

XI. Die Reduction der mechanischen Grundeinheiten auf eine einzige Dimension; von E. Budde.

Eine Zeit heisse T , ein Länge L , Masse M , Geschwindigkeit V , Potentialfunction P ; Dimensionen werden durch Einklammerung dieser Symbole bezeichnet, z. B. $(V) = (L/T)$; die Einheiten der Grössen werden $T_1 L_1 M_1$ u. s. w. geschrieben. Betrachtet man die Grössen Zeit, Länge und Masse als unmittelbar durch die Anschauung gegeben, so sollen sie gemeine Zeit, gemeine Masse u. s. w. heissen; die willkürlichen Einheiten derselben heissen dann gemeine Einheiten, und die in diesen Einheiten dargestellten Grössen V , P und ähnliche erhalten gleichfalls die Bezeichnung „gemein.“

Gauss hat gezeigt, wie man mit Hilfe des Newton'schen Gesetzes die gemeine Masse eliminiren und die Masse durch einen Ausdruck (L^3/T^2) definiren kann. Er benutzt dabei die Umlaufgeschwindigkeit eines Satelliten, der sich nach dem Newton'schen Gesetz in kreisförmiger Bahn vom Radius L um den Massenpunkt M dreht. Man kann ebenso wohl irgend eine andere mechanische Function (z. B. die Beschleunigung) von M verwenden, da sich ja aus ihr jene Umlaufgeschwindigkeit ohne neuen Recurs auf die Masse berechnen lässt. Wir wählen, um spätere Betrachtungen zu vereinfachen, die einfachste von allen, die Potentialfunction. Nach dem Newton'schen Gesetz ist, wenn ε eine Constante, die Potentialfunction von M in der Entfernung L :

$$(1) \quad P = \varepsilon \frac{M}{L}.$$

Daraus folgt, wenn man die disponiblen Einheiten so bestimmt, dass $\varepsilon = 1$ wird:

$$(2) \quad P = \frac{M}{L}, \quad \text{also:}$$

$$(3) \quad M = PL.$$

Die Masse M lässt sich also definiren als „Potentialfunction in der Entfernung L “; denn das ist ja PL . Die Potentialfunction selbst ist dabei zu definiren als das längs dem Radius vector L genommene Integral $\int_0^L \varphi dL$, in welchem φ die von M ausgeübte Beschleunigung darstellt; φ ergibt sich aus der

Betrachtung der Geschwindigkeiten, welche eine zweite Masse unter der Einwirkung von M annimmt. Es ist dabei stillschweigend vorausgesetzt, dass die geometrische Ausdehnung von M der Anwendung des Grundgesetzes in der einfachen Form Gl. (1) nicht im Wege stehe; diese Voraussetzung soll in allem folgenden, auch für das später auftretende Weber'sche Gesetz, beibehalten werden.

Geht man nun von dem Begriff der gemeinen Masse aus, so hat ε eine ganz bestimmte Dimension. Wie aus (1) zu ersehen, ist:

$$(4) \quad \varepsilon = \frac{P_1 L_1}{M_1},$$

und da P die Dimensionen eines Geschwindigkeitsquadrates besitzt, ist:

$$(5) \quad (\varepsilon) = \frac{(L^2)}{(T^2 M)},$$

und wenn man $\varepsilon = 1$ setzt, so ist diese 1 zunächst als eine Einheit von der vorstehenden Dimension zu denken.

Die drei Grössen L , M und T , aus denen sich die Dimension von ε zusammensetzt, sind für die unmittelbare Anschauung durchaus incohärent, aber die Natur stellt einen Zusammenhang zwischen ihnen her, indem sie uns die That- sache liefert: „eine bestimmte Masse (M) übt in der Entfernung (L) eine bestimmte Beschleunigung ($\varepsilon(L^2/T^2)$). Hat man erst dem ε in diesem Zusammenhang einen bestimmten Grössenwerth beigelegt, so genügt das Product PL , um ein gegebenes M und seine Wirkungen festzustellen; die Dimension von ε spielt in dieser Bestimmung keine Rolle, sondern nur sein Zahlenwerth; darauf beruht die Berechtigung, ε als reine Zahl zu behandeln.

Besässen wir eine Theorie, welche die Wirkung der in der Natur gegebenen Massen auf anschauliche Verhältnisse zurückführte, so würde sich in ihr auch die Erklärung für den in Gl. (3) ausgedrückten Zusammenhang finden müssen.

Ganz dieselben Betrachtungen finden auf die Constante des electrostatischen Anziehungsgesetzes Anwendung; sie lehren dort nichts neues, weil die Beziehungen mit den vorstehend behandelten identisch sind.

