Geometrische Darstellung der Gruppen linearer Substitutionen mit ganzen complexen Coefficienten nebst Anwendungen auf die Zahlentheorie.

Von

Luigi Bianchi in Pisa.

Die geometrische Methode, auf welche Herr Professor Klein die arithmetische Theorie der gewöhnlichen binären quadratischen Formen gründet*), kann mit demselben Erfolge in weiterem Umfange angewandt werden. Dies zu zeigen ist der Zweck der folgenden Entwickelungen, welche in ähnlichem Sinne die Theorie der Dirichlet'schen Formen mit ganzen complexen Coefficienten und Veränderlichen, und der Hermite'schen Formen mit ganzen complexen Coefficienten und conjugirten Veränderlichen behandeln sollen. Unter einer ganzen complexen Zahl verstehen wir eine solche, die nach Kronecker's Bezeichnung dem Rationalitätsbereiche $(1, i)$ oder $(1, \varepsilon)$ angehört, wo i, ε bezw. die vierte und dritte primitive Wurzel der Einheit bedeuten. Ich möchte mir übrigens vorbehalten, später auch die Fälle $(1, i\sqrt{D})$ und $\left(1, \frac{1+i\sqrt{D}}{2}\right)$ zu behandeln, wo D eine positive ganze Zahl ist, die im zweiten Falle der Bedingung $\equiv 3 \pmod{4}$ unterliegt. Zunächst handelt es sich darum die Gruppen linearer Substitutionen einer Variabelen z:

$$z' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta},$$

wo $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ alle ganzen Zahlen des Bereiches $(1, i)$ oder $(1, \varepsilon)$, die nur der Bedingung

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 1$$

---

*) Klein, Vorlesungen über elliptische Modulfunctionen, ausgearbeitet und vervollständigt von R. Fricke, (Leipzig, 1890), S. 243—260.

unterworfen sind, durchlaufen, nach Poincare's Auffassung*) durch eine entsprechende Polyedereintheilung des Raumes geometrisch darzustellen**). Die so gewonnenen Raumeintheilungen kann man benutzen, um die Dirichlet'schen und Hermite'schen Formen in ganz analoger Weise zu *reduciren*, wie dies für die gewöhnlichen quadratischen Formen mit Hülfe der Modultheilung der Ebene geschieht. Die Theorie der genannten Formen erhält dadurch eine erschöpfende Behandlung, welche vor den bekannten Methoden von Dirichlet, Hermite und Picard manche Vortheile aufweist. Als einen solchen nennen wir insbesondere das Kennzeichen für die Aequivalenz *reducirter* Formen, welches einfach so lautet: *Alle äquivalenten reducirten Formen gehören derselben Periode an.*

Erster Abschnitt.

Polyedereintheilungen, die unseren Gruppen entsprechen.

§ 1.

Zusammensetzung der Gruppen G und G'.

Von der Gruppe G, die alle linearen Substitutionen

$$z' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}, \quad \alpha\delta - \beta\gamma = 1$$

mit ganzen complexen Coefficienten $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ aus dem Bereiche $(1, i)$ umfasst, beweisen wir folgenden Satz:

I) *Jede Substitution der Gruppe G lässt sich aus den drei elementaren Substitutionen:*

$$T = \begin{pmatrix} 0, & 1 \\ -1, & 0 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 1, & 1 \\ 0, & 1 \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} 1, & i \\ 0, & 1 \end{pmatrix}$$

zusammensetzen.

Zuerst beachte man die folgenden aus T, S, V zusammengesetzten Substitutionen: ***)

$$V_1 = TS^{-1}T = \begin{pmatrix} 1, & 0 \\ 1, & 1 \end{pmatrix}, \qquad V_i = TV^{-1}T = \begin{pmatrix} 1, & 0 \\ i, & 1 \end{pmatrix},$$

$$U = TVV_iV = \begin{pmatrix} i, & 0 \\ 0, & -i \end{pmatrix}.$$

*) Mémoire sur les groupes kleinéens — Acta Mathematica Bd. 3.

**) Vergl. eine vorläufige Mittheilung in den Rendiconti della R. Accademia dei Lincei vom April 1890. Die gleichen Raumeintheilungen kommen in anderer Gedankenverbindung bereits bei Hrn. Hurwitz im 11ten Bande der Acta Mathematica vor (1887: Ueber die Entwickelung complexer Grössen in Kettenbrüche).

***) Unter A, B verstehen wir die Substitution, welche entsteht, wenn man zuerst die Substitution B und dann A eintreten lässt.

Bezeichnen nun a, b irgend welche reelle ganze Zahlen, so existiren sicher in der von T, S, V erzeugten Gruppe die beiden Substitutionen:

$$S^a V^b = \begin{pmatrix} 1, & a+bi \\ 0, & 1 \end{pmatrix}, \quad V_1^a V_i^b = \begin{pmatrix} 1, & 0 \\ a+bi, & 1 \end{pmatrix},$$

d. h.

$$S_m = \begin{pmatrix} 1, & m \\ 0, & 1 \end{pmatrix}, \quad V_m = \begin{pmatrix} 1, & 0 \\ m, & 1 \end{pmatrix},$$

wo m eine beliebige ganze complexe Zahl bedeutet.

Es sei jetzt

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \alpha, & \beta \\ \gamma, & \delta \end{pmatrix}$$

irgend eine Substitution der Gruppe G. Wenn α oder β gleich Null sind, so können wir leicht die Behauptung des Satzes beweisen. Denn, für $\alpha = 0$, muss Σ eine der folgenden Formen haben

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 0, & 1 \\ -1, & \delta \end{pmatrix}, \quad \text{oder} \quad \Sigma = \begin{pmatrix} 0, & i \\ i, & \delta \end{pmatrix};$$

nun ist aber

$$\begin{pmatrix} 0, & 1 \\ -1, & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0, & 1 \\ -1, & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1, & -\delta \\ 0, & 1 \end{pmatrix} = TS_{-\delta},$$

$$\begin{pmatrix} 0, & i \\ i, & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i, & 0 \\ 0, & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0, & 1 \\ -1, & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1, & -i\delta \\ 0, & 1 \end{pmatrix} = UTS_{-i\delta}.$$

Wird $\beta = 0$ angenommen, so ergiebt sich

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 1, & 0 \\ \gamma, & 1 \end{pmatrix} = V_\gamma$$

oder

$$\Sigma = \begin{pmatrix} i, & 0 \\ \gamma, & -i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i, & 0 \\ 0, & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1, & 0 \\ i\gamma, & 1 \end{pmatrix} = U V_{i\gamma}.$$

Besteht aber keine der Gleichungen $\alpha = 0$, $\beta = 0$, so bilde man aus Σ die folgende Reihe von Substitutionen

$$\Sigma_1 = \Sigma V_{m_1} = \begin{pmatrix} \alpha + m_1\beta, & \beta \\ \gamma + m_1\delta, & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1, & \beta \\ \gamma_1, & \delta \end{pmatrix},$$

$$\Sigma_2 = \Sigma_1 S_{m_2} = \begin{pmatrix} \alpha_1, & \beta + m_2\alpha_1 \\ \gamma_1, & \delta + m_2\gamma_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1, & \beta_1 \\ \gamma_1, & \delta_1 \end{pmatrix},$$

$$\Sigma_3 = \Sigma_2 V_{m_3} = \begin{pmatrix} \alpha_1 + m_3\beta_1, & \beta_1 \\ \gamma_1 + m_3\delta_1, & \delta_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_2, & \beta_1 \\ \gamma_2, & \delta_1 \end{pmatrix},$$

