sin \omega, \\ \psi - \omega &= \chi, \end{aligned}$$

$$(7) \quad \begin{cases} \cos \phi \cos \chi - \sin \phi \sin \chi \cos \vartheta = \cos \lambda \\ -\sin \phi \sin \chi + \cos \phi \cos \chi \cos \vartheta = \cos \mu, \end{cases}$$

troviamo:

$$(8) \quad \begin{aligned} 2T &= MR^2 \omega'^2 + A \vartheta'^2 + (A \sin^2 \vartheta + C \cos^2 \vartheta) \psi'^2 + C (\phi'^2 + \\ &+ 2\psi' \phi' \cos \vartheta) + 2MER \omega' (\psi' \cos \lambda + \phi' \cos \mu - \vartheta' \sin \phi \cos \chi \sin \vartheta). \end{aligned}$$

Gli angoli λ e μ , che abbiamo introdotto per abbreviare, rappresentano le inclinazioni degli assi ξ e η rispettivamente sul raggio OP e sulla tangente t al cerchio (γ) in P, quando si supponga OP diretto positivamente da O verso P, e sulla t si fissi il senso positivo in modo che risulti orientata rispetto ad OP come l'asse y è orientato rispetto ad x . Basta difatti osservare che se noi prendiamo le formole che esprimono i nove coseni direttori in funzione degli angoli d'Eulero, le due che forniscono $\cos(x\xi)$ e $\cos(y\eta)$ danno appunto i primi membri delle (7) col cambiamento di ψ in χ .

In base alla (8) si scrivono subito le equazioni del movimento sotto la seconda forma di Lagrange nelle coordinate $\omega, \psi, \phi, \vartheta$:

$$\begin{aligned}
 & \left. \begin{aligned}
 & \frac{d}{dt} \left\{ MR^2 \omega' + MER (\psi' \cos \lambda + \phi' \cos \mu - \mathfrak{S}' \sin \mathfrak{S} \sin \phi \cos \chi) \right\} = \\
 & \quad = MER \omega' (\psi' \cos \lambda_1 - \phi' \cos \mu_1 - \mathfrak{S}' \sin \mathfrak{S} \sin \phi \sin \chi) \\
 & \frac{d}{dt} \left\{ (A \sin^2 \mathfrak{S} + C \cos^2 \mathfrak{S}) \psi' + C \phi' \cos \mathfrak{S} + MER \omega' \cos \lambda \right\} = \\
 & \quad = -MER \omega' (\text{id.}) \\
 (B) \quad & \frac{d}{dt} \left\{ C (\phi' + \psi' \cos \mathfrak{S}) + MER \omega' \cos \mu \right\} = \\
 & \quad = MER \omega' (\psi' \cos \mu_1 - \phi' \cos \lambda_1 - \mathfrak{S}' \sin \mathfrak{S} \cos \phi \cos \chi) \\
 & \frac{d}{dt} \left\{ A \mathfrak{S}' - MER \omega' \sin \mathfrak{S} \sin \phi \cos \chi \right\} = (A - C) \psi'^2 \sin \mathfrak{S} \cos \mathfrak{S} - \\
 & \quad - C \psi' \phi' \sin \mathfrak{S} + MER \omega' (\psi' \sin \mathfrak{S} \sin \phi \sin \chi - \\
 & \quad - \phi' \sin \mathfrak{S} \cos \phi \cos \chi - \mathfrak{S}' \cos \mathfrak{S} \sin \phi \cos \chi),
 \end{aligned} \right\}
 \end{aligned}$$

dove si sono fatte le nuove posizioni

$$(7') \quad \begin{cases} \cos \phi \sin \chi + \sin \phi \cos \chi \cos \mathfrak{S} = \cos \lambda_1 \\ \sin \phi \cos \chi + \cos \phi \sin \chi \cos \mathfrak{S} = -\cos \mu_1, \end{cases}$$

e gli angoli λ_1, μ_1 indicano le inclinazioni degli assi ξ e η risp. sugli assi t e OP .