Die Natur liefert uns nun ausser der Newton'schen

und der Coulomb'schen Constante noch eine dritte Grösse, welche sich von allen Besonderheiten des Stoffes und des gegebenen Falles unabhängig zeigt, und die deshalb, wie jene, als Ausdruck einer fundamentalen Naturbeziehung aufgefasst werden darf. Das ist die Constante k der electrodynamischen Grundgesetze. Diese hat, wie ε , in gemeinen Einheiten eine ganz bestimmte Dimension, die aber blos die Grössen L und T enthält; und wie jenes ε benutzt werden konnte, um von den gemeinen Grössen M , L und T die erste wegzuschaffen, so kann k dazu dienen, um aus den beiden übrig bleibenden L und T noch eine zu eliminiren. Es ist dazu nicht einmal erforderlich, dass eines der vorhandenen electrodynamischen Grundgesetze das richtige sei; es genügt, eines auszuwählen, welches irgend einen Satz von Beobachtungen so darstellt, dass sich aus ihnen die Grösse k jederzeit in gemeinen Einheiten berechnen lässt. Man kann dann auf Grund der Beobachtung die Verhältnisse eines willkürlich fingirten Falles (ein solcher ist ja auch, genau genommen, der Gauss'sche Satellit) mathematisch darstellen, und an ihnen die erforderlichen Definitionen entwickeln.

Wir fingiren also eine ruhende Masse M , welche andere Massen μ nach dem Weber'schen Gesetz anzieht. (Man wird leicht ersehen, dass das Riemann'sche Gesetz ganz analoge Ergebnisse liefert, das Clausius'sche gleichfalls, wenn man dem M eine absolute Geschwindigkeit ertheilt.) Eine angezogene Masse μ bewege sich auf einer durch M gehenden Geraden mit der Geschwindigkeit V . M hat dann eine Potentialfunction:

$$(6) \quad P = \varepsilon \frac{M}{L} (1 - kV^2),$$

und wenn M in gemeinen Masseneinheiten gegeben ist, so reichen die Beobachtungsdaten vollständig aus, um den Werth von P für jedes L und V zu berechnen. Wir finden zunächst einen Werth von P für $V = 0$:

$$(7) \quad P_0 = \varepsilon \frac{M}{L},$$

setzen darin $\varepsilon = 1$ und haben damit die Gauss'sche Massenbestimmung, in welcher L_1 und T_1 noch willkürlich sind. Vermöge derselben vereinfacht sich (7) zu:

$$(8) \quad P = \frac{M}{L}(1 - kV^2).$$

Hierin hat nun die Constante k in gemeinen Einheiten eine ganz bestimmte Dimension; denn damit die Formel homogen sei, muss k ein reciprokes Geschwindigkeitsquadrat, also:

$$(9) \quad (k) = \left(\frac{T^2}{L^2}\right)$$

sein. Zähler und Nenner des Bruches T^2/L^2 sind, ganz wie bei ε , für unsere Anschauung incohärent. Wir sind zwar so an den Umgang mit Geschwindigkeiten gewöhnt, dass wir leicht zu dem Glauben gelangen könnten, eine Geschwindigkeit, also ein Quotient L/T , sei direct vorstellbar; aber das ist nicht der Fall; was wir bei Betrachtung einer Geschwindigkeit anschauen, das sind einerseits die consecutiven Orte des bewegten Punktes und ihre Distanzen L , andererseits die entsprechenden Zeiträume, aber nicht das Verhältniss beider; dies ist eine transcendente Beziehung.

Ganz wie Gl. (1) können wir nun (8) umkehren und als Bestimmungsgleichung für die Grösse V benutzen. Wir finden:

$$(10) \quad V^2 = \frac{M - PL}{kM}$$

und durch diese Gleichung wird der Grössenwerth von V wieder unabhängig von den Dimensionen der Constante; er hängt nur vom Zahlenwerth von k ab, und wenn wir den willkürlich festsetzen, ist V vollkommen bestimmt. Wir setzen also, mit demselben Recht wie bei ε , fest:

k soll die Zahl 1 sein.

Dann ist:

$$(11) \quad V^2 = \frac{M - PL}{M}.$$

PL ist die Masse eines Körpers, der nach dem Newton'schen Gesetz in der Entfernung L die gleiche Beschleunigung üben würde, welche M nach dem Weber'schen ausübt. Nennen wir PL die „scheinbare Masse“ des anziehenden Körpers M , so besagt Gl. (11): Das Quadrat der Geschwindigkeit des angezogenen Körpers μ ist die Differenz zwischen der wahren und der scheinbaren Masse des anziehenden Körpers M , dividirt durch dessen wahre Masse. Man sieht leicht, dass die Daten auf der rechten Seite der Gleichung für ein gegebenes M aus der Beobachtung jederzeit herstellbar sind.