. . . .

indem man die successiven ganzen complexen Zahlen

$$m_1, m_2, m_3 \ldots$$

so bestimmt, das nachstehende Ungleichungen zur Geltung kommen

$$N(\alpha_1) \leq \frac{1}{2} N(\beta), \quad N(\beta_1) \leq \frac{1}{2} N(\alpha_1), \quad N(\alpha_2) \leq \frac{1}{2} N(\beta_1), \ldots$$

wobei das Symbol $N(a)$ die *Norm* der complexen Grösse a bedeutet. Unsere Reihe von Substitutionen

$$\Sigma, \Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3 \ldots$$

können wir solange fortsetzen, bis ein α oder ein β gleich Null wird. Dies muss aber sicher eintreten, denn sonst würde die Reihe von ganzen, reellen, positiven Zahlen

$$N(\beta), N(\alpha_1), N(\beta_1), N(\alpha_2) \ldots$$

eine beständig abnehmende sein. Das letzte Glied Σ_r der Reihe kann, nach dem Vorigen, aus T, S, V zusammengesetzt werden. Dasselbe gilt also auch für die Substitution Σ, w. z. b. w. Gehen wir jetzt zur Gruppe G' über, welche aus allen Substitutionen

$$\begin{pmatrix} \alpha, & \beta \\ \gamma, & \delta \end{pmatrix}, \quad \alpha\delta - \beta\gamma = 1$$

im Bereiche $(1, \varepsilon)$ besteht, so können wir den analogen Satz beweisen:

II) *Jede Substitution der Gruppe G' setzt sich aus den folgenden drei Substitutionen zusammen:*

$$T = \begin{pmatrix} 0, & 1 \\ -1, & 0 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 1, & 1 \\ 0, & 1 \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} 1, & \varepsilon \\ 0, & 1 \end{pmatrix}.$$

Genau wie früher bestätigen wir zuerst unsere Behauptung für die Substitutionen

$$S_m = \begin{pmatrix} 1, & m \\ 0, & 1 \end{pmatrix}, \quad V_m = \begin{pmatrix} 1, & 0 \\ m, & 1 \end{pmatrix},$$

wo m eine beliebige ganze Zahl im Bereiche $(1, \varepsilon)$ bedeutet. Bedenkt man ferner dass die Substitution $\begin{pmatrix} \varepsilon, & 0 \\ 0, & \varepsilon^2 \end{pmatrix}$ sich in folgender Weise zerlegen lässt:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon, & 0 \\ 0, & \varepsilon^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1, & \varepsilon \\ 0, & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1, & 0 \\ -\varepsilon^2, & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0, & 1 \\ -1, & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1, & 0 \\ -\varepsilon, & 1 \end{pmatrix},$$

so können wieder die Schlüsse des vorigen Falles angewandt werden.

Aus den nunmehr folgenden geometrischen Darstellungen wird sich übrigens noch ein anderer Beweis für Sätze I), II) ergeben.

§ 2.

Anwendung der Poincaré'schen geometrischen Darstellung.

Wir gehen dazu über die Poincaré'sche geometrische Darstellung der linearen Substitutionen

(1) $$z' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}, \quad \alpha\delta - \beta\gamma = 1$$

mit complexen Coefficienten in Anwendung zu bringen.

Interpretiren wir, in gewöhnlicher Weise, die Werthe der complexen Variabelen

$$z = \xi + i\eta$$

auf der $\xi\eta$-Ebene und fügen den ξ, η Axen eine dritte zu beiden senkrechte Axe ζ hinzu, so können wir der Substitution (1) eine Transformation des Raumes zuordnen, welche im nicht-euklidischen Sinne eine blosse Bewegung darstellt. Für jede solche Transformation bleibt das Vorzeichen der Ordinate ζ unverändert: dieses wollen wir immer im Folgenden als positiv annehmen.

Nach Poincaré (a. a. O. S. 54) lauten die wirklichen Formeln der Transformation folgendermassen:

$$(2)\qquad \begin{cases} \varrho'^2 = \dfrac{\varrho^2\alpha\alpha_0 + z\alpha\beta_0 + z_0\alpha_0\beta + \beta\beta_0}{\varrho^2\gamma\gamma_0 + z\gamma\delta_0 + z_0\delta\gamma_0 + \delta\delta_0}, \\[2ex] z' = \dfrac{\varrho^2\alpha\gamma_0 + z\alpha\delta_0 + z_0\beta\gamma_0 + \beta\delta_0}{\varrho^2\gamma\gamma_0 + z\gamma\delta_0 + z_0\delta\gamma_0 + \delta\delta_0}, \\[2ex] z_0' = \dfrac{\varrho^2\gamma\alpha_0 + z\delta\alpha_0 + z_0\gamma\beta_0 + \delta\beta_0}{\varrho^2\gamma\gamma_0 + z\gamma\delta_0 + z_0\delta\gamma_0 + \delta\delta_0}. \end{cases}$$

Dabei bezeichnen ξ, η, ζ die Coordinaten irgend eines Punktes p des Raumes ξ', η', ζ' diejenigen des transformirten Punktes p', während

$$\varrho^2 = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2, \qquad \varrho'^2 = \xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2$$

und übrigens durch $z_0', z_0, \alpha_0, \beta_0, \gamma_0, \delta_0$, nach Hermite's Bezeichnung, die conjugirten Grössen von $z', z, \alpha, \beta, \gamma, \delta$ dargestellt werden.

Unter Berücksichtigung der Identität:

$$\begin{aligned} &(\varrho^2\alpha\alpha_0 + z\alpha\beta_0 + z_0\alpha_0\beta + \beta\beta_0)(\varrho^2\gamma\gamma_0 + z\gamma\delta_0 + z_0\delta\gamma_0 + \delta\delta_0) - \\ &- (\varrho^2\alpha\gamma_0 + z\alpha\delta_0 + z_0\beta\gamma_0 + \beta\delta_0)(\varrho^2\gamma\alpha_0 + z\delta\alpha_0 + z_0\gamma\beta_0 + \delta\beta_0) = \\ &= \begin{vmatrix} \varrho^2 & z \\ z_0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \alpha_0 & \beta_0 \\ \gamma_0 & \delta_0 \end{vmatrix} = \varrho^2 - z z_0 = \zeta^2, \end{aligned}$$

bilden wir aus (2) den Ausdruck

$$\zeta'^2 = \varrho'^2 - z' z_0';$$

dann finden wir durch Wurzelausziehen

$$(2^*)\qquad \zeta' = \frac{\zeta}{\varrho^2\gamma\gamma_0 + 2\gamma\delta_0 + z_0\delta\gamma_0 + \delta\delta_0}.$$

Betrachten wir nun die Substitution $\begin{pmatrix} \alpha, & \beta \\ \gamma, & \delta \end{pmatrix}$ als der Gruppe G des § 1 angehörig, so werden wir zwei Punkte p, p' des oberen Raumes*) als *äquivalent* bezeichnen, wenn, durch eine Substitution

*) Wir bezeichnen als oberen Raum denjenigen für welchen die Ordinate ζ positiv ausfällt.

von G, p in p' übergeht. Da unsere Gruppe G keine unendlich kleine Substitution enthält, so wird sie in der Nähe jedes Punktes des oberen Raumes *eigentlich discontinuirlich* sein*). Daher ist es möglich, ein *Fundamentalpolyeder* für unsere Gruppe G anzugeben.

