

# Neuer Beweis des Abel'schen Theorems.

Von H. WEBER in Zürich.

Der Beweis, den Riemann von dem Abel'schen Theorem giebt, lässt zwar an Bündigkeit nichts zu wünschen übrig, gleichwohl scheint mir der folgende kaum minder einfache Beweis desselben einer kurzen Mittheilung werth, theils weil er den Vorzug hat, in allen Fällen das Theorem in vollständig entwickelter Form zu geben, theils weil er geeignet ist, einen Zusammenhang aufzudecken, welcher zwischen dem Abel'schen Theorem und einer Reihe von anderen bisher getrennt erscheinenden Sätzen besteht.

Die Variablen  $s$  und  $z$  sollen durch eine irreductible algebraische Gleichung mit einander verbunden sein, so dass die Verzweigungsart von  $s$  dargestellt ist durch eine  $2p+1$ -fach zusammenhängende Riemann'sche Fläche  $T$ , welche durch ein normales Querschnittssystem  $a_k, b_k$  (Riemann, Theorie der Abel'schen Functionen Nr. 19) in eine einfach zusammenhängende Fläche  $T'$  verwandelt werde.

Es sei nun  $\sigma$  eine (wie  $T$  verzweigte) rationale Function von  $s$  und  $z$ , welche in den Punkten

$$\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m$$

unendlich klein, in den Punkten

$$\xi'_1, \xi'_2, \dots, \xi'_m$$

unendlich gross in der ersten Ordnung wird.

Um  $\log \sigma$  eindeutig zu bestimmen, ziehe man von  $\xi'_1$  nach  $\xi_1$ , von  $\xi'_2$  nach  $\xi_2$  ..., von  $\xi'_m$  nach  $\xi_m$  einander nicht schneidende Linien  $l_1, l_2, \dots, l_m$  durch das Innere von  $T'$ , wodurch, wenn man beide Ufer der Linien  $l$  als zur Begrenzung gehörig betrachtet, aus  $T'$  eine neue Fläche  $T''$  entsteht.

Nennen wir diejenige Seite einer Linie die positive, welche bei ihrer Entstehung zur Linken liegt, so ist  $\log \sigma$  auf der positiven Seite einer Linie  $l$  um  $2\pi i$  grösser als auf der negativen. Ferner wird  $\log \sigma$  auf der positiven Seite der Querschnitte  $a_k, b_k$  um  $2m_k\pi i$ , resp.  $2n_k\pi i$  grösser sein als auf der negativen, wenn  $m_k, n_k$  ganze Zahlen sind, über die sich im Allgemeinen nichts bestimmen lässt.

Es sei ferner  $\frac{d\omega}{dz}$  eine beliebige andere rationale Function von  $s$  und  $z$ , deren Unstetigkeiten folgendermassen festgesetzt sein sollen: Für die Umgebung eines Punktes  $\varepsilon$ , um welchen die Fläche  $T$  sich  $\varrho$ -mal windet (für einen gewöhnlichen Punkt ist  $\varrho = 1$ , für einen einfachen Verzweigungspunkt  $\varrho = 2$  etc.), in welchem  $z$  den Werth  $z_\varepsilon$  hat, entwickle man  $\frac{d\omega}{dz}$  nach steigenden Potenzen von  $(z - z_\varepsilon)^{\frac{1}{\varrho}}$ , und diese Entwicklung habe die Form:

$$\frac{d\omega}{dz} = c_\mu (z - z_\varepsilon)^{\frac{\mu}{\varrho}} + c_{\mu+1} (z - z_\varepsilon)^{\frac{\mu+1}{\varrho}} + c_{\mu+2} (z - z_\varepsilon)^{\frac{\mu+2}{\varrho}} + \dots$$

Es kommen hierbei nur solche Punkte  $\varepsilon$  in Betracht, für welche  $\mu$  negativ ist. In der Umgebung eines unendlich fernen Punktes  $\eta$ , um den die Fläche  $T$  sich ebenfalls  $\varrho$ -mal windet, sei  $\frac{d\omega}{dz}$  nach fallenden Potenzen von  $z^{\frac{1}{\varrho}}$  entwickelt wie folgt:

$$\frac{d\omega}{dz} = \frac{\gamma_\nu}{z^\nu} + \frac{\gamma_{\nu+1}}{z^{\nu+1}} + \frac{\gamma_{\nu+2}}{z^{\nu+2}} + \dots,$$

so dass man hat:

$$c_n = \left[ \frac{d^{n-\mu} \left( (z - z_\varepsilon)^{-\frac{\mu}{\varrho}} \frac{d\omega}{dz} \right)}{(n-\mu)! \left( d(z - z_\varepsilon)^{\frac{1}{\varrho}} \right)^{n-\mu}} \right]_{z, s = z_\varepsilon, s_\varepsilon}$$

$$\gamma_n = \left[ \frac{d^{n-\nu} \left( z^{\frac{\nu}{\varrho}} \frac{d\omega}{dz} \right)}{(n-\nu)! \left( d \left( z^{-\frac{1}{\varrho}} \right) \right)^{n-\nu}} \right]_{z, s = \infty, s_\eta}$$

