

XXV. Beiträge zur zonalen Krystallographie.

III. Syngonie-Ellipsoidgesetz.

Von

E. von Fedorow in Petrowsko-Rasumowskoje bei Moskau.

(Mit 10 Textfiguren.)

Wir verdanken dem Genius Fresnel's die Einführung eines Begriffes von kolossaler Wichtigkeit für die Physik der Krystalle und speciell für die Krystalloptik, des Begriffes des optischen Ellipsoides (resp. der verschiedenen zugeordneten optischen Ellipsoide, von welchen eines schlechthin als solches zum allgemeinen Bewusstsein kam).

Die Einführung dieses Begriffes bedeutet zugleich die Einführung resp. sehr vollkommene Formulirung einer Reihe von zu diesem Wissenschaftszweige gehörenden Gesetzen, welche zusammengefasst als ein einziges Grundgesetz der Krystalloptik, das Fresnel'sche, gelten können.

Nachdem dies geschehen war, wurde zugleich der Weg angebahnt für die Aufsuchung und richtige Deutung analoger Gesetze für andere physikalische Eigenschaften der Krystalle. Es erwies sich, dass jenes Gesetz eine sehr ausgedehnte Gültigkeit für zahlreiche und verschiedenartige physikalische Eigenschaften der Krystalle besitzt, und zwar, dass es eine besondere Gruppe solcher Eigenschaften umfasst, welche, als am zahlreichsten vertretene und durch besondere mathematische Einfachheit ausgezeichnete, ganz besonders die Wissbegierde und die Zeit zahlreicher hervorragender Forscher in Anspruch nahm.

Dieser Umstand bewog sogar manche Forscher, einige allgemeine Sätze der mathematischen Ellipsoidlehre als solche darzustellen, welche eine allgemeine Gültigkeit für sämtliche physikalische Eigenschaften dieser Gruppe besitzen.

Natürlich sind jedoch solche Gesetze nicht für sämtliche physikalische

Eigenschaften gültig, da, wie erwähnt, es noch andere Gruppen giebt, für welche andere, complicirtere Gesetze Geltung haben¹⁾.

Es ist hier zunächst zu erwähnen, dass selbst unter dieser allgemeinen Gruppe der Eigenschaften, welche dem Ellipsoidgesetze unterliegen, zwei verschiedene Untergruppen zu unterscheiden sind, je nachdem dieselben durch Polarisirung ausgezeichnet sind oder nicht. Man begreift leicht, dass das Ellipsoidgesetz nicht die gleiche Anwendung für die mit Polarisirung begabten Lichtstrahlen, wie für die Erscheinungen des Wärmeleitungsvermögens oder der Wärmeausdehnung der Krystalle erhält.

Nun habe ich schon einmal darauf hingewiesen, dass auch unter den geometrischen Eigenschaften zweierlei Gruppen zu unterscheiden sind, und zwar a) Symmetrieeigenschaften, und b) Syngonieeigenschaften, von welchen nur die letzteren mit anderen physikalischen, dem Ellipsoidgesetze untergeordneten Eigenschaften in eine Gruppe fallen, und zwar in diejenige Untergruppe, welche keine Polarisationserscheinungen zulässt. Die Symmetrieeigenschaften lehnen sich aber an diejenige Gruppe der physikalischen Eigenschaften an, welche nach L. Sohncke hauptsächlich von der Cohäsion abhängen²⁾.

1) Die Theilung der Eigenschaften in zwei verschiedene Gruppen wurde von L. Sohncke in »Entwicklung einer Theorie der Krystallstruktur« S. 212 (1879) durchgeführt. In P. Groth's Physikalischer Krystallographie, und in dem Coursus der Krystallographie des Verf. ist schon von vier verschiedenen Gruppen solcher Eigenschaften die Rede.

2) Dass daraus von selbst der Schluss sich ergibt, dass es vollständig unzulässig ist, von einem Gesetze, wie z. B. dem der Rationalität der Parameter resp. der Doppelverhältnisse oder endlich dem Zonengesetze (ebenso wie von dem vom Verf. aufgestellten Gesetze der Projectivität der Krystallflächen- (und Kanten-) Complexe) als von einem Grundgesetze der geometrischen Krystallographie zu reden, da die Gesetze dieser Art ausschliesslich für Syngonieeigenschaften Geltung haben, braucht nicht erwähnt zu werden.

Auch umgekehrt ist es ganz unzulässig, von dem Symmetriegesetze als einem Grundgesetze der physikalischen Krystallographie zu reden, da dasselbe ebenso für geometrische und zwar Symmetrieeigenschaften gültig ist.

Der Klarlegung dieser Verhältnisse hat Verf. eine spezielle Abhandlung (»Das Grundgesetz der Krystallographie«, diese Zeitschr. 23, 99 ff.) gewidmet.

Leider wurde die darin enthaltene historisch-kritische Besprechung der Sache von manchen Forschern nicht genügend berücksichtigt, so dass es empfehlenswerth erscheint, noch jetzt auf manche Seite dieser Frage die Aufmerksamkeit zu lenken.

Man sieht, dass die geometrischen Eigenschaften keineswegs von den übrigen physikalischen Eigenschaften als eine besondere Gruppe zu trennen sind, und dass es in der Wirklichkeit nur ein einziges, für die geometrischen ebenso wie für die physikalischen Eigenschaften der Krystalle gleich gültiges Grundgesetz geben kann, und das ist das Homogenitätsgesetz, in welchem wirklich die Summe sämtlicher uns bekannter Thatsachen enthalten ist. Das Gesetz der Rationalität der Parameter als ein auf directer Erfahrung basirtes Grundgesetz anzunehmen, ist aber nicht nur vom

Selbstverständlich ist es, dass die endgültige Aufstellung eines Gesetzes eine umfassende und consequente Durchführung der daraus zu ziehenden Schlussfolgerungen und deren Prüfung an der Hand der Erfahrung in verschiedenartigen Anwendungen desselben erfordert. Und dies soll die Aufgabe vorliegender Abhandlung in Bezug auf das Syngonie-Ellipsoidgesetz sein, ebenso wie der Hinweis auf die specielle Wichtigkeit dieses Gesetzes im Gebiete der zonalen Krystallographie.

Der Grundstein für diesen Zweig der Krystallographie wurde von Weiss durch sein berühmtes Zonengesetz gelegt. Die weitere Entwicklung dieses Zweiges wurde durch die Arbeiten von Miller gemacht, und durch das Gesetz der Rationalität der Doppelverhältnisse der Sinus der Winkel von vier Zonenflächen erwarb dasselbe praktische Wichtigkeit wegen der Erleichterung in Rechnungsoperationen.

Jetzt scheint der Zeitpunkt gekommen, dass, nachdem von verschiedenen Forschern auf diesem Gebiete eine Reihe weiterer Fortschritte gemacht sind, dieser Zweig eine selbständige Rolle zu übernehmen und in

logischen Standpunkte aus unzulässig, sondern auch historisch unrichtig. Dieses Gesetz beruht auf den Haüy'schen Decrescenzen, während seine Formulierung sich auf die krystallographischen Axen bezieht, welche wir Weiss verdanken.

Für die Lage der Sache ist ein Referat (über des Verfs. »Cursus der Krystallographie«) charakteristisch, welches in dem Neuen Jahrbuch für Mineralogie etc. 1900, 1, 163 gegeben ist.

Hier steht u. A.: »Statt sich hierbei auf die einfachen Begriffe der Drehung und der Inversion, aus welchen ja alle complicirteren Operationen zusammengesetzt werden können, zu beschränken, unterscheidet Verf. zwischen Deckbewegungs-, Spiegelungs- und zusammengesetzter Symmetrie«, ferner: »Als »Grundgesetz der Krystallographie« wird dann die Behauptung aufgestellt, dass alle kleinsten Theilchen eines Krystalles einander gleich und zu einander parallel gelagert sind. Aus diesem »Grundgesetz« wird dann das Gesetz der rationalen Parameter von Krystalflächen und Kanten abgeleitet. Im Gegensatz zu den üblichen modernen Darstellungsweisen wird also nicht eine experimentell sicher gestellte Thatsache beiläufig durch eine plausible, immerhin aber uncontrolirbare Annahme illustriert, sondern es wird aus dieser als Theorie in den Vordergrund gestellten Annahme die Thatsache einfach gefolgert.«

Daraus sieht man z. B., dass die Parallelität und Gleichheit der Eigenschaften aller kleinsten Theilchen eines Krystalles für den Verf. dieses Referates, Herrn J. von Braun, nicht nur keine feststehende Thatsache, welche durch Beobachtung bis zu den Grenzen der mikroskopischen Sichtbarkeit festgestellt werden kann (ob der Herr Referent wohl jemals die optische Untersuchung einer Krystallplatte ausgeführt hat?), sondern nur eine bloss »Behauptung« und zwar eine »uncontrolirbare« ist.

Jedenfalls wird durch diese »statt« und »im Gegensatz« die Behauptung aufgestellt, dass der Referent, d. h. Herr J. von Braun, im Gebiete der Symmetrietheorie ebenso wie in der kritischen Erforschung der Grundbegriffe der Krystallographie wenigstens zweimal so viel geschaffen hat, als der Verf. des »Cursus«, und somit sich für vollberechtigt fühlt, dem Letzteren vorzuschreiben, auf welche Weise derselbe die Krystallographie zu behandeln hat.

Nun, es sei dem so!

mancher Hinsicht andere Theorien der Krystallographie mit Vortheil zu ersetzen bestimmt ist.

Ich erlaube mir diese Abhandlung mit einer wörtlichen Uebersetzung eines Auszuges aus dem Kapitel III meiner II. analytischen krystallographischen Studie zu beginnen, welche, obgleich nichts wesentlich Neues enthaltend, uns doch als Ausgangspunkt weiterer Betrachtungen dienen wird.

»§ 12. Seit Weiss wird in der Krystallographie unter Zone ein Büschel von in parallelen Kanten einander schneidenden möglichen Krystallflächen verstanden. Die strenge Durchführung des zwischen Flächen und Kanten bestehenden Dualismus macht es erforderlich, unter dem Namen »Kantenzone« auch ein Büschel von Kanten, welche einer einzigen möglichen Fläche parallel sind, zu verstehen.

Falls drei Flächen p , p' und p'' tautozonal sind, so ist

$$\begin{aligned} & \sin(PP'P'') \sin(x_1 x_2 x_3) = \\ & = \begin{vmatrix} \cos(Px_1) & \cos(Px_2) & \cos(Px_3) \\ \cos(P'x_1) & \cos(P'x_2) & \cos(P'x_3) \\ \cos(P''x_1) & \cos(P''x_2) & \cos(P''x_3) \end{vmatrix} = 0. \end{aligned}$$

In Anbetracht der Gleichungen (8) II. Kap.¹⁾ finden wir:

$$\begin{vmatrix} p_1 & p_2 & p_3 \\ p_1' & p_2' & p_3' \\ p_1'' & p_2'' & p_3'' \end{vmatrix} = 0. \quad (1)$$

Da aber die drei Zonenflächen als sämmtlich von einander verschieden angenommen werden, so besteht keine directe Proportionalität unter den Gliedern verschiedener Reihen, und folglich muss die Linearrelation bestehen:

$$\begin{aligned} ap_1 + a'p_1' + a''p_1'' &= 0 \\ ap_2 + a'p_2' + a''p_2'' &= 0 \\ ap_3 + a'p_3' + a''p_3'' &= 0 \end{aligned} \quad (2)$$

Falls drei Kanten r , r' und r'' tautozonal sind, so ist

$$\begin{aligned} & \sin(rr'r'') \sin(X_1 X_2 X_3) = \\ & = \begin{vmatrix} \cos(rX_1) & \cos(rX_2) & \cos(rX_3) \\ \cos(r'X_1) & \cos(r'X_2) & \cos(r'X_3) \\ \cos(r''X_1) & \cos(r''X_2) & \cos(r''X_3) \end{vmatrix} = 0. \end{aligned}$$

In Anbetracht der Gleichungen (10) II. Kap.²⁾ finden wir:

$$\begin{vmatrix} r_1 & r_2 & r_3 \\ r_1' & r_2' & r_3' \\ r_1'' & r_2'' & r_3'' \end{vmatrix} = 0. \quad (1')$$

Da aber die drei Zonenkanten als sämmtlich von einander verschieden angenommen werden, so besteht keine directe Proportionalität unter den Gliedern verschiedener Reihen, und folglich muss die Linearrelation bestehen:

$$\begin{aligned} Ar_1 + A'r_1' + A''r_1'' &= 0 \\ Ar_2 + A'r_2' + A''r_2'' &= 0 \\ Ar_3 + A'r_3' + A''r_3'' &= 0 \end{aligned} \quad (2')$$

1) Welche lauten: $p_1 : p_2 : p_3 = \frac{\cos(Px_1)}{\cos(Ox_1)} : \frac{\cos(Px_2)}{\cos(Ox_2)} : \frac{\cos(Px_3)}{\cos(Ox_3)}$, wo x_1, x_2, x_3 die Richtungen der krystallographischen Axen bedeuten, P die Normale zur Fläche $p(p_1 p_2 p_3)$ und O die Normale zur Fläche $\{111\}$.

2) Welche lauten: $r_1 : r_2 : r_3 = \frac{\cos(rX_1)}{\cos(oX_1)} : \frac{\cos(rX_2)}{\cos(oX_2)} : \frac{\cos(rX_3)}{\cos(oX_3)}$, wo X_1, X_2, X_3 die Normalen zu den Flächen $\{100\}$, $\{010\}$ und $\{001\}$ bedeuten, r die Kante $[r_1 r_2 r_3]$ und o die Kante $\{111\}$.

oder

$$\begin{aligned} b_1 p_1 + b_2 p_2 + b_3 p_3 &= 0 \\ b_1 p_1' + b_2 p_2' + b_3 p_3' &= 0 \\ b_1 p_1'' + b_2 p_2'' + b_3 p_3'' &= 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Diese Gleichungen (3) sind nichts Anderes, als die Zonengleichung (1a) Kap. II, indem die Coëfficienten b proportional sind den Indices der Zonenaxe.