§ 3.

Das Fundamentalpolyeder der Gruppe G. Erster Theil des Beweises.

Wir behaupten:

Derjenige Theil des oberen Raumes, welcher ausserhalb der Kugel

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1$$

zwischen den vier Ebenen

$$\xi = 0, \quad \xi = \frac{1}{2}, \quad \eta = -\frac{1}{2}, \quad \eta = \frac{1}{2}$$

eingeschlossen wird, ist ein Fundamentalpolyeder P *für die Gruppe G.*

Der Beweis zerfällt in zwei Theile. Erstens haben wir zu zeigen:

III) *Jeder Punkt p des oberen Raumes ist einem Punkte des Polyeders P äquivalent.*

Beachten wir nun, dass die elementaren Substitutionen T, S, V der Gruppe G, nach Formeln (2), folgende Transformationen des Raumes hervorrufen

$$\begin{array}{llll} T) & \xi' = -\dfrac{\xi}{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}, & \eta' = \dfrac{\eta}{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}, & \zeta' = \dfrac{\zeta}{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}, \\ S) & \xi' = \xi + 1, & \eta' = \eta, & \zeta' = \zeta, \\ V) & \xi' = \xi, & \eta' = \eta + 1, & \zeta' = \zeta, \end{array}$$

während durch die Substitution $U = \begin{pmatrix} i, & 0 \\ 0, & -i \end{pmatrix}$ die Umklappung

$$\xi' = -\xi, \quad \eta' = -\eta, \quad \zeta' = \zeta$$

um die ζ-Axe entsteht, so sehen wir, dass Satz III) mit folgender Behauptung übereinstimmt:

Zu jedem Punkte p giebt es einen äquivalenten Punkt, dessen Coordinaten den Ungleichungen

$$a) \qquad -\frac{1}{2} \leq \xi \leq \frac{1}{2}, \quad -\frac{1}{2} \leq \eta \leq \frac{1}{2},$$

$$b) \qquad \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 \geq 1$$

genügen.

Der Beweis kann in ganz analoger Weise wie der entsprechende für die Modulgruppe geführt werden. Genügt der Punkt p den Un-

---

*) Poincaré a. a. O. S. 60.

gleichungen a) nicht, so verschieben wir ihn durch wiederholte Anwendung der Substitutionen S und V in eine Lage p_1, welche dem entspricht, für welche also

$$-\frac{1}{2} \leq \xi_1 \leq \frac{1}{2}, \quad -\frac{1}{2} \leq \eta_1 \leq \frac{1}{2}.$$

Wenn gleichzeitig $\xi_1^2 + \eta_1^2 + \zeta_1^2 \geq 1$, so ist p_1 der gesuchte Punkt. Wo nicht, wenden wir auf p_1 die Operation T an, welche p_1 in $p_1' \equiv (\xi_1' \eta_1' \zeta_1')$ überführt und verschieben, wenn es nöthig sein sollte, p_1' mittelst S und V, wieder in eine solche Lage $p_2 \equiv (\xi_2 \eta_2 \zeta_2)$, welche den Ungleichungen a)

$$-\frac{1}{2} \leq \xi_2 \leq \frac{1}{2}, \quad -\frac{1}{2} \leq \eta_2 \leq \frac{1}{2}$$

genügt. Aus p_2, wenn er nicht schon der zweiten Ungleichung b) genügt, leiten wir durch Wiederholung desselben alternirenden Verfahrens einen neuen Punkt p_2 u. s. w.

Dann erhält man eine Reihe von Punkten

$$c) \qquad p_1\, p_2\, p_3 \ldots p_n \ldots,$$

welche alle den Ungleichungen a) genügen und unsere Behauptung geht dann dahin, dass man, nach einer endlichen Anzahl von Schritten, zu einem Punkte p_n gelangen muss, für welchen auch die Bedingung b) erfüllt wird. Die Ordinaten

$$\zeta_1\, \zeta_2\, \zeta_3 \ldots \zeta_n \ldots$$

der äquivalenten Punkte c) nehmen in der That immer zu. Enthielte also die Reihe c) unendlich viele Punkte, so würden sie alle im endlichen Raume

$$\zeta \geq \zeta_1, \quad -\frac{1}{2} \leq \xi \leq \frac{1}{2}, \quad -\frac{1}{2} \leq \eta \leq \frac{1}{2},$$
$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 < 1$$

verdichtet sein und es würde also wenigstens ein Grenzpunkt existiren, in dessen Umgebung die Gruppe G uneigentlich discontinuirlich wäre, was nicht angeht.*)

Somit ist unser Satz III) bewiesen.

§ 4.

Zweiter Theil des Beweises.

Unsere frühere Behauptung erfordert jetzt den Beweis des zweiten Satzes:

IV) *Im Inneren des Polyeders* P *können nicht zwei äquivalente Punkte liegen.*

---

*) Der letzte Theil des Beweises könnte auch *rein arithmetisch* geführt werden, was wir hier, der Kürze wegen, unterlassen. Man vergleiche Klein's Vorlesungen S. 212 ff.

Sind

$$p \equiv (\xi\,\eta\,\zeta), \quad p' \equiv (\xi'\,\eta'\,\zeta')$$

zwei solche innere Punkte des Polyeders, so werden folgende Ungleichungen bestehen:

$$(4) \quad \begin{cases} 0 < \xi < \frac{1}{2}, & -\frac{1}{2} < \eta < \frac{1}{2}, \quad \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 > 1, \\ 0 < \xi' < \frac{1}{2}, & -\frac{1}{2} < \eta' < \frac{1}{2}, \quad \xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2 > 1. \end{cases}$$

Da die Ordinaten von p, p' entweder gleich sind, oder die eine grösser als die andere ist, so können wir, ohne Beeinträchtigung der Allgemeinheit,

$$\zeta' \geq \zeta$$

voraussetzen.