Dalle (B) si ricava l'integrale primo lineare

$$\begin{aligned}
 & MR(R + E \cos \lambda) \omega' + (A \sin^2 \mathfrak{S} + C \cos^2 \mathfrak{S} + MER \cos \lambda) \psi' + \\
 (9) \quad & + (C \cos \mathfrak{S} + MER \cos \mu) \phi' - MER \sin \phi \cos \chi \sin \mathfrak{S} \mathfrak{S}' = K,
 \end{aligned}$$

che è l'analogo dell'integrale (1) del § 1° e si deve, come questo, alla presenza della coordinata ciclica ψ che vien messa in evidenza col sostituire l'angolo χ ad ω come coordinata indipendente.

Invece l'integrale $\phi' + \psi' \cos \mathfrak{S} = \text{cost.}$, che in quel sistema si presentava accanto all'integrale (1), viene ora a sparire, perchè ϕ cessa di essere coordinata ciclica.

La (9) ha ancora l'identico significato della (1), ciò che si verifica collo stesso procedimento col quale si trovò il significato della (1) nella Mem. 1°.

6. La coordinata ciclica ψ o, se si vuole, l'integrale (9), danno luogo a moti stazionarii che si ottengono facendo, nelle (B), eguali a costanti la velocità ψ' e le coordinate $\chi \phi \vartheta$. Con ciò si hanno le seguenti relazioni fra le costanti dei moti stazionarii cercati:

$$\begin{aligned} R\omega' \cos \lambda_1 = 0, \quad R\omega' \cos \mu_1 = 0^1) \\ \{(A - C) \cos \vartheta + MER \sin \phi \sin \chi\} \omega' \sin \vartheta = 0. \end{aligned}$$

Un primo modo di soddisfare a queste equazioni consiste nel supporre $\omega' = 0$. Ma allora si avrebbero (a causa di $\chi = \text{cost.}$) tutte le velocità nulle, cioè il solido starebbe in quiete. Escluderemo dunque d'ora innanzi l'ipotesi $\omega' = 0$, come pure l'altra $R = 0$, colla quale si ricadrebbe nel problema della rotazione del solido intorno ad un punto fisso.

I moti stazionarii di cui noi dovremo occuparci saranno perciò definiti dalle equazioni simultanee:

$$(10) \quad \begin{cases} \cos \lambda_1 = 0, & \cos \mu_1 = 0 \\ \{(A - C) \cos \vartheta + MER \sin \phi \sin \chi\} \sin \vartheta = 0. \end{cases}$$

Per rendere più chiara la discussione di questi movimenti sarà bene sostituire, alla terna ausiliaria d'assi x_1, y_1, z_1 , l'altra p, t, z_1 , essendo p la semiretta OP e t la tangente in P al cerchio (γ), orientata rispetto a p nel modo che s'è detto al n. 5. I coseni degli angoli formati da questi nuovi assi con ξ, η, ζ sono contenuti nella seguente tabella:

	ξ	η	ζ
(11) p	$\cos \lambda$	$\cos \mu_1$	$\sin \chi \sin \vartheta$
t	$\cos \lambda_1$	$\cos \mu$	$-\cos \chi \sin \vartheta$
z_1	$\sin \phi \sin \vartheta$	$\cos \phi \sin \vartheta$	$\cos \vartheta$.

1) Si è tralasciato nei primi membri il fattore E che ora si suppone essenzialmente diverso da zero, per non ricadere nel sistema studiato nel § precedente e nella Mem. 1.^a

Le (10) danno luogo a due sistemi di equazioni, secondo-
chè si eguaglia a zero l'uno o l'altro fattore nella terza.

Supponiamo dapprima

$$\text{sen } \mathfrak{S} \neq 0,$$

e quindi

$$(12) \quad (A - C) \cos \mathfrak{S} \pm \text{MER} \text{sen } \phi \text{sen } \chi = 0.$$

Le due prime (10) danno allora, per le (7') :

$$\text{sen } (\chi + \phi) \text{sen } (\chi - \phi) = 0;$$

di qui e dalle (10) ancora si ricava

$$\text{sen } \phi \cos \phi (1 \pm \cos \mathfrak{S}) = 0,$$

che si riduce, in causa dell'ipotesi $\text{sen } \theta \neq 0$, a $\text{sen } \phi \cos \phi = 0$,
ed in corrispondenza alle due soluzioni $\text{sen } \phi = 0$ e $\cos \phi = 0$
la (12) dà rispettivamente :

$$\cos \mathfrak{S} = 0, \quad (A - C) \cos \mathfrak{S} \pm \text{MER} = 0.$$

Supponiamo ora invece $\text{sen } \mathfrak{S} = 0$. Possiamo senz'altro am-
mettere che sia $\mathfrak{S} = 0$, perchè sia per l'asse z che per l'asse ζ
non c'è nulla che ne distingua essenzialmente la parte posi-
tiva dalla parte negativa; allora le due prime (10) danno en-
trambe

$$\text{sen } (\chi + \phi) = 0.$$

Risultano così definiti tutti i moti stazionarii provenienti
dall'integrale (9): i loro caratteri vengono riassunti nel qua-
dro che segue :

