Zur Nicht-Euklidischen Geometrie.

Von

Felix Klein in Göttingen.

Eine Vorlesung über Nicht-Euklidische Geometrie, die ich die letzten beiden Semester hindurch gehalten habe, gab mir die willkommene Gelegenheit, auf jene Gedankenreihen zurückzugreifen, denen ich in verschiedenen Arbeiten aus den Jahren 1871—73 Ausdruck gegeben habe*). Indem ich die neuere Litteratur des Gegenstandes verglich, bemerkte ich, dass die fundamentalen Auffassungen, von denen ich damals ausging, immer nur erst theilweises Verständniss gefunden haben, und dass gewisse damit zusammenhängende Fragestellungen, über welche ich mir seit lange bestimmte Ansichten gebildet habe, noch gar nicht behandelt sind. Mittlerweile erfahre ich, dass eine zusammenhängende Darstellung der Theorie, von einem Standpunkte aus, der von dem meinigen jedenfalls nicht sehr verschieden ist, demnächst von Hrn. Lindemann in dem zweiten Bande von Clebsch's Vorlesungen über Geometrie publicirt werden wird. Um so lieber kann ich mich nachstehend auf die Besprechung solcher Punkte beschränken, in denen ich Neues zu bieten habe, oder deren Darlegung in einer besonderen Form mir erwünscht erscheint. In I reproducire ich zunächst gewisse Ideen, die Clifford im Jahre 1873 darlegte, die aber bisher nur wenig bekannt geworden sind, trotz des

*) Es sind dies insbesondere:

Zwei Arbeiten „über die sogenannte Nicht-Euklidische Geometrie" in den Bänden 4 und 6 dieser Annalen (1871, 1872),

meine Programmschrift „Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen" (Erlangen 1872, bei A. Deichert; dieselbe ist erst vor kurzem, mit Zusätzen und Verbesserungen von meiner Seite versehen, durch Hrn. Gino Fano in Bd. 17 der Annali di Matematica (1890) in italienischer Uebersetzung neu publicirt worden),

ein Aufsatz: „Ueber den allgemeinen Functionsbegriff und dessen Darstellung durch eine willkürliche Curve" in den Berichten der Erlanger physikalisch-medicinischen Gesellschaft von 1873 (wiederabgedruckt in Bd. 22 dieser Annalen).

grossen Interesses, welches sich an dieselben knüpft*). Dieselben geben mir den Anlass, in II die Frage der „Nicht-Euklidischen Raumformen", über welche Hr. Killing vor einigen Jahren ein eigenes Werk publicirte**), aufs Neue aufzunehmen: mein Resultat ist, dass eine Reihe solcher „Raumformen" existirt, welche bisher noch nicht die verdiente Beachtung gefunden haben. Eben in diesem Nachweise, sowie in den verschiedenartigen Bemerkungen, die ich mit demselben weiterhin verknüpfe, dürfte die Hauptbedeutung meiner diesmaligen Darlegungen enthalten sein. In III entwickele ich eine besonders einfache Art, auf Grund rein projectiver Betrachtungen die analytische Geometrie einzuführen. Im Princip kommt dieselbe selbstverständlich auf die betreffenden Ideen v. Staudt's (oder auch von Moebius) zurück, aber sie ist wesentlich anschaulicher, als die mir sonst bekannten Darstellungen der Theorie, und dürfte also an ihrem Theile die Schwierigkeiten vermindern, die immer noch bei verschiedenen Mathematikern meinen früheren hierauf bezüglichen Ausführungen entgegenzustehen scheinen***). In IV endlich discutire ich allgemeinere Fragen: ich erläutere die principielle Bedeutung derjenigen Auffassungsweise der Nicht-Euklidischen Geometrie, die von der projectiven Geometrie beginnt, und nehme ausführlicher, als ich früher that, Stellung zum Problem der geometrischen Axiome.

*) Wie ich von Hrn. Lindemann erfahre, wird er in seiner demnächstigen Publication einen Haupttheil der Clifford'schen Betrachtungen (nämlich denjenigen, der sich auf die Theorie der windschiefen Parallelen und die zugehörigen Schiebungen des Raumes bezieht) seinerseits zur Darstellung bringen. Bisher sind diese Fragen am ausführlichsten von Sir R. S. Ball behandelt. Vergl. insbesondere dessen neueste Abhandlung „On the theory of the Content" in den Transactions der R. Irish Academy, vol. 29 (1889), deren bezüglicher Inhalt in das Schlusscapitel von Gravelius' „Theoretischer Mechanik starrer Systeme" (Berlin 1889) aufgenommen ist. Ueber Clifford's bez. Originalmittheilungen vergl. weiter unten im Texte.

**) Leipzig, bei Teubner 1885.

***) So äussert sich z. B. Hr. Ball in der Einleitung zu seiner oben genannten Abhandlung:

„In that theory (the Non-Euclidian Geometry) it seems as if we try to replace our ordinary notion of distance between two points by the logarithm of a certain anharmonic ratio. But this ratio itself involves the notion of distance measured in the ordinary way. How then can we supersede the old notion of distance by the Non-Euclidian notion, inasmuch as the very definition of the latter involves the former"?

Und Cayley selbst äussert sich auf p. 605 des zweiten Bandes seiner Collected Papers (Cambridge 1889), indem er v. Staudt's Einführung der Zahlen bespricht:

„It must however be admitted that, in applying this theory of v. Staudt's to the theory of distance, there is at least the appearance of arguing in a circle".

I.

Ueber Clifford's Ideen von 1873.

Gleich nach Veröffentlichung meiner ersten Abhandlung zur Nicht-Euklidischen Geometrie hat sich Clifford mit der ihm eigenthümlichen Unmittelbarkeit geometrischer Intuition auf das eifrigste den damit gegebenen Fragestellungen zugewandt. Durchdrungen von der besonderen Symmetrie und Eleganz der *elliptischen* Geometrie, suchte er deren Eigenart nach geometrischer und mechanischer Seite hin in besonders einfacher Weise zu formuliren. Die Verhandlungen der Londoner Mathematischen Gesellschaft enthalten hierüber nur zwei vorläufige Mittheilungen; es sind dies:

1) *Preliminary sketch of biquaternions* (Bd. 4, 1873),
2) *On the free motion under no forces of a rigid system in an n-fold homaloid* (Bd. 7, 1876),

die in Clifford's gesammelten Abhandlungen (Mathematical Papers, London, Macmillan 1882) unter Nr. XX und XXVI abgedruckt sind. Am letztgenannten Orte folgen dann aber noch unter Nr. XLI, XLII, XLIV drei weitere hierher gehörige Aufsätze:

1) *Motion of a solid in elliptic space* (aus dem Jahre 1874),
2) *Further Note on Biquaternions* (von 1876),
3) *On the Theory of screws in a space of constant positive curvature* (ebenfalls von 1876).

Ich kann auf die zahlreichen, interessanten Ideen, welche Clifford in diesen Arbeiten darlegt, hier leider nur sehr unvollständig eingehen. In der That möchte ich mich hier auf eine einzelne Stelle der „preliminary sketch of biquaternions" beschränken, wo Clifford in einer neuen, sogleich darzulegenden Weise *parallele* Linien des elliptischen Raumes definirt und daran folgende Bemerkung knüpft, die ich wörtlich reproducire (cf. ges. Werke; p. 193 oben):

„There are many points of analogy between the *parallels* here defined and those of parabolic geometry. Thus, if a line meets two parallel lines, it makes equal angles with them; and a series of parallel lines meeting a given line constitute a ruled surface of zero curvature. *The geometry of that surface is the same as that of a finite parallelogramm whose opposite sides are regarded as identical.*"

Eben die Verhältnisse auf der letztgenannten Fläche erschienen Clifford besonders bemerkenswerth: auf der Versammlung der British Association for the Advancement of Science vom Jahre 1873, die in Bradford stattfand, hat er eigens über dieselbe vorgetragen und mir, wie Sir R. S. Ball und anderen Mathematikern, die damals anwesend waren, wiederholt deren Eigenschaften persönlich erläutert. In den bez. Reports ist nur der Titel des Clifford'schen Vortrags wiedergegeben*), um so wichtiger ist es mir, hier nachträglich Einiges davon zur Geltung zu bringen. Ich beginne damit, einige zugehörige analytisch-geometrische Formeln in derjenigen Weise zu entwickeln, die ich wiederholt in meinen Vorlesungen befolgte**): wie Clifford selbst die bez. Resultate abgeleitet hat, vermag ich im Einzelnen nicht zu sagen.

Wir betrachten zunächst die gewöhnliche Interpretation von $x + iy$ auf der Einheitskugel. Bei derselben haben bekanntlich zwei *diametrale* Punkte Argumente folgender Form:

$$re^{i\varphi}, \quad -\frac{1}{r}e^{i\varphi} \tag{1}$$

(ich werde zwei solche Argumente späterhin kurzweg „diametral" nennen). Wir betrachten ferner lineare Substitutionen von $\lambda = x + iy$:

$$\lambda' = \frac{\alpha\lambda + \beta}{\gamma\lambda + \delta},$$

bei denen zwei diametrale Elemente festbleiben, die sich also geometrisch als eine Drehung der Kugel um einen ihrer Durchmesser darstellen. Wie anderweitig bekannt und beispielsweise auf p. 33, 34 meiner „Vorlesungen über das Ikosaeder" ausgeführt ist, kann man einer solchen Substitution folgende Gestalt geben:

$$\lambda' = \frac{(d+ic)\lambda - (b-ia)}{(b+ia)\lambda + (d-ic)}, \tag{2}$$

unter a, b, c, d reelle Grössen verstanden. Dabei ist, wenn $\xi\,\eta\,\zeta$ die rechtwinkligen Coordinaten eines beliebigen der zwei Kugelpunkte sind, welche bei der bez. Drehung festbleiben, wenn ferner φ den Winkel bezeichnet, durch welchen um diesen Punkt gedreht wird:

$$a = \varrho\xi\cdot\sin\frac{\varphi}{2}, \quad b = \varrho\eta\cdot\sin\frac{\varphi}{2}, \quad c = \varrho\zeta\cdot\sin\frac{\varphi}{2}, \quad d = \varrho\cdot\cos\frac{\varphi}{2}, \tag{3}$$

unter ϱ die Quadratwurzel $\sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2}$ verstanden. Aus Gründen, die ich p. 35, 36 der genannten Vorlesungen auseinandersetzte, nenne ich Substitutionen von der Form (2) solche vom *Quaternionentypus*.

Sei jetzt eine Fläche zweiten Grades gegeben. Wir betrachten diejenigen Collineationen des Raumes, welche nicht nur die Fläche als solche in sich überführen sondern auch jedes der beiden Systeme auf ihr verlaufender gerader Linien, — diejenigen Collineationen also, bei denen die Nicht-Euklidische Maassbestimmung unverändert bleibt, die

*) On a surface of zero curvature and finite extent.