Es sei nun $\begin{pmatrix}\alpha, & \beta \\ \gamma, & \delta\end{pmatrix}$ die Substitution von G, welche p in p' überführt. Bringt man jetzt Formel (1*) § 2 in Anwendung, so hat man

$$(5) \qquad \frac{1}{\zeta\zeta'} = \frac{\varrho^2}{\zeta^2}\gamma\gamma_0 + \frac{z}{\zeta^2}\gamma\delta_0 + \frac{z_0}{\zeta^2}\delta\gamma_0 + \frac{\delta\delta_0}{\zeta^2}$$

oder

$$(5^*) \qquad \frac{1}{\zeta\zeta'} = \gamma\gamma_0 + \frac{1}{\zeta^2}(\gamma z + \delta)(\gamma_0 z_0 + \delta_0).$$

Da alle inneren Punkte des Polyeders P eine Ordinate haben, die grösser als $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ist, so besteht die Ungleichung

$$\frac{1}{\zeta\zeta'} \leq \frac{1}{\zeta^2} < 2,$$

oder

$$2 > \gamma\gamma_0 + \frac{1}{\zeta^2}(\gamma z + \delta)(\gamma_0 z_0 + \delta_0).$$

Diese letzte lässt nur zwei Möglichkeiten zu, d. h.

$$\text{A)}\ \gamma\gamma_0 = 0 \quad \text{oder} \quad \text{B)}\ \gamma\gamma_0 = 1.$$

Im Falle A) wird $\gamma = \gamma_0 = 0$ und folglich, bis auf einen gleichzeitigen Zeichenwechsel von α, β, γ, δ:

entweder $\qquad \alpha = 1, \quad \delta = 1, \quad \gamma = 0$

oder $\qquad \alpha = i, \quad \delta = -i, \quad \gamma = 0.$

Es wird also

$$\xi' + i\eta' = \xi + i\eta + \beta$$

oder

$$\xi' + i\eta' = -(\xi + i\eta) + i\beta.$$

Aus den Ungleichungen (4) schliesst man dass $\beta = 0$, woraus der zweite Fall von selbst als unmöglich wegfällt; so kommt

$$\xi' = \xi, \quad \eta' = \eta, \quad \zeta' = \zeta,$$

$$\begin{pmatrix}\alpha, & \beta \\ \gamma, & \delta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1, & 0 \\ 0, & 1\end{pmatrix}.$$

Die beiden Punkte p, p' fallen also zusammen und die angenommene Substitution reducirt sich auf die Identität.

Im zweiten Falle B), da

$$\frac{\varrho^2}{\zeta^2} > \frac{1}{\zeta^2} \geq \frac{1}{\zeta\zeta'},$$

folgt aus der Gleichung (5)

$$z\gamma\delta_0 + z_0\delta\gamma_0 + \delta\delta_0 < 0,$$

oder, indem man

$$\frac{\delta}{\gamma} = p + iq, \quad z = \xi + i\eta$$

setzt,

$$p^2 + q^2 + 2p\xi + 2q\eta < 0.$$

Diese letzte Ungleichung ist aber unmöglich weil p, q ganze, reelle Zahlen sind, während

$$0 < \xi < \frac{1}{2}, \quad -\frac{1}{2} < \eta < \frac{1}{2}.$$

Wir haben somit den Satz IV. bewiesen und ausserdem das Resultat gewonnen:

V) *Ausser der Identität giebt es keine Substitution, die einen inneren Punkt des Fundamentalpolyeders* P *festhält.*

§ 5.

Raumeintheilung, welche der Gruppe G entspricht.

Transformiren wir das ganze Polyeder P durch eine beliebige Substitution der Gruppe G, so erhalten wir ein neues Polyeder, dessen fünf Flächenseiten aus Theilen von Kugeln oder Ebenen bestehen, welche die $\xi\eta$-Ebene orthogonal schneiden. Der letzte Satz V zeigt, dass die Gesammtheit solcher aus P entstandenen Polyeder den ganzen oberen Raum einfach und lückenlos erfüllen. In beliebiger Annäherung der $\xi\eta$-Ebene legen sich unsere Polyeder kleiner und kleiner werdend immer dichter an diese Ebene an. Diese Raumeintheilung, auf welche wir übrigens nicht näher einzugehen brauchen, werden wir als der Gruppe G zugehörig bezeichnen.

Wir wollen noch bemerken, dass die Entwickelungen des § 4 einen neuen Beweis für die Zusammensetzung der Gruppe G aus T, S, V liefern. Ist nämlich Σ eine beliebige Substitution von G, und wenden wir deren inverse Σ^{-1} auf einen beliebigen *inneren* Punkt p des Polyeders P an, so wird er in eine neue Lage p' übergehen. Diesen letzten Punkt p' können wir wieder in p überführen, sowohl durch die Substitution Σ wie auch durch eine Substitution Σ', welche aus T, S, V zusammengesetzt ist (§ 3). Nach Satz V stimmt aber nothwendig Σ' mit Σ überein.

§ 6.

Raumeintheilung, welche der Gruppe G' entspricht.

In der $\xi\eta$-Ebene construiren wir das reguläre Sechseck, dessen Mittelpunkt in $\xi = 0$, $\eta = 0$ fällt, während ein Paar gegenüberliegender Seiten auf den Geraden

$$\xi = -\frac{1}{2}, \quad \xi = \frac{1}{2}$$

liegen*). Betrachten wir nun das gerade Prisma, welches dieses Sechseck zur Grundfläche hat; denjenigen Theil des oberen Prisma's, welcher ausserhalb der Kugel

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1$$

liegt, bezeichnen wir als Polyeder Π. Dieses wird gerade das Dreifache des *Fundamentalpolyeders* für unsere Gruppe G' sein.

Wir beweisen den Satz:

Jeder Punkt p des oberen Raumes ist einem Punkte von Π, *in Bezug auf die Gruppe G', äquivalent.*

Durch Anwendung einer aus

$$S = \begin{pmatrix} 1, & 1 \\ 0, & 1 \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} 1, & \varepsilon \\ 0, & 1 \end{pmatrix}$$

passend zusammengesetzten Substitution

$$S^m V^n = \begin{pmatrix} 1, & m + n\varepsilon \\ 0, & 1 \end{pmatrix}$$

können wir es erreichen, dass der transformirte Punkt p_1 innerhalb des Prisma's sich befindet. Liegt nun gleichzeitig p_1 ausserhalb der Kugel

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1,$$

so ist unser Zweck erreicht. Wo nicht, wende man auf p_1 die Substitution

$$T = \begin{pmatrix} 0, & 1 \\ -1, & 0 \end{pmatrix}$$

*) Die Gleichungen der Seiten des Sechsecks lauten:

$$\xi \pm \frac{1}{2} = 0, \quad \xi + \eta\sqrt{3} \pm 1 = 0, \quad -\xi + \eta\sqrt{3} \pm 1 = 0.$$

Soll also ein Punkt der $\xi\eta$-Ebene im Inneren des Sechsecks gelegen sein und wird

$$z = \xi + i\eta = a + b\varepsilon$$

gesetzt, also

$$\xi = a - \frac{b}{2}, \quad \eta = b\frac{\sqrt{3}}{2},$$

so müssen folgende Ungleichungen bestehen

$$-1 < a + b < 1, \quad -1 < 2a - b < 1, \quad -1 < 2b - a < 1.$$

an, und den so erhaltenen Punkt p_1' verschiebe man wieder mittelst einer passenden Substitution $S^{m'}V^{n'}$ in einen Punkt p_2, der im Inneren des Prisma's liegt. Fährt man in derselben Weise fort, so sieht man, genau wie im § 3, dass die Reihe von äquivalenten Punkten

$$p_1\ p_2 \cdots p_n \cdots$$

sich nothwendig unterbrechen muss, was eben unseren Satz beweist.

