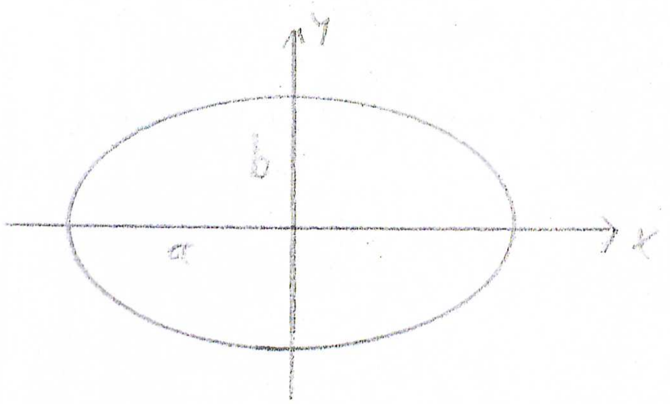
Die Bogenlänge der Ellipse

Harald Schröer

2015

Wir betrachten eine gewöhnliche Ellipse:



Wir benötigen die Mittelpunktsgleichung:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

a und b sind die große und die kleine Halbachse. Wir formen nach y^2 um:

$$y^2 = b^2 \cdot \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) = \frac{b^2}{a^2} \cdot (a^2 - x^2)$$

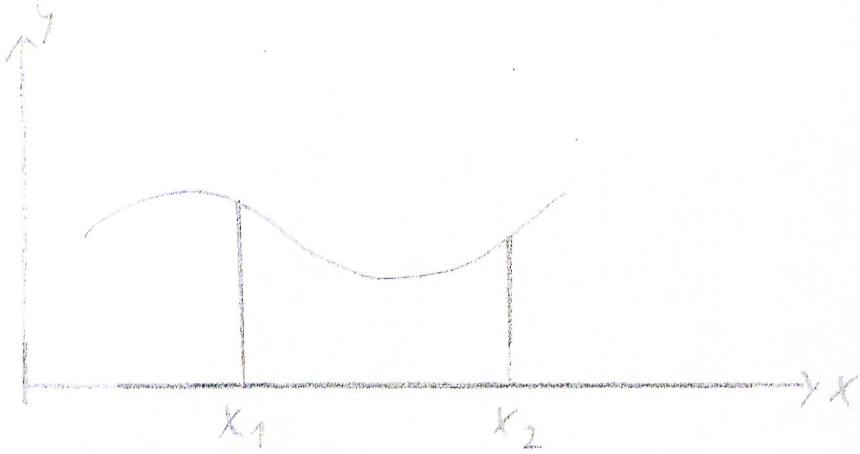
Daraus folgt:

$$y = \pm\frac{b}{a} \cdot \sqrt{a^2 - x^2}$$

Wir leiten nach der Kettenregel ab:

$$y'(x) = \pm\frac{b}{a} \cdot \frac{-x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

Nun werfen wir einen Blick auf die folgende Abbildung:



Für die Weglänge U_s gilt allgemein:

$$U_s = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + y'(x)^2}\, dx$$

Also ist die Bogenlänge der Ellipse:

$$U[x_1, x_2] = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + y'(x)^2}\, dx = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x^2}{a^2 - x^2}}\, dx \tag{1}$$

Wir formen weiter um:

$$U[x_1, x_2] = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{\frac{a^4 - a^2x^2 + b^2x^2}{a^2(a^2 - x^2)}}\, dx$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} \frac{\sqrt{a^2(a^2 - x^2) + b^2x^2}}{a\sqrt{a^2 - x^2}}\, dx$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} \frac{\sqrt{a^2 \cdot \left(\frac{a^2 - x^2}{a^2}\right) + \frac{b^2x^2}{a^2}}}{a \cdot \sqrt{\frac{a^2 - x^2}{a^2}}}$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} \frac{\sqrt{a^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) + \frac{b^2x^2}{a^2}}}{a \cdot \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}}\, dx$$

Wir führen folgende Substitution ein:

$$\frac{x}{a} = \cos t \qquad \frac{x^2}{a^2} = \cos^2 t \qquad 1 - \frac{x^2}{a^2} = \sin^2 t$$

Es folgt:

$$t = \arccos\left(\frac{x}{a}\right)$$

schließlich:

$$\frac{dt}{dx} = \frac{-1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} \cdot \frac{1}{a} = \frac{-1}{\sin t} \cdot \frac{1}{a}$$

Wir erhalten:

$$U[x_1, x_2] = \int\limits_{\arccos(\frac{x_1}{a})}^{\arccos(\frac{x_2}{a})} -\frac{\sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}}{a \cdot \sin t} \cdot \sin t \cdot a \, dt$$

$$= \int\limits_{\arccos(\frac{x_2}{a})}^{\arccos(\frac{x_1}{a})} \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t} \, dt \qquad (2)$$

In etwas anderer Form findet sich dieses Integral bei Barner [1] Kapitel 14.1,S.86.

Nun führen wir eine numerische Auswertung für a=1 und b=0.8 mit der Gleichung (1) durch. Wi: setzen nun $x_1 = 0$ und $x_2 = h$ ein. Ein spezieller Fall ist der Fall $h = 1$. In diesen Fall tritt bei Gleichung (1) eine Singularität auf, die aber mit Gleichung (2) behandelt werden kann.

Das Integral ist nicht exact auswertbar. Wir verwenden die Gauß-Kronrod-Methode zur numerischen Integration.

Das Ergebnis wird in der folgenden Tabelle dargestellt:

h	$U[0,h]$
0.1	0.1001
0.2	0.2009
0.3	0.3030
0.4	0.4074
0.5	0.5153
0.6	0.6285
0.7	0.7499
0.8	0.8854
0.9	1.0508
0.91	1.0705
0.92	1.0912
0.93	1.1131
0.94	1.1365
0.95	1.1617
0.96	1.1894
0.97	1.2205
0.98	1.2572
0.99	1.3046
0.995	1.3380
0.999	1.3823
0.9999	1.4068
1.0000	1.4181

Bei $h = 1$ ergibt sich ein Viertel des Ellipsenumfangs. Der Umfang beträgt also U=5.6724 Längeneinheiten.

Literatur

[1] Martin Barner, Friedrich Flohr „Analysis II“ de Gruyter Verlag Berlin 1983