- | | | |
|----|---|---|
| 1) | $\text{sen } \phi = 0, \quad \text{sen } \chi = 0,$ | $\cos \mathfrak{S} = 0$ |
| 2) | $\cos \phi = 0, \quad \cos \chi = 0,$ | $(A - C) \cos \mathfrak{S} \pm \text{MER} = 0$ 1) |
| 3) | $\text{sen } (\chi + \phi) = 0,$ | $\text{sen } \mathfrak{S} = 0.$ |

7. È assai facile riconoscere di che natura siano questi
tre movimenti. Intanto in causa di $\phi' = 0$ e $\psi' = \omega'$ si riducono

1) Il termine MER si farà precedere dal $+$ o dal $-$ secondochè $\text{sen } \phi \text{sen } \chi = \pm 1$,
ossia [v. le (7)] $\cos \mu = \mp 1$.

a tre rotazioni uniformi intorno all'asse z : non rimane dunque che stabilire la posizione dell'asse di rotazione rispetto al solido.

1) L'essere $\sin \chi = \sin \phi = 0$ dice che la linea dei nodi N ha la stessa direzione degli assi p e ξ , e quindi il baricentro G è allineato con O e con P , mentre il piano $\eta \zeta$ coincide col piano $t z_1$; l'essere inoltre $\cos \vartheta = 0$ dice che l'asse ζ è perpendicolare a z_1 , e quindi ha la stessa direzione di t , mentre η ha la medesima direzione di z_1 , ed il movimento 1) consiste in una rotazione uniforme intorno ad un asse situato nel piano equatoriale e perpendicolare all'asse baricentrico del solido. La prima (7) dà poi $\cos \lambda = \pm 1$ secondochè si fa $\cos \phi = \pm 1$; per il significato che ha λ [v. tab. (11)] questi due casi corrispondono a supporre che i due assi p e ξ abbiano il medesimo senso oppure sensi opposti, cioè che il punto P

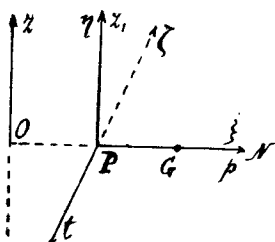


Fig. 1a

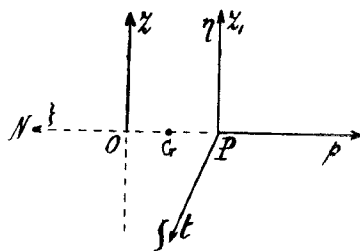


Fig. 1b

cada internamente od esternamente al segmento OG . I due casi sono riprodotti nelle figure 1a e 1b.

2) Da $\cos \phi = \cos \chi = 0$ segue, per la seconda (7):

$$\cos \mu = \pm 1,$$

il che dice che gli assi η e t hanno la medesima direzione. Perciò i piani $\xi \zeta$ e $p z$, coincidono, e la retta N , che dev'essere perpendicolare a z_1 e ζ , coincide in direzione con η e con t . Siccome il piano $p z$, contiene anche l'asse z , così la rotazione avviene intorno ad un asse che sta nel piano meridiano passante pel baricentro.