Bedenkt man ferner dass die Substitution

$$\begin{pmatrix}\varepsilon^2, & 0\\ 0, & \varepsilon\end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad z' = \varepsilon z$$

eine Rotation der Amplitude $\frac{2\pi}{3}$ um die ζ-Axe zur Folge hat, so leuchtet es ein, dass es für jeden Punkt p von Π noch zwei äquivalente Punkte p', p'' in Π giebt, nämlich diejenigen, welche aus p durch die genannte Rotation und ihre Wiederholung erwachsen. Es ist nun leicht zu beweisen dass, wenn p *im Inneren* von Π gelegen ist, keine anderen zu p äquivalente Punkte in Π existiren können als p' und p''.

Nehmen wir die Bezeichnungen des § 4 wieder auf und bemerken, dass jeder *innere* Punkt des Polyeders Π eine Ordinate besitzt, die grösser als $\sqrt{\frac{2}{3}}$ ausfällt, so schliessen wir aus Gleichung (5) § 4, dass folgende Ungleichung bestehen muss:

$$\frac{3}{2} > \gamma\gamma_0 + \frac{1}{\zeta^2}(\gamma z + \delta)(\gamma_0 z_0 + \delta_0).$$

Diese enthält nur wieder folgende beiden Möglichkeiten

$$\gamma\gamma_0 = 0 \quad \text{oder} \quad \gamma\gamma_0 = 1.$$

Wenn $\gamma = \gamma_0 = 0$ ist, so hat man folgende drei Nebenfälle

$$\begin{array}{llll}
\alpha = 1, & \gamma = 0, & \delta = 1, & z' = z + \beta,\\
\alpha = \varepsilon, & \gamma = 0, & \delta = \varepsilon^2, & z' = \varepsilon^2 z + \varepsilon\beta,\\
\alpha = \varepsilon^2, & \gamma = 0, & \delta = \varepsilon, & z' = \varepsilon z + \varepsilon^2\beta.
\end{array}$$

Da aber beide Punkte z', z im Inneren des Sechsecks liegen müssen, so wird in allen Fällen $\beta = 0$ sein und unsere Substitution wird also lauten:

$$\begin{pmatrix}1, & 0\\ 0, & 1\end{pmatrix}, \quad \text{oder} \quad \begin{pmatrix}\varepsilon, & 0\\ 0, & \varepsilon^2\end{pmatrix}, \quad \text{oder} \quad \begin{pmatrix}\varepsilon^2, & 0\\ 0, & \varepsilon\end{pmatrix},$$

wie die Behauptung des Satzes es fordert.

Wenn $\gamma\gamma_0 = 1$ ist, so hat man nach Formel (5) § 4

$$\frac{\varrho^2}{\zeta^2} > \frac{1}{\zeta\zeta'} = \frac{\varrho^2}{\zeta^2} + \frac{1}{\zeta^2}(z\gamma\delta_0 + z_0\delta\gamma_0 + \delta\delta_0)$$

und folglich, wenn

$$z = a + b\varepsilon, \quad \frac{\delta}{\gamma} = p + q\varepsilon$$

gesetzt wird,

(6) $$p^2 + q^2 - pq + (2a - b)p + (2b - a)q < 0.$$

Da aber, wie oben bemerkt wurde, die absoluten Werthe von $2a - b$, $2b - a$ kleiner als 1 ausfallen, so wird um so mehr folgende Ungleichung bestehen müssen

$$p_1^2 + q_1^2 - p_1 q_1 - p_1 - q_1 < 0,$$

wo p_1, q_1 die absolut genommenen Werthe der reellen ganzen Zahlen p, q bedeuten. Die letzte Ungleichung findet nur für $p_1 = 1$, $q_1 = 1$ statt und wir haben also nur folgende vier möglichen Fälle:

$$p = 1, q = 1;\ p = 1, q = -1;\ p = -1, q = 1;\ p = -1, q = -1.$$

Immer aber wiederspricht die bezügliche Ungleichung (6) denjenigen, durch welche wir oben die Bedingung ausdrückten, dass z im Inneren des Sechsecks liegt. Somit wird die Möglichkeit $\gamma\gamma_0 = 1$ ausgeschlossen.

Nach diesen Erörterungen ist es sehr leicht, ein Fundamentalpolyeder unserer Gruppe G' anzugeben. Das frühere Polyeder Π wird durch die Ebene $\eta = 0$ und die beiden daraus durch Rotationen von Amplituden $\frac{2\pi}{3}$ und $\frac{4\pi}{3}$ um die φ-Axe entspringenden Ebenen in drei congruente Polyeder zerlegt. Man sieht also dass: *Jedes dieser drei Polyeder als Fundamentalpolyeder der Gruppe G' gewählt werden kann.*

Jetzt haben wir nur das zu wiederholen, was am Ende des vorigen Paragraphen gesagt wurde, um die Raumeintheilung zu finden, welche der Gruppe G' entspricht.

II. Abschnitt.

Dirichlet'sche Formen.

§ 7.

Reducirte Dirichlet'sche Formen.

Eine binäre quadratische Form

(7) $$ax^2 + 2bxy + cy^2,$$

in welcher die Coefficienten a, b, c ganze Zahlen aus dem Bereiche $(1, i)$ — oder $(1, \varepsilon)$ — und x, y solche unbestimmte Zahlen darstellen, soll als Dirichlet'sche *Form* bezeichnet werden.*) Wir wollen nun

*) Dirichlet, Recherches sur les formes quadratiques à coefficients et à indéterminées complexes. Crelle's Journal Bd. 24.

zeigen, wie man, auf Grund der Untersuchungen des vorigen Abschnittes die beiden Probleme der Aequivalenz für Dirichlet'sche Formen lösen kann. Diese Probleme lauten folgendermassen:

A) *Festzustellen, ob zwei gegebene Dirichlet'sche Formen f, f' mit derselben Determinante $D = b^2 - ac$ äquivalent sind oder nicht.*

B) *Im Falle der Aequivalenz der Formen f, f' alle Substitutionen zu finden, durch welche die eine in die andere übergeht.*

Als Wurzel der Form (7) bezeichnen wir die Wurzeln z_1, z_2 der quadratischen Gleichung

$$az^2 + 2bz + c = 0.$$

Durch die beiden Punkte, welche in der $\xi\eta$-Ebene die Wurzeln z_1, z_2 der Form f darstellen, beschreibe man im oberen Raume den Halbkreis, welcher die $\xi\eta$-Ebene orthogonal schneidet. Dieser Halbkreis soll *der repräsentirende Halbkreis* der Form f genannt werden. Jede Form $f = (a, b, c)$ wird durch Angebung ihrer Determinante und des repräsentirenden Halbkreises, bis auf einen gleichzeitigen Zeichenwechsel ihrer Coefficienten a, b, c, bestimmt. Sind die Formen f, f' mit den repräsentirenden Halbkreisen C, C' äquivalent, und geht die Erstere durch die Substitution $\begin{pmatrix}\alpha, & \beta \\ \gamma, & \delta\end{pmatrix}$ in die Zweite über, so transformirt die inverse Substitution $\begin{pmatrix}\delta, & -\beta \\ -\gamma, & \alpha\end{pmatrix}$ die beiden Wurzeln von f in diejenigen von f'. Durch die letzte Substitution auf den ganzen Raum angewandt, geht also der repräsentirende Halbkreis C in C' über.