**) Vergl. z. B. die Darlegungen in meiner Arbeit: „Ueber binäre Formen mit linearen Transformationen in sich". Math. Ann. Bd. 9, 1875 (insbes. p. 188, 189 daselbst).

man auf die F_2 gründen kann, und die man also als zugehörige Nicht-Euklidische Bewegungen bezeichnen wird. Mögen wir die geradlinigen Erzeugenden erster Art der Fläche durch einen Parameter λ, diejenigen zweiter Art durch einen Parameter μ in üblicher Weise festlegen. Die allgemeine Collineation der in Rede stehenden Art wird dann bekanntlich in der Weise zu geben sein, dass man für λ und μ irgend zwei lineare Substitutionen anschreibt:

$$\lambda' = \frac{\alpha\lambda + \beta}{\gamma\lambda + \delta}, \qquad \mu' = \frac{\alpha'\mu + \beta'}{\gamma'\mu + \delta'}$$

(vergl. z. B. Ikosaeder p. 179ff.). Dabei treten dann von selbst diejenigen zwei Arten von Collineationen der F_2 in sich besonders hervor, auf welche hier die Aufmerksamkeit gelenkt werden soll. Es sind dies erstens diejenigen, bei denen μ ungeändert bleibt:

$$\lambda' = \frac{\alpha\lambda + \beta}{\gamma\lambda + \delta}, \quad \mu' = \mu, \tag{3}$$

zweitens die anderen, bei denen λ festgehalten wird:

$$\lambda' = \lambda, \quad \mu' = \frac{\alpha'\mu + \beta'}{\gamma'\mu + \delta'}. \tag{4}$$

Ich werde die durch (3) gegebenen Collineationen *Schiebungen der ersten Art* nennen, die durch (4) gegebenen *Schiebungen der zweiten Art* (Clifford gebraucht statt „Schiebung“ das Wort „Vectorbewegung“ oder auch wohl nur „Vector“). Bei einer Schiebung erster Art bleiben, allgemein zu reden, zwei Erzeugende erster Art der Fläche punktweise fest und *es schreitet also jeder Raumpunkt auf derjenigen geraden Linie fort, die durch ihn so gelegt werden kann, dass sie diese beiden Erzeugenden erster Art trifft*, d. h. also auf der durch ihn gehenden geraden Linie derjenigen linearen Congruenz, deren Leitlinien eben jene zwei Erzeugenden sind. Bei einer Schiebung zweiter Art tritt natürlich entsprechendes Verhalten gegenüber zwei Linien der zweiten Art ein. Jede Schiebung der einen Art ist mit jeder Schiebung der anderen Art vertauschbar (keineswegs aber mit jeder Schiebung derselben Art). Die allgemeine uns interessirende Collineation unserer F_2 in sich kann nur in einer Weise in die Aufeinanderfolge einer Schiebung der ersten Art und einer Schiebung der zweiten Art aufgelöst werden.

Wir specialisiren jetzt unsere Fläche zweiten Grades dahin, dass sie eine „reelle, nulltheilige“ Fläche sei, d. h. eine Fläche mit reeller Gleichung aber ohne reellen Punkt*). Die sämmtlichen Erzeugenden

*) Die hier im Texte gebrauchte Ausdrucksweise scheint mir bequem, insofern ich das Attribut „imaginär“ am liebsten nur einer Fläche beilege, deren Gleichung complexe Coefficienten besitzt. Um bei den „reellen“ Flächen zweiter Ordnung eine Bezeichnung zu haben, die von der Inbetrachtnahme der unendlich

einer solchen Fläche sind natürlich imaginär, aber es zeigt sich, dass das einzelne System dieser Erzeugenden reell ist, indem es zu jeder imaginären Linie, welche es umfasst, die conjugirt imaginäre Linie hinzu enthält. Solche zwei conjugirt imaginäre Linien wählen wir jetzt als Directricen einer zugehörigen Schiebung. Offenbar wird letztere reell, und wir finden so, zu unserer Fläche gehörig, *dreifach unendlich viele reelle Schiebungen der einen wie der anderen Art, durch deren Combination die Gesammtheit der zugehörigen reellen Nicht-Euklidischen Bewegungen entsteht.* Wir wollen das Gesagte hier analytisch bestätigen und zugleich für die in Rede stehenden reellen Schiebungen explicite Formeln aufstellen. Der Bequemlichkeit halber sei unsere Fläche durch folgende Gleichung gegeben:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 0, \tag{5}$$

die wir zwecks Darstellung der zugehörigen Erzeugenden in nachstehender Weise spalten:

$$(x_1 + ix_2)(x_1 - ix_2) + (x_3 + ix_4)(x_3 - ix_4) = 0.$$

Wir schreiben dann etwa:

$$\left\{\begin{aligned} \lambda &= -\frac{x_1 + ix_2}{x_3 + ix_4} = \frac{x_3 - ix_4}{x_1 - ix_2}, \\ \mu &= \frac{x_1 + ix_2}{x_3 - ix_4} = -\frac{x_3 + ix_4}{x_1 - ix_2} \end{aligned}\right. \tag{6}$$

und haben also z. B. für eine Erzeugende erster Art, indem wir noch $re^{i\varphi}$ für λ setzen, die beiden Gleichungen:

$$\begin{aligned} (x_1 + ix_2) &= -re^{i\varphi}(x_3 + ix_4), \\ re^{i\varphi}(x_1 - ix_2) &= (x_3 - ix_4), \end{aligned} \tag{7}$$

Indem wir hier i durch $-i$ ersetzen, erhalten wir für die conjugirt imaginäre Gerade:

$$\begin{aligned} (x_1 - ix_2) &= -re^{-i\varphi}(x_3 - ix_4), \\ re^{-i\varphi}(x_1 + ix_2) &= (x_3 + ix_4). \end{aligned}$$

Aber dieses Gleichungspaar können wir auch so ordnen:

$$\begin{aligned} (x_1 + ix_2) &= \frac{1}{r}e^{i\varphi}(x_3 + ix_4), \\ -\frac{1}{r}e^{i\varphi}(x_1 - ix_2) &= (x_3 - ix_4), \end{aligned}$$

und haben damit einen Specialfall der Gleichungen (7) selbst, wo das $re^{i\varphi}$ durch $-\frac{1}{r}e^{i\varphi}$ ersetzt ist. *Die zu (7) conjugirt imaginäre Linie ist also in der That selbst eine Erzeugende der ersten Art.* Aber zugleich

fernen Ebene unabhängig ist, unterscheide ich neben den „nulltheiligen" reellen Flächen „ovale" und „ringförmige".

erfahren wir: *Conjugirt imaginäre Erzeugende haben diametrale Parameter.* Hierauf und auf Formel (2) ruht jetzt die Darstellung der reellen Schiebungen. Die betreffende Rechnung verläuft folgendermassen:

Wir haben zunächst aus (6):

$$(8)\qquad x_1 + ix_2 : x_1 - ix_2 : x_3 + ix_4 : x_3 - ix_4 = \lambda\mu : 1 : -\mu : \lambda,$$

oder, wie wir unter Einführung eines Proportionalitätsfactors ϱ schreiben:

$$\begin{aligned}
\varrho x_1 &= \lambda\mu + 1,\\
\varrho x_2 &= i(-\lambda\mu + 1),\\
\varrho x_3 &= \lambda - \mu,\\
\varrho x_4 &= i(\lambda + \mu).
\end{aligned}$$

Hier tragen wir nun für λ zunächst allgemein ein:

$$\lambda' = \frac{\alpha\lambda + \beta}{\gamma\lambda + \delta},$$

während μ unverändert bleiben soll. Wir bekommen dann nach gehöriger Modification des Proportionalitätsfactors ϱ:

$$\begin{aligned}
\varrho' x_1' &= \quad (\alpha\lambda + \beta)\mu + (\gamma\lambda + \delta),\\
\varrho' x_2' &= -i(\alpha\lambda + \beta)\mu + i(\gamma\lambda + \delta),\\
\varrho' x_3' &= \quad (\alpha\lambda + \beta) - (\gamma\lambda + \delta)\mu,\\
\varrho' x_4' &= \quad i(\alpha\lambda + \beta) + i(\gamma\lambda + \delta)\mu.
\end{aligned}$$

Hier tragen wir jetzt für $\lambda\mu$, λ, μ, 1 die ihnen proportionalen Werthe aus (8) ein, wobei ϱ' in ϱ'' übergehen mag. Wir erhalten so zur Darstellung der zu (5) gehörigen Schiebung erster Art:

$$\begin{aligned}
\varrho'' x_1' &= \quad \alpha(x_1 + ix_2) + \delta(x_1 - ix_2) - \beta(x_3 + ix_4) + \gamma(x_3 - ix_4),\\
\varrho'' x_2' &= -i\alpha(x_1 + ix_2) + i\delta(x_1 - ix_2) + i\beta(x_3 + ix_4) + i\gamma(x_3 - ix_4),\\
\varrho'' x_3' &= -\gamma(x_1 + ix_2) + \beta(x_1 - ix_2) + \delta(x_3 + ix_4) + \alpha(x_3 - ix_4),\\
\varrho'' x_4' &= \quad i\gamma(x_1 + ix_2) + i\beta(x_1 - ix_2) - i\delta(x_3 + ix_4) + i\alpha(x_3 - ix_4),
\end{aligned}$$

oder, anders geordnet:

$$(9)\qquad \left\{\begin{aligned}
\varrho'' x_1' &= (+\alpha + \delta)x_1 + i(\alpha - \delta)x_2 + (-\beta + \gamma)x_3 - i(+\beta + \gamma)x_4,\\
\varrho'' x_2' &= i(-\alpha + \delta)x_1 + (\alpha + \delta)x_2 + i(+\beta + \gamma)x_3 + (-\beta + \gamma)x_4,\\
\varrho'' x_3' &= (+\beta - \gamma)x_1 - i(\beta + \gamma)x_2 + (+\alpha + \delta)x_3 + i(-\alpha + \delta)x_4,\\
\varrho'' x_4' &= i(+\beta + \gamma)x_1 + (\beta - \gamma)x_2 + i(+\alpha - \delta)x_3 + (+\alpha + \delta)x_4.
\end{aligned}\right.$$

Aber wir wünschen eine analytische Darstellung insbesondere der *reellen* Schiebungen der ersten Art. Wir substituiren daher aus den Formeln (2):

$$[illegible]\quad \beta = -b + ia;\quad \gamma = b + ia;\quad \delta = d - ic.$$

Gleichzeitig wollen wir den in (9) auftretenden Proportionalitätsfactor ϱ'' ebenso wie auf der rechten Seite den Factor 2 der Einfachheit halber weglassen. *Wir erhalten so die übersichtlichen Formeln:*

$$(10)\qquad \begin{cases} x_1' = dx_1 - cx_2 + bx_3 + ax_4, \\ x_2' = cx_1 + dx_2 - ax_3 + bx_4, \\ x_3' = -bx_1 + ax_2 + dx_3 + cx_4, \\ x_4' = -ax_1 - bx_2 - cx_3 + dx_4, \end{cases}$$

die wir auch so ordnen können:

$$(11)\qquad \begin{cases} x_4' = dx_4 - ax_1 - bx_2 - cx_3, \\ x_1' = ax_4 + dx_1 - cx_2 + bx_3, \\ x_2' = bx_4 + dx_2 - ax_3 + cx_1, \\ x_3' = cx_4 + dx_3 - bx_1 + ax_2. \end{cases}$$

Hier liegt die Beziehung zur Quaternionentheorie auf der Hand. Wir sagen sofort: *Bezeichnet q die Quaternion:*

$$q = d + ai + bj + ck,$$

so ist unsere reelle Schiebung erster Art durch die Formel gegeben:

$$(12)\qquad (x_4' + ix_1' + jx_2' + kx_3') = q \cdot (x_4 + ix_1 + jx_2 + kx_3).$$

Genau so findet man für eine Schiebung zweiter Art:

$$(13)\qquad (x_4' + ix_1' + jx_2' + kx_3') = (x_4 + ix_1 + jx_2 + kx_3) \cdot q',$$

unter q' irgend eine Quaternion $d' + ia' + jb' + kc'$ verstanden. *Für die allgemeine reelle lineare Transformation unserer F_2 in sich aber kommt die schöne Formel:*

$$(14)\qquad (x_4' + ix_1' + jx_2' + kx_3') = q \cdot (x_4 + ix_1 + jx_2 + kx_3) \cdot q'.$$

Diese Formel (14), welche das Resultat unserer Ueberlegungen in knapper Form zusammenfasst, ist schon vor langer Zeit von Cayley gegeben worden (cf. Recherches ultérieures sur les déterminants gauches, Crelle's Journal Bd. 50, 1855; oder auch Werke, Bd. II, p. 214), und stimmt natürlich mit den entsprechenden Formeln überein, welche von Clifford, bez. Sir R. S. Ball entwickelt werden.