Deshalb wollen wir die Gleichungen (2) näher interpretiren. Schreiben wir dieselben in der Form:

$$\frac{ap_1}{ap_2} = \frac{p_1}{p_2} = \frac{a'p_1' + a''p_1''}{a'p_2' + a''p_2''}, \quad (2a)$$

so finden wir, dass jede Zonenfläche p aus zwei anderen p' und p'' vermittelst der Relation $\frac{a'}{a''}$ abgeleitet

werden kann. Deswegen darf diese Relation als Symbol der betreffenden Zonenfläche angenommen werden. Solche Symbole wollen wir als Zonensymbole bezeichnen¹⁾.

Die Relation $a : a' : a''$ ist leicht aus jedem Paar der Gleichungen (2) zu entnehmen. So folgt aus den beiden ersten:

$$\begin{aligned} a : a' : a'' &= \left| \frac{p_1' p_1''}{p_2' p_2''} \right| : \left| \frac{p_1'' p_1}{p_2'' p_2} \right| : \left| \frac{p_1 p_1'}{p_2 p_2'} \right| = \\ &= (p' p'')_3 : (p'' p)_3 : (p p')_3. \end{aligned}$$

Auf analoge Weise folgt aus der zweiten und dritten Gleichung:

$$a : a' : a'' = (p' p'')_1 : (p'' p)_1 : (p p')_1$$

und aus der dritten und ersten Gleichung:

$$a : a' : a'' = (p' p'')_2 : (p'' p)_2 : (p p')_2$$

oder

$$\begin{aligned} B_1 r_1 + B_2 r_2 + B_3 r_3 &= 0 \\ B_1 r_1' + B_2 r_2' + B_3 r_3' &= 0 \\ B_1 r_1'' + B_2 r_2'' + B_3 r_3'' &= 0. \end{aligned} \quad (3')$$

Diese Gleichungen (3') sind nichts Anderes, als die Zonengleichung (1a) Kap. II, indem die Coëfficienten B proportional sind den Indices der Zonenfläche.

Deshalb wollen wir die Gleichungen (2') näher interpretiren. Schreiben wir dieselben in der Form:

$$\frac{Ar_1}{Ar_2} = \frac{r_1}{r_2} = \frac{A'r_1' + A''r_1''}{A'r_2' + A''r_2''}, \quad (2a')$$

so finden wir, dass jede Zonenkante r aus zwei anderen r' und r'' vermittelst der Relation $\frac{A'}{A''}$ abgeleitet

werden kann. Deswegen darf diese Relation als Symbol der betreffenden Zonenkante angenommen werden. Solche Symbole wollen wir als Zonensymbole bezeichnen¹⁾.

Die Relation $A : A' : A''$ ist leicht aus jedem Paar der Gleichungen (2') zu entnehmen. So folgt aus den beiden ersten:

$$\begin{aligned} A : A' : A'' &= \left| \frac{r_1' r_1''}{r_2' r_2''} \right| : \left| \frac{r_1'' r_1}{r_2'' r_2} \right| : \left| \frac{r_1 r_1'}{r_2 r_2'} \right| = \\ &= (r' r'')_3 : (r'' r)_3 : (r r')_3. \end{aligned}$$

Auf analoge Weise folgt aus der zweiten und dritten Gleichung:

$$A : A' : A'' = (r' r'')_1 : (r'' r)_1 : (r r')_1$$

und aus der dritten und ersten Gleichung:

$$A : A' : A'' = (r' r'')_2 : (r'' r)_2 : (r r')_2$$

1) Herr Th. Liebisch (Geometrische Krystallographie S. 32) spricht von ihnen als von den »sogenannten Parametern«, was mir unzutreffend scheint.

oder verallgemeinert:

$$a : a' : a'' = (p'p'')_i : (p''p)_i : (pp')_i \\ (i = 1, 2, 3). \quad (4)$$

Somit erhalten wir rationale Zonensymbole der Flächen, welchen alle Bedeutungen von $-\infty$ bis $+\infty$ (also von $|\bar{1}0|$ bis $|40|$) zukommen. So z. B., wenn die Flächen p und p' als Ausgangsflächen gewählt werden, besitzt die Fläche p'' das Symbol $|(p'p'')_i (p''p)_i|$. Im Besonderen erhalten wir

$$\begin{array}{lll} \text{für d. Fl. } (p_1 p_2 p_3) & \text{das Symbol } |40|, \\ - - - (p_1' p_2' p_3') & - - - |04|, \\ - - - (p_1 \pm p_1' \cdot p_2 \pm p_2' \cdot p_3 \pm p_3') & - |4\bar{4}| \end{array}$$

u. s. w.

Die zwei letzten Zonenflächen in Bezug auf die Ausgangsflächen werden als die krystallonomischen Abstumpfungen¹⁾ bezeichnet; z. B. für die Flächen (400) und (040) werden die krystallonomischen Abstumpfungen die Flächen (410) und $(4\bar{1}0)$; sind aber die beiden letzten als Ausgangsflächen gewählt, so sind die beiden ersten die krystallonomischen Abstumpfungen, und erhalten die Zonensymbole $|\bar{4}4|$ und $|\bar{4}\bar{4}|$.

oder verallgemeinert

$$A : A' : A'' = (r'r'')_i : (r''r)_i : (rr')_i \\ (i = 1, 2, 4). \quad (4')$$

Somit erhalten wir rationale Zonensymbole der Kanten, welchen alle Bedeutungen von $-\infty$ bis $+\infty$ (also von $|\bar{1}0|$ bis $|40|$) zukommen. So z. B., wenn die Kanten r und r' als Ausgangskanten gewählt werden, besitzt die Kante r'' das Symbol $|(r'r'')_i (r''r)_i|$. Im Besonderen erhalten wir:

$$\begin{array}{lll} \text{für die K. } (r_1 r_2 r_3) & \text{das Symbol } |40|, \\ - - - (r_1' r_2' r_3') & - - - |04|, \\ - - - (r_1 \pm r_1' \cdot r_2 \pm r_2' \cdot r_3 \pm r_3') & - |4\bar{4}| \end{array}$$

u. s. w.

Die zwei letzten Zonenkanten in Bezug auf die Ausgangskanten werden als die krystallonomischen Abstumpfungen bezeichnet; z. B. für die Kanten $[400]$ und $[040]$ werden die krystallonomischen Abstumpfungen die Kanten $[410]$ und $[4\bar{1}0]$; sind aber die beiden letzten als Ausgangskanten gewählt, so sind die beiden ersten die krystallonomischen Abstumpfungen, und erhalten die Zonensymbole $|\bar{4}4|$ und $|\bar{4}\bar{4}|$.

§ 43. In der projectiven Geometrie wird der Beweis dafür geführt, dass die Doppelverhältnisse der zugeordneten eindeutig projectiven Gebilde gleich sind. Sind A, B, C und D vier Elemente eines geometrischen Gebildes, so wird das Doppelverhältniss kurz durch das Symbol $(ABCD)$ bezeichnet, welches die Relationen ausdrückt: 1) wenn diese Gebilde die Punkte einer Reihe sind, $\frac{AC \cdot BD}{AD \cdot BC} = \frac{AC}{AD} : \frac{BC}{BD} = \frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD}$; 2) wenn diese Gebilde die Strahlen eines Büschels sind, $\frac{\sin (AC)}{\sin (AD)} : \frac{\sin (BC)}{\sin (BD)}$; 3) wenn diese Gebilde die Ebenen eines Büschels sind, so wird das Doppelverhält-

1) Vergl. z. B. Junghann, Studien über die Geometrie der Krystalle (N. Jahrb. f. Min. etc. 1882, 1. Beil.-Bd.). Ref. diese Zeitschr. 9, 94.

niss dem Falle 2 analog ausgedrückt mit dem Unterschiede, dass A , $B \dots$ jetzt nicht mehr Strahlen (Gerade), sondern Ebenen sind; ebenso wird der Beweis dafür geliefert, dass die projectiven Gebilde in die sogenannte perspectivische Lage gestellt werden können. Zwei projective Punktreihen erhalten diese Lage, wenn die die zugeordneten Punkte verbindenden Geraden zusammen ein Strahlenbüschel bilden, und von diesem Büschel wird ebenso gesagt, dass dasselbe sich in perspectivischer Lage in Bezug auf die beiden Punktreihen befindet. Denken wir ein Flächenbüschel (Zone im krystallographischen Sinne des Wortes) derart durch Strahlenbüschel bestimmt, dass die gemeinsame Schnittgerade durch den Scheitelpunkt des Strahlenbüschels hindurchgeht, ebenso wie jede seiner Ebenen durch den zugeordneten Strahl des Büschels, so wird auch von diesem Flächenbüschel gesagt, es befinde sich in perspectivischer Lage mit beiden Grundreihen, ebenso wie mit dem Strahlenbüschel. Zwei Strahlenbüschel befinden sich in perspectivischer Lage, wenn deren zugeordnete Strahlen sich in Punkten einer Punktreihe schneiden, in Bezug auf welche beide perspectivisch sind. Endlich sind zwei Ebenenbüschel in perspectivischer Lage, wenn die zugeordneten Ebenen sich in den Strahlen eines Strahlenbüschels schneiden, in Bezug auf welches beide perspectivisch sind.

Diese Sätze der projectiven Geometrie sind für die Krystallographie von grosser Tragweite, da man es hier stets mit den genannten projectivischen Gebilden zu thun hat. So z. B. wenn die von vier Flächen einer Zone (Flächenbüschel) bestimmten Winkel bekannt sind, so können wir diesen Sätzen gemäss den dritten Winkel zwischen den Schnittgeraden dieses Büschels durch eine Ebene bestimmen, wenn zwei davon bekannt sind. Auch umgekehrt, sind die von vier Kanten einer Zone (Strahlenbüschel) bestimmten Winkel bekannt, so können wir den dritten Flächenwinkel einer in Bezug auf die Kantenzone perspectivischen Flächenzone bestimmen, wenn zwei Winkel dieser Zone bekannt sind.

Die Bedeutung dieser Sätze für die krystallographischen Rechnungen wird noch dadurch besonders gesteigert, dass, wie eben bewiesen wurde, die Doppelverhältnisse von vier Kanten ebenso wie von vier Flächen einer Zone rational sind, wodurch die Rechnung in bedeutendem Grade einfacher wird. Diese Bedeutung tritt noch anschaulicher hervor, nachdem dargelegt wurde, auf welche Weise vermittelt der Symbole von vier Flächen (resp. Kanten) einer Zone das Doppelverhältniss sich bestimmen lässt.

§ 44. Denken wir, dass in der durch die Ausgangsflächen p und p' bestimmten Zone die Fläche p'' durch das Zonensymbol $|a a'|$ und die Fläche p''' durch das Zonensymbol $|a a_1|$ ausgedrückt werden.

Denken wir, dass in der durch die Ausgangskanten r und r' bestimmten Kantenzone die Kante r'' durch das Zonensymbol $|b b'|$ und die Kante r''' durch das Zonensymbol $|b b_1|$ ausgedrückt werden.

Dann ist

$$|aa'| = \frac{a}{a'} = \frac{(p'p'')_i}{(p''p)_i} \text{ und} \\ |aa_1| = \frac{a}{a_1} = \frac{(p'p''')_i}{(p'''p)_i}.$$

In Anbetracht der Relationen (8) Kap. II¹⁾ und unter Anwendung der entsprechenden Abkürzungen finden wir:

$$\begin{aligned} \frac{a}{a'} &= \frac{q' \cos(Ox_i) [\cos(P'x) \cos(P''x)]_i}{q \cos(Ox_i) [\cos(P''x) \cos(Px)]_i} = \\ &= \frac{q' \sin(P'P'') \sin(x_k x_l) \cos(rX_i)}{q \sin(P''P) \sin(x_k x_l) \cos(rX_i)} = \\ &= \frac{q' \sin(P'P'')}{q \sin(P''P)}, \quad (5) \end{aligned}$$

wo r die Zonenkante bedeutet.

Ganz analog findet man:

$$\frac{a}{a'} = \frac{q' \sin(P'P''')}{q \sin(P'''P)}. \quad (5a)$$

Aus (5) und (5a) folgt weiter:

$$\begin{aligned} \frac{a}{a_1} : \frac{a}{a'} = \frac{a'}{a_1} &= \frac{\sin(P''P) \sin(P'P''')}{\sin(P'P'') \sin(P'''P)} = \\ &= \frac{\sin(PP'') \sin(P'P''')}{\sin(P'P'') \sin(PP''')} = (pp'p''p'''). \quad (6) \end{aligned}$$

Bezeichnen wir der Kürze wegen dieses Doppelverhältniss durch \mathfrak{D} , so erhalten wir

$$\begin{aligned} \mathfrak{D} &= \frac{\sin(PP'') \sin(PP''' - PP')}{\sin(PP'' - PP') \sin(PP''')} = \\ &= \frac{\cotg(PP') - \cotg(PP''')}{\cotg(PP') - \cotg(PP'')}. \quad (6a) \end{aligned}$$

Formel (6a) lässt einfach einen Zonenwinkel berechnen, wenn beide anderen und die Grösse \mathfrak{D} bekannt sind (\mathfrak{D} lässt sich berechnen, wenn sämtliche Symbole der Zonenflächen gegeben sind).