L'inclinazione ϑ dell'asse di simmetria del solido sull'asse di rotazione è data da

$$\cos \vartheta = \pm \frac{MER}{C-A},$$

ed il movimento sarà solo possibile quando le costanti del sistema saranno scelte in modo da rendere

$$MER < |C - A|.$$

Come nella rotazione precedente, anche qui possiamo distinguere due casi, secondo che si suppone $\sin \phi \sin \chi = \pm 1$. In corrispondenza la prima (7) dà:

$$(14) \quad \cos \lambda = \mp \cos \vartheta,$$

mentre l'equazione che definisce ϑ è

$$(A - C) \cos \vartheta \pm MER = 0,$$

e da questa eliminando ϑ mediante la (14) si trova:

$$(15) \quad (A - C) \cos \lambda - MER = 0.$$

Se allora distinguiamo fra $A - C > 0$ e $A - C < 0$, si ha corrispondentemente (in causa di $MER > 0$):

$$\cos \lambda > 0 \quad \text{opp.} \quad \cos \lambda < 0;$$

cioè: a seconda che l'ellissoide d'inerzia relativo al punto P è allungato o accorciato, l'asse ξ incontra la retta z dalla

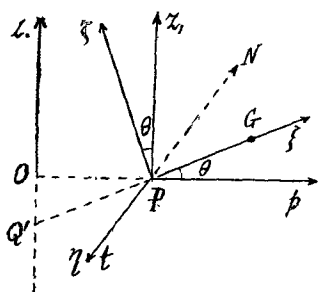


Fig. 2a

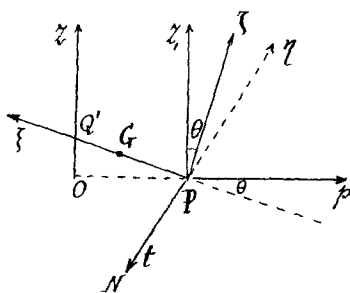


Fig. 2b

parte negativa oppure positiva di ξ , o, in altre parole, il punto P cade nell'interno od all'esterno del segmento limitato dal punto G e dal punto $Q' \equiv z \xi$. Nelle figure 2a e 2b sono rappresentati rispettivamente i due casi ora detti.

3) L'asse ζ coincide con z , e quindi il piano $\xi\eta$ col piano pt ; la linea dei nodi risulta indeterminata, come pure le sue inclinazioni χ e ϕ sugli assi p e ξ ; è però determinata la somma $\chi + \phi$, che è l'angolo formato dagli assi ξ e p . Ora l'equazione

$$\sin(\chi + \phi) = 0$$

esprime che ξ e p coincidono in direzione: coincideranno poi anche i loro versi positivi oppure no secondo che si ha $\cos(\chi + \phi) = \pm 1$. La rotazione avviene dunque, come nel moto 2), intorno ad una retta situata nel piano meridiano baricentrico, diretta parallelamente all'asse di simmetria del solido; l'incontro dell'asse di rotazione coll'asse ξ può av-

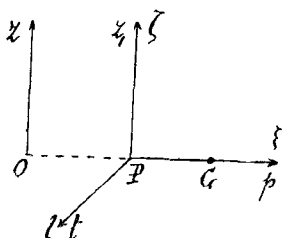


Fig. 3a

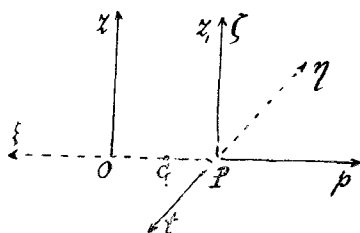


Fig. 3b

venire sia dalla parte negativa che dalla parte positiva di ξ . I due casi sono riprodotti nelle figure 3a e 3b.

8. Mostreremo ora come i moti stazionarii che abbiamo trovato rientrano nei *moti precessionali* compatibili col sistema, intendendo, come si fece nella Mem. 1ª, per moti precessionali quei movimenti nei quali la rotazione del solido intorno al punto P consiste in una precessione regolare risultante di una rotazione uniforme del solido intorno al suo asse

di simmetria ζ e di una rotazione uniforme di ζ intorno alla retta z_1 : un tale movimento è dunque caratterizzato analiticamente dal supporre costanti ψ' , ϕ' e ϑ .

In queste ipotesi noteremo che si ha:

$$\begin{aligned}\frac{d \cos \lambda}{dt} &= \phi' \cos \mu_1 - (\psi' - \omega') \cos \lambda_1 \\ \frac{d \cos \mu}{dt} &= -\phi' \cos \lambda_1 + (\psi' - \omega') \cos \mu_1,\end{aligned}$$

e quindi la seconda e terza (B) diventano:

$$(16) \quad \omega'' \cos \lambda + \omega'^2 \cos \lambda_1 = 0, \quad \omega'' \cos \mu - \omega'^2 \cos \mu_1 = 0.$$

Queste, considerate come lineari ed omogenee in ω'' e ω'^2 , hanno per determinante dei coefficienti

$$D = -\cos \lambda \cos \mu_1 - \cos \mu \cos \lambda_1,$$

che dalla tabella (11) si riconosce essere uguale a

$$\sin \phi \cos \phi \sin^2 \vartheta.$$

A questo punto si possono fare due ipotesi: $D = 0$ oppure $D \neq 0$.