Stellen wir nun folgende Definition auf:

Eine Dirichlet'sche Form heisst reducirt, falls ihr repräsentirender Halbkreis das Fundamentalpolyeder P schneidet,

so können wir sofort den Satz beweisen:

Jede Dirichlet'sche Form f ist einer reducirten Form äquivalent.

Nehmen wir nämlich auf dem repräsentirenden Halbkreis C von f einen beliebigen Punkt p, so können wir eine passende Substitution $\begin{pmatrix}\alpha, & \beta \\ \gamma, & \delta\end{pmatrix}$ angeben, welche ihn in das Fundamentalpolyeder versetzt (§ 3). Nach dem Vorigen führt also die inverse Substitution $\begin{pmatrix}\delta, & -\beta \\ -\gamma, & \alpha\end{pmatrix}$, auf die Form f angewandt, auf eine äquivalente reducirte Form f'.

§ 8.

Anzahl der reducirten Formen.

Wir behaupten jetzt: *Bei einer gegebenen Determinante D giebt es nur eine endliche Anzahl von reducirten Formen.*

Ist

$$F = (a, b, c) = ax^2 + 2bxy + cy^2$$

eine solche, und sind $z_1\, z_2$ ihre Wurzeln, so hat man für den Radius R des repräsentirenden Halbkreises

$$R = \frac{|z_1 - z_2|}{2} = \frac{\sqrt{|D|}}{|a|}\ ^{*)}.$$

Da die grösste Ordinate λ_1 eines Punktes des Kreises gleich R, während die kleinste Ordinate eines Punktes des Fundamentalpolyeders gleich $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ist, so folgt

$$\frac{\sqrt{|D|}}{|a|} \geq \frac{1}{\sqrt{2}},$$

oder

$$|a| \leq \sqrt{2|D|}.$$

Der erste Coefficient a der reducirten Form f kann also nur eine endliche Anzahl von Werthen annehmen. Für jeden solchen Werth von a giebt es nur eine endliche Anzahl von (mod a) incongruenten Werthen von b, nämlich so viele als die Congruenz

$$b^2 \equiv D \pmod{a}$$

incongruente Wurzeln hat. Bezeichnen wir zwei Formen

$$(a, b, c) \quad (a, b', c')$$

mit derselben Determinante und gemeinsamen ersten Coefficient a als *parallel*, wenn

$$b' \equiv b \pmod{a},$$

so haben wir nur zu zeigen, dass in jeder Classe von parallelen Formen nur eine endliche Anzahl von reducirten Formen vorkommen kann. Ist die zu (a, b, c) parallele Form (a, b', c') eine reducirte und wird

$$b' = b + a\beta$$

gesetzt, so geht durch die Substitution $\begin{pmatrix}1, & \beta \\ 0, & 1\end{pmatrix}$ die erste (a, b, c) in die zweite (a, b', c') über, und folglich der repräsentirende Halbkreis C' von f' in denjenigen C von f über. Und da nach Voraussetzung C' das Fundamentalpolyeder P schneidet, so wird C dasjenige Polyeder P' unserer Raumeintheilung schneiden, welches aus P durch die Substitution

$$z' = z + \beta$$

entsteht. Es giebt also so viele zu (a, b, c) parallele reducirte Formen als es zum Fundamentalpolyeder P in gewöhnlichem Sinne congruente

---

*) Durch das Symbol $|A|$ wird der absolute Betrag der complexen Grösse A bezeichnet.

Polyeder unserer Raumeintheilung giebt, welche vom repräsentirenden Kreise der Form (a, b, c) durchschnitten werden. Die Anzahl letzterer Polyeder ist aber, wie einleuchtend, endlich.

§ 9.

Perioden reducirter Formen.

Der repräsentirende Halbkreis C einer reducirten Form wird eine unendliche Anzahl von Polyeder unserer Raumeintheilung durchsetzen. Dadurch wird der Halbkreis C in eine im doppelten Sinne sich ins Unendliche erstreckende Reihe von Bogenstücken

$$\ldots l_{-3},\; l_{-2},\; l_{-1},\; l_1,\; l_2,\; l_3, \ldots$$

zerlegt, wobei l_1 dasjenige Bogenstück bezeichnen möge, welches vom Fundamentalpolyeder P abgeschnitten wird. Ein beliebiges Bogenstück der Reihe kann durch eine Substitution der Gruppe in ein reducirtes Bogenstück verwandelt werden, d. h. in einen Kreisbogen, welcher im Fundamentalpolyeder P liegt. Solch reducirtes Bogenstück l_i' wird von l_i *eindeutig* bestimmt (§ 4). Da aber die Anzahl der reducirten Formen derselben Determinante eine endliche ist, so ergiebt sich dass in der Reihe

$$l_1,\; l_2,\; l_3, \ldots, l_n \ldots$$

ein *erstes* Bogenstück l_{n+1} auftreten muss, welches dasselbe reducirte Bogenstück besitzt wie ein früheres l_r. Es ist leicht einzusehen, dass l_r mit l_1 zusammenfallen muss. Da nämlich l_{n+1} und l_r dasselbe reducirte Bogenstück besitzen, so giebt es eine Substitution τ, welche l_r in l_{n+1} verwandelt. Durch τ gehen folglich gleichzeitig der Halbkreis C und die ganze Raumeintheilung in sich selbst über. Es wird also durch τ l_{r-1} in l_n, l_{r-2} in l_{n-1} u. s. w. übergehen. Wäre aber $r > 1$, so würde schon l_n dasselbe reducirte Bogenstück wie l_{r-1} besitzen, was unserer Annahme wiederspricht. Hieraus schliessen wir, in bekannter Weise, dass irgend zwei reducirte Bogenstücke l_r' l_s' dann und nur dann zusammenfallen, wenn die Congruenz

$$r \equiv s \pmod{n}$$

besteht. Daher werden wir sagen dass

$$l_1'\, l_2' \ldots l_n'$$

eine Periode von reducirten Bogenstücken und die zugehörigen Formen

$$f_1\, f_2 \cdots f_n$$

eine *Periode reducirter Formen* bilden. Es leuchtet ein, dass zwei derselben Periode angehörende reducirte Formen äquivalent sind.

§ 10.

Erledigung der Probleme der Aequivalenz.

Wenn irgend zwei Formen F, F' derselben Determinante vorliegen, von denen man entscheiden soll, ob sie äquivalent sind oder nicht, so bestimmen wir zuerst zwei reducirte Formen f, f', welche bezw. zu F, F' äquivalent sind, und haben dann nur zu entscheiden, ob f, f' unter einander äquivalent sind. Sind aber f, f' äquivalent und geht durch die Substitution τ f in f' über, so geht durch die inverse Substitution τ^{-1} der repräsentirende Halbkreis C von f in denjenigen von f' über (§ 7). Es wird also, durch τ^{-1}, ein Bogenstück l_i der im vorigen Paragraphen betrachteten Reihe in dasjenige Stück des Halbkreises C', welches vom Fundamentalpolyeder P abgeschnitten wird, übergehen. Es gilt also der Satz: *Zwei äquivalente reducirte Formen gehören derselben Periode an*, wodurch das erste Problem der Aequivalenz erledigt wird.