Dann ist

$$|bb'| = \frac{b}{b'} = \frac{(r'r'')_i}{(r''r)_i} \text{ und} \\ |bb_1| = \frac{b}{b_1} = \frac{(r'r''')_i}{(r'''r)_i}.$$

In Anbetracht der Relationen (40) Kap. II¹⁾ und unter Anwendung der entsprechenden Abkürzungen finden wir:

$$\begin{aligned} \frac{b}{b'} &= \frac{Q' \cos(oX_i) [\cos(r'X) \cos(r''X)]_i}{Q \cos(oX_i) [\cos(r''X) \cos(rX)]_i} = \\ &= \frac{Q' \sin(r'r'') \sin(X_k X_l) \cos(Px_i)}{Q \sin(r''r) \sin(X_k X_l) \cos(Px_i)} = \\ &= \frac{Q' \sin(r'r'')}{Q \sin(r''r)}, \quad (5') \end{aligned}$$

wo P die Normale zur Zonenfläche bedeutet.

Ganz analog findet man:

$$\frac{b}{b_1} = \frac{Q' \sin(r'r''')}{Q \sin(r'''r)}. \quad (5a')$$

Aus (5') und (5a') folgt weiter:

$$\begin{aligned} \frac{b}{b_1} : \frac{b}{b'} = \frac{b'}{b_1} &= \frac{\sin(r''r) \sin(r'r''')}{\sin(r'r'') \sin(r'''r)} = \\ &= \frac{\sin(r'r'') \sin(r'r''')}{\sin(r'r'') \sin(r'r''')} = (rr'r''r'''). \quad (6') \end{aligned}$$

Bezeichnen wir der Kürze wegen dieses Doppelverhältniss durch \mathfrak{d} , so erhalten wir:

$$\begin{aligned} \mathfrak{d} &= \frac{\sin(rr'') \sin(rr''' - rr')}{\sin(rr'' - rr') \sin(rr''')} = \\ &= \frac{\cotg(rr') - \cotg(rr''')}{\cotg(rr') - \cotg(rr'')}. \quad (6a') \end{aligned}$$

Formel (6a') lässt einfach einen Zonenwinkel berechnen, wenn beide anderen und die Grösse \mathfrak{d} bekannt sind (\mathfrak{d} lässt sich berechnen, wenn sämtliche Symbole der Zonenkanten gegeben sind).

4) Vergl. diese Zeitschr. 21, 698.

Sind, umgekehrt, sämtliche drei Winkel gegeben und nur drei von den vier Symbolen der Zonenflächen, so findet man vermitteltst (6a) die Grösse \mathfrak{D} , und dann besteht für das vierte Symbol die Relation:

$$\mathfrak{D} = \frac{(p'p''')_i (p''p)_i}{(p''p)_i (p'p'')_i}.$$

Sind, umgekehrt, sämtliche drei Winkel gegeben und nur drei von den vier Symbolen der Zonenkanten, so findet man vermitteltst (6a') die Grösse \mathfrak{d} , und dann besteht für das vierte Symbol die Relation:

$$\mathfrak{d} = \frac{(r'r''')_i (r''r)_i}{(r''r)_i (r'r'')_i}.$$

Aus den angegebenen Relationen ist leicht die zwischen dem Krystallflächen- (resp. Kanten-)complex und einer Zone (gleichgültig ob Flächenzone oder Zone schlechthin oder Kantenzone) bestehende nahe Analogie einzusehen, und wir widmen dieser Seite unserer Untersuchung zuerst unsere Beachtung.

Die Zone kann als ein specieller Complex betrachtet werden.

Dieser wird im allgemeinsten Falle durch zwei Constanten bestimmt (anstatt fünf für den Complex schlechthin).

Dieser specielle Complex bleibt derselbe, welche zwei seiner Flächen als Ausgangsflächen und welche als deren krystallonomische Abstumpfung angenommen wird (darin besteht die Analogie mit dem allgemeinen Complex, für welchen wir ebenso beliebig vier Flächen, von welchen keine drei tautozonal sind, zu Ausgangsflächen wählen können).

Die Zonensymbole werden durch zwei ganze Zahlen ausgedrückt (analog dem aus drei ganzen Zahlen bestehenden Symbol des allgemeinen Complexes).

Die verschiedenen Formen und Ausdrücke des Gesetzes der Rationalität der Doppelverhältnisse haben ihre Analoga in respectiven Ausdrücken für die Zonen.

Wir können z. B. dieses Gesetz verschiedenartig vermitteltst dreier krystallographischer Axen zum Ausdruck bringen. In Bezug auf die Zonen braucht man dabei nur zwei Axen.

Wir können dasselbe auch verschiedenartig als rationale Doppelverhältnisse der trigonometrischen Functionen von den durch vier Richtungen bestimmten Winkeln ausdrücken. Dasselbe gilt, wie eben angegeben, auch für die Zonen, wenn man dabei nur drei Richtungen berücksichtigt¹⁾.

1) Auch in Bezug auf die geometrischen Constanten ist es sehr leicht, die sehr nahe Analogie zwischen vollständigem Complex und einer Zone aufzuweisen.

Die triklone Syngonie wird durch fünf, die monokline durch drei, die rhombische durch zwei, die tetragonale und hexagonale durch eine und die kubische durch keine empirische Constante charakterisirt.

Ebenso wird die schiefe Zone durch zwei, die orthogonale durch eine und die isotrope Zone durch keine empirische Constante charakterisirt.

Diesem Satze liegt folgende Bedeutung bei.

Das Gesetz der Projectivität der Complexe, welches nur die Unabhängigkeit dieser Doppelverhältnisse von den Symmetrieverhältnissen behauptet, bleibt für die Complexe beider Art gleich genau anwendbar.

Wir wollen diese Analogie weiter verfolgen, um auf Grund derselben die einfachste Operation der Zonenentwicklung abzuleiten.

Auch hier kann von einer scheinbaren Symmetrie der Zone die Rede sein. Dieselbe kann als ditetragonal-pyramidal angenommen werden mit der Symmetriegrösse 8 (anstatt der hexakisoktaëdrischen Symmetrie des allgemeinen Complexes mit der Symmetriegrösse 48).

Die Entwicklung der Zone reducirt sich dann auf denjenigen Theil derselben, welcher durch $|10|$ und $|11|$ eingeschlossen ist. Auch hier unterscheiden wir vom Standpunkte der scheinbaren Symmetrie zweierlei Formen: a) die allgemeinen mit 8 Flächen, deren Indices $|p_1 p_2|$ sind, wo $p_1 > p_2$ und beide keinesfalls gleich sind, und b) die speciellen Formen mit 4 Flächen, entsprechend den Indices $|10|$ und $|11|$.

Auf analoge Weise kann auch hier von der Ordnungszahl der betreffenden Form die Rede sein. Diese Ordnungszahl muss eine Function der Indices darstellen, welche für die speciellen Formen verschwindet. Also ist diese Ordnungszahl $(p_1 - p_2)p_2 = \kappa$.

Es giebt nur eine einzige allgemeine Form I. Ordnung, welche durch die Relation $(p_1 - p_2)p_2 = 1$ bestimmt sind. Diese Form ist also $|21|$, welche sich als krystallonomische Abstumpfung der beiden speciellen Formen erweist.

Die einfachste und consequenteste Methode der weiteren Entwicklung der Zone wäre dann die Ableitung immer neuer und neuer krystallonomischer Abstumpfungen. Dadurch entstehen die Perioden in der Formenentwicklung, und wir erhalten folgende Reihe der Formen.

I. Periode.

Nur die speciellen Formen: $|10|$, $|01|$; $|11|$; $|\bar{1}\bar{1}|$.

Eine Zone kann überhaupt vollständig entwickelt werden, wenn z. B. zwei Ausgangsflächen (vergl. weiterhin) und eine Fläche erster Ordnung gegeben sind. Darin liegt die möglichst einfache Entwicklung zu Grunde.

Die erste Ausgangsfläche erhalte das Symbol $|01|$, die zweite das Symbol $|10|$ und die Fläche erster Ordnung das Symbol $|11|$. Sind diese drei Flächen bekannt, so sind leicht die Winkelverhältnisse sämtlicher anderer Zonenflächen zu bestimmen.

In dem Falle der schiefen Zone müssen die beiden von diesen Flächen gebildeten Winkel gegeben werden; in dem Falle der orthogonalen Zone ist es genügend, wenn ein einziger Winkel zwischen $|01|$ und $|11|$ gegeben ist; dabei ist der Winkel zwischen $|01|$ und $|10|$ ein rechter.

In dem Falle der isotropen Zone braucht man keinen Winkel durch die Erfahrung zu bestimmen. Jeder ersten Ausgangsfläche der gegebenen Zone gehört ein schon voraus bekannter charakteristischer Winkel zwischen $|01|$ und $|11|$ an.

II. Periode.

Nur die allgemeinen Formen: $|21|$ und $|12|$, $|\bar{2}1|$, $|\bar{1}2|$.

III. Periode.

Nur die allgemeinen Formen: $|31|$, $|32|$, $|23|$, $|13|$, $|\bar{1}3|$, $|\bar{2}3|$, $|\bar{3}2|$, $|\bar{3}1|$.

IV. Periode.

Nur die allgemeinen Formen: $|41|$, $|52|$, $|53|$, $|43|$, $|34|$, $|35|$, $|25|$, $|14|$, $|\bar{1}4|$ und so fort.

Jetzt steht uns bevor, die einfachste Methode der wirklichen Zonenentwicklung zu finden. Es empfiehlt sich dabei natürlich nicht die Rechnungsmethode (welche übrigens durch die oben angegebenen und allen Krystallographen gut bekannten Formeln gegeben ist), sondern eine graphische, rasch auszuführende Methode.

Es sind solche schon früher angegeben worden. Eine sehr einfache Methode rührt sogar von Hessel (1829) her, und basirt auf dem von Demselben als Gerengesetz bezeichneten Gesetze. Nach dieser Methode lassen sich immer neue und neue Flächen dadurch bestimmen, dass man stets neue und neue Parallelogramme construiert.

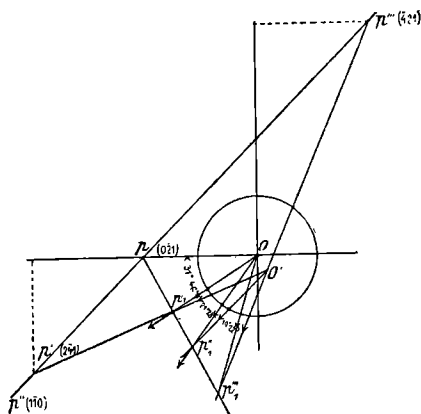
Wenn man darauf ausgeht, zugleich direct die Indices der neu abzuleitenden Flächen zu bestimmen, so kann man sich der in Nr. IV der analytisch-krystallographischen Studien (Berg-Journal 1887, Kapitel V, Tafel I, Fig. 3) angegebenen Methode bedienen, welche ich hier zu reproduciren mir erlaube.

Es ist folgende (auf Anorthit sich beziehende) Aufgabe zu lösen:

Gegeben drei tautozonale Flächen $p = (0\bar{2}1)$, $p' = (2\bar{1}1)$ und $p'' = (1\bar{1}0)$ und die Winkelgrößen $(pp') = 31^\circ 46'$, $(p'p'') = 24^\circ 28'$ und $(p''p''') = 19^\circ 22'$. Gesucht die Indices von p''' .

Wir wollen (Fig. 4) vorläufig den Krystall als einen kubischen ansehen, und demgemäss finden wir direct in gnomonischer Projection die Lage der Flächen p , p' und p'' . Von der centralen Geraden Op ausgehend, ziehen wir unter den gegebenen Winkeln drei andere Geraden Op_1' , Op_1'' und Op_1''' . Durch den Punkt p ziehen wir eine willkürlich genommene Gerade, welche die vorigen in den Punkten p_1' , p_1'' und p_1''' schneidet. Nun verbinden wir respective p' mit p_1' und p'' (welcher unendlich entfernt ist) mit p_1'' und somit erhalten wir den Schnittpunkt O' . Dann bleibt nur übrig,

Fig. 4.



diesen Punkt mit p_1''' zu verbinden und bis zum Schnittpunkte p''' zu verlängern, und man erhält direct die gesuchten Indices von $p''' = (424)$.

Man sieht, dass diese graphische Auflösung auf dem Gesetze der Projectivität der Complexe fusst und die oben erwähnten Sätze über die perspectivische Lage der projectiven Gebilde benutzt.

Wären sämmtliche vier Punkte p , p' , p'' und p''' , d. h. die Indices dieser Flächen und noch zwei Winkel pp' und $p'p''$ gegeben, und werde der Winkel $p''p'''$ gesucht, so sieht man leicht aus der Fig. 1, dass zur Lösung der Aufgabe nur eine sehr geringe Modification erforderlich ist, und zwar muss man, nachdem der Schnittpunkt O' gefunden ist, denselben mit p''' durch eine Gerade verbinden, welche die Gerade pp_1' in dem Punkte p_1''' schneidet. Verbindet man p_1''' mit dem Centrum (Punkt O), so erhält man direct den gesuchten Winkel.

Da uns aber die Lösung von Aufgaben bevorsteht, in welchen keine Zonenflächen durch bestimmte Symbole ausgezeichnet sind, so ergibt sich die angegebene Auflösung, wie anziehend dieselbe auch erscheint, als nicht anwendbar.

Deshalb wollen wir uns direct an die oben gegebenen Formeln (6) und (6') anlehnen.

Sind sämmtliche von den gegebenen Flächen p , p' , p'' und p''' gebildete Winkel bekannt, so haben wir es mit dem Doppelverhältniss

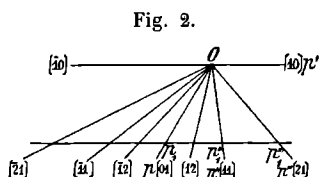
$$\mathfrak{D} = \frac{\sin(p p''') \cdot \sin(p p'')}{\sin(p' p''') \cdot \sin(p' p'')}.$$

zu thun. Schneiden wir dieses Strahlenbüschel durch eine der Geraden p' parallele Gerade, so erhalten wir vier Schnittpunkte, von welchen der eine unendlich entfernt ist, und die dadurch bestimmte Punktreihe ist in Bezug auf das Strahlenbüschel perspectivisch.