Es handelt sich nunmehr um die geometrische Deutung der durch (12) dargestellten Schiebung der ersten Art. Zu dem Zwecke führen wir jetzt die zu (5) gehörige Nicht-Euklidische (elliptische) Maassbestimmung ein und wählen der Einfachheit halber die bei letzterer auftretende, noch willkürliche multiplicative Constante so, dass das Krümmungsmaass gleich 1 wird. Wir definiren dementsprechend als Nicht-Euklidische Entfernung zweier Punkte x, x' den Ausdruck

$$(15)\qquad E = \arccos \frac{x_1x_1' + x_2x_2' + x_3x_3' + x_4x_4'}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2}\,\sqrt{x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2 + x_4'^2}}$$

und als Winkel zweier Ebenen u, u' durchaus analog:

$$(16) \qquad W = \text{arc}\cos\frac{u_1u_1' + u_2u_2' + u_3u_3' + u_4u_4'}{\sqrt{u_1^2+u_2^2+u_3^2+u_4^2}\cdot\sqrt{u_1'^2+u_2'^2+u_3'^2+u_4'^2}}.$$

Es ist wohl überflüssig, dass ich die Formeln (10) oder (12) auch noch für Ebenencoordinaten anschreibe. Uebrigens denken wir uns in alle diese Formeln jetzt für a, b, c, d die Werthe (3) eingetragen. Wir haben dann sofort aus (15), (16): *Bei einer Schiebung von der Amplitude φ rückt jeder Punkt des Raumes auf der durch ihn hindurchgehenden Congruenzlinie um das Stück $\frac{\varphi}{2}$ fort; ebenso dreht sich jede Ebene um die in ihr liegende Congruenzlinie um den Winkel $\frac{\varphi}{2}$.* Die einzelne Schiebung ist also eine Schraubenbewegung des Raumes, bei welcher unendlich viele Schraubenaxen existiren: die Linien der zugehörigen linearen Congruenz. Dabei unterscheiden sich, wie leicht zu sehen, die Schiebungen erster und zweiter Art durch den *Sinn* der jeweiligen Schraubenbewegung: bezeichnen wir irgend eine Schiebung erster Art als eine Schiebung *rechtsherum*, so sind alle Schiebungen erster Art Schiebungen rechtsherum, alle Schiebungen zweiter Art Schiebungen linksherum. Die zugehörigen Congruenzen sind eben selbst rechtsherum gewunden, bez. linksherum gewunden.

Mit den so gegebenen Sätzen (die ich nicht weiter ins Einzelne ausführe) ist nun die Grundlage für Clifford's *neue Parallelentheorie* gegeben. Was parallele Linien im parabolischen (Euklidischen) Raume sind, steht fest: bei der Definition paralleler Linien des Nicht-Euklidischen Raumes werden wir zunächst nur insoweit eingeschränkt sein, als wir darauf achten müssen, dass die Definition in die gewöhnliche Euklidische übergeht, sobald der Nicht-Euklidische Raum in einen Euklidischen ausartet. Dieser Bedingung genügt man selbstverständlich durch die gewöhnliche Festsetzung, welche solche Linien des Nicht-Euklidischen Raumes parallel nennt, die sich in einem unendlich fernen Punkte (einem Punkte der Fundamentalfläche zweiten Grades) schneiden. Aber die so definirten Parallelen haben, wie Clifford hervorhebt, fast alle die eleganten Eigenschaften verloren, die den Euklidischen Parallelen zukommen. Diese Eigenschaften beruhen, nach Clifford, wesentlich darauf, dass Euklidische Parallelen vermöge derselben Raumbewegung in sich selbst verschoben werden können. Aber die gleiche Eigenschaft haben im Nicht-Euklidischen Raume, wie wir sahen, die Linien der gerade besprochenen Congruenzen (der einen wie der anderen Art). Ein Bündel Euklidischer Parallelen kann geradezu als Ausartung einer derartigen Congruenz angesehen werden. Daher der Vorschlag: *als Nicht-Euklidische Parallelen solche (windschiefe) gerade Linien zu bezeichnen, welche der gleichen Congruenz (der einen* *oder anderen Art) angehören, d. h. welche dieselben beiden imaginären Erzeugenden der ersten oder zweiten Art unserer Fundamentalfläche treffen.* Die so definirten (Clifford'schen) Parallelen sind imaginär, wenn die gewöhnlichen Nicht-Euklidischen Parallelen reell sind, nämlich im hyperbolischen Raume, dafür sind sie auf Grund der vorausgeschickten Entwickelungen reell gerade da, wo es die gewöhnlichen Parallelen nicht sind, nämlich im elliptischen Raume. Sie zerfallen dabei ersichtlich in Parallele der einen oder der anderen Art, d. h. in *rechtsgewundene* und in *linksgewundene* Parallelen.

Es ist hier nicht meine Absicht, noch ausführlich die Zweckmässigkeit der Clifford'schen Definition darzuthun. Vielmehr wende ich mich gleich zur Theorie der besonderen Flächen zweiten Grades, von denen im obigen Citate die Rede war. *Es handelt sich um die ringförmigen Flächen zweiten Grades (Regelflächen), welche mit der Fundamentalfläche* (5) *ein geradliniges Vierseit gemein haben.* Die Erzeugenden erster Art dieser Fläche, ebenso wie ihre Erzeugenden zweiter Art, sind im Clifford'schen Sinne unter sich parallel; die einen rechts-parallel, die anderen links-parallel. In Folge dessen kann die Fläche in unserem elliptischen Raume auf zwei Weisen in sich verschoben werden, einmal so, dass die Erzeugenden der einen Art die Bahncurven abgeben, während die der zweiten Art unter einander vertauscht werden, das andere Mal umgekehrt. Wir schliessen, dass alle Erzeugenden erster Art mit den sie treffenden Erzeugenden zweiter Art je denselben Winkel einschliessen (den wir ϑ nennen wollen) und dass die Stücke, welche auf zwei Erzeugenden der einen Art von zwei Erzeugenden der anderen Art ausgeschnitten werden, gleich lang sind. Offenbar können wir die Figur, welche auf der Fläche von solchen zweimal zwei Erzeugendenstücken umgränzt wird, ein *Parallelogramm* nennen; denn sie hat, obgleich nicht eben, mit dem Parallelogramm der Euklidischen Ebene die wesentlichen Eigenschaften gemein. Gleichzeitig erkennen wir in der Fläche, eben wegen der Verschiebungen, die sie in sich zulässt, eine *Fläche constanter Krümmung*. Aber die zweierlei Schiebungen sind, wie wir wissen, mit einander vertauschbar. Hieraus allein folgt bereits, wie Clifford hervorhob, *dass das Krümmungsmaass der Fläche gleich Null ist.*

Alles dieses sind besonders elegante Eigenschaften der betrachteten Fläche (die im elliptischen Raume in mancher Hinsicht dieselbe Rolle spielt wie im gewöhnlichen, parabolischen Raume die Ebene). Aus ihnen folgt, worauf Clifford vor allen Dingen die Aufmerksamkeit richten wollte: *Die Gesammtfläche hat einen endlichen Flächeninhalt.* In der That kann man sie ja in unendlich viele, unendlich kleine Parallelogramme von der Winkelöffnung ϑ zerschnitten denken, deren Summation sofort gelingt und als Gesammtinhalt der Fläche, indem die Gesammtlänge der Erzeugenden der einen wie der anderen Art $= \pi$ ist, $\pi^2 . \cos \vartheta$ ergiebt. — Dieses Resultat ist darum so bemerkenswerth, weil es unseren gewöhnlichen Vorstellungen von den Eigenschaften einer unbegränzten Mannigfaltigkeit verschwindenden Krümmungsmaasses widerstreitet. Man glaubt (oder glaubte) allgemein, dass eine solche Mannigfaltigkeit, gleich der Euklidischen Ebene, *unendliche* Ausdehnung besitzen müsse; die Clifford'sche Fläche (so will ich die in Rede stehende Fläche zweiten Grades fortan nennen) belehrt uns, dass dies keineswegs nothwendig der Fall zu sein braucht. Es hängt dies offenbar mit dem Umstande zusammen, dass die Clifford'sche Fläche als ringförmige Fläche zweiten Grades mehrfachen Zusammenhang besitzt. So sehen wir denn jetzt ein allgemeines Problem vor Augen, mit dem wir uns bald ausführlich beschäftigen wollen, das Problem: *alle Zusammenhangsarten anzugeben, welche bei geschlossenen Mannigfaltigkeiten irgendwelchen constanten Krümmungsmaasses überhaupt auftreten können.*

II.

Von den verschiedenen (Euklidischen oder Nicht-Euklidischen) Raumformen.