Dadurch wird nun V^2 , wie man ohne weiteres sieht, eine reine Zahl, also auch V , und da $(V) = (L/T)$, wird:

$$(12) \quad (L) = (T),$$

und wenn man dies in die Gauss'sche Bestimmung:

$$(13) \quad (M) = \left(\frac{L^3}{T^2}\right) \quad \text{einsetzt, wird:}$$

$$(14) \quad (M) = (T),$$

zwei bemerkenswerth einfache Beziehungen. Es ist hiernach mit Hülfe des Weber'schen Gesetzes möglich, Längen und Massen durch reine Zeiten zu definiren. Das geschieht am bequemsten mit Hülfe der von Weber eingeführten, von Helmholtz benannten Begriffe „kritische Geschwindigkeit $c = \sqrt{1/k}$ “ und „kritische Entfernung λ “. Erstere ist in gemeinen Einheiten unabhängig von aller Besonderheit des Falles gegeben; letztere lässt sich für jede gegebene Masse M in gemeinen Längeneinheiten bestimmen unter der fictiven Voraussetzung, dass die Masse dem Gesetz (6) gehorcht. Weber¹⁾ bestimmt die kritische Entfernung an zwei electricen Theilchen, deren Quantitäten e und e' , deren Massen (Trägheitscoefficienten) q und q' seien, durch die Gleichung:

$$(15) \quad \lambda = 2 \left(\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} \right) \frac{ee'}{c^2}.$$

Bei den von uns vorausgesetzten Körpern M und μ ist Quantität und Masse identisch; setzen wir $\mu = M$, so wird:

$$(16) \quad q = q' = e = e' = M,$$

und Gl. (15) reducirt sich auf:

$$(17) \quad \lambda = \frac{4M}{c^2}.$$

Dieses λ , die kritische Entfernung zweier gleichen Massen M , nennen wir kurzweg „die kritische Entfernung der Masse M “. Setzen wir $k = 1/c^2 = 1$, so ist:

$$(18) \quad \lambda = 4M, \quad \text{also auch umgekehrt:}$$

$$(19) \quad M = \frac{1}{4}\lambda.$$

Damit erhalten wir folgende Bestimmungen für die Fundamentalgrößen:

1) W. Weber, Electrodynam Maassbestimmungen, insbes. über das Princip der Erhaltung der Energie, Leipzig 1871, id. über die Energie der Wechselwirkung, Leipzig 1878.

1. Die Zeit ist die gemeine Zeit.
2. Die Geschwindigkeit eines Punktes ist der Quotient aus seiner gemeinen Geschwindigkeit und der gemeinen Geschwindigkeit c , wenn beide in denselben willkürlichen Einheiten ausgedrückt sind.
- 3) Die Länge einer Strecke ist die Zeit, in welcher sie mit der Geschwindigkeit eins durchlaufen wird.
- 4) Die Masse eines Körpers ist ein Viertel seiner als Zeit ausgedrückten kritischen Entfernung.

Damit ist die Reduction des Längen- und Massenmaasses auf Zeitmaass ausgeführt. Wir bemerken, dass Weber in den Maassbestimmungen von 1878 schon eine Grösse u eingeführt hat, die unserer „Geschwindigkeit“ entspricht. Die Einheiten des obigen Maasssystems ergeben sich unmittelbar aus den Festsetzungen $\epsilon = 1$ $k = 1$, aus denen es hervorgegangen ist:

1. Die Zeiteinheit ist gemeine Secunde.
2. Die Längeneinheit (1 Sec. Länge) ist die Länge, welche mit der kritischen Geschwindigkeit in einer Secunde durchlaufen wird; ihr Zahlenwerth in gemeinen Einheiten ist gleich dem von c , wenn c in m/sec ausgedrückt wird.
3. Die Masseneinheit (1 Sec. Masse) ist die astronomische Einheit von Gauss, wohlverstanden mit Zugrundelegung der sub (2) definirten Längeneinheit, also diejenige Masse, welche einer anderen Masse in der Entfernung von c gemeinen Längeneinheiten die gemeine Beschleunigung c m/sec² ertheilt. Setzt man $c = 300\,000\,000$, die Beschleunigung der Erdschwere $= 9,81$, den Erdradius $= 6\,370\,000$, so wird $M_1 = 67\,700\,000\,000$ Erdmassen.

Man erhält mit dem vorstehenden System eine Art von Erklärung für die Cohärenz der Gauss'schen Beziehung $(M) = (L^3/T^2)$, da diese in unseren Einheiten lautet $(T) = (T^3/T^2)$, also sichtlich identisch wird. Es ist nur consequent, zu behaupten, dass die Theorie der electrodynamischen Wirkungen dermaleinst eine Erklärung der Gleichung $L = T$ liefern muss, so dass die vorstehenden Betrachtungen einmal einen heuristischen Werth erhalten könnten.