Also
$$\mathfrak{D} = \frac{p_1 p_1'''}{p_1' p_1'''} \cdot \frac{p_1 p_1''}{p_1' p_1''}.$$

Da aber $p_1' p_1'''$ und $p_1' p_1''$ gleich ∞ sind, so reducirt sich dieses Doppelverhältniss auf das einfache

$$\mathfrak{D} = p_1 p_1''' : p_1 p_1''.$$



Da aber \mathfrak{D} zugleich dem Zonensymbol gleich ist, so sind die Indices den Längen $(p_1 p_1''')$ und $(p_1 p_1'')$ direct proportional, von welchen $p_1 p_1''$ gleich 1 angenommen werden muss.

Dadurch erhalten wir eine höchst einfache Entwicklung der Zone auf graphischem Wege, welche durch Fig. 2 illustriert wird.

Nun wenden wir uns zu einer anderen Reihe von Fragen, und zwar zu denjenigen über die Symmetrie der Zonen.

Wir müssen aber von Anfang an betonen, dass die Symmetrie der Complexe, welche durch Zonen vertreten sind, keineswegs zugleich die Symmetrie des Krystalles selbst ist. Die Krystalle können Polarität besitzen, d. h. in ihren Eigenschaften in direct entgegengesetzten Richtungen Verschiedenheiten zeigen. Für Complexe überhaupt und für Zonen im Besonderen ist dies ganz unzulässig.

Um aber der Zweideutigkeit und Unbestimmtheit vorzubeugen, ist es empfehlenswerth, die betreffende Symmetrie durch eine besondere Benennung auszuzeichnen; wir wollen sie als eine complexiale Symmetrie bezeichnen, und als solche kommt dieselbe zu unserer Untersuchung¹⁾.

In dem allgemeinen Falle der schiefen Zone haben wir keinen Anlass, von irgend welchen symmetrischen Verhältnissen zu reden, da sämtliche in dem Complexe vertretene Winkel verschieden sind; und nicht nur verschieden, sondern auch veränderlich (z. B. von der Temperaturänderung abhängig), so dass, wenn zufällig bei einer Temperatur wir im Stande gewesen wären, die Gleichheit von irgend welchen zwei Zonenwinkeln zu constatiren, dies doch als eine vorübergehende Erscheinung anzusehen wäre, da schon bei anderer Temperatur die Gleichheit nicht mehr bestünde.

Daraus folgt, dass hier nur von solcher Winkelgleichheit (in der Aeusserung der complexialen Symmetrie) die Rede sein kann, welche bei der Temperaturänderung fortbesteht.

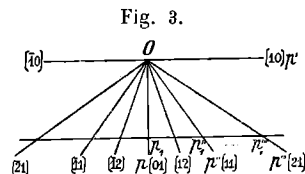
Dies ist gerade für orthogonale Zonen der Fall, wo trotz der Veränderlichkeit der Winkel überhaupt die Rechtwinkligkeit zweier Flächen wesentlich und von der Temperatur unabhängig ist.

Nun wird sofort der Beweis geliefert, dass gerade diese Zonen complexiale Symmetrie besitzen, und zwar die rhombopyramidale Symmetrie.

Um dies zu beweisen, brauchen wir nur die Zone zu entwickeln.

Es seien p und p' zwei senkrechte Flächen, denen resp. die Symbole $|04|$ und $|40|$ zukommen; p'' sei die dritte bestimmende Fläche $|44|$ (Fig. 3).

Nun finden wir, dass bei der Entwicklung der Zone wir stets die in Bezug auf p symmetrischen Flächenpaare erhalten, wie z. B. $|44|$ und $|\bar{4}\bar{4}|$ und überhaupt $|p_1 p_2|$ und $|\bar{p}_1 \bar{p}_2|$. Somit ergibt sich



¹⁾ Aus dem Weiteren wird ersichtlich, dass die in Bezug auf complexiale Symmetrie gezogenen Schlüsse ihre volle Kraft auch für alle anderen physikalischen Eigenschaften der Ellipsoidgruppe behalten.

der gesuchte Beweis von selbst. Da aber auch die Fläche p' dieselbe Rolle spielt, so kommen wir zu einer ganz bestimmten Symmetriearart.

Also besitzen die orthogonalen Zonen rhombopyramidale complexiale Symmetrie.

Wie an anderem Orte gezeigt wurde, giebt es ausser schiefen und orthogonalen Zonen nur noch eine besondere Zonenart, und zwar die isotropen Zonen, für welche die Formel

$$\tan(pq) = \frac{k \sqrt{r_1^2 + r_2^2 + r_3^2}}{p_1 q_1 + p_2 q_2 + p_3 q_3} = \frac{k}{l} \sqrt{x} \quad (\text{A})$$

gültig ist, wo p und q zwei beliebige Zonenflächen sind, $r(r_1 r_2 r_3)$ die Zonenaxe und k der Polfactor (also eine ganze Zahl) ist. Es wurde ebenfalls gezeigt, wie man zur Auffindung der unter der Wurzel stehenden Zahl, d. h. dem Parameter der Zone, kommt, wenn der Winkel pq gegeben ist.

Aber mit der Bestimmung von x kommt man zugleich zur eindeutigen Bestimmung der Relation $\frac{k}{l}$. Mit der Aenderung des Werthes dieser Relation ändert sich auch der Winkel (pq) ; dem constanten Verhältniss $\frac{k}{l}$ gehört, im Gegentheil, ein und derselbe Winkel an.

Beide ganze Zahlen k und l können wir aber beliebig nehmen, nur kann k nicht gleich Null sein.

Die Bedeutung dieser beiden Factoren wird durch die folgenden Formeln gegeben.

$$\begin{aligned} \text{Wir haben} \quad p_1 q_1 + p_2 q_2 + p_3 q_3 &= l \\ p_1 r_1 + p_2 r_2 + p_3 r_3 &= 0. \end{aligned}$$

Bezeichnen wir die Determinante $\begin{vmatrix} q_1 & q_2 \\ r_1 & r_2 \end{vmatrix}$ durch \mathcal{A}_3 , so finden wir

$$p_1 \mathcal{A}_3 = \begin{vmatrix} l & -p_3 q_3 & q_2 \\ -p_3 r_3 & r_2 \end{vmatrix} = (l - p_3 q_3) r_2 + p_3 q_2 r_3$$

$$\text{und} \quad p_2 \mathcal{A}_3 = \begin{vmatrix} q_1 & l & -p_3 q_3 \\ r_1 & -p_3 r_3 \end{vmatrix} = -(l - p_3 q_3) r_1 - p_3 q_1 r_3.$$

Ausserdem haben wir noch $p_1 q_2 - p_2 q_1 = k r_3$.

Also

$$(l - p_3 q_3) q_2 r_2 + p_3 q_2^2 r_3 + (l - p_3 q_3) q_1 r_1 + p_3 q_1^2 r_3 = k r_3 \mathcal{A}_3.$$

Bezeichnen wir $q_1^2 + q_2^2 + q_3^2$ durch Q , so finden wir

$$p_3 \{r_3 (q_1^2 + q_2^2) - r_2 q_2 q_3 - r_1 q_1 q_3\} = k r_3 \mathcal{A}_3 - l (q_1 r_1 + q_2 r_2)$$

$$\text{oder} \quad p_3 \{r_3 (Q - q_3^2) + r_3 q_3^2\} = p_3 r_3 Q = k r_3 \mathcal{A}_3 + l q_3 r_3$$

$$\text{oder endlich} \quad p_3 = \frac{k \mathcal{A}_3 + l q_3}{Q}.$$

Analog finden wir
$$p_2 = \frac{k\mathcal{A}_2 + lq_2}{Q}$$
 und
$$p_1 = \frac{k\mathcal{A}_1 + lq_1}{Q},$$
 endlich
$$p_1 : p_2 : p_3 = k\mathcal{A}_1 + lq_1 : k\mathcal{A}_2 + lq_2 : k\mathcal{A}_3 + lq_3. \quad (\text{B})$$

Nun ist leicht einzusehen, dass $\mathcal{A}_1 : \mathcal{A}_2 : \mathcal{A}_3$ nichts anderes ist als die Relation der Indices der zu q senkrechten Zonenfläche, und dann ersieht man in Anbetracht der Formel (2a) (S. 559), dass $\frac{k}{l}$ das Zonensymbol der Fläche p ist, und als Ausgangsflächen der Zone erscheinen die Fläche q und die zu ihr senkrechte Fläche \mathcal{A} .

Aus der Formel (B) ersehen wir, dass, welche Fläche q auch als Ausgangsfläche der Zone genommen wird, stets ein und derselbe Cyclus von Winkeln erhalten wird, da dieser Cyclus der Formel (A) gemäss durch den rationalen Bruch $\frac{k}{l}$ bestimmt wird. Würden auch in verschiedenen Fällen die Zahlen k und l verschiedene Werthe erhalten, bleibt nur das Verhältniss dieser Zahlen dasselbe, so bildet die Fläche p denselben Winkel mit q , wie auch die letzte ausgewählt werden konnte.

Somit ist aber ein sehr wichtiger, auf isotrope Zonen bezüglicher Satz bewiesen worden: Die Axe jeder isotropen Zone ist eine complexiale Symmetrieaxe von unendlich grosser Zähligkeit (Rotationsaxe).

Ausserdem, wie schon früher bewiesen worden, und auch jetzt durch Rechtwinkligkeit der Zonenflächen q und \mathcal{A} , von welchen eine ganz beliebig aus dem Complex herausgenommen ist, bestätigt wird, ist jeder Zonenfläche der isotropen Zonen eine zu ihr senkrechte Zonenfläche zugeordnet. In Anbetracht des für orthogonale Zonen gegebenen Beweises heisst das jetzt, dass jede Zonenfläche der isotropen Zonen eine complexiale Symmetrieebene ist.

Daraus folgt der Schluss von selbst, dass jede isotrope Zone die complexiale conische Symmetrie¹⁾ besitzt.

In der Formel (B) spielen die Coëfficienten nicht die gleiche Rolle, indem l und nicht k gleich Null gesetzt werden kann²⁾. Infolge dessen können wir unter beiden Ausgangsflächen q und \mathcal{A} unterscheiden, und $q = |01|$ als erste und $\mathcal{A} = |10|$ als zweite Ausgangsfläche bezeichnen. Man sieht, dass die zweite sich sogar aus der ersten ableiten lässt, indem man l gleich

1) Ueber conische, biconische und sphärische Symmetriearten vergl. Elemente der Gestaltenlehre § 54. Da hier die Zonenaxe nothwendigerweise senkrecht zu einer Fläche des Complexes steht, so würde eigentlich die complexiale Symmetrie die biconische sein.

2) Streng genommen drückt die Gleichheit $k = 0$ nur aus, dass die betreffende Fläche mit der ersten Ausgangsfläche identisch ist.

Null setzt, und gerade $l = 0$ ist die Gleichung, welche die Rechtwinkligkeit beider Flächen bedeutet.

Die Gleichung (B) ist die Gleichung der Zone, welche aus zwei Flächen, von denen die eine und zwar $q(q_1 q_2 q_3)$ beliebig gewählt wird und die andere $\mathcal{A}(\mathcal{A}_1 \mathcal{A}_2 \mathcal{A}_3)$ zu derselben senkrecht steht, als aus zwei Ausgangsflächen entwickelt werden kann; $|kl|$ ist dabei das Zonensymbol jeder entwickelten Fläche.

Solche Zonenentwicklung leidet aber an dem Uebelstande, dass die abgeleiteten Indices gemeinsame Factoren besitzen können und demgemäss keine wirklichen Indices darstellen. Dieser Uebelstand kann selbst dann bestehen, wenn zur ersten Ausgangsfläche eine solche ausgewählt wird, für welche die Indices durch die für die gegebene Zone geringsten Zahlen vertreten sind.

Zum Beispiel für die Zone $[431]$ ist solche durch geringste Zahlen vertretene Zonenfläche $(0\bar{1}3)$; die zu derselben senkrechte Fläche ist $2(5\bar{6}\bar{2})$, und die Gleichung (B) wird

$$p_1 : p_2 : p_3 = k \cdot 40 + l \cdot 0 : k \cdot \bar{1}\bar{2} + l \cdot \bar{1} : k \cdot \bar{4} + l \cdot 3$$

und dann erhält man für die relativ sehr einfachen Indices $(\bar{1}04)$ das sehr complicirte Zonensymbol $|kl| = (\bar{1}) \cdot (12)$, aus welchem dieselben Indices in der Form $(\bar{1}0 \cdot 0 \cdot 40)$ sich ergeben.

Um diesen Uebelstand zu beseitigen, können wir derselben Zonengleichung eine andere Form verschaffen, indem wir als Hauptausgangsflächen diejenigen mit den einfachsten Indices wählen.

Es seien diese beiden Flächen $q(q_1 q_2 q_3)$ und $q'(q'_1 q'_2 q'_3)$, welchen die Zonenindices $|01|$ und $|10|$ zukommen.

Also ist:

$$p_1 : p_2 : p_3 = m q'_1 + n q_1 : m q'_2 + n q_2 : m q'_3 + n q_3. \quad (B')$$

In dem eben in Betracht gezogenen Beispiele wird $q_1 = (0\bar{1}3)$ und $q'_1 = (\bar{1}04)$, und somit die Gleichung (B'):

$$p_1 : p_2 : p_3 = -m : -n : 4m + 3n.$$

Für die Zonenentwicklung erhalten wir nun:

I. Periode.

$$|01| = (0\bar{1}3); |10| = (\bar{1}04); |11| = (\bar{1}\bar{1}7); |\bar{1}1| = (1\bar{1}\bar{1}).$$

II. Periode.

$$|21| = (\bar{2} \cdot \bar{1} \cdot 11); |12| = (\bar{1} \cdot \bar{2} \cdot 10); |\bar{2}1| = (2\bar{1}\bar{5}); |\bar{1}2| = (1\bar{2}\bar{2}).$$

III. Periode.

$$|31| = (\bar{3} \cdot \bar{1} \cdot 15); |13| = (\bar{1} \cdot \bar{3} \cdot 13); |\bar{3}1| = (3\bar{1}\bar{9}); |\bar{1}3| = (1\bar{3}\bar{5}) \text{ u. s. f.}$$

Wir ersehen daraus die ganz natürliche Zonenentwicklung¹⁾. Dazu

1) d. h. eine solche, in welcher keine entwickelten Indices gemeinschaftliche Factoren besitzen.

gehören aber die Zonenindices $|mn|$ und nicht $|kl|$. Nun ist es aber leicht, die ersten durch die zweiten auszudrücken und umgekehrt.