Ehe ich das bezeichnete Problem in seiner Allgemeinheit in Angriff nehme, sei es mir gestattet, die Aufmerksamkeit auf einen besonderen dabei in Betracht kommenden Punkt zurückzulenken, der in meinen ersten Abhandlungen zur Nicht-Euklidischen Geometrie an zwei Stellen besprochen ist (Bd. 4 dieser Annalen, Note zu p. 604; Bd. 6, p. 125). Indem ich damals die projective Geometrie als Grundlage der Nicht-Euklidischen Geometrie voranstellte, verursachte die Einordnung des Euklidischen Raumes und des sogenannten Gauss'schen Raumes (des allseitig unendlich ausgedehnten Raumes constanter negativer Krümmung) keinerlei Schwierigkeit: dieselben entsprechen direct den beiden Fällen der von mir so bezeichneten *parabolischen*, bez. *hyperbolischen* Geometrie. Anders beim Raume constanter positiver Krümmung (dem sogenannten Riemann'schen Raume). Wie Riemann selbst sich die hier in Betracht kommenden Verhältnisse innerhalb dieses Raumes gedacht hat, ist nach den kurzen Andeutungen, welche er hierüber giebt*), nicht ganz klar; jedenfalls aber haben Beltrami und die sämmtlichen an ihn knüpfenden Mathematiker die Geometrie des ge-

*) Vergl. „*Ueber die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen*", insbesondere den Satz, der in den Ges. Werken auf p. 266 unten abgedruckt ist. — Ich halte es selbstverständlich für wahrscheinlich, dass Riemann dort an den sphärischen Raum gedacht hat, aber seine Worte passen auch, ohne unrichtig zu sein, auf den elliptischen Raum.

nannten Raumes schlechtweg mit derjenigen der Kugel parallelisirt und daraus geschlossen, dass die Punkte eines solchen Raumes, gleich den Gegenpunkten der Kugel, paarweise zusammengehören, in der Art, dass alle geodätischen Linien, welche durch den einen der beiden Punkte hindurchgehen, auch durch den anderen laufen. Ich hatte dem gegenüber darauf aufmerksam zu machen (Bd. 4, l. c.), dass die Kugel nicht der einfachste Typus einer zweidimensionalen, geschlossenen Mannigfaltigkeit constanter positiver Krümmung ist, dass dieser vielmehr durch das vom Mittelpunkte der Kugel auslaufende Strahlenbündel geliefert wird (dessen Strahlen den Kugelpunkten ein-zweideutig entsprechen). Die *elliptische* Geometrie, wie ich sie verstehe, deckt sich also nicht mit der sonst discutirten *sphärischen* Geometrie*), sondern ist einfacher. In der elliptischen Geometrie ist die Gruppirung der geraden Linien und Ebenen des Raumes genau dieselbe, wie in der projectiven Geometrie: zwei Gerade schneiden sich, wenn überhaupt, nur einmal. Die complicirteren Verhältnisse des sphärischen Raumes entstehen erst, wenn man den linearen elliptischen Raum durch Projection auf ein Gebilde zweiten Grades überträgt. —

Es ist mir kein Zweifel, und ich habe mich darüber bereits in Bd. 6 l. c. mit aller Deutlichkeit geäussert, dass ich mit den so bezeichneten Auseinandersetzungen einen wirklichen Irrthum der früheren Darstellungen aufgedeckt habe. Meine Anschauungen vom elliptischen Raume sind dann später in anderer Weise unabhängig von Herrn Newcomb entwickelt worden**). Indem ich mir vorbehalte, sogleich noch auf die ausführlichen hier anschliessenden Untersuchungen des Hrn. Killing einzugehen***), möchte ich hier vorab die Frage aufwerfen, wesshalb man zur klaren Erfassung des elliptischen Raumes erst so spät gekommen ist, und die dazu führenden Ueberlegungen selbst heute immer noch nicht allgemein bekannt scheinen†). Der Unterschied des sphärischen und des elliptischen Raumes ruht natürlich wieder in deren Zusammenhangsverhältnissen, und der „Zusammenhang“ des elliptischen Raumes hat etwas Ungewöhnliches. Bleiben wir der Einfachheit halber, weil die Sache da am kürzesten bezeichnet

---

*) Ich werde die beiden Namen „elliptisch“ und „sphärisch“ in dem hier hervortretenden Sinne auch in der Folge auseinanderhalten.

**) *Elementary theorems relating to the geometry of a space of three dimensions and of uniform positive curvature in the fourth dimension.* Bd. 83 des Journals für Mathematik, 1877.

***) *Ueber zwei Raumformen mit constanter positiver Krümmung*, Journal, Bd. 86, 1879, sowie in dem 1885 bei Teubner erschienenen Werke (auf welches schon oben Bezug genommen wurde): *Die Nicht-Euklidischen Raumformen in analytischer Behandlung.*

†) cf. z. B. Poincaré im Bulletin de la Société Mathématique de France, Bd. 15 (1887), p. 203 ff.

werden kann, bei zweidimensionalen Mannigfaltigkeiten. Es handelt sich da um den Unterschied der gewöhnlichen *einfachen* Flächen und der von Moebius entdeckten *Doppelflächen*, bei denen man durch continuirliches Fortschreiten über die Fläche hin von einer Seite auf die andere gelangen kann*). Die Existenz dieser Doppelflächen widerstreitet unserer Gewöhnung, welche einseitig von solchen Flächen abgezogen ist, die einen Körper begränzen und eben darum nothwendig einfach sind. Dies ist die ganze hier vorliegende Schwierigkeit. In der That: die elliptische Ebene verhält sich wie die Ebene der projectiven Geometrie und diese ist, wie ich schon vor langer Zeit an Bemerkungen von Schläfli anknüpfend auseinandersetzte**), eine Doppelfläche. Die elliptische Geometrie ist einfach desshalb so lange unbeachtet geblieben, weil der Begriff der Doppelfläche den Geometern nicht geläufig war, oder, wenn sie ihn in der projectiven Geometrie gebrauchten, nicht als solcher zum Bewusstsein gekommen war.

Nun einige Bemerkungen zu den Entwickelungen des Hrn. Killing. Herr Killing hat vornehmlich den Gedanken verfolgt (dem gewiss beigestimmt werden kann), dass der sphärische Raum auch neben dem elliptischen Raume noch ein besonderes Interesse behält. Als einen wirklichen Fortschritt betrachte ich den Killing'schen Beweis, dass bei den von ihm festgehaltenen Hypothesen (welche ich übrigens sogleich noch einer näheren Kritik unterwerfen werde) als Raumformen constanten positiven Krümmungsmaases keine anderen möglich sind, als eben der elliptische und der sphärische Raum (Journal für Math., Bd. 89, l. c.). Clifford und ich sind an diesem Satze vorbeigeführt worden, weil wir unsere Aufmerksamkeit, unserer damaligen, wesentlich analytischen Auffassung entsprechend, von vornherein auch auf complexe Werthe der Coordinaten gerichtet hatten. Die Abbildung des elliptischen Strahlenbündels auf eine um seinen Mittelpunkt herumgelegte Kugel erschien mir daher (Ann. Bd. 4, l. c.) nur als specieller Fall der n-deutigen Abbildung desselben auf irgendwelche Fläche n^{ter} Ordnung; Clifford stellt in seiner oben besprochenen Arbeit (Preliminary sketch of biquaternions, Werke p. 189) dem „linearen" elliptischen Raume ausdrücklich höhere „algebraische" Räume entgegen. Diese algebraischen Räume werden natürlich „Verzweigungselemente" enthalten, d. h. Punkte, welche mit den sonstigen Punkten des Raumes nicht gleichberechtigt sind (in meinem Beispiele sind dies diejenigen

*) Vergl. die Mittheilungen von Hrn. Reinhardt in Bd. II von Moebius' gesammelten Werken, (Leipzig 1886), pag. 519 ff. — Wegen der allgemeinen Theorie dieser Zusammenhangsfragen siehe Dyck in Bd. 32 der Annalen, p. 472 ff. (*Beiträge zur Analysis situs*). — Vergl. übrigens auch die durchaus zutreffenden Aeusserungen von Hrn. Newcomb in Nr. XIII seiner citirten Abhandlung.

**) Math. Ann. Bd. 7, p. 550 (1874).

Punkte der F_n, in denen Strahlen des elliptischen Strahlenbündels berühren). Auch im Falle des sphärischen Raumes sind Verzweigungselemente, algebraisch zu reden, vorhanden; nur sind dieselben alle imaginär und *man kann also von ihnen abstrahiren, indem man sich auf die Betrachtung reeller Elemente beschränkt.* Und nun verstehe ich Hrn. Killing's Resultat dahin, dass es neben dem eigentlichen elliptischen Raume keinen anderen *reellen* algebraischen Raum constanten, positiven Krümmungsmaasses giebt, der frei von Verzweigungselementen wäre, als eben den sphärischen Raum. Es ist dies im Sinne der Analysis situs zu verstehen, welche solche geometrische Gebilde als gleichwerthig erachtet, welche durch stetige Deformation in einander übergeführt werden können*). Wir sagen also vielleicht besser, *dass ein reeller Raum constanten positiven Krümmungsmaasses, der keine Verzweigungselemente enthält, eindeutig entweder auf den elliptischen Raum oder den sphärischen Raum muss bezogen werden können.* — Erscheint so das Hauptresultat des Hrn. Killing mit meinen Anschauungen sehr wohl vereinbar, so kann ich demselben in einer anderen Hinsicht nicht zustimmen:

Hr. Killing bezeichnet den elliptischen Raum als *Polarform* des sphärischen (oder, wie er sagt, des Riemann'schen) Raumes. Anlass dazu ist wohl gewesen, dass im elliptischen Raume, der oben mitgetheilten Formel (15) entsprechend, die Gesammtlänge einer geraden Linie ebenso gleich π ist, wie die Winkelsumme im Ebenenbüschel des sphärischen Raumes. Aber die Winkelsumme im Ebenenbüschel des elliptischen Raumes ist doch auch gleich π, und nicht etwa gleich 2π, wie es die Gesammtlänge der geraden Linie des sphärischen Raumes ist. Der elliptische Raum ist eben sich selbst durchaus dualistisch; er ist seine eigene Polarform. Hrn. Killings Benennung ist also unzutreffend. Nichts hindert, sich die wirkliche Polarform des Riemann'schen Raumes auszudenken. Aber das wird so complicirt und fremdartig, dass es keinen Zweck hat, hier näher darauf einzugehen.

Beiläufig will ich noch auf einen anderen Unterschied des sphärischen und des elliptischen Raumes aufmerksam machen, der nicht ohne Interesse ist und noch nicht bemerkt zu sein scheint. Bekanntlich ist durch Hrn. Schering die *Theorie des Potentials* auf beliebige Nicht-Euklidische Räume ausgedehnt worden**). Setzen wir das Krümmungs-

*) So erscheint also z. B. ein in sich geschlossener ovaler Flächentheil irgend einer Fläche höherer Ordnung als gleichwerthig mit der Kugel, und es ist mit dem Satze des Textes nicht im Widerspruch, wenn man gegebenenfalls einen solchen Flächentheil ebensowohl zwei-eindeutig den reellen Strahlen eines Strahlenbündels zuordnen kann, wie die Kugel selbst.

**) Göttinger Nachrichten 1870, p. 311—321: *Die Schwerkraft im Gaussischen Raume*, ebenda 1873, p. 149 ff.: *Die Schwerkraft in mehrfach ausgedehnten Gaussischen und Riemann'schen Räumen.* Vergl. hierzu auch Killing in Bd. 98 des maass des sphärischen Raumes, um mit unseren früheren Formeln in Uebereinstimmung zu sein, gleich Eins, so wird ihm zufolge das Elementarpotential zweier Massenpunkte a, b, im Falle drei Dimensionen in Betracht kommen, (eine Annahme, auf die wir uns hier beschränken wollen):

$$V = \operatorname{cotg} r_{ab}. \tag{17}$$

Sei jetzt a' der sphärische Gegenpunkt von a. Rückt b an a heran, so wird $\operatorname{cotg} r_{ab}$ positiv unendlich, rückt es an a', so negativ unendlich. Wir haben also eine Elementarwirkung, bei welcher jedesmal gleichzeitig mit einer anziehenden Masse in a eine ebenso stark abstossende Masse in a' gesetzt ist. Diese Mitwirkung des Gegenpunktes a' lässt sich auch nicht entbehren. Man sieht dies am besten, wenn man das gesuchte Elementarpotential V als Geschwindigkeitspotential einer Flüssigkeitsbewegung deutet: indem der sphärische Raum endlich ist, muss bei ihm, sobald eine Quelle gegeben ist, aus welcher Flüssigkeit ausströmt, nothwendig eine andere Stelle gegeben sein, in der Flüssigkeit verschwindet. — Meine Bemerkung ist nun, dass die hiermit skizzirte Theorie nothwendig an der Annahme des sphärischen Raumes haftet und im elliptischen Raume ihre Bedeutung verliert. In der That kann Formel (17) für den elliptischen Raum kein eigentliches Potential vorstellen. Denn da a und a' im elliptischen Raume coincidiren, ist die durch (17) vorgestellte Function des Punktes b im elliptischen Raume nur bis auf das Vorzeichen bestimmt: der Punkt b soll also nach Formel (17) seitens eines und desselben Punktes a gleichzeitig angezogen und abgestossen werden, oder auch a soll gleichzeitig Quelle und Verschwindungsstelle einer Flüssigkeitsbewegung sein. Eine solche Vieldeutigkeit ist augenscheinlich mit der Idee einer Elementarwirkung unverträglich *).