Wenn F, F' äquivalent sind, wird zugleich durch unsere Methode eine Substitution gefunden, welche wirklich F in F' überführt. Das zweite Problem der Aequivalenz wird also auf folgendes zurückgeführt:

Alle Substitutionen anzugeben, welche eine Form F in sich selbst transformiren.

Wir können uns wieder selbstverständlich auf reducirte Formen beschränken. Eine Substitution τ, welche die reducirte Form f in sich selbst überführt, wird auch ihren repräsentirenden Halbkreis C in sich selbst überführen. Durch τ muss also die ganze Reihe von Bogenstücken des § 9

$$\ldots l_{-3}, l_{-2}, l_{-1}, l_1, l_2, l_3 \ldots$$

in sich verschoben werden. Geht dabei l_1 in l_s über, so wird nothwendig, wie dort gezeigt wurde, die Congruenz $s \equiv 1 \pmod{n}$ bestehen; folglich ist τ eine Potenz derjenigen Substitution Σ welche l_1 in l_{n+1} überführt.

Wir haben also das Resultat:

Die unendliche Gruppe von Substitutionen, welche eine Dirichlet'sche Form in sich selbst überführt, ist eine cyklische Gruppe.

Diese Gruppe wird nämlich alle Potenzen von Σ oder nur diejenigen mit geradem Exponenten umfassen, jenachdem die Form $f = (a, b, c)$ ihrer entgegengesetzten $(-a, -b, -c)$ nicht äquivalent oder äquivalent ist. Im zweiten Falle gehört f einer *ambigen* Classe an. (V. Dirichlet, Zahlentheorie, 3. Auflage, § 58).

Greifen wir insbesondere die Hauptform

$$(1,\ 0,\ -D)$$

heraus, so lauten die Substitutionen ihrer reproducirenden Gruppe

$$\begin{pmatrix} t, & Du \\ u, & t \end{pmatrix},$$

wobei t, u irgend welche ganzzahlige Lösungen der Pell'schen Gleichnng

$$t^2 - Du^2 = 1$$

bezeichnen. Unsere Methode lehrt also die fundamentale Lösung (T, U) aufzufinden, aus welcher alle anderen mittelst der Formel:

$$t + u\sqrt{D} = \pm (T + U\sqrt{D})^n,$$

wobei n alle ganzen reellen Zahlen durchläuft, sich ergeben.*)

III. Abschnitt.

Hermite'sche Formen.

§ 11.

Definite Formen.

Die binären quadratischen Formen

$$(8) \qquad a x x_0 + b x y_0 + b_0 x_0 y + c y y_0,$$

bei welchen a, c ganze reelle Zahlen, b eine ganze Zahl aus dem Bereiche $(1, i)$ — oder $(1, \varepsilon)$ — und x, y solche unbestimmte Zahlen, während b_0, x_0, y_0 deren conjugirte Zahlen bezeichnen, werden im Folgenden *Hermite'sche Formen* genannt.**) Den fundamentalen Begriff der Transformation und Aequivalenz solcher Formen wolle man aus der Hermite'schen Abhandlung entnehmen.

Ist die Determinante $D = b b_0 - a c$ negativ, so heisst die Form *definit*, im entgegengesetzten Falle *indefinit.*

Betrachten wir zuerst den Fall einer definiten Form, bei welcher wir a und folglich c positiv annehmen können.

Die Gleichung

$$(9) \qquad a z z_0 + b z + b_0 z_0 + c = 0$$

stellt dann in der $\xi\eta$-Ebene einen *imaginären* Kreis dar. Durch diesen Kreis geht ein ganzer Büschel von Kugeln, welcher zwei unendlich kleine Kugeln oder *Grenzpunkte* enthält. Wird

$$b = m + in$$

gesetzt, so findet man für die Coordinaten der Grenzpunkte

$$\xi = -\frac{m}{a}, \quad \eta = \frac{n}{a}, \quad \zeta = \pm \frac{\sqrt{-D}}{a}.$$

Denjenigen Grenzpunkt, welcher im oberen Raume liegt, bezeichnen wir als den *repräsentirenden Punkt* der Form. Aus der geometrischen

---

*) Dirichlet a. a. O. § 14.

**) Hermite in Crelle's Journal Bd. 47.

Darstellung folgt: *Aequivalente definite Hermite'sche Formen haben äquivalente repräsentirende Punkte und umgekehrt.*

Dies kann übrigens, mittelst der Formeln (1), (2) § 2 leicht bestätigt werden.

Eine definite Form soll als *reducirt* gelten, wenn ihr repräsentirender Punkt im Fundamentalpolyeder liegt. Dann haben wir nach § 3 sofort den Satz:

Jede definite Hermite'sche Form ist einer reducirten Form äquivalent.

Das äussere Kennzeichen einer reducirten definiten Form (8) besteht in den Ungleichungen

$$a \leq c, \quad 0 \leq m \leq \frac{a}{2}, \quad -\frac{a}{2} \leq n \leq \frac{a}{2},$$

für $b = m + in$, woraus man folgert (Hermite a. a. O.) dass: *die Anzahl reducirter Formen derselben Determinante eine endliche ist.*

Das erste Problem der Aequivalenz für definite Formen erfordert jetzt nur noch die Untersuchung der Aequivalenz reducirter Formen. Die bezüglichen Resultate, welche in ganz elementarer Weise abzuleiten sind sollen hier aber nicht weiter verfolgt werden.*)

§ 12.

Indefinite reducirte Formen.

Eine indefinite Hermite'sche Form

$$f = axx_0 + bxy_0 + b_0x_0y + cyy_0$$

bestimmt in der $\xi\eta$-Ebene den reellen Kreis

$$azz_0 + bz + b_0z_0 + c = 0.$$

Ueber diesen Kreis als Aequator beschreiben wir im oberen Raume eine Halbkugel, deren Gleichung

$$\left(\xi + \frac{m}{a}\right)^2 + \left(\eta - \frac{n}{a}\right)^2 + \zeta^2 = \frac{D}{a^2}$$

sein wird. Diese bezeichnen wir als die *repräsentirende Halbkugel* der Form f. Durch Angebung der Determinante D und der repräsentirenden Halbkugel wird die Formel f, bis auf einen gleichzeitigen Zeichenwechsel ihrer Coefficienten a, b, c, bestimmt. Sind zwei indefinite Formen f, f' äquivalent, so werden auch ihre repräsentirenden Halbkugeln äquivalent sein (V^e § 7). Stellen wir nun folgende Definition auf: *eine indefinite Hermite'sche Form heisst reducirt, falls ihre repräsentirende Halbkugel das Fundamentalpolyeder durchsetzt.* In ganz analoger Weise wie die entsprechenden Sätze für Dirichlet'sche Formen (§§ 7, 8) können jetzt folgende Sätze bewiesen werden:

*) V^e § 4 und Picard — Annales de l'École Normale Supérieure. T. I, 3ème Série p. 19ff.

Jede indefinite Hermite'sche Form ist einer reducirten Form äquivalent.

Bei gegebener positiver Determinante ist die Anzahl der reducirten Hermite'schen Formen eine endliche.