Wir können also die Hauptausgangsflächen als solche definiren, welchen die natürliche Zonenentwicklung entspricht, und die entsprechenden Zonenindices können wir ebenfalls als natürliche ansehen und definiren.

Somit ist die Aufgabe gestellt, die durch directe Winkelmessung bestimmten Indices $|kl|$ durch die natürlichen $|mn|$ zu ersetzen.

In Anbetracht dessen, dass die erste Hauptausgangsfläche q durch die Indices $(0\bar{r}_3r_2)$ und die zweite Hauptausgangsfläche q' durch die Indices (r_30r_1) ausgedrückt werden, berechnen wir:

$$m : n = -k(r_2^2 + r_3^2) : kr_1r_2 + lr_3 \quad (C)$$

und auch umgekehrt

$$k : l = -mr_3 : mr_1r_2 + n(r_2^2 + r_3^2). \quad (C')$$

Falls das gegebene Symbol der Zone in seinem Ausdrucke eine Symmetrie aufweist, kann es geschehen, dass zwei oder sogar mehr Flächenpaare sich gleichwerthig erweisen, so dass in der Auswahl der Hauptausgangsflächen eine Unbestimmtheit vorliegt.

Für die Zone $[aab]$, wo $a > b$, haben wir die gleichwerthigen Hauptausgangsflächen $(0\bar{b}a)$ und $(\bar{b}0a)$.

Zum Beispiel für die Zone $[221]$ erhalten wir folgenden natürliche Zonenentwicklung:

I. Periode.

$$|01| = (0\bar{1}2); |10| = (\bar{1}02); |11| = (\bar{1}\bar{1}4); |\bar{1}1| = (1\bar{1}0).$$

II. Periode.

$$|21| = (\bar{2}\bar{1}6); |12| = (\bar{1}\bar{2}6); |\bar{2}1| = (2\bar{1}\bar{2}); |\bar{1}2| = (1\bar{2}\bar{2}) \text{ u. s. w.}$$

Für die Zone $[abb]$, wo $a > b$, haben wir die schon nicht mehr gleichwerthigen Hauptausgangsflächen $(0\bar{1}1)$ und $(\bar{b}0a)$.

Zum Beispiel für die Zone $[211]$ erhalten wir folgende natürliche Zonenentwicklung:

I. Periode.

$$|01| = (0\bar{1}1); |10| = (\bar{1}02); |11| = (\bar{1}\bar{1}3); |\bar{1}1| = (1\bar{1}\bar{1}).$$

II. Periode.

$$|21| = (\bar{2}\bar{1}5); |12| = (\bar{1}\bar{2}4); |\bar{2}1| = (2\bar{1}\bar{3}); |\bar{1}2| = (1\bar{2}0) \text{ u. s. w.}$$

Hier sehen wir, dass die Fläche $|\bar{1}2|$ mit $|10|$ gleichwerthig ist und also mit derselben vertauscht werden kann.

Es giebt nur eine einzige Zone mit noch höherer Symmetrie in ihrem äusseren Ausdrucke, und zwar die Zone $[111]$, für welche sämmtliche drei Indices gleichwerthig sind.

Für dieselben sind $(0\bar{1}1)$, $(\bar{1}01)$ und $(\bar{1}10)$ gleichberechtigt, und jedes Paar derselben darf ganz beliebig als Paar der Hauptausgangsflächen angenommen werden.

Also nur beispielsweise erhalten wir folgende Zonenentwicklung:

I. Periode.

$$|04| = (0\bar{4}4); |40| = (\bar{4}04); |44| = (\bar{4}\bar{4}2); |\bar{4}4| = (4\bar{4}0).$$

II. Periode.

$$|24| = (\bar{2}\bar{4}3); |42| = (\bar{4}\bar{2}3); |\bar{2}4| = (2\bar{4}\bar{4}); |\bar{4}2| = (4\bar{2}4) \text{ u. s. f.}$$

Jede Zone wird durch drei Flächen resp. zwei Winkel bestimmt. Für diese die Zone bestimmenden Winkel wären am zweckmässigsten diejenigen zu nehmen, welche, in natürlichen Zonensymbolen ausgedrückt, die Winkel unter $|04|$ und $|44|$, wie unter $|44|$ und $|40|$ untereinander bilden.

Wir wollen diese Winkel als charakteristische Zonenwinkel bezeichnen.

Nun ist klar, dass für die isotropen Zonen diese Winkel von vornherein zu bestimmen sind, und zwar nach der bekannten Formel $\tan \alpha = \frac{k}{l} \sqrt{x}$. Wir berechnen leicht $k = r_3$, $l = r_3^2 + r_2(r_1 + r_2)$ (und x ist bekanntlich $r_1^2 + r_2^2 + r_3^2$ gleich) für den ersten und $k = r_3$, $l = r_3^2 + r_1(r_1 + r_2)$ für den zweiten charakteristischen Winkel.

Zum Beispiel für eine tetragonal-isotrope Zone ($x = 4$) erhalten wir für diese Winkel $\tan \alpha_1 = 1$ und $\tan \alpha_2 = 1$ (indem die Hauptausgangsflächen die Flächen (040) und (004) sind). Diese Winkel sind also 45° und 45° .

Für eine hexagonal-isotrope Zone ($x = 3$) erhalten wir für diese Winkel $\tan \alpha_1 = \frac{1}{3}\sqrt{3}$ und $\tan \alpha_2 = \frac{1}{3}\sqrt{3}$ (diese Winkel sind also 30° und 30°).

Für die Zone $[440]$ ($x = 2$) erhalten wir für diese Winkel (indem als Hauptausgangsflächen (004) und $(4\bar{4}0)$ auftreten) $\tan \alpha_1 = \sqrt{2}$, $\tan \alpha_2 = \frac{1}{2}\sqrt{2}$. Diese beiden Winkel sind natürlich zu $\pi/2$ complementär.

Für die Zone $[324]$ ($x = 14$) erhalten wir für diese Winkel $\tan \alpha_1 = \frac{1}{11}\sqrt{14}$ und $\tan \alpha_2 = \frac{1}{16}\sqrt{14}$ (sie sind also respective $18^\circ 47' 10''$ und $13^\circ 9' 45''$).

Für die Zone $[224]$ ($x = 9$) erhält man als charakteristische Winkel die beiden gleichen Winkel $18^\circ 26' 6''$.

Obgleich die Zone mit der tetragonal-isotropen Zone wesentlich identisch ist, so ist sie doch durch ihre besonderen eigenthümlichen charakteristischen Winkel, ihre natürlichen Ausgangsflächen $(0\bar{4}2)$ und $(40\bar{2})$ und ihre natürliche Zonenentwicklung von allen übrigen Zonen verschieden. Von diesem Standpunkte aus sind keineswegs alle Zonen identisch, für welche x ein volles Quadrat ist.

Auch umgekehrt, ist aus der directen Messung ein einziger Winkel bekannt, so können wir nicht nur die Zonenindices (wie dies in dem Beitrage zur Syngonielehre gezeigt wurde), sondern mit einer bedeutenden Wahrscheinlichkeit die Indices der beiden zur Messung gelangten Flächen

bestimmen. Wir können eigentlich die Relation $k : l$ bestimmen, aber der Formel (C) gemäss werden auch die natürlichen Indices $|mn|$ der betreffenden Zonenfläche ermittelt, indem eine davon als erste Hauptausgangsfläche $01| = (0\bar{r}_3 r_2)$ angenommen wird.

Da aber, auf dem Syngonie-Ellipsoidgesetze fussend, wir behaupten können, dass wir denselben Winkel in Bezug auf jede beliebige Zonenfläche treffen können, so ist die genannte Bestimmung der Indices nur als die wahrscheinlichste zu bezeichnen, indem vorausgesetzt wird, dass der einen von beiden zur Messung gelangten Flächen wirklich die wichtigste Rolle in der Zone zukommt, d. h. dieselbe durch die einfachsten Indices ausgedrückt werden muss.

Wollen wir einige Beispiele betrachten.

Es ist der Winkel $46^\circ 54' 41''$ zwischen den Flächen (421) und $(20\bar{1})$ gegeben worden¹⁾.

Der Parameter der Zone ist gleich 14 gefunden, und folglich sind deren Indices gleich $[324]$.

Die erste Hauptausgangsfläche ist also $q = (0\bar{1}2)$ und die zweite Ausgangsfläche ist $\mathcal{A} = (\bar{5}63)$ (welche also keine Hauptausgangsfläche ist).

Nach der Formel (A) berechnet man $\frac{k}{l} = \frac{2}{7}$ (da $\tan^2 46^\circ 54' 41'' = \frac{56}{49} = \frac{2^2 \cdot 14}{7^2}$). Daraus findet man nach der Formel (B) $p_1 : p_2 : p_3 = 2 \cdot \bar{5} + 7 \cdot 0 : 2 \cdot 6 + 7 \cdot \bar{1} : 2 \cdot 3 + 7 \cdot 2 = (\bar{2}14)$ (was gerade dem Symbole der gemessenen Fläche entspricht).

Zieht man die beiden gefundenen Flächen in Betracht, welche der gemessenen Zone angehören und den gegebenen Winkel unter sich bilden, d. h. die Flächen $(0\bar{1}2)$ und $(\bar{2}14)$, so kann man aus deren Indices direct die Werthe k und $l = p_1 q_1 + p_2 q_2 + p_3 q_3$ berechnen, und man findet wirklich $k = 2$ und $l = 7$.

Da aber diese Zone isotrop ist, so darf als Ausgangsfläche jede andere Zonenfläche angenommen werden, also kann eine solche ganz beliebig gewählt werden.

Nehmen wir z. B. als erste Ausgangsfläche die Fläche $(\bar{5}63)$, welche eben als die zweite Hauptausgangsfläche sich ergab, dann findet man natürlich als die zweite Ausgangsfläche die Fläche $14 (0\bar{1}2)$, welche eben die Rolle der ersten Hauptausgangsfläche gespielt hat. Nun berechnet man für die gemessene Fläche nach der Formel

$$p_1 : p_2 : p_3 = 2 \cdot 0 + 7 \cdot \bar{5} : 2 \cdot \bar{1}4 + 7 \cdot 6 : 2 \cdot 28 + 7 \cdot 3$$

das Symbol $(\bar{5}.2.14)$, also schon ein viel complicirteres. Aus den beiden Symbolen $(\bar{5}63)$ und $(\bar{5}.2.14)$ berechnet man noch $k = 20$ und $l = 70$.

1) Das Beispiel ist dieser Zeitschr. 28, 50 entnommen.

Das Verhältniss $\frac{k}{l}$ bleibt für die gegebene Fläche natürlich dasselbe, aber die beiden Zahlen k und l steigen in hohem Grade.

Nehmen wir beliebig für die erste Ausgangsfläche die Fläche $(10\bar{3})$, so lässt sich die zweite als $2(3\bar{5}1)$ berechnen. Setzt man diese Werthe in die Formel (B), so erhält man:

$$p_1 : p_2 : p_3 = 7.4 + 2.6 : 7.0 + 2.40 : 7.3 + 2.2.$$

Das gesuchte Symbol ist also $(\bar{1}9.20.17)$. Daraus berechnet man wieder $k = 20$, $l = 70$.

Dieses Beispiel bietet das specielle Interesse dar, dass denselben Relationen von k und l , falls dieselben nicht durch die einfachst möglichen Zahlen vertreten sind, verschiedene Combinationen von Ausgangsflächen entsprechen können.

Aus diesen Beispielen ersieht man jedenfalls, welche theoretische und praktische Bedeutung dem oben angegebenen Satze zukommt, nach welchem jede isotrope Zone biconische Symmetrie besitzt.

Fassen wir die gewonnenen Resultate in Bezug auf sämtliche Zonen respective in Bezug auf den vollständigen Krystallflächencomplex zusammen, so erhalten wir ein complexiales Symmetriegesetz, welches kurz als Syngonie-Ellipsoidgesetz bezeichnet werden soll.

In den Krystallen der kubischen Syngonie sind bekanntlich sämtliche Zonen isotrop.

Folglich sind sämtliche Zonenachsen die Rotationsachsen derjenigen Oberfläche, durch welche die Vertheilung der Flächen und Kanten des Complexes dargestellt wird. Sämtliche Schnitte dieser Oberfläche sind Kreisschnitte; sämtliche Flächen des Complexes sind Symmetrieebenen.

Diese Oberfläche ist also die Sphäre, und die complexiale Symmetrie der kubischen Krystalle ist die sphärische.

Gerade hierzu gehören drei Zonen $[100]$, in welchen die höchste scheinbare Symmetrie durch die wirkliche vertreten werden kann.

In den Krystallen der tetragonalen Syngonie ist bekanntlich nur eine Zone $[001]$ tetragonal-isotrop (Parameter 4). Sämtliche anderen Zonen sind orthogonal.

Folglich giebt es in dem Krystalle nur eine einzige ausgezeichnete Richtung $[001]$, welche die Rotationsaxe als complexiale Symmetrieaxe besitzt, und sämtliche durch dieselbe hindurchgehenden möglichen Flächen sind Symmetrieebenen. Ausserdem ist die Fläche (001) die complexiale Symmetrieebene, und sämtliche ihr parallelen Kanten sind complexiale zweizählige Symmetrieachsen. Das letzte ist directe Folgerung aus einem bekannten Satze der Symmetrielehre, nach welchem die zweizählige Symmetrieaxe das resultirende Symmetrieelement von zwei zu einander senkrechten Symmetrieebenen ist.