Cominciamo a supporre $D = 0$: le (16) coesistono per ω' diverso da zero. Scrivendo ora l'integrale della forza viva e l'integrale (9) per un moto precessionale, si ottengono le due equazioni:

$$(17) \quad \begin{cases} MR^2 \omega'^2 + 2MER \omega' (\psi' \cos \lambda + \phi' \cos \mu) + (A \sin^2 \vartheta + C \cos^2 \vartheta) \psi'^2 \\ \quad + C (\phi'^2 + 2\psi' \phi' \cos \vartheta) = 2h \\ MR^2 \omega' + MER (\psi' \cos \lambda + \phi' \cos \mu) + (A \sin^2 \vartheta + C \cos^2 \vartheta) \psi' \\ \quad + C \phi' \cos \vartheta + MER \omega' \cos \lambda = K. \end{cases}$$

Osserviamo ora che l'annullarsi di D conduce a distinguere i tre casi

$$a) \sin \phi = 0, \quad b) \cos \phi = 0, \quad c) \sin \vartheta = 0,$$

Nel caso $a)$ le (17) si riducono alle seguenti:

$$(17') \quad \begin{cases} MR^2 \omega'^2 + 2MER \omega' \psi' \cos \lambda + (A \sin^2 \vartheta + C \cos^2 \vartheta) \psi'^2 = 2h \\ MR^2 \omega' + MER (\omega' + \psi') \cos \lambda + (A \sin^2 \vartheta + C \cos^2 \vartheta) \psi' = K, \end{cases}$$

dalle quali eliminando $\cos \lambda$ si trova un'equazione del 3° grado in ω' a coefficienti tutti costanti; per conseguenza ω' è una costante, e le (16) danno:

$$\cos \lambda_1 = \cos \mu_1 = 0.$$

Ma da $\sin \phi = 0$ segue, in virtù delle (7'):

$$\cos \lambda_1 = \pm \sin \chi, \quad \cos \mu_1 = \mp \sin \chi \cos \vartheta,$$

e quindi, per le due precedenti: $\sin \chi = 0$.

Con ciò risultano soddisfatte identicamente le tre prime (B); mentre la quarta dà, supposto $\sin \vartheta \neq 0$:

$$\cos \vartheta = 0.$$

Si ritrova dunque esattamente il moto stazionario 1).

Nel caso *b*) le (17) prendono ancora la forma (17'), per cui si ha di nuovo $\omega' = \text{cost.}$, e quindi

$$\cos \lambda_1 = \cos \mu_1 = 0;$$

da queste e da $\cos \phi = 0$ segue $\cos \chi = 0$, e la quarta (B) dà, per $\sin \vartheta \neq 0$:

$$(A - C) \cos \vartheta \pm \text{MER} = 0.$$

È il movimento stazionario 2).

Infine nel caso *c*), fatto $\vartheta = 0$, si ha:

$$\cos \lambda = \cos \mu, \quad \cos \lambda_1 = -\cos \mu_1;$$

e le due equazioni a cui si riducono ora le (17) danno ancora, coll'eliminazione di $\cos \lambda$:

$$\omega' = \text{cost.}$$

Si ha quindi: $\cos \lambda_1 = \cos \mu_1 = 0$, che ora equivalgono all'unica $\sin(\chi + \phi) = 0$, e questa, insieme con $\vartheta = 0$, caratterizza il moto stazionario 3).

Supponiamo ora invece $D \neq 0$. Dalle (16) si deduce: $\omega'' = \omega' = 0$; cioè il punto P è fisso, ed il movimento consiste in una precessione regolare intorno a P. La quarta (B) difatti diventa:

$$\{(C - A) \psi' \cos \vartheta + C\phi'\} \psi' \sin \vartheta = 0,$$

che è la condizione a cui debbono soddisfare le costanti della precessione nell'ipotesi del solido simmetrico rispetto ad un

asse; quanto alla prima (B) non c'è da tenerne conto, perchè si riduce ad un'identità per $R = 0$, che equivale poi all'ipotesi $\omega' = 0$.