Endlich seien an den Querschnitten  $a_1, a_2, \dots a_p; b_1, b_2, \dots b_p$  die Periodicitätsmoduln des Integrals  $\omega$ :

$$A_1, A_2, \dots A_p; B_1, B_2, \dots B_p.$$

Es werde nun jeder der Punkte  $\varepsilon$  durch eine Kreislinie  $k_\varepsilon$ , welche im Innern von  $T''$ , sich  $\varrho$  mal windend, verläuft und keinen andern dieser Punkte einschliesst, aus der Fläche  $T''$  herausgeschnitten, und ebenso werde jeder der unendlich fernen Punkte  $\eta$  durch einen im Innern von  $T''$  verlaufenden, alle Punkte  $\varepsilon$  einschliessenden Kreis  $k_\eta$ , der etwa seinen Mittelpunkt im Punkt  $z = 0$  haben mag, von der Fläche  $T''$  abgesondert. In der so entstandenen Fläche  $T'''$  ist die Function

$$\log \sigma \cdot \frac{d\omega}{dz}$$

durchweg eindeutig und stetig und daher hat das über die ganze Begrenzung dieser Fläche in positiver Richtung erstreckte Integral

$$\int \log \sigma \cdot d\omega$$

den Werth Null. Dieses Integral aber zerfällt in drei Theile:

1. über beide Ufer sämmtlicher Linien  $l$ ,
2. über beide Ufer des Querschnittsystems,
3. über die Kreislinien  $k_\varepsilon, k_\eta$ .

Der erste Theil hat den Werth:

$$(1) \quad 2\pi i \sum_{i=1}^{i=m} \int_{\xi'_i}^{\xi_i} d\omega,$$

der zweite Theil:

$$(2) \quad 2\pi i \sum m_x B_x - 2\pi i \sum n_x A_x,$$

der dritte Theil endlich:

$$(3) \quad \sum_\varepsilon \int_{k_\varepsilon} \log \sigma d\omega + \sum_\eta \int_{k_\eta} \log \sigma d\omega.$$

Um diese letzteren Integrale zu bestimmen, entwickeln wir  $\log \sigma$  in der Nähe des Punktes  $\varepsilon$  nach steigenden Potenzen von  $(z - z_\varepsilon)^{\frac{1}{q}}$  und in der Nähe des Punktes  $\eta$ , d. h. jenseits des Kreises  $k_\eta$ , nach fallenden Potenzen von  $z^{\frac{1}{q}}$ , was immer möglich ist, wenn, wie vorausgesetzt werden muss, die Punkte  $\xi, \xi'$  sämmtlich von den Punkten  $\varepsilon, \eta$  verschieden sind.

Es sei demnach:

$$\text{Innerhalb } k_\varepsilon: \log \sigma = C_0 + C_1 (z - z_\varepsilon)^{\frac{1}{q}} + C_2 (z - z_\varepsilon)^{\frac{2}{q}} \dots$$

$$\text{Ausserhalb } k_\eta: \log \sigma = \Gamma_0 + \frac{\Gamma_1}{z^{\frac{1}{q}}} + \frac{\Gamma_2}{z^{\frac{2}{q}}} + \dots,$$

so dass:

$$C_n = \frac{1}{n!} \left[ \frac{d^n \log \sigma}{\left(d(z - z_\varepsilon)^{\frac{1}{q}}\right)^n} \right]_{z, s = z_\varepsilon, s_\varepsilon},$$

$$\Gamma_n = \frac{1}{n!} \left[ \frac{d^n \log \sigma}{\left(d z^{-\frac{1}{q}}\right)^n} \right]_{z, s = \infty, s_\eta},$$

woraus man sofort erhält:

$$-\int_{k_\varepsilon} \log \sigma d\omega = 2\pi i q (C_0 c_{-q} + C_1 c_{-q-1} + \dots C_{-\mu-q} c_\mu),$$

$$\int_{k_\eta} \log \sigma d\omega = 2\pi i q (\Gamma_0 \gamma_q + \Gamma_1 \gamma_{q-1} + \dots \Gamma_{\nu-q} \gamma_\nu).$$

Das erste dieser Integrale verschwindet also, sobald  $-\mu < \varrho$ , das zweite, wenn  $\nu > \varrho$  ist.