Gehen wir nun zu der allgemeinen Fragestellung über, die wir zum Schlusse von Nr. I formulirten. Auch hier werde ich mit einer

---

Journals für Mathematik (1884): *Die Mechanik in den Nicht-Euklidischen Raumformen* (cf. insbesondere p. 24—29 daselbst). — Der „Riemann'sche Raum" Schering's ist wieder unser sphärischer Raum.

*) Ich würde im Texte auch noch gern auf die Betrachtungen eingegangen sein, welche Hr. v. Helmholtz in seinem bekannten Vortrage: *Ueber den Ursprung und die Bedeutung der geometrischen Axiome* (1870, abgedruckt in Heft 3 der populären wissenschaftlichen Vorträge, Braunschweig 1876) über das Sehen in Nicht-Euklidischen Räumen entwickelt. Inzwischen finde ich es schwer, dieselben im Einzelnen zu verstehen. Indem wir hier bei Aufstellung der hyperbolischen, der elliptischen, der parabolischen Raumform gleichförmig von der projectiven Geometrie ausgehen, ist für uns von vornherein gegeben, dass allemal die Gesetze der Perspective dieselben sein müssen. Ersetzen wir hinterher den elliptischen Raum durch den sphärischen, so kommt eine bestimmte Complication durch das Auftreten der Gegenpunkte hinzu. Von dieser Complication ist aber bei Hrn. v. Helmholtz, trotzdem er sich übrigens genau an die Beltrami'schen Entwickelungen anschliesst, nirgends die Rede; vielmehr passt das, was l. c. p. 47

kritischen Bemerkung beginnen. In der That hat sich ja Hr. Killing an den genannten Orten dieselbe Aufgabe gestellt, die uns hier beschäftigen soll, nämlich die, alle Nicht-Euklidischen (oder auch Euklidischen) Raumformen aufzuzählen. Wir sahen bereits, dass in dieser Hinsicht der elliptische und der sphärische Raum bei ihm fortgesetzt neben einander betrachtet werden. Dagegen fehlt bei ihm die Raumform verschwindender Krümmung, die wir in Nr. I kennen lernten: die Clifford'sche Fläche. Auch hat, so viel ich weiss, keiner der anderen zahlreichen Mathematiker, die über Räume verschwindender Krümmung geschrieben haben, der durch die Clifford'sche Fläche realisirten Möglichkeit gedacht. Es ist also, ohne dass man es merkte, immer eine willkürliche Voraussetzung eingeführt worden, die das Resultat der Ueberlegung unnöthig einschränkte. Ich werde versuchen, diese Voraussetzung hier zu bezeichnen. Sei es dabei wieder, der grösseren Bestimmtheit des Ausdrucks halber, gestattet, nur von zweidimensionalen Mannigfaltigkeiten zu reden. Hat eine solche Mannigfaltigkeit, wie wir voraussetzen, constante Krümmung und ist sie zugleich unbegränzt, so kann jeder einfach berandete, einfach zusammenhängende Theil derselben auf ihr auf dreifach unendlich viele Weisen verschoben werden (ohne je an eine Hemmung zu stossen). *Aber darum ist keineswegs nöthig* (was bei den Killing'schen Raumformen zutrifft), *dass sich die Mannigfaltigkeit als Ganzes auf dreifach unendlich viele Weisen in sich verschieben lässt.* Man vergleiche in dieser Hinsicht die Eigenschaften der Clifford'schen Fläche. Dieselbe gestattet allerdings zweifach unendlich viele Bewegungen in sich selbst, entsprechend den einfach unendlich vielen Schiebungen der einen, wie der anderen Art, durch welche sie in sich übergeht: bei diesen zweifach unendlich vielen Bewegungen bleibt kein Punkt der Fläche fest. Aber nun versuche man etwa, die Clifford'sche Fläche unter Festhaltung eines ihrer Punkte, gleich einer Euklidischen Ebene, um diesen Punkt in sich selbst zu drehen. So wird man sofort bemerken, dass dies nicht möglich ist. In der That haben die von einem Punkte der Fläche unter verschiedenen Azimuthen auslaufenden geodätischen Linien derselben ganz verschiedene Länge: die beiden durch den Punkt hindurchgehenden geradlinigen Erzeugenden der Fläche haben, wie wir wissen, die Gesammtlänge π, aber in ihrer unmittelbaren Nähe können geodätische Linien der Fläche gefunden werden (wir werden dies sogleich noch explicit zeigen), die unbegränzt oft über die Fläche hinlaufen, ohne

gesagt wird, ohne Weiteres auf die Verhältnisse des elliptischen Raumes, ohne darum für den sphärischen Raum unrichtig zu sein. (Es heisst dort z. B.: Den seltsamsten Theil des Anblicks der sphärischen Welt würde aber unser eigener Hinterkopf bilden, in dem alle unsere Gesichtslinien wieder zusammenlaufen würden, so weit sie zwischen anderen Gegenständen frei durch gehen können, etc. —).

sich zu schliessen, und also unendliche Länge haben. Die hiermit formulirten Bemerkungen sind, denke ich, entscheidend: *Man hat, indem man das Problem der Raumformen behandelte, bislang die berechtigte Forderung freier Beweglichkeit einfach zusammenhängender Raumstücke durch die weitergehende Annahme ersetzt, die Räume als Ganzes seien in sich frei beweglich.*

Clifford selbst hat bereits (an der oben citirten Stelle) angedeutet, wie man sich am leichtesten Einsicht in die speciellen Zusammenhangsverhältnisse seiner Fläche verschafft. Man denke sich nämlich die Fläche längs zweier von einem Punkte derselben anlaufender Erzeugender derselben aufgeschnitten, wodurch sie einfach berandet und einfach zusammenhängend wird. Die so geschnittene Fläche können wir dann offenbar unter Aufrechterhaltung ihrer Maassverhältnisse auf ein Stück der Euklidischen Ebene abbilden (auf ein Stück der Euklidischen Ebene *abwickeln*, um diesen sonst in der Flächentheorie üblichen Ausdruck anzuwenden); nämlich auf *einen Rhombus von der Winkelöffnung ϑ und der Seitenlänge π:*

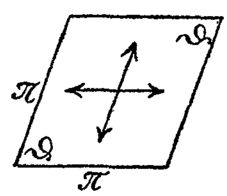

Fig. 1.

wobei die gegenüberstehenden Seiten dieses Rhombus so zu einander gehören wie sie durch eine Parallelverschiebung der Ebene aus einander hervorgehen (was durch die Doppelpfeile der Figur angedeutet sein soll). An dieser Figur studiren wir nun mit Leichtigkeit die einzelnen

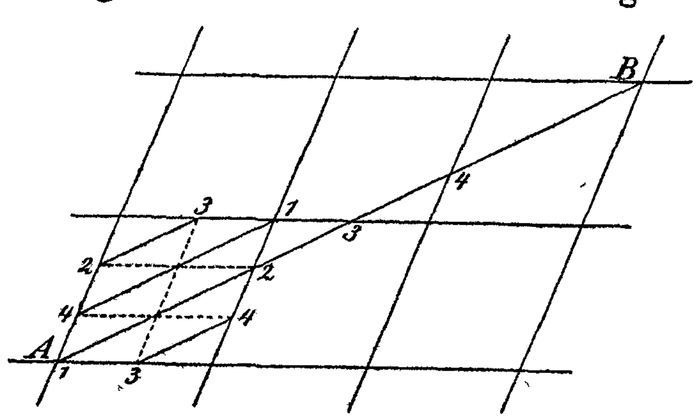

Fig. 2.

Fragen, die uns interessiren; z. B. den Verlauf einer geodätischen Linie über die Clifford'sche Fläche hin. Noch bequemer wird diess übrigens, wenn wir Fig. 1 vermöge der zugehörigen Parallelverschiebungen (welche die einzelne Kante je in die gegenüberliegende überführen) vervielfältigen und uns so eine Zerlegung der Ebene in ein Rhombennetz verschaffen, wie es durch Figur 2 vorgestellt wird.

Offenbar giebt uns diese neue Figur ein Bild davon, wie sich die Abwickelung unserer Euklidischen Ebene über die Clifford'sche Fläche hin gestaltet: sowie in der Figur unendlich viele Rhomben neben einander liegen, so wird die Clifford'sche Fläche bei der genannten Abwickelung mit unendlich vielen Blättern überdeckt, welche glatt in einander übergehen, ohne irgendwelche Verzweigungspunkte darzubieten. — Wollen wir also den Verlauf einer geodätischen Linie auf der Fläche verfolgen, so haben wir nur zuzusehen, wie unser Rhombennetz von einer geraden Linie der Ebene durchzogen wird. Ich betrachte z. B. die gerade Linie AB der vorstehenden Figur, die von einem Eckpunkte (A) auslaufend vier Rhomben durchsetzt, ehe sie wieder in einen Eckpunkt (B) einmündet, von dem aus sie sich dann genau so weiter erstreckt, wie ursprünglich vom Punkte A aus. Offenbar ist es nur nöthig, dieses begränzte Stück AB auf die Clifford'sche Fläche zu übertragen. Und diess gelingt am leichtesten, indem wir die vier Stücke, mit denen AB die vier Rhomben durchsetzt, durch geeignete Parallelverschiebung sämmtlich in den ursprünglichen Rhombus zurückverlegen. Es entsteht so ein gebrochener Linienzug:

$$12,\ 23,\ 34,\ 41,$$

dessen Uebertragung auf die Clifford'sche Fläche uns keine Schwierigkeit mehr macht. — Insbesondere können wir so ohne Weiteres eine geodätische Linie finden, welche unendlich oft über die Clifford'sche Fläche hinläuft, ohne sich zu schliessen. Wir werden einfach in Figur 2 eine gerade Linie ziehen, welche von A auslaufend keinen weiteren Eckpunkt der Figur mehr trifft. — Wir gedenken endlich eines letzten Mittels, um die in Frage kommenden Beziehungen noch lebhafter zu erfassen. Dasselbe besteht darin, dass wir den Rhombus 1 so zu einer *Ringfläche* zusammenbiegen, dass die zusammengehörigen Stellen gegenüberliegender Kanten zur Deckung kommen. Zu dem Zwecke müssen wir uns natürlich, da es sich um keine congruente Abwickelung handelt, den Rhombus aus einer dehnbaren Membran gebildet denken. *Auf die so entstehende Ringfläche ist dann die Clifford'sche Fläche stetig eindeutig bezogen* und wir können an ihr in einfachster Weise die sämmtlichen Zusammenhangsfragen, insbesondere den Verlauf unserer geodätischen Linien verfolgen. —

Ich habe die verschiedenen Abbildungen der Clifford'schen Fläche hier so ausführlich besprochen, weil uns jetzt die dabei zu Grunde liegende geometrische Denkweise zur allgemeinen Erledigung des vorgelegten Problems der Euklidischen und Nicht-Euklidischen Raumformen dienen soll. Ich beschränke mich dabei vorab auf zwei Dimensionen.