Riassumendo, abbiamo dunque che *i moti precessionali del sistema consistono:*

1° *nel movimento limite* $R\omega' = 0$, *che è una precessione regolare intorno al punto P fisso;*

2° *nelle tre rotazioni uniformi stazionarie che provengono dall'integrale (9).*

§ 3°. *Studio della stabilità dei moti stazionarii descritti nel § precedente.*

9. Studieremo la stabilità dei moti stazionarii trovati nel § 2°, applicando lo stesso metodo energetico di cui ci siamo sempre valse per l'addietro.

Eliminata ψ' dalla forza viva T mediante l'integrale (9), si ottiene, come trasformata di T , una funzione $\mathbf{T}(\omega' \phi' \mathfrak{S}' \chi \phi \mathfrak{S})$ le cui derivate prime rispetto ai suoi sei argomenti si annullano in corrispondenza ai nostri moti stazionarii. Le derivate seconde, calcolate per χ, ϕ e \mathfrak{S} costanti, e facendo uso delle (10) che compendiano tutte le proprietà dei moti considerati, nonchè della stessa (9), prendono le seguenti espressioni:

$$(18) \left\{ \begin{array}{l} (\omega' \omega') = \frac{MR^2}{W^2} \left\{ W^2 - 2MEUW \cos \lambda + M(A \sin^2 \mathfrak{S} + C \cos^2 \mathfrak{S}) U^2 \right\} \\ (\phi' \phi') = \frac{1}{W^2} \left\{ CW^2 - 2CVW \cos \mathfrak{S} + (A \sin^2 \mathfrak{S} + C \cos^2 \mathfrak{S}) V^2 \right\} \\ (\mathfrak{S}' \mathfrak{S}') = A \\ (\omega' \phi') = MER \left(\cos \mu - \cos \lambda \frac{V}{W} \right) - \left\{ C \cos \mathfrak{S} - (A \sin^2 \mathfrak{S} + \right. \\ \left. + C \cos^2 \mathfrak{S}) \frac{V}{W} \right\} \frac{MRU}{W} \\ (\omega' \mathfrak{S}') = (\phi' \mathfrak{S}') = 0, \quad (\omega' \phi) = (\omega' \mathfrak{S}) = (\omega' \chi) = 0 \\ (\mathfrak{S}' \phi) = (\mathfrak{S}' \mathfrak{S}) = (\mathfrak{S}' \chi) = 0, \quad (\phi' \phi) = (\phi' \mathfrak{S}) = (\phi' \chi) = 0 \\ (\chi \chi) = (\phi \phi) = MER \omega'^2 \cos \lambda \\ (\mathfrak{S} \mathfrak{S}) = (\mathfrak{S} \phi) = (\mathfrak{S} \chi) = 0 \\ (\chi \phi) = MER \omega'^2 \cos \mu, \end{array} \right.$$

avendo posto

$$(19) \quad \begin{cases} U = R + E \cos \lambda, & V = C \cos \vartheta + \text{MER} \cos \mu \\ W = A \sin^2 \vartheta + C \cos^2 \vartheta + \text{MER} \cos \lambda. \end{cases}$$

Si vede che son nulle tutte le derivate seconde in cui figura almeno una derivazione rispetto a ϑ , per cui la forma d^2T si riduce a cinque variabili; scritto il suo discriminante in modo che la diagonale principale risulti

$$(\omega'\omega')(\phi'\phi')(\vartheta'\vartheta')(\chi\chi)(\phi\phi),$$

e indicando i minori principali con $\delta_1, \dots, \delta_5$, vogliamo esaminare come si comportano, quanto ai segni, separatamente per le tre rotazioni stazionarie del n. 6.

10. Nel movimento 1) si ha: $\cos \vartheta = 0$, $\cos \lambda = \pm 1$ (il segno superiore corrisponde alla fig. 1a e l'inferiore alla 1b), $\cos \mu = 0$. Si trova allora che $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_5$ sono sempre positivi; invece si ha: $\delta_4 = \pm \text{MER} \omega'^2 \delta_3$, dove il doppio segno corrisponde a prendere $\cos \lambda = \pm 1$. La successione $\delta_1 \dots \delta_5$ è dunque tutta formata da elementi positivi prendendo $\cos \lambda = +1$, è invece interrotta da un elemento negativo per $\cos \lambda = -1$. In relazione coi due casi la forma d^2T è o non è definita, e quindi il movimento in questione è stabile od instabile.