Hieraus ergibt sich nun für das Abel'sche Theorem folgende ganz allgemeine Darstellung:

$$(I.) \quad \sum_i \int_{\xi_i}^{\xi_i'} d\omega = \sum_{\pi} n_{\pi} A_{\pi} - \sum_{\pi} m_{\pi} B_{\pi} \\ + \sum_{\varepsilon} \varrho (C_0 c_{-\varrho} + C_1 c_{-\varrho-1} + \cdots C_{-\mu-\varrho} c_{\mu}) \\ + \sum_{\eta} \varrho (\Gamma_0 \gamma_{\varrho} + \Gamma_1 \gamma_{\varrho-1} + \cdots \Gamma_{\varrho-\nu} \gamma_{\nu}).$$

Die ganzen Zahlen  $m_{\pi}, n_{\pi}$  sind, wie schon erwähnt, im Allgemeinen nicht zu bestimmen.

Wir können zu ihrer Bestimmung nur Folgendes beibringen.

Bedeutet  $\sigma_1$  eine Function von derselben Beschaffenheit wie  $\sigma$ ,  $a$  und  $b$  irgend zwei Constanten, und setzen wir:

$$\sigma = \frac{\sigma_1 - a}{\sigma_1 - b},$$

so werden sich die Punkte  $\xi, \xi'$  stetig verändern, wenn wir die Constanten  $a$  und  $b$  stetig verändern. Nehmen wir  $a = b$  an, so fallen die Punkte  $\xi$  mit den entsprechenden Punkten  $\xi'$  zusammen, und die Constanten  $m_{\pi}, n_{\pi}$  erhalten die Werthe 0, wenn wir die Integrationswege von  $\xi_i'$  nach  $\xi_i$  auf 0 reduciren. Lassen wir nun  $a$  sich stetig ändern, so werden auch die Punkte  $\xi_i$  stetig fortrücken, und die Zahlen  $m_{\pi}, n_{\pi}$  werden so lange  $= 0$  bleiben, bis einer der Punkte  $\xi$  gezwungen ist, einen Querschnitt zu überschreiten, vorausgesetzt, dass wir für die Integrationswege diejenigen Linien wählen, auf denen die Punkte  $\xi$  bei der stetigen Aenderung von  $a$  fortschreiten.

Es sind daher im Allgemeinen die ganzen Zahlen  $n_{\pi}, m_{\pi}$  abhängig von der Natur der Function  $\sigma$  und von der Lage der Querschnitte, aber völlig unabhängig von der Function  $\omega$ , so dass sie für alle diese Functionen die nämlichen Werthe haben. Behält man sich vor, über die Integrationswege zwischen  $\xi_i'$  und  $\xi_i$  ohne Rücksicht auf die Querschnitte zu verfügen, so kann man durch dies Mittel den Zahlen  $m_{\pi}, n_{\pi}$  beliebige Werthe ertheilen.

Ausser den Zahlen  $m_{\pi}, n_{\pi}$  kommen in der Formel (I.), wenn die  $c_{-\varrho}, \gamma_{\varrho}$  nicht alle verschwinden, noch andere unbestimmte ganze Zahlen vor, da die Grössen  $C_0, \Gamma_0$  als Logarithmen nur bis auf Vielfache von  $2\pi i$  bestimmt sind. Ueber diese Zahlen gilt Aehnliches wie über  $m_{\pi}, n_{\pi}$ .

Ich erwähne schliesslich noch, dass unsere Methode ohne wesentliche Aenderung auch dann noch anwendbar bleibt, wenn  $\sigma$  nicht eine rationale Function von  $s$  und  $z$ , sondern eine Function bedeutet, welche beim Ueberschreiten der Querschnitte constante Factoren annimmt. Sind diese Factoren Wurzeln der Einheit, so ist  $\sigma$  die Wurzel aus einer rationalen Function von  $s$  und  $z$ , und in der Formel (I.) treten an Stelle der ganzen Zahlen  $m_x n_x$  gewisse rationale Brüche. Sind die erwähnten Factoren andere, so ist immer  $\log \sigma$  ein algebraisches Integral und an Stelle von  $2 m_x \pi i$ ,  $2 n_x \pi i$  treten die Periodicitätsmoduln desselben. Man erhält dann aus (I.) ein System von Formeln, von denen der Satz von der Vertauschung des Arguments und Parameters bei den Integralen dritter Gattung das bekannteste Beispiel ist.

Zürich, im Juni 1874.