Was die zweidimensionalen Euklidischen Raumformen angeht, so ist sofort ersichtlich, dass uns eine solche gegeben sein wird, auch wenn wir nicht, wie in Figur 1, von einem Rhombus, sondern von einem beliebigen Parallelogramm der Euklidischen Ebene ausgehen, dessen Ränder wir durch geeignete Parallelverschiebung zusammengeordnet denken. Wir können dieses Parallelogramm sogar zu einem Parallelstreif ausarten lassen:

Fig. 3.

der dann, bei der Zusammenbiegung, nicht eine Ringfläche sondern eine Cylinderfläche ergiebt (auf die wir ihn sogar congruent abgewickelt denken können). Wir haben so zwei neue zweidimensionale Euklidische Raumformen, die übrigens gleich der Clifford'schen Mannigfaltigkeit (die sie als besonderen Fall einschliessen) durch *einseitige* Flächen versinnlicht werden. Wir können noch eine dritte Raumform zufügen, die unter dem Bilde einer *Doppelfläche* erscheint. In der That habe ich an einem anderen Orte*) ausführlich gezeigt, dass man eine Ringfläche in der Art stetig deformiren kann, dass sie schliesslich eine Doppelfläche beiderseitig überzieht; indem wir bei diesem Deformationsprocesse die Ringfläche fortgesetzt in geeigneter Weise als Trägerin einer Euklidischen Maassbestimmung ansehen, wird schliesslich die Doppelfläche zu einer solchen und repräsentirt dann, sobald wir zwischen ihren beiden Seiten nicht weiter unterscheiden, eine neue Euklidische Raumform. *Hiermit aber haben wir, sage ich, die Gesammtheit der in Betracht kommenden zweidimensionalen Nicht-Euklidischen Raumformen erschöpft.*

Der Beweis ist nicht einfach und kann hier nur in allgemeinen Zügen angedeutet werden:

Jedenfalls können wir uns zuvörderst auf die Aufzählung einseitiger Mannigfaltigkeiten der gewollten Art beschränken: denn etwaige Doppelflächen können wir immer auf einseitige Flächen reduciren, indem wir uns dieselben doppelt überdeckt denken und dadurch zwischen ihren beiden Flächenseiten unterscheiden**). Ist erst die Aufzählung der einseitigen Flächen beendet, werden wir nachträglich überlegen, ob wir dieselben zu Doppelflächen zusammenbiegen können, und auf wie viel verschiedene Weisen dies möglich sein mag.

Sei also eine einseitige zweidimensionale Euklidische Mannigfaltigkeit zu suchen. Wir denken uns dieselbe durch stetig gekrümmte

*) In meiner Schrift: *Ueber Riemann's Theorie der algebraischen Functionen und ihrer Integrale* (Leipzig 1882), (p. 80, unten).

**) Eben dadurch entsteht in einfachster Weise (um hier darauf zurückzugreifen) aus dem elliptischen der sphärische Raum.

Schnitte, die vielleicht aus dem Unendlich-Weiten*) kommen und sich im Endlichen jedenfalls nur in einem Punkte schneiden sollen, in einen einfach zusammenhängenden Bereich verwandelt und diesen, wie wir es soeben im Beispiele thaten, in die Euklidische Ebene abgewickelt. In letzterer entsteht dann ein Polygon, welches offenbar die doppelte Eigenschaft hat:

dass seine Seiten paarweise mit einander durch Euklidische Bewegungen zur Deckung gebracht werden können,

und dass die Summe seiner im Endlichen gelegenen Winkel (welche zusammengenommen die Umgebung jener einen Stelle ausmachen, in welcher sich die auf der ursprünglichen Mannigfaltigkeit anzubringenden Schnitte eventuel kreuzen sollten) *gleich* 2π *ist.*

Es wird darauf ankommen, alle solche Polygone der Euklidischen Ebene aufzuzählen. Und da zeigt sich denn, dass es keine anderen Polygone dieser Art giebt, als das Parallelogramm, bez. den Parallelstreif, oder doch, dass alle anderen krummlinigen Polygone der gesuchten Art, die man construiren mag, durch geeignete Verschiebung der auf der anfänglichen Mannigfaltigkeit zu construirenden Schnittlinien auf Parallelogramm oder Parallelstreif zurückgebracht werden können.

Endlich ist zu zeigen, dass man von den so gewonnenen einseitigen Euklidischen Mannigfaltigkeiten auf keine andere Weise zu Doppelmannigfaltigkeiten übergehen kann, als auf die soeben andeutungsweise erwähnte. —

Wir haben jetzt die gleichen Untersuchungen für Mannigfaltigkeiten positiver, bez. negativer constanter Krümmung durchzuführen. Wir werden dies thun, indem wir auf der Kugel und in der hyperbolischen Ebene geeignete Polygone construiren, bei denen wir dann noch hinterher untersuchen, ob wir sie etwa zu Doppelflächen zusammen biegen können. Das Resultat ist im Falle der Kugel äusserst einfach, indem wir nämlich bei ihr überhaupt keine Polygone finden, die unseren Bedingungen genügen, was zur Folge hat, *dass Kugel und elliptische Ebene die einzigen hier in Betracht kommenden Mannigfaltigkeiten positiver Krümmung bleiben.* Ganz anders im Falle des negativen Krümmungsmaasses. Hier handelt es sich, was die Construction geeigneter Polygone angeht, um eine ausgedehnte Theorie, welche aber — selbstverständlich unter anderen Gesichtspunkten und sogar mit einer Allgemeinheit, die wir nicht brauchen, — von anderer Seite, nämlich seitens der *modernen Functionentheorie*, fertig behandelt vorliegt. Ich denke hier zunächst an die *Fundamentalpolygone*, welche

*) d. h. aus dem Unendlich-Weiten der für die Fläche geltenden Maassbestimmung.

Hr. Poincaré construirt, um die sämmtlichen eindeutigen Functionen einer complexen Veränderlichen zu finden, *die durch reelle lineare Transformationen in sich übergehen**). Die grössere Allgemeinheit der Poincaré'schen Construction liegt darin, dass bei ihr die Winkelbedingung minder eng gefasst ist, als bei uns. Aber auch wenn wir unsere beschränktere Fassung einführen, erhalten wir immer noch für jedes Geschlecht p unendlich viele zugehörige Polygone. *Alle diese Polygone definiren uns neue Raumformen constanten negativen Krümmungsmaasses.* In meiner soeben citirten Schrift über Riemann's Theorie etc. sind denn auch (pag. 81 daselbst) hinreichende Andeutungen darüber gegeben, wie man die so erhaltenen einseitigen Raumformen gegebenenfalls zu Doppelmannigfaltigkeiten zusammenbiegen kann.

Dies also ist die Antwort, welche wir auf unsere Frage nach den verschiedenen Raumformen im Falle zweier Dimensionen zu ertheilen haben. Analoge Ueberlegungen werden wir für dreidimensionale Räume durchführen, indem wir geeignete Polyeder construiren. Wir werden da im parabolischen Raume das Parallelepiped etc. in Betracht zu ziehen haben, im hyperbolischen Falle aber die Polyeder, welche Hr. Poincaré in Band 3 der Acta Mathematica untersucht**). Ich verzichte darauf, dies hier in's Einzelne auszuführen, weil dies ausserordentlich viel Raum erfordern würde***). Immer würde ich wünschen, dass die Fragestellung von anderer Seite aufgenommen wird. In der That ist dieselbe ja für die Raumlehre, sofern wir diese mit der Forderung freier Beweglichkeit starrer Körper beginnen wollen, fundamental.

Letztere Forderung ist bekanntlich seinerzeit durch Hrn. v. Helmholtz vorangestellt worden†). Um hier alle Bemerkungen zusammen zu haben, die ich über das solchergestalt zu gründende System der Geometrie zu machen habe, gedenke ich anhangsweise noch der Helmholtz'schen Forderung der *Monodromie* des Raumes. Dieses neue Postulat verlangt zunächst, dass überhaupt volle Umdrehung um eine Axe möglich sein soll; es werden dadurch z. B. die Räume mit indefinitem Bogenelemente ausgeschlossen. Dieser Theil des Postulates ist gewiss gerechtfertigt und soll hier unerörtert bleiben. Aber Hr. v. Helmholtz giebt seinem Postulate eine weitergehende Bedeutung,

*) Vergl. etwa Acta Mathematica I (1882): *Mémoire sur les groupes fuchsiens.*

**) *Mémoire sur les groupes kleinéens* (1883).

***) Was den Begriff der Doppelmannigfaltigkeit im Falle dreier Dimensionen angeht, so vergl. die bereits citirte Abhandlung von Hrn. Dyck in Bd. 32 der math. Annalen.

†) *Ueber die thatsächlichen Grundlagen der Geometrie*, Bd. 4 d. Verh. d. naturhistorisch-medicinischen Vereins zu Heidelberg, 1866; *Ueber die Thatsachen, die der Geometrie zu Grunde liegen*, Göttinger Nachrichten 1868.

indem er der Möglichkeit gedenkt, dass bei voller Umdrehung des Raumes um eine Axe sich die Abstände der Punkte von der Axe vielleicht nicht ungeändert reproduciren. In der That hat Hr. v. Helmholtz *für den Fall zweier Variabelen* am Schlusse seiner Mittheilung in den Göttinger Nachrichten eine mit drei Parametern ausgestattete Transformationsgruppe angegeben, welche übrigens alle Eigenschaften einer (Euklidischen oder Nicht-Euklidischen) Bewegungsgruppe hat, aber die hiermit bezeichnete Möglichkeit realisirt. Wir sehen dies sofort, indem wir uns die Transformationen der Gruppe etwa folgendermassen anschreiben:

$$(x' + iy') = e^{(m+in)\varphi} \cdot (x + iy) + a + ib.$$

Hier sind φ, a, b die drei Parameter, m und n aber bedeuten zwei *nicht verschwindende* Constante. *Die Forderung der Monodromie läuft nun insbesondere auch darauf hinaus, derartige Gruppen auszuschliessen.* Demgegenüber muss constatirt werden, *dass Gruppen der gewollten Eigenschaft überhaupt nur bei zwei Dimensionen existiren* (so dass also für Räume von drei und mehr Dimensionen die Forderung der Monodromie in ihrem zweiten, hier allein in Discussion stehenden Theile gegenstandslos ist). Einen ausführlichen Beweis hierfür giebt Hr. Lie in den Leipziger Berichten von 1886*). Ich meinerseits möchte hier auf eine einfache Ueberlegung aufmerksam machen, aus welcher das Gleiche ohne alle Rechnung folgt. Die Sache ist, dass bei drei und mehr Dimensionen *positive* und *negative* Drehung um eine Axe nothwendig *gleichberechtigte* Operationen sind. Denn man kann in einem solchen mehrdimensionalen Raume die Axe, um welche gedreht wird, unter Festhaltung eines ihrer Punkte selber drehen, bis sie in umgekehrter Richtung in ihre ursprüngliche Lage hineinfällt: dann hat sich Drehung rechts herum von selbst in Drehung links herum verwandelt. Würden nun etwa bei Drehung rechts herum die Abstände der Raumpunkte von der Axe vergrössert, so müsste dies auch bei Drehung links herum, d. h. bei der inversen Operation, der Fall sein, was ein Widerspruch ist.