Osservando le figg. 1a e 1b possiamo dire che la rotazione stazionaria 1) è stabile od instabile secondochè il punto P cade internamente od esternamente al segmento OG.

11. Veniamo al moto 2). Assunto (ciò si può sempre fare) l'angolo ϑ acuto, cioè $\cos \vartheta > 0$, si avrà:

$$\cos \lambda = \cos \vartheta, \quad \cos \mu = 1$$

nel caso della fig. 2a, e

$$\cos \lambda = -\cos \vartheta, \quad \cos \mu = -1$$

nel caso della fig. 2b.

Se si tien conto che la quantità $C - \text{ME}^2$ esprime il momento d'inerzia del solido rispetto all'asse baricentrico paral-

lelo a ζ , e quindi è positiva, si trova, come nel moto 1): $\delta_1 > 0$.

Lasciando da parte per un momento il minore δ_2 e passando ai successivi, si avrebbe:

$$\begin{aligned}\delta_3 &= \delta_2 A, & \delta_4 &= \delta_3 (\chi \chi) \\ \delta_5 &= \Delta = \delta_3 \{(\chi \chi)(\phi \phi) - (\chi \phi)^2\};\end{aligned}$$

e specializzando le espressioni (18) delle derivate seconde di \mathbf{T} al caso nostro, si trova:

$$\begin{aligned}(\chi \chi)(\phi \phi) &= \pm \text{MER} \omega'^2 \cos \mathfrak{S} \\ (\chi \phi) &= \pm \text{MER} \omega'^2,\end{aligned}$$

onde

$$(\chi \chi)(\phi \phi) - (\chi \phi)^2 = -(\text{MER} \omega'^2)^2 \sin^2 \mathfrak{S} < 0.$$

Di qui si vede che se δ_2 non è nullo (nel caso che fosse $\delta_2 = 0$, si annullerebbero tutti i minori principali successivi a δ_1), la successione $\delta_1, \dots, \delta_5$ deve presentare necessariamente qualche variazione: cioè, δ_1 ha segno opposto a δ_2 se $\delta_2 < 0$, ed ha segno opposto a δ_5 se $\delta_2 > 0$. Per le conclusioni che noi abbiamo di mira non avrà dunque interesse il sapere se δ_2 si conservi positivo o negativo, ma soltanto se sia o non identicamente nullo. Ora è subito visto che δ_2 è, in generale, diverso da zero, perchè se supponiamo $A = C$, troviamo

$$\delta_2 = \text{MR}^2 \sin^2 \mathfrak{S} (\text{MR}^2 + A - \text{ME}^2 \cos^2 \mathfrak{S}) > 0.$$

Siamo dunque in grado di formulare il seguente risultato:
la rotazione stazionaria 2) è sempre instabile.

12. Non resta più che il moto 3). Geometricamente questa rotazione si può concepire come caso limite della 2) quando l'asse ζ tenda a diventare parallelo all'asse di rotazione x ; d'altronde le derivate seconde di \mathbf{T} calcolate in corrispondenza al moto 2) risultano funzioni continue della sola \mathfrak{S} : i valori di queste derivate nel caso limite $\mathfrak{S} = 0$ si otterranno dunque da quelle ponendovi $\mathfrak{S} = 0$.

Con ciò vengono ad annullarsi le derivate $(\phi' \phi')$ e $(\omega' \phi')$, e il discriminante di $d^2 \mathbf{T}$ diventa del 4° ordine. Nella succes-

sione $\delta_1 \dots \delta_4$ si ha ancora: $\delta_1 > 0$, $\delta_2 > 0$, mentre δ_3 ha il segno di $\cos \lambda$; inoltre δ_4 si annulla, ed in corrispondenza la forma d^2T si riduce a tre variabili, in quanto in luogo dei due angoli χ e ϕ che, presi separatamente, riescono indeterminati, viene a comparire solo più la loro somma, che rappresenta l'angolo degli assi ξ e p .