§ 13.

Perioden reducirter Formen.

Die repräsentirende Halbkugel der indefiniten reducirten Hermite'schen Form f mit der Determinante D wird eine unendliche Anzahl von Polyedern unserer Raumeintheilung durchsetzen. Auf dieser Halbkugel entsteht dadurch ein Netz von Kreisbogenpolygonen, dessen Seiten den Aequator der Kugel orthogonal schneiden. Dieses Netz bedeckt einfach und lückenlos die ganze Halbkugel.

Jedes Polygon π_i des Netzes können wir *reduciren*, d. h. durch eine passende Substitution von G in ein Polygon π_i' verwandeln, dessen Randcurven auf Flächenseiten des Fundamentalpolyeders P liegen. Diesem ganz bestimmten Polygone π_i' entspricht aber eine reducirte Form der Determinante D und, nach dem letzten Satze des vorigen Paragraphen, giebt es also nur eine endliche Anzahl solcher verschiedener reducirter Polygone π_i', sagen wir etwa

$$\pi_1' \, \pi_2' \ldots \pi_n'.$$

Die entsprechenden reducirten Formen

$$f_1 \, f_2 \ldots f_n$$

bilden, wie wir sagen wollen, eine *Periode reducirter Formen.* Es ist klar, dass alle reducirten Formen derselben Periode unter einander äquivalent sind.

Zwei Polygone π_r, π_s unseres Netzes sollen als *äquivalent* gelten, falls sie dasselbe reducirte Polygon π_i' besitzen, weil dann und nur dann eine Substitution der Gruppe G existirt, welche π_r in π_s überführt. Wenden wir eine solche Substitution auf den ganzen Raum an, so wird das sphärische Netz in sich selbst übergehen. Unser Resultat können wir also auch so aussprechen: *Es giebt im sphärischen Netze nur eine endliche Anzahl von unäquivalenten Polygonen.*

Wird diese Zahl μ genannt, so erkennt man in bekannter Weise*), dass es möglich ist einen solchen Complex Π von $r \leq \mu$ auf einander folgenden unäquivalenten Polygonen des Netzes zu bilden, dass jedes nach aussen benachbarte Polygon π_i mit einem im Complexe Π liegenden Polygon äquivalent ist.

*) V[e] Klein's Vorlesungen S[e] 310 und Hurwitz Grundlage einer Theorie der Modulfunctionen § 3.

Nun bemerken wir, dass wenn ein Polygon π_m des Netzes mit einem im Complex Π liegenden Polygone $\pi^{(i)}$ äquivalent ist, dasselbe von jedem zu π_m benachbarten Polygone gelten muss. Denn dieselbe Substitution, welche π_m in $\pi^{(i)}$ überführt, wird jedes zu π_m benachbarte Polygon in ein zu $\pi^{(i)}$ benachbartes Polygon verwandeln: das Letzte ist aber, nach Voraussetzung, einem Polygon in Π äquivalent. Daraus ersieht man leicht, dass jedes Polygon π_m des Netzes einem im Complex Π liegenden Polygone äquivalent ist und daher $r = \mu$ sein muss. Wir brauchen nämlich nur zwischen π_m und einem beliebigen Polygon in Π eine endliche Anzahl von successiven auf einander folgenden Polygonen einzuschieben und die vorige Bemerkung anzuwenden.

Werden die Polygone von Π mit

$$\pi^{(1)}\ \pi^{(2)} \ldots \pi^{(\mu)}$$

bezeichnet, so wird jedes dem Complex Π nach aussen benachbarte Polygon π_i einem Polygon $\pi^{(k)}$ äquivalent sein. Dieses muss aber hart am Rande von Π liegen, denn sonst würde die Substitution, welche π_i in $\pi^{(k)}$ überführt, das Polygon von Π, welches auf π_i folgt, wieder in ein Polygon von Π verwandeln, was dem Bildungsgesetze unseres Complexes Π widerspricht. Daher werden die Randcurven von Π paarweise einander zugewiesen und die Substitutionen

$$S_1\ S_2 \ldots S_\mu,$$

welche jede Randcurve in die ihr zugewiesene überführen, sind die erzeugenden Substitutionen derjenigen Untergruppe von G, welche unser Netz in sich selbst transformirt. Diese Untergruppe fällt mit der Gruppe zusammen, welche die gegebene Form f in sich selbst überführt, oder sie enthält die letzte Gruppe als ausgezeichnete Untergruppe vom Index zwei. Der zweite Fall tritt dann und nur dann ein, wenn die gegebene Form $f = (a, b, c)$ ihrer entgegengesetzten $(-a, -b, -c)$ äquivalent ist, was eben durch unsere Methode leicht erkannt wird. Wir erhalten also folgendes Schlussresultat: *Die reproducirende Gruppe einer indefiniten Hermite'schen Form ist eine automorphe*) Gruppe. Das Polygon Π, welches wir oben bildeten, ist eben das Fundamentalpolygon dieser Gruppe oder nur die Hälfte des letzten.***)

*) Mit dieser Benennung soll nach Herrn Klein (Vorlesungen etc. p. 762), gemeint werden, dass, wenn die Substitutionen $\begin{pmatrix} a, & b \\ c, & d \end{pmatrix}$ der Gruppe auf eine complexe Variabele z nach der Formel $z' = \frac{az+b}{cz+d}$ wirken, eine discontinuirliche Gruppe mit endlichem Fundamentalbereiche entsteht.

**) Ist die Determinante D in die Summe zweier Quadrate zerlegbar, so kann diese Gruppe auf eine Moduluntergruppe zurückgeführt werden (V^e meine Note in den Rendiconti dell' Accademia dei Lincei Maggio 1890).

§ 14.

Erledigung der beiden Probleme der Aequivalenz für Hermite'sche Formen.

Das erste Problem der Aequivalenz für Hermite'sche Formen wird nach § 12 darauf zurückgeführt, die Aequivalenz reducirter Formen zu untersuchen. Diese Frage können wir sofort durch den Satz beantworten:

Zwei reducirte äquivalente Hermite'sche Formen gehören derselben Periode an.

Nehmen wir an, dass die beiden indefiniten reducirten Formen f_1, f_2 äquivalent seien, so wird es eine Substitution der Gruppe G geben, welche die repräsentirende Halbkugel von f_1 in diejenige von f_2 verwandelt und folglich das Netz, mit welchem wir die Halbkugel von f_1 bedeckten, in dasjenige von f_2 überführt. Das Polygon des Netzes von f_2, welches im Fundamentalpolyeder P liegt, ist also mit einem Polygone des Netzes von f_1 äquivalent: folglich gehört f_2 der Periode von f_1 an.

Mit der Erledigung des ersten Problems der Aequivalenz, wird das Zweite auf die Auffindung der reproducirenden Gruppe einer indefiniten Hermite'schen Form reducirt. Die Lösung dieser Aufgabe enthält der vorige Paragraph.

Zum Schlusse sei nur noch bemerkt, dass sowohl für Dirichlet'sche wie für Hermite'sche Formen im Bereiche $(1, \varepsilon)$ dieselben Beweise Wort für Wort übertragbar sind. Es genügt dafür die Raumeintheilung des § 6 zu Grunde zu legen.