III.

Von der rein projectiven Begründung der analytischen Geometrie.

Meine Entwickelungen in Band 4 und 6 dieser Annalen, denen zufolge die projective Geometrie auch in ihrer analytischen Form vor Entscheidung über die Frage des Parallelenaxioms soll aufgestellt werden können, ruhen wesentlich auf dem Nachweise v. Staudt's, dass man den Zahlbegriff in die Geometrie auf Grund blosser projec-

*) Bemerkungen zu v. Helmholtz' Arbeit über die Thatsachen, welche der Geometrie zu Grunde liegen.

tiver Constructionen einführen kann, ohne irgend von Maass und Messen zu sprechen. Trotzdem hierüber in den letzten 20 Jahren Vieles von verschiedenen Seiten geschrieben ist, scheinen doch noch immer besondere Schwierigkeiten dem Verständnisse entgegen zu stehen, wie ich schon in der Einleitung bemerkte. Vielleicht liegt dies an der *Unanschaulichkeit* des ursprünglichen v. Staudt'schen Verfahrens, bei welchem abstracte Definitionen vorangestellt werden und dem Leser selbst überlassen bleibt, wie er eine Uebersicht der schliesslich nöthig werdenden Operationen gewinnen will. Diese Unanschaulichkeit liegt aber, hier wie in anderen Theilen der Geometrie, keineswegs im Wesen der Sache. Vielmehr gelingt es, wie ich hier zeigen möchte, an einer einzigen einfachen Figur gleichzeitig die Einführung der Zahlen und die Grundsätze, nach welchen mit denselben zu operiren ist, deutlich zu machen.

Es wird gut sein, die so bezeichnete Aufgabe von vorneherein nach verschiedenen Seiten zu umgränzen. Zielpunkt ist uns der allgemeine Nachweis, dass man durch bestimmte projective Construction auf jedem Grundgebilde erster Stufe (also, um uns auf die Ebene zu beschränken, auf jedem Strahlbüschel und auf jeder geraden Punktreihe der Ebene) *eine Werthevertheilung x derart angeben kann, dass zwischen den x, x' zweier Grundgebilde, die projectiv auf einander bezogen sind, eine lineare Relation $x' = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}$ statt hat.* Nun wird aber die beabsichtigte Scalenconstruction sich wegen ihres projectiven Charakters von einem ersten Grundgebilde sofort auf jedes andere, mit ihm projectiv verbundene übertragen. Daher können wir den beabsichtigten Nachweis auf die Betrachtung eines einzigen Grundgebildes einschränken, in der Weise, dass wir zeigen: *Wie immer wir auf einem solchen Grundgebilde zwei projective Scalen x, x' construiren mögen, immer stehen dieselben in linearer Abhängigkeit.* Aber auch diesen Ansatz werden wir noch modificiren. Ein einfacher Ueberschlag wird uns lehren, dass bei der von uns auszuführenden Scalenconstruction drei willkürliche Constante benutzt werden. Ebenso viele wesentliche Constante sind in der Formel $x' = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}$ enthalten. Wir können daher unsere Forderung umkehren und den Nachweis verlangen, *dass wir zu jeder Werthevertheilung x, die wir auf einem festen Grundgebilde erster Stufe durch unsere projective Construction gewinnen mögen, durch Veränderung der Grundelemente unter Wiederholung unserer Construction eine Werthevertheilung x' hinzu construiren können, die zu ihr in irgendwelcher vorgegebener linearer Abhängigkeit $x' = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}$ steht.*

Dieser letzte Beweis soll nun wirklich erbracht werden, indem wir als festes Grundgebilde ein *Strahlbüschel* der Ebene nehmen (was den Vortheil bietet, dass uns unabhängig von der Ansicht, die wir uns vom Parallelenaxiom bilden mögen, alle seine Elemente zugänglich sind). Dabei wird es sich, was die Construction irgend welcher Scala x angeht, selbstverständlicherweise nur darum handeln können: jedem *rationalen* Werthe von x ein Element unseres Grundgebildes zuzuweisen, wobei wir den Nachweis verlangen, dass die so entstehenden „rationalen" Elemente des Gebildes auf diesem nach der Grösse des zugehörigen x geordnet sind und in ihrer Gesammtheit das Gebilde „überall dicht" überdecken. Aber auch die Forderung, die wir betreffs der Formel $x' = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}$ stellten, werden wir entsprechend einschränken. Wir werden dieselbe nämlich ausschliesslich unter der Voraussetzung behandeln, dass die α, β, γ, δ *commensurabel* sind; wir geben dem Ausdruck, indem wir statt der allgemeinen Formel lieber gleich die folgende hinschreiben:

$$x' = \frac{ax + b}{cx + d},$$

in welcher a, b, c, d *ganze Zahlen* bedeuten sollen. Die Determinante $(ad - bc)$, die selbstverständlich nicht verschwinden soll, setzen wir weiterhin $= p$. — Die so umgränzten Constructionen und Beweise werden dann so durchzuführen sein, dass wir immer wieder *den v. Staudt'schen Satz von der Vierseitsconstruction* gebrauchen, durch den wir irgend drei in bestimmter Reihenfolge genommenen Elementen unseres Grundgebildes jeweils ein viertes, welches wir das *harmonische* Element nennen, zuordnen können.

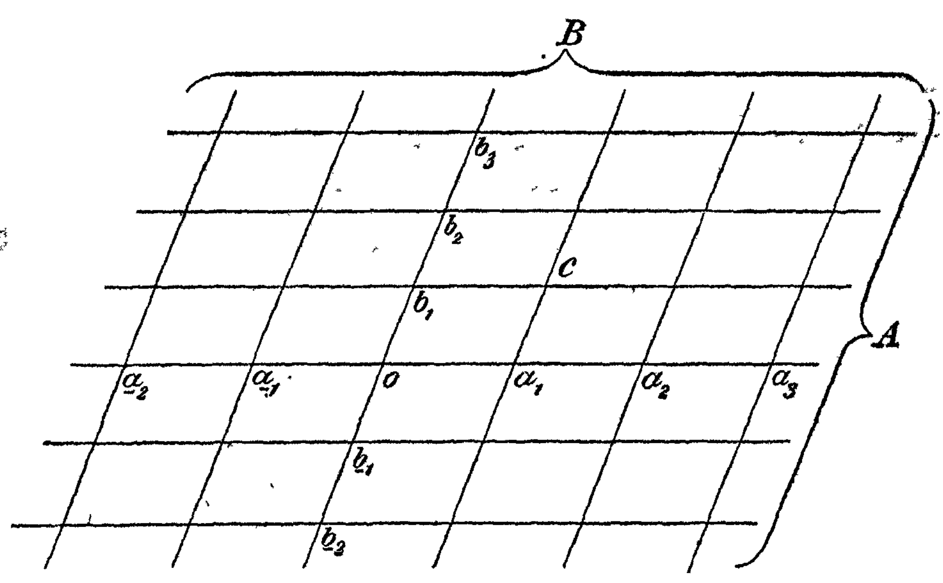

Fig. 4.

Die Figur, die ich mir jetzt construirt denke, ist die projective Verallgemeinerung des gewöhnlichen Parallelogramm-Netzes (Fig. 4).

Die betreffende Verallgemeinerung bietet sich unmittelbar, sobald man bemerkt, dass von den in der Figur markirten Punkten

$$\ldots a_{-2},\ a_{-1},\ 0,\ a_{+1},\ a_{+2},\ \ldots$$

je drei aufeinanderfolgende zu dem unendlich fernen Elemente A, von den ebenfalls angegebenen Punkten

$$\ldots b_{-2},\ b_{-1},\ 0,\ b_{+1},\ b_{+2},\ \ldots$$

je drei aufeinanderfolgende zu dem unendlich fernen Elemente B harmonisch sind. Statt längerer Erläuterung schalte ich hier das Beispiel einer so verallgemeinerten Figur ein:

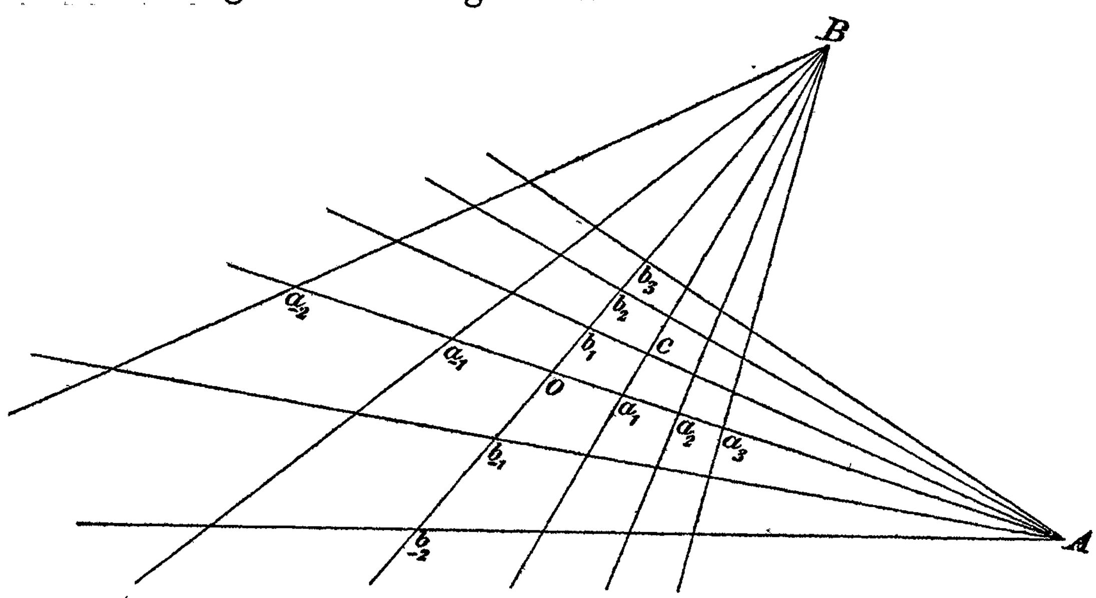

Fig. 5.

Offenbar können wir bei ihrer Construction vier Punkte, z. B. 0, a_{+1}, b_{+1}, c, beliebig annehmen; alle weiteren Punkte sind dann eindeutig bestimmt. Wir nennen jetzt den Punkt, in welchem sich die Strahlen Ba_m, Ab_n kreuzen, den Punkt (m, n); m und n sind dabei irgend zwei (positive oder negative) ganze Zahlen. Man sieht dann in Fig. 4 durch elementargeometrische Ueberlegungen:

Sind m, n; m', n'; ϱ irgend welche ganze Zahlen, so liegen die Punkte (m, n), (m', n'), $\big(m + \varrho(m' - m),\ n + \varrho(n' - n)\big)$ auf gerader Linie.