La successione dei determinanti $\delta_1 \dots \delta_4$ si riduce a tre soli termini, di cui i due primi sempre positivi, ed il terzo positivo o negativo secondochè gli assi p e ξ comprendono un angolo nullo od uguale a due retti. Osservando le figure 3a e 3b si ha dunque: *la rotazione 3) è stabile od instabile secondochè il punto P cade internamente od esternamente al segmento OG.*

Dal confronto colle rotazioni 1) e 2) si vede che la 3), per quanto si possa considerare come un caso limite della 2), pure se ne stacca nel modo di comportarsi rispetto alla stabilità, accostandosi invece, per questo riguardo, alla 1) nella quale l'asse di rotazione giace nel piano equatoriale. Possiamo quindi, dallo speciale punto di vista della stabilità, raccogliere in questo enunciato i risultati ottenuti in questo § e nel precedente:

I moti stazionarii provenienti dall'integrale (9) consistono in rotazioni uniformi intorno all'asse del cerchio (γ), al quale asse s'appoggia, in ogni caso, la retta congiungente il punto P col baricentro: queste rotazioni sono instabili se l'asse di rotazione incontra pure (s'intende al finito) l'asse di simmetria ζ del solido, possono essere stabili od instabili se l'asse di rotazione non incontra ζ .

13. Il confronto fra le rotazioni stazionarie trovate nel § 2° e quelle del § 1° (che corrispondono, sia le une che le altre, ad un medesimo principio meccanico) mette in evidenza una grande analogia fra i caratteri geometrici delle prime e delle seconde; come pure fa vedere che dei due assi, baricentrico e di simmetria (coincidenti in una retta unica nel sistema del § 1°), il primo ha, in certo qual modo, un'importanza prevalente. Non sempre però l'analogia geometrica è accompagnata dall'analogia meccanica; così la rotazione 2) del n. 4 (§ 1°) si comporta, rispetto alla stabilità, in modo nettamente distinto dalle 2) del n. 6 (§ 2°): mentre cioè la prima può es-

sere, secondo i casi, stabile od instabile, l'altra è sempre instabile. Riguardo alla stabilità l'ultima rotazione ha invece la sua analoga in una rotazione stazionaria che il solido ammetterebbe qualora ci ponessimo nelle ipotesi che definiscono il caso della Kowalevski.

Supposto il punto P fisso ed il solido soggetto alla gravità (ed aggiunta la condizione $A = 2C$, la quale nei moti spontanei da noi studiati non ha che un'importanza di dettaglio), si presenta, oltre all'integrale della Kowalevski, un integrale analogo al nostro (9), che dà luogo a due moti stazionarii: l'uno è una rotazione uniforme intorno all'asse baricentrico disposto verticalmente, l'altro è pure una rotazione intorno ad una retta del piano meridiano baricentrico ¹⁾. La prima non può avere nulla d'analogo con alcuna delle rotazioni da noi incontrate, perchè è incompatibile col movimento di qualsiasi punto dell'asse baricentrico, ed in particolare del punto P . La seconda invece è l'analoga della nostra rotazione 2) del n. 6: l'unica differenza qualitativa fra le due rotazioni sta nel fatto che mentre nel caso della Kowalevski l'asse di rotazione incontra l'asse di simmetria ζ e l'asse baricentrico ξ in uno stesso punto (che è il punto P), invece nel nostro caso di moto spontaneo l'incontro dell'asse di rotazione con quelle due rette avviene in due punti generalmente distinti.

Ora è notevole che anche la rotazione del caso della Kowalevski è instabile. Bisogna però tener presente che non sono gli stessi, nelle due rotazioni, i termini di confronto per la stabilità: difatti le perturbazioni ammesse nel caso della Kowalevski debbono lasciare in quiete il punto P in cui l'asse dell'originaria rotazione incontra gli assi ζ e ξ , mentre nel caso nostro i punti in cui queste ultime due rette s'appoggiano all'asse di rotazione vengono posti in movimento; di modo che nel caso della Kowalevski le rette ζ e ξ descriveranno ancora nel moto perturbato due superficie coniche col vertice in P , mentre nel nostro caso percorreranno due rigate sghembe passanti entrambe pel cerchio (γ) al quale è costantemente legato il punto P .

1) Veggasi la Nota del prof. Levi-Civita già citata nell'Introduzione.