Nach allen diesen Eigenschaften lässt sich das hierzu gehörende Ellipsoid als Rotationsellipsoid charakterisiren mit der Rotationsaxe $[001]$ (obgleich dieselben noch nicht genügend erscheinen, um den Beweis zu liefern, dass die betreffende Oberfläche wirklich ein Ellipsoid ist).

Hierzu gehört eine einzige Zone $[001]$, in welcher die höchste scheinbare Symmetrie durch die wirkliche vertreten werden kann.

In den Krystallen der hexagonalen Syngonie ist bekanntlich nur eine einzige Zone $[111]$ hexagonal-isotrop (Parameter 3). Sämmtliche anderen Zonen sind orthogonal.

Daraus können wir die dem vorigen Falle ganz analogen Schlüsse ziehen und das Syngonie-Ellipsoid ebenfalls als Rotationsellipsoid charakterisiren, aber mit der Rotationsaxe $[111]$.

In diesem Falle kann keine der drei Zonen $[100]$ die höchste Symmetrie wirklich besitzen, welche der höchsten scheinbaren Symmetrie der Zonen entspricht. Aber man sieht, dass gerade in diesem Falle die sechszählige (also auch die dreizählige) wirkliche Symmetrieaxe zulässig ist, welche als scheinbare Symmetrieaxe speciell die Zone $[111]$ charakterisirt.

In den Krystallen der rhombischen Syngonie giebt es orthogonale Zonen, deren Axen den Flächen (100) , (010) und (001) parallel sind. Für alle diese drei Flächen giebt es also eine gemeinsame complexiale Symmetrieebene, welche zugleich complexiale Symmetrieebene des vollständigen Complexes ist. Da aber rechtwinkelige Symmetrieebenen sich in zweizählige Symmetrieachsen schneiden, so giebt es folglich drei solche complexiale Symmetrieachsen, und zwar die Axen $[100]$, $[010]$ und $[001]$.

Dadurch wird das Syngonie-Ellipsoid der rhombischen Krystalle charakterisirt.

Hier bleibt aber nur noch ein Umstand zu besprechen. Jedes dreiaxige Ellipsoid besitzt zwei Kreisschnitte, und solche Complexe würden in dem Complexe isotrope Zonen bedingen. Nun ist einleuchtend, dass dies nur dann der Fall sein kann, wenn die Kreisschnitte wirklich dem Complexe resp. die Normalen den möglichen Kanten angehören, d. h. krystallographisch mögliche Flächen sind. Für rhombische Krystalle ist dies aber nicht der Fall, da diese Flächen zu den veränderlichen gehören, welche von der relativen Grösse der Ellipsoidachsen abhängen; diese aber ändern sich mit der Temperatur.

In den Krystallen der monoklinen Syngonie giebt es nur eine einzige Reihe von orthogonalen Flächenzonen, und zwar diejenigen, deren Axen parallel der Fläche (010) liegen, und eine einzige Reihe von Kantenzonen, und zwar diejenigen, deren Flächen parallel der Axe $[010]$ stehen.

Demgemäss giebt es eine einzige gemeinsame complexiale Symmetrieebene der Zonen und zugleich des vollständigen Complexes, und zwar die

Fläche (010), und eine einzige gemeinsame complexiale zweizählige Symmetrieaxe, und zwar die Axe [010].

Dadurch wird die Orientirung des Syngonie-Ellipsoids bestimmt, und zwar demselben Gesetze folgend, wie dies für andere physikalische Eigenschaften dieser Gruppe der Fall ist.

Was endlich die Krystalle der triklinen Syngonie betrifft, so giebt die Vertheilung der hier ausschliesslich vertretenen schiefen Zonen keine Anhaltspunkte für die Bestimmung der Orientirung des Syngonie-Ellipsoids. Dasselbe gilt bekanntlich auch für Ellipsoide anderer physikalischer Eigenschaften.

Eine andere wichtige Folgerung des Syngonie-Ellipsoidgesetzes, welche als Gesetz der Zuordnung der Flächen und Kanten jedes gegebenen Complexes bezeichnet werden kann, wurde schon viel früher vom Verf. eingehend besprochen und fand durch die von demselben aufgestellten Projectivitätsgleichungen ihren Ausdruck und wichtige Anwendung für krystallographische Berechnungen.

Diese Projectivitätsgleichungen sind:
für die Flächen

$$\frac{p_1'}{p_2'} = \frac{a_1 p_1 + a_2 p_2 + a_3 p_3}{a_4 p_2 + a_5 p_3}, \quad (A)$$

$$\frac{p_2'}{p_3'} = \frac{a_4 p_2 + a_5 p_3}{p_3}$$

wo $p(p_1 p_2 p_3)$ die gegebene Fläche des Complexes und deren Indices bedeuten, und p_1', p_2', p_3' die sogenannten projectiven Indices derselben Fläche, und für die Kanten

$$\frac{r_1'}{r_2'} = \frac{a_4 r_1}{-a_2 r_1 + a_1 r_2}, \quad (B)$$

$$\frac{r_2'}{r_3'} = \frac{a_2 a_5 - a_3 a_4}{(a_2 a_5 - a_3 a_4) r_1 - a_1 a_5 r_2 + a_1 a_4 r_3}$$

wo $r[r_1 r_2 r_3]$ die gegebene Kante des Complexes und deren Indices bedeuten, und r_1', r_2', r_3' die sogenannten projectiven Indices derselben Kante.

Die Zuordnung erweist sich durch die Gleichheit der respectiven Indices. Sind also die Zahlenverhältnisse $p_1 : p_2 : p_3$ und $r_1 : r_2 : r_3$ einander gleich, so sind doch die durch die projectiven Indices bestimmten Raumlagen dieser Fläche (eigentlich der Normale dazu) und Kante nicht die gleichen (d. h. nicht gleich sind die Lagen der Kante und der Flächennormale).

Bezeichnen wir die Axe [001] des Complexes durch C , die in der Fläche (100) befindliche Normale zu derselben durch B und die Normale zur Fläche BC durch A , so haben wir

$$p_1' : p_2' : p_3' = \cos(pA) : \cos(pB) : \cos(pC)$$

$$\text{und} \quad r_1' : r_2' : r_3' = \cos(rA) : \cos(rB) : \cos(rC).$$

Wie gesagt, ist diese Zuordnung durch das Ellipsoidgesetz ausgedrückt (wie dies ganz umständlich in I und III der analytisch-krystallographischen Studien

des Verfassers dargelegt wurde), indem die zugeordneten Flächen und Kanten sich als die conjugirten Diameter und Ebenen des Ellipsoides erweisen.

Die Axen dieses Syngonieellipsoides werden dadurch charakterisirt, dass die conjugirten Elemente zu einander senkrecht stehen. In diesem speciellen Falle sind also nicht nur die Indices dieser Elemente, sondern auch ihre Lagen die gleichen, d. h. für diesen speciellen Fall besteht auch die Gleichheit der projectiven Indices. Bezeichnen wir diese besonderen Richtungen durch $d(d_1 d_2 d_3)$, so finden wir als die sie bestimmenden Gleichungen

$$\frac{a_1 d_1 + a_2 d_2 + a_3 d_3}{a_4 d_2 + a_5 d_3} = \frac{a_4 d_1}{-a_2 d_1 + a_1 d_2} \quad (C)$$

$$d_3 = \frac{(a_2 a_5 - a_3 a_4) d_1 - a_1 a_5 d_2 + a_1 a_4 d_3}{a_2 a_5 - a_3 a_4}$$

Da von diesen drei Zahlen d_1, d_2, d_3 eine beliebig, z. B. $d_3 = 1$ angenommen werden kann, so enthält diese Relation zwei Gleichungen zwischen zwei unbekannten Grössen, welche durch dieselben sich bestimmen lassen. Diese zwei Gleichungen sind aber nicht der ersten, sondern der zweiten Ordnung, und deren (übrigens sehr complicirte) Auflösung giebt drei verschiedene Werthe für diese Zahlen.

Für trikline Krystalle sind diese Werthe sämmtlich irrational, und das bedeutet, dass weder die Axen des Syngonie-Ellipsoids noch die Hauptebenen desselben mögliche Kanten resp. Flächen des Complexes darstellen. Daraus kann wieder der Schluss gezogen werden, dass hier überhaupt wesentlich rechte Winkel vollständig fehlen, d. h. sämmtliche Zonen schiefe sind.

Für monokline Krystalle sind die Coëfficienten a_2 und a_5 gleich Null, und die Gleichungen (C) reduciren sich auf:

$$\frac{a_1 d_1 + a_3 d_3}{a_4 d_2} = \frac{a_4 d_1}{-a_3 a_4 d_1 + a_1 a_4 d_3} \quad (D)$$

Nehmen wir $d_3 = 1$, so erhalten wir daraus:

$$(a_1 d_1 + a_3) (-a_3 a_4 d_1 + a_1 a_4) = a_4 d_1$$

oder $a_1 a_3 d_1^2 + (1 - a_1^2 + a_3^2) d_1 - a_1 a_3 = 0. \quad (E)$

Die Auflösung giebt uns die beiden Wurzeln dieser quadratischen Gleichung d_1' und d_1'' ; weiter finden wir, dass die entsprechenden Werthe für d_2 nur gleich Null sein können. Zum Beweise können wir z. B. die zweiten Theile der Gleichungen (D) durch $(-a_3 a_4 d_1' + a_1 a_4)$ dividiren, und dann erhalten wir zwei Identitäten

$$1) a_2 d_1' + a_3 = \frac{a_4 d_1'}{-a_3 a_4 d_1' + a_1 a_4} \text{ und } 2) a_4 d_2 = \frac{a_1}{-a_3 a_4 d_1' + a_1 a_4} d_2. \quad (F)$$

Die letzte Identität kann nur bei $d_2 = 0$ bestehen (weil die Coëfficienten dabei nicht die gleichen sind).

Für die Ellipsoidaxen erhalten wir also zwei Relationen:

$$d_1' : 0 : 1 \quad \text{und} \quad d_1'' : 0 : 1.$$

Die dritte Ellipsoidaxe wird dann von selbst als $0:4:0$ bestimmt.

Für rhombische Krystalle wird noch $a_3 = 0$, und daraus ergibt sich von selbst der Schluss, dass die Ellipsoidaxen mit den drei senkrechten krystallographischen Axen coincidiren.

Für tetragonale Krystalle erhalten wir noch $a_1 = a_4$, und demgemäss wird das betreffende Ellipsoid zu einem Rotationsellipsoid.

Für hexagonale Krystalle sind folgende Projectivitätsgleichungen gültig¹⁾: für die Flächen

$$p_1':p_2':p_3' = ap_1 + p:ap_2 + p:ap_3 + p \quad (p = p_1 + p_2 + p_3)$$

und für die Kanten

$$r_1':r_2':r_3' = -(a+3)r_1 + r:-(a+3)r_2 + r:-(a+3)r_3 + r \quad (r = r_1 + r_2 + r_3).$$

Die Gleichungen der Ellipsoidaxen werden also:

$$\frac{ad_1 + d}{ad_2 + d} = \frac{(a+3)d_1 - d}{(a+3)d_2 - d} \quad (d = d_1 + d_2 + d_3).$$

$$\frac{ad_2 + d}{ad_3 + d} = \frac{(a+3)d_2 - d}{(a+3)d_3 - d}$$

Für sämtliche solche Flächen und Kanten, für welche $d = d_1 + d_2 + d_3 = 0$, werden diese Gleichungen unbestimmt. Dieser Zone gehört also die Rotationsaxe des Ellipsoids an; folglich ist das Ellipsoid selbst ein Rotationsellipsoid. Da aber diese sämtlichen Flächen der Zone $[111]$ angehören, so ist die betreffende Zonenaxe zugleich die Rotationsaxe des Ellipsoids, und die Fläche (111) die zu ihr senkrechte Symmetrieebene des Ellipsoids.

Endlich erhalten wir als die Gleichungen der Ellipsoidaxen für kubische Krystalle die ganz unbestimmten Gleichungen

$$d_1:d_2:d_3 = d_1:d_2:d_3.$$

Das Ellipsoid reducirt sich somit auf eine Sphäre mit ganz unbestimmten Axen.

Jetzt wenden wir uns der Grundaufgabe der Syngonielehre zu und wollen zeigen, in wie hohem Grade sich die Auflösung dieser Aufgabe auf zonalem Wege und zwar auf Grund des Syngonie-Ellipsoidgesetzes erleichtern lässt.

Diese Aufgabe besteht bekanntlich in Folgendem: Es seien irgend vier Flächen gegeben, von welchen keine drei tautozonal sind; gesucht die Syngonieart des Complexes.

Wie in der Abhandlung »Beitrag zur Syngonielehre« gezeigt wurde, reducirt sich diese Aufgabe auf die Aufsuchung der orthogonalen resp. isotropen Zonen, falls solche wirklich vorhanden sind.

Nun aber ist in dieser Abhandlung auch gezeigt worden, dass jede von zwei besonderen Flächen einer orthogonalen ebenso wie jede Fläche einer isotropen Zone überhaupt Symmetrieebene ist. Somit kann die

¹⁾ Cursus der Krystallographie S. 496.

respective Aufgabe auch so lauten, dass eigentlich die Symmetrieebenen der gegebenen Zonen aufgesucht werden.