Eben denselben Satz werden wir bei Figur 5 durch wiederholte Anwendung des Satzes vom Vierseit beweisen können.

Hiermit haben wir nun alle Hülfsmittel, um für das von 0 auslaufende Strahlbüschel der Fig. 5 alle von uns postulirten Entwickelungen zu machen. Offenbar liegen je zwei Punkte (m, n) und $(\varrho m, \varrho n)$ mit 0 auf gerader Linie. *Eben dieser Linie als einem Elemente des von 0 auslaufenden Strahlbüschels legen wir jetzt den Zahlenwerth $x = m/n$ bei.* Wir erhalten so für jeden rationalen Werth von x einen Strahl, und dass diese „rationalen" Strahlen im Büschel ebenso auf einander folgen, wie die der Grösse nach geordneten zugehörigen x, ferner dass sie das Büschel „überall dicht" überdecken, dürfte durch den blossen Anblick unserer Figur deutlich sein. Nicht minder ist auf Grund einfacher projectiver Ueberlegungen klar, dass die so gewonnene Werthevertheilung x von drei willkürlichen Parametern abhängt, dass sie nämlich völlig festgelegt ist, wenn wir die drei Strahlen OA, OB, OC, die beliebig ausgewählt werden dürfen, in bestimmter Weise angenommen haben. Wir können also gleich zum zweiten Theile unserer Entwickelung übergehen. Wir verlangten zu zeigen, dass wir zur ersten Scala x für die Strahlen unseres Büschels, unter Festhaltung der einmal gewählten Constructionsweise, eine neue Scala x' hinzuconstruiren können, die mit ihr durch irgendwelche Formel $x' = \frac{ax+b}{cx+d}$ verbunden ist (unter a, b, c, d ganze Zahlen von nicht verschwindender Determinante verstanden, die wir gleich p setzten).

Dieser Nachweis ist nun in speciellen Fällen, die ich hier vorab bespreche, wenn nämlich eine der folgenden drei Formeln vorgelegt ist:

$$x' = \frac{1}{x}, \quad x' = \frac{x}{p}, \quad x' = x + 1$$

durch blossen Anblick der Figur 5 zu erbringen (man orientire sich vielleicht vorab jedesmal an der Figur 4, die unseren Gewöhnungen besser entgegenkommt). Wollen wir z. B. $x' = \frac{1}{x}$ construiren, werden wir Fig. 5 als solche ganz unverändert lassen und nur die ihr beigesetzten Buchstabenreihen a, b vertauschen. Wollen wir $x' = \frac{x}{p}$ haben, so werden wir die Punkte b und die Linien Ab der Figur ungeändert lassen, dagegen von den Punkten a (und also den Linien Ba) nur diese beibehalten:

$$\ldots a_{-2p},\ a_{-p},\ O,\ a_{+p},\ a_{+2p},$$

und sie mit

$$\ldots a'_{-2},\ a'_{-1},\ O,\ a'_{+1},\ a'_{+2},$$

bezeichnen. Nicht minder construiren wir die Scala $x' = x + 1$ durch eine Figur der von uns betrachteten Art, deren Lage gegen Fig. 5 ohne Weiteres ersichtlich sein dürfte.

Und nun ist das Schöne, *dass, aus arithmetischen Gründen, mit diesen speciellen Fällen der allgemeine von uns zu erbringende Nachweis bereits von selbst mit erledigt ist.* In der That ist es ein bekanntes Theorem der Arithmetik (welches z. B. in der Theorie der Transformation der elliptischen Functionen immerzu benutzt wird*)), dass man jede Substitution:

*) Vergl. z. B. Dedekind im 83. Bande des Journals für Mathematik, p. 287 ff.

$$x' = \frac{ax+b}{cx+d}$$

aus den speciellen Substitutionen:

$$x' = \frac{1}{x}, \quad x' = \frac{x}{p}, \quad x' = x+1$$

durch eine *endliche* Zahl von Wiederholungen, bez. Combinationen erzeugen kann. Jeder einzelne dieser Schritte bedeutet aber die Ersetzung der ursprünglichen Figur 5 durch eine neue derselben Art; dieselbe Bedeutung hat also die allgemeine Formel $x' = \frac{ax+b}{cx+d}$, was zu beweisen war.

IV.

Von der principiellen Bedeutung der projectiven Geometrie, nebst allgemeinen Bemerkungen über die geometrischen Axiome.

In meinen Abhandlungen in Bd. 4 und 6 habe ich nirgends die Frage berührt, in welchem Sinne es psychologisch berechtigt erscheint, die projective Geometrie vor der Geometrie des Maasses zu entwerfen und geradezu als Grundlage der letzteren zu betrachten. Hierauf dürfte etwa Folgendes zu antworten sein:

Wir können zwischen *mechanischen* und *optischen* Eigenschaften des Raumes unterscheiden. Erstere finden in der freien Beweglichkeit starrer Körper ihren mathematischen Ausdruck, letztere in der Gruppirung der den Raum durchziehenden geraden Linien (der Lichtstrahlen, oder der vom Auge ausgehenden Visirlinien). Es handelt sich nun hier nicht um die Frage, wie überhaupt unsere Raumvorstellung entsteht (oder im Laufe der Generationen entstanden ist): Niemand wird wohl zweifeln, dass mechanische und optische Erfahrungen dabei zusammenwirken oder zusammengewirkt haben. Vielmehr handelt es sich darum, ob man beim methodischen Aufbau der Raumwissenschaft die Eigenschaften der einen oder der anderen Art voranstellen soll. Durch Hrn. v. Helmholtz sind, wie wir ausführlich besprachen, die mechanischen Eigenschaften bevorzugt worden: meine Arbeiten zeigen, dass man ebensowohl mit den optischen Eigenschaften beginnen kann. Beiderlei Entwickelungen können neben einander bestehen; eine jede von ihnen hat ihre besonderen Vorzüge. Wenn es für den Anfänger fasslicher sein mag, mit den starren Körpern und ihrer Congruenz zu beginnen, so giebt uns die projective Methode bessere Uebersicht. Ich möchte, um dies zu belegen, geradezu auf die Entwickelungen der Nr. II zurückverweisen. Alle die Unterscheidungen, die ich dort bespreche: zwischen dem elliptischen und sphärischen Raume und den anderen Raumformen, ergeben sich bei Zugrundelegung der projectiven

Anschauung wie von selbst, während es eines hohen Maasses von Abstraction bedürfen möchte, um auf dem anderen Wege zu denselben zu gelangen. —

Zum Schlusse noch einige Worte über das Wesen der geometrischen Axiome überhaupt. In der *mathematischen* Literatur zum Mindesten scheint mir betreffs derselben fast allgemein eine Ansicht verbreitet*), welche von derjenigen abweicht, die ich für richtig halte, und von der ich in meinen früheren hierher gehörigen Arbeiten Gebrauch gemacht habe, ohne mir des Widerspruchs gegen andere Meinungen deutlich bewusst zu sein. Die betreffende Ansicht geht dahin, dass die Axiome die „Thatsachen" der räumlichen Anschauung formuliren und zwar so vollständig formuliren, dass es bei geometrischen Betrachtungen unnöthig sein soll, auf die Anschauung als solche zu recurriren, es vielmehr genügt, sich auf die Axiome zu berufen. Ich möchte zunächst jedenfalls den zweiten Theil dieses Satzes bestreiten. Eine geometrische Betrachtung rein logisch zu führen, ohne mir die Figur, auf welche dieselbe Bezug nimmt, fortgesetzt vor Augen zu halten, ist jedenfalls mir unmöglich. Man verweist in dieser Hinsicht ja wohl auf das Verfahren der analytischen Geometrie. Aber eine bloss rechnende analytische Geometrie, welche von den Figuren abstrahirt, kann ich ebensowenig als eigentliche Geometrie gelten lassen, wie gewisse Zweige der sogenannten synthetischen Geometrie, die sich nur dadurch von analytischer Geometrie unterscheiden, dass an Stelle der algebraischen Formelsprache eine andere gesetzt ist. — Doch nun zum ersten Theile des Satzes! In meinem Aufsatze über den allgemeinen Functionsbegriff, den ich in der Einleitung citirte, habe ich ausführlich auseinandergesetzt (und hierin stimme ich mit Hrn. Pasch überein), dass ich die räumliche Anschauung als *etwas wesentlich Ungenaues* ansehe, — mag nun von der abstracten Anschauung die Rede sein, wie sie uns durch Gewöhnung geläufig geworden ist, oder von der concreten Anschauung, die bei empirischen Beobachtungen zur Geltung kommt. Das Axiom ist mir nun *die Forderung*, vermöge deren ich in die ungenaue Anschauung *genaue Aussagen hineinlege.* Eine geometrische Betrachtung aber denke ich mir so, dass wir die Figur, um welche es sich handelt, als solche unablässig vor Augen behalten, und uns dann in jedem Augenblicke, in welchem es sich um scharfe Beweisführung handelt, auf die Axiome als festes logisches Substrat zurückbeziehen. — Der *Inhalt der Axiome* erscheint bei dieser Auffassung so weit will-

*) Ich möchte hier insbesondere auf die *Vorlesungen über neuere Geometrie* von M. Pasch verweisen (Leipzig, 1882), insofern die Grundanschauungen, von denen Hr. Pasch ausgeht, mit meinen eigenen sehr gut übereinstimmen, abgesehen eben von der im Texte näher zu erläuternden Differenz hinsichtlich der Bedeutung der Axiome.

kürlich, als mit der Ungenauigkeit unserer Raumanschauung verträglich ist. Eben hierin, aber auch nur hierin, ruht für mich die Berechtigung der Nicht-Euklidischen Geometrie (unter Nicht-Euklidischer Geometrie die reale Disciplin und nicht bloss die abstracten mathematischen Betrachtungen verstanden, zu denen dieselbe Anlass gegeben hat). Uebrigens ist es von diesem Standpunkte aus selbstverständlich, dass wir unter gleichberechtigten Systemen von Axiomen jeweils das einfachste bevorzugen und eben darum zumeist mit der Euklidischen Geometrie operiren, welche für die gewöhnlichen Fragestellungen die einfacheren Aussagen liefert. — Was aber die *Entstehung der Axiome* angeht, so weiss ich darüber nichts weiter zu sagen, als dass wir die zu ihnen führende Abstraction hier wie in anderen Gebieten unwillkürlich vollziehen. Das, was in der Anschauung oder im Experimente nur approximativ gegeben ist, das formuliren wir in exacter Weise, weil wir anderenfalls damit nichts anzufangen wissen. — Hiermit ist denn auch die Stellung gegeben, die ich zur Theorie des *Irrationalen* einnehme. Sicher liegt die *Veranlassung* zur Bildung der Irrationalzahlen in der scheinbaren Stetigkeit der Raumanschauung. Ich kann aber, da ich der Raumanschauung keine Genauigkeit beilege, ihr auch nicht die *Existenz* des Irrationalen entnehmen wollen. Vielmehr ist mir die Theorie des Irrationalen etwas, was in rein arithmetischer Weise zu begründen oder zu umgränzen ist, und was wir dann, dank den Axiomen, in die Geometrie hineintragen, um auch in ihr diejenige Schärfe der Distinctionen zu erreichen, welche die Vorbedingung der mathematischen Behandlung ist.

Göttingen, den 20. August 1890.