Entsprechend den in der Abhandlung »Neue Auffassung der Syngonie« eingeführten Definitionen können wir die verschiedenen Zonenarten noch folgendermassen charakterisiren:

unter einer schiefen Zone wird jede solche verstanden, in welcher sämtliche Flächen (resp. Kanten) singuläre sind;

unter einer orthogonalen Zone wird jede solche verstanden, in welcher nur zwei besondere Flächen als singuläre auftreten und diese zugleich die untereinander senkrechten Symmetrieebenen der Zone sind;

unter einer isotropen Zone wird jede solche verstanden, welche keine singulären Flächen besitzt, sondern wo jede Zonenfläche in Bezug auf jede andere als Symmetrieebene eine ihr symmetrisch gleiche Fläche besitzt. In Bezug auf die Rotationsaxe der Zone sind die gleichen Flächen einer isotropen Zone in einer unendlichen Anzahl vorhanden.

Was speciell eine isotrope Zone betrifft, so ist dieselbe bekanntlich sehr einfach analytisch durch Prüfung der Rationalität der Function der \tan^2 zu constatiren. Wir können aber auch auf graphischem Wege verfahren. Sind drei Zonenflächen a , b und c gegeben, so wollen wir eine derselben (ganz beliebig welche), z. B. c , als Fläche $|40|$ annehmen, und dann, dem Obigen gemäss, die Zone entwickeln, um sofort zu finden, dass die zu c senkrechte Fläche unbedingt eine rationale (d. h. Zonen-)Fläche ist. Dadurch wird der Isotropismus der Zone bestätigt.

Um aber die Zone als eine orthogonale zu bestimmen, müssen wir wenigstens eine der beiden Hauptausgangsflächen bestimmen.

Auf Grund des Satzes über Symmetrieebenen der orthogonalen Zone ist dies aber sehr einfach auf graphischem Wege zu erreichen. Man braucht nur die Zone zu entwickeln. Wenn, wie dies wirklich fast stets für natürliche Krystalle der Fall ist, die gegebenen drei Flächen durch relativ sehr einfache Indices bestimmt sind, so genügt im Allgemeinen die erste Periode seltener zwei Perioden und höchstens die dritte Periode der Entwicklung zu Stande zu bringen, um unter dieser Reihe der erhaltenen Flächenwinkel die gleichen aufzufinden und demgemäss direct eine (also zugleich auch die andere) Hauptfläche zu finden, was übrigens sehr leicht zu verificiren ist.

Wollen wir verschiedenartige Beispiele betrachten.

4. Beispiel. Es seien drei Flächen a , b und c gegeben mit gleichen Winkel $54^{\circ 1}$ ab und bc (Fig. 4).

Der Fläche a legen wir das Symbol $|04|$, der Fläche b das Symbol

4) Die Winkel sind immer nur mit graphischer Genauigkeit angegeben, also nicht genauer als bis auf $\frac{1}{4}$ Grad.

$|11|$ und der Fläche c das Symbol $|40|$ bei. Ziehen wir der Fläche c parallel eine Schnittgerade und führen die Zonenentwicklung aus. In diesem Falle genügt die erste Periode dieser Entwicklung, um die besonderen, zu einander senkrechten Symmetrieflächen $|11|$ und $|1\bar{1}|$ aufzufinden.

2. Beispiel. Die von den gegebenen Flächen gebildeten Winkel sind: $ab = 30^\circ$ und $bc = 34\frac{3}{4}^\circ$ (Fig. 5).

Fig. 4.

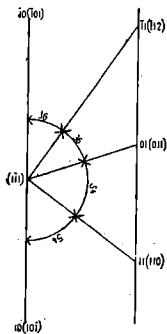


Fig. 5.

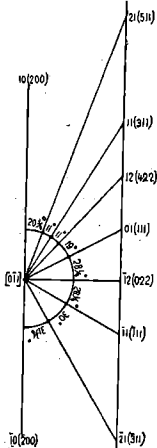


Fig. 6.

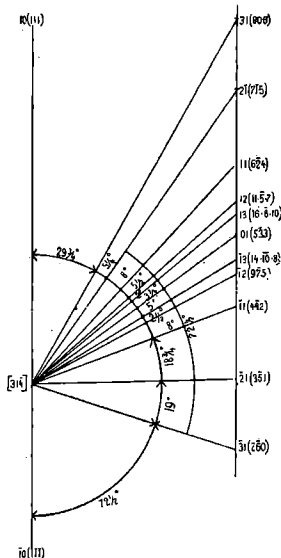
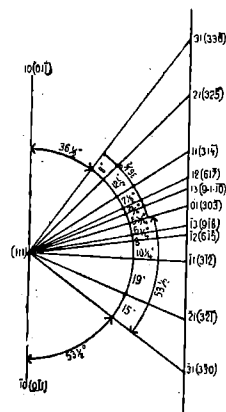


Fig. 7.



Nach der Ausführung der zweiten Periode der Zonenentwicklung kommen schon die besonderen Flächen dieser orthogonalen Zone scharf zum Ausdruck und zwar die Flächen $|12|$ und $|40|$.

3. Beispiel. Die beiden gegebenen Winkel sind $ab = 44\frac{1}{4}^\circ$ und $bc = 43^\circ$ (Fig. 6).

Erst nach dem Zustandekommen der dritten Periode der Zonenentwicklung findet man zwei gleiche Winkel $72\frac{1}{2}^\circ$, welche in der Figur besonders angemerkt worden sind. Dass diese Gleichheit nicht etwa zufällig (und zugleich nur annähernd) ist, davon kann man sich auf dem folgenden Wege vergewissern.

Als eine besondere Fläche der Zone erweist sich dabei die Fläche $|34|$. Nun zieht man die zu derselben senkrechte Ebene und dann findet man direct, dass derselben das Symbol $|71|$ zukommt. Folglich ist dieselbe wirklich eine Zonenfläche.

4. Beispiel. Die beiden gegebenen Winkel sind $ab = 45\frac{1}{2}^\circ$ und $bc = 57^\circ$ (Fig. 7).

In diesem Falle erweist es sich wieder als nöthig, drei Perioden der Zonenentwicklung auszuführen, und dann findet man die gleichen Winkel, welche in der Figur besonders angegeben sind. Die beiden besonderen Flächen kommen dabei zum Vorschein, und zwar mit den Symbolen $[34]$ und $[34]$.

Aus diesen Beispielen, welche einem wirklichen Untersuchungsgange eines Krystalles entnommen sind, sieht man, dass bei noch höherer Periode der Zonenentwicklung es immer schwerer wird, sich in der Aufstellung der besonderen Flächen zu orientiren. Aber es wurden dabei absichtlich die complicirteren Fälle ausgewählt, da bei anderer Auswahl der Ausgangsflächen die Zonenentwicklung sich einfacher gestaltet hätte.

Die betreffenden Beispiele beziehen sich auf eine Beobachtungsreihe, welche schon früher (»Beitrag zur Sygonielehre«) zur Besprechung kam, und zwar auf die nach der Universalmethode bei willkürlicher Orientirung eines Zirkonsplitterchens ausgeführte Messungsreihe (Universalmethode in der Mineralogie und Petrographie in dieser Zeitschrift 21, 657).

Jetzt wollen wir hier den Untersuchungsgang vollständig reproduciren, wie derselbe auf dem nunmehr zu betretenden Wege sich vollziehen lässt. Von Anfang an bis zum Abschlusse ist dieser Untersuchungsgang graphisch durchgeführt worden.

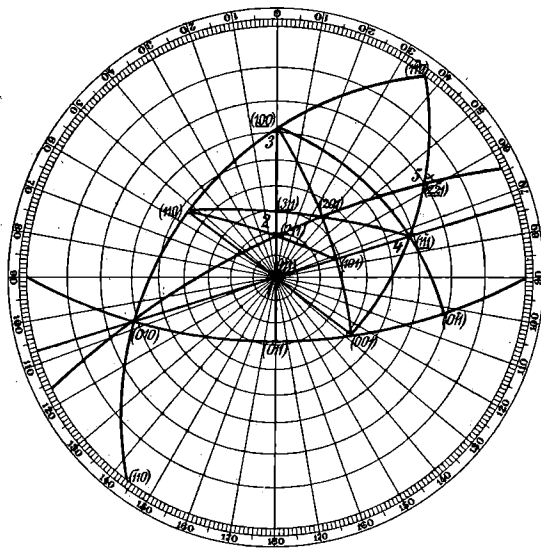
Zur Beobachtung sind fünf Flächen gelangt, welche in der Fig. 8 durch die Ziffern 1, 2, 3, 4 und 5 angegeben werden.

Es giebt eine Zone 1 2 3, welche unmittelbar entwickelt werden konnte, da von derselben drei Flächen zur Beobachtung kamen. Diese Entwicklung erfolgte in der Fig. 5, welche dem oben erwähnten 2. Beispiele entspricht. Die Zone erweist

sich als eine orthogonale; dabei ist die Fläche 3 eine besondere, und die ihr zugeordnete andere besondere Fläche ist in der Fig. 9 als 6 angemerkt.

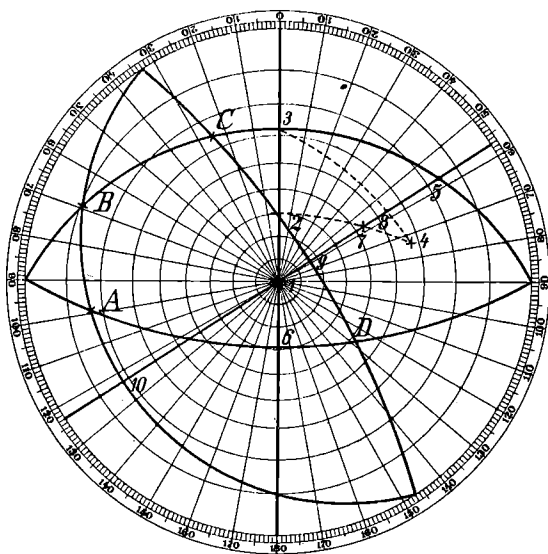
Für die zweite Zone wurde 4 5 ausgewählt und als Ausgangsflächen dieser Zone die Flächen 4 und die Schnittflächen 7 und 8 dieser Zone mit den Zonen 2 4 und 3 4 (Fig. 9).

Fig. 8.



Die Entwicklung dieser Zone ist in der Fig. 6 angegeben. Da auch diese Zone sich als orthogonale erweist, so wird dadurch zugleich nachgewiesen, dass die Syngonie des gegebenen Krystalles nur die tetragonale oder hexagonale sein kann. Als besondere Flächen dieser Zone erweisen

Fig. 9.



sich diejenigen, welche durch 9 und 40 (Fig. 9) bezeichnet worden sind.

Jetzt ist nach diesen Angaben die isotrope Zone aufzufinden.

Zu diesem Zwecke kann man verschiedenartig verfahren.

Es ist die Bemerkung vorzuschicken, dass von den beiden besonderen Flächen eine der isotropen Zone angehören muss, während die andere als Kantenzone betrachtet werden kann, wobei die gegebene Zonenkante als eine

besondere dasteht und der anderen besonderen (also zu ersterer senkrechten) Zone auch die zur isotropen Zone senkrechte Fläche angehört.

Es liegt also ob, zu bestimmen, welche von dem Flächenpaare 3 6 und von dem Flächenpaare 9 10 die zur isotropen Zone gehörenden Flächen sind (später erweist sich, dass diese Flächen 3 resp. 10 sind). Zieht man also in den Punkten 3 und 10 die senkrechten Grosskreisbögen, so schneiden sich dieselben in dem Pole der isotropen Zone, welcher durch *D* bezeichnet worden ist. Dazu gehört eigentlich die Entwicklung der Kantenzone resp. die Bestimmung der von den Flächen 3, 6, 9 und 10 gebildeten Winkel, von welchen einer (und zwar der zwischen 3 und 10 liegende Winkel) auf den Isotropismus der Zone hinweisen muss und dabei zur Bestimmung des Parameters derselben führt.

Man kann aber auch einem anderen Wege folgen, nämlich diese Punkte 3, 6, 9 und 10 als die Pole nehmen und die entsprechenden (zugeordneten) Grosskreisbögen ziehen, welche sich in den Punkten *A*, *B*, *C* und *D* schneiden, von welchen einer der isotropen Zonenaxe angehört.

Nun wählt man ausserdem zwei Kantenzone, indem man (Fig. 40) als solche z. B. die Flächen 1 und 4 auswählt. Die Entwicklung der ersten, welcher die Kanten 1 2, 1 5 und 1 4 angehören, ist in der Fig. 7 angegeben,

und die Entwicklung der zweiten, welcher die Kanten 4 1, 4 2, 4 3 angehören, in der Fig. 4. Als besondere Kanten der ersten Kantenzone erweisen sich 1 6 und 1 7;

als besondere Kanten der zweiten Kantenzone erweisen sich die Kanten 4 2 und 4 6. Die entsprechenden Grosskreisbögen schneiden sich in den vier Punkten A, B, C und D. Vergleicht man diese Punkte mit den entsprechenden Punkten der Fig. 9, so findet man nur einen einzigen gemeinsamen Punkt, und zwar D in beiden Figuren. Der Punkt D ist somit der Pol der isotropen Zonenkante, und man erkennt sofort (z. B. erweist

sich der Winkel $3B$ gleich 45°), dass der Parameter dieser Zone gleich 1 ist, d. h. die Zone tetragonal-isotrop und folglich der Krystall selbst tetragonal ist.

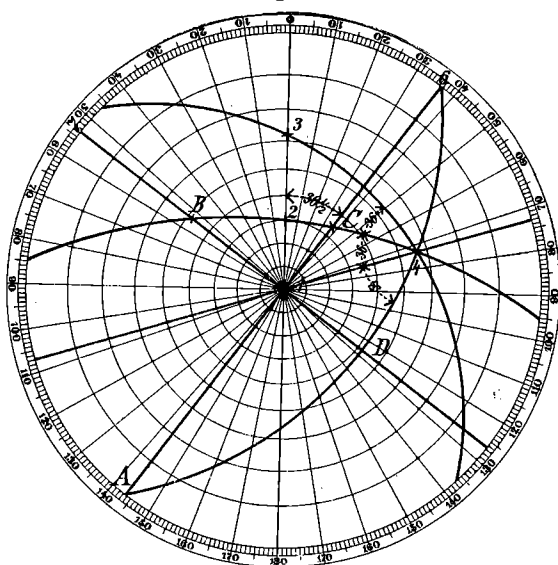
Nachdem der Pol der Fläche (und zugleich der Kante) (001) bestimmt worden ist, müssen einige Flächen zuerst zweckmässige Indices erhalten; die wichtigen Flächen 1 und 4 werden z. B. durch die Indices (111) resp. ($\bar{1}\bar{1}1$) gekennzeichnet, und dann erhält von selbst die wichtige Fläche 3 (welche zu (001) senkrecht steht) die Indices (100). Nun bleibt nach den in der I. Abhandlung angegebenen Regeln die Entwicklung des Flächencomplexes auszuführen, um die Indices der beiden anderen Flächen 2 und 5 zu erhalten.

Diese Entwicklung ist in der Fig. 8 angegeben, und man sieht sofort, dass der Fläche 2 die Indices (311) und der Fläche 5 die Indices ($2\bar{2}1$) zukommen; dabei erweist sich diese unvollkommene Fläche sehr ungenau gemessen, so dass die Ungenauigkeit sogar auf graphischem Wege zum Vorschein kommt.

Die vorgestellte Aufgabe ist somit abgeschlossen.

Aus dem Vorhergehenden ersieht man, wie mannigfaltige Anwendungen dem Syngonie-Ellipsoidgesetz zukommen. Dieses Gesetz ist aber kein em-

Fig. 40.



pirisches und noch weniger ein angenähertes. Es ist eine streng mathematische Folgerung aus dem Grundgesetze der Krystallographie — dem Gesetze der krystallinischen Homogenität, wie dies in einer Reihe von Arbeiten des Verfs. klargestellt wurde.

In dieser Hinsicht ist dasselbe keineswegs den auf verschiedene physikalische Eigenschaften einer Gruppe bezüglichen, auf Grund der Erfahrung aufgestellten Ellipsoidgesetzen nachzustellen. Vielmehr steht im Gegentheil gerade das Syngonie-Ellipsoidgesetz als Prototypus dieser Reihe von Gesetzen da und ertheilt den entsprechenden Erfahrungsgesetzen viel mehr beweisende Kraft, als wirklich nicht nur angenäherten, sondern genau mathematischen Gesetzen.

Es ist eigentlich kein selbständiges, auf keines von allen übrigen Gesetzen zurückzuführendes Gesetz.

Wie das Weiss'sche Zonengesetz, das Gauss'sche Gesetz der Rationalität der Doppelverhältnisse nur andere Formen des Haüy'schen Gesetzes der rationalen Parameter sind, d. h. das Gleiche aussprechen, aber auf verschiedene Begriffe der Krystallographie Bezug haben, so ist das Syngonie-Ellipsoidgesetz nur als andere Ausdrucksform des Gesetzes der Projectivität der Krystallcomplexe aufzufassen. Der Beweis dafür war seitens des Verfs. schon früher erbracht worden (diese Zeitschr. **30**, 18 ff.). Das Haüy'sche und das Gauss'sche Gesetz entsprechen der analytischen, rechnerischen, das Weiss'sche der synthetischen, constructionellen Kraft der menschlichen Vernunft. Die erstere hat die mathematische Analyse, die zweite die Geometrie geschaffen. Denselben beiden entsprechen das Gesetz der Projectivität in analytischer resp. das Syngonie-Ellipsoidgesetz in constructioneller Ausdrucksweise. Demgemäss hat der Verf., auf dem ersten Gesetze fussend, das System der krystallographischen Rechnungen zu Stande gebracht, und das letzte dient als Beweis zu geometrischen Constructionen.

Aus allem Vorhergehenden ersieht man klar, wie grundlegend die Verschiedenheiten zwischen Syngonie- und Symmetrieeigenschaften der Krystalle sind. Es ist ganz unerlaubt, diese beiden Eigenschaftsgruppen der Krystalle mit einander zu verwechseln. Dass aber dies leider bis jetzt nicht genügend berücksichtigt wird, davon kann man sich aus einigen von keiner Seite bestrittenen und ganz frei im allgemeinen Verkehre befindlichen Ausdrücken überzeugen. Es sei z. B. auf die von Mallard eingeführten Ausdrücke »Pseudosymmetrie«, »pseudosymmetrische Krystalle« hingewiesen. Hätten wir es in den durch diese Ausdrücke zu bezeichnenden Erscheinungen wirklich mit Symmetrieeigenschaften der Krystalle zu thun, so wäre es erlaubt, etwa von pseudotetragonal-bipyramidalen resp. pseudo-hexagonal-skalenoëdrischen oder sonstigen pseudosymmetrischen Krystallen zu sprechen, und keineswegs von pseudotetragonalen respective pseudo-

hexagonalen Krystallen, wie man dies wirklich thut, indem eigentlich nicht Symmetrie-, sondern ausschliesslich Syngonieverhältnisse in Betracht kommen. Unter Pseudosymmetrie wird also stets das verstanden, was nur als Pseudosyngonie bezeichnet werden kann.

Unter Pseudosymmetrie kann nur etwas ganz Anderes gemeint werden, und zwar nur so schwache äussere Kennzeichen einer bestimmten Symmetrieart, dass dieselbe von einer anderen bestimmten Symmetrieart kaum zu unterscheiden wäre, wie wenn man etwa z. B. Eisenkies für tetartoëdrisch-pseudododekaëdrisch erklären würde. Speciellen Untersuchungen solcher Verhältnisse sehen wir erst entgegen.

Anhang.

I. Vollständige auf dem Syngonie-Ellipsoidgesetze fussende Herleitung der Syngoniearten.

Wollen wir uns des in vorhergehender Abhandlung von verschiedenen Seiten besprochenen Gesetzes zum Wegweiser bei dieser Ableitung bedienen, so haben wir zu berücksichtigen, dass es drei und nur drei verschiedene Ellipsoidarten giebt, und zwar: a) Ellipsoide mit lauter gleichen Hauptaxen, d. h. die Sphäre, b) Ellipsoide mit zwei einander gleichen Hauptaxen, also Rotationsellipsoide, und c) Ellipsoide mit sämtlich von einander verschiedenen Hauptaxen.

Nun ist leicht zu beweisen, dass dem Falle a) nur eine einzige Syngonieart entsprechen kann.

Durch zwei Grundflächen (100) und (010) wird, dem Obigen gemäss, eine ganz bestimmte und zwar tetragonal-isotrope Zone (Parameter 1) zu Stande gebracht, deren Axe [001] senkrecht zur Complexfläche (001) steht. Dasselbe gilt aber auch für die Zonen [100] und [010]. Aber schon zwei Zonen genügen vollständig, um den Flächencomplex ganz eindeutig zu bestimmen. Zum Beispiel wird die Fläche (111) durch zwei Zonen $\left| \begin{smallmatrix} 110 \\ 001 \end{smallmatrix} \right|$ und $\left| \begin{smallmatrix} 101 \\ 010 \end{smallmatrix} \right|$ ganz genau bestimmt.

Aber die Sphäre als Syngonie-Ellipsoid ist als eine vorübergehende Erscheinung denkbar. Um den Fall der Sphäre als eine besondere Syngonieart aufstellen zu dürfen, muss dieselbe durch etwaige Symmetrieverhältnisse fixirt werden. Bekanntlich ist dazu das Vorhandensein von mehr als einer einzigen Symmetrieaxe mit höherer als Zweizähligkeit genügend, wie dies z. B. bei vier dreizähligen Symmetrieaxen in allen Symmetriearten der kubischen Syngonie wirklich der Fall ist. Sind aber beispielsweise keine Symmetrieelemente vorhanden, so würde diese Sphäre nur eine zufällige vorübergehende Erscheinung gewesen sein, welche schon bei geringster Temperaturänderung als verschwunden zu betrachten ist. Dadurch

wird zugleich der Raum für die unter diese Syngonie fallenden Symmetriearten genau eingeschränkt.

Um von der Sphäre zum Rotationsellipsoid überzugehen, braucht man nur in beliebiger Richtung eine Dilatation (als eine besondere Art der homogenen Deformationen) ausgeführt zu denken. Diese Richtung ist ebenso als eine irrationale, wie als eine rationale oder sogar als Richtung einer höheren Symmetrieaxe denkbar.

Würde eine irrationale Dilatation statthaben, so hätten wir so zu sagen ein irrationales Rotationsellipsoid vor uns gehabt, indem weder eine Fläche der isotropen Zone, noch die zur Zonenaxe senkrechten Flächen mögliche gewesen wären. Zugleich wäre das Vorhandensein irgend welchen Symmetrieelementes (ausser dem Inversionscentrum) unmöglich gewesen. Das Ellipsoid würde dann nicht fixirt sein und als vorübergehende Erscheinung ausser Betracht kommen (trikline Syngonie).

Wäre die Dilatationsrichtung die Richtung einer zweizähligen Symmetrieaxe (resp. die zur wirklichen Symmetrieebene normale Richtung) gewesen, wären aber keine anderen Symmetrieelemente vorhanden, so würde zugleich das Ellipsoid ein rationales gewesen, aber keineswegs in seinem Kreisschnitte, also der isotropen Zone, fixirt sein. Eine noch so geringe Temperaturänderung hätte nicht nur verschiedenartige Dilatationen, sondern sogar eine der Rotationsaxe parallele Verschiebung zur Folge (wie dies vom Verf. wirklich für den Orthoklas bewiesen worden ist), und dann entstünde anstatt des Kreisschnittes eine irrationale Ellipse (d. h. deren Hauptaxen irrational sind), und wir hätten aus dem ganzen Complex nur eine Ellipsoidaxe und die zu ihr senkrechte complexiale Symmetrieebene fixirt gehabt (monokline Syngonie).

Damit die genannte Verschiebung unmöglich gewesen wäre, muss der betreffende Ellipsoidschnitt eine rationale Ellipse sein, d. h. zwei Hauptaxen derselben eine fixirte Lage besitzen. Das ist aber nur möglich, wenn eine dieser Axen eine zweizählige Symmetrieaxe, resp. die zu derselben senkrechte Ebene eine Symmetrieebene gewesen wäre (rhombische Syngonie).

In allen diesen Fällen ist das Rotationsellipsoid nicht fixirt und dessen vorübergehende Erscheinung als eine zufällige zu betrachten. Zum Fixiren desselben muss seine Rotationsaxe zugleich eine mehr als zweizählige Symmetrieaxe gewesen sein. Für Krystalle überhaupt sind aber nur drei-, vier- und sechszählige Symmetrieachsen zulässig.

Nun haben wir gesehen, dass der die dreizählige Symmetrieaxe besitzende Complex identisch ist mit demjenigen, welcher die sechszählige Symmetrieaxe besitzt, indem die charakteristischen Winkel für die isotropen Zonen in beiden Fällen die Winkel 30° und 30° sind. Ein solcher Complex ist also aus dem kubischen durch eine in der Richtung einer dreizähligen Symmetrieaxe ausgeführte Dilatation entstanden denkbar, und wir erhal-

ten ein fixirtes Rotationsellipsoid mit hexagonal-isotroper Zone (hexagonale Sygonie).

Es bleibt der Fall der Dilatation in der Richtung der vierzähligen Symmetrieaxe (resp. vierzähligen Axe der zusammengesetzten Symmetrie) als allein möglicher übrig. Dann entsteht das fixirte Rotationsellipsoid mit tetragonal-isotroper Zone (tetragonale Sygonie).

II. Die ebenen Schnitte des Sygonie-Ellipsoide.

Wollen wir eine Complexfläche $(p_1 p_2 p_3)$ als eine Kantenzone betrachten und dieselbe einer natürlichen Zonenentwicklung unterziehen.

Die natürlichen Hauptausgangskanten sind: 1) $|04| = [0\bar{p}_3 p_2]$ und 2) $|40| = [\bar{p}_3 0 p_1]$. Eine beliebige Zonenkante wird durch die Indices $|mn| = [-np_3; mp_3; mp_2 + np_1]$ ausgedrückt.

In jeder isotropen Zone haben wir jeder Kante r (resp. Fläche) eine andere r' zugeordnet, und diese Zuordnung wird durch die Relation $\alpha_1' : \alpha_2' : \alpha_3' = \left| \begin{smallmatrix} r_2 & r_3 \\ p_2 & p_3 \end{smallmatrix} \right| : \left| \begin{smallmatrix} r_3 & r_1 \\ p_3 & p_1 \end{smallmatrix} \right| : \left| \begin{smallmatrix} r_1 & r_2 \\ p_1 & p_2 \end{smallmatrix} \right|$ angegeben, und zugleich ist dadurch ersichtlich, dass die zugeordnete Kante (resp. Fläche) zu der gegebenen senkrecht steht.

Da aber diese Zuordnung ausschliesslich durch die Indices zum Ausdrucke kommt, so kann dieselbe als von der Zonenart (Zonensygonie) unabhängig betrachtet werden und ist von allgemeinerer Art. Solche Kanten (resp. Flächen) werden jetzt conjugirte genannt. Für nicht isotrope Zonen brauchen die conjugirten Richtungen nicht zu einander senkrecht zu sein.

Trotzdem ist aber nicht ausgeschlossen, dass gewisse conjugirte Richtungen doch zu einander senkrecht sind. Es ist leicht, den Beweis zu liefern, dass es stets möglich ist, gewisse zu einander senkrechte conjugirte Richtungen zu bestimmen. Es ist einleuchtend, dass diese Aufgabe mit der Aufgabe der Bestimmung der Haupttaxen der Schnittellipse des Sygonie-ellipsoide mit der gegebenen Fläche p zusammenfällt.

Der Zonenkante $|mn|$ sei eine andere $|xy|$ conjugirt. Dann findet man:

$$-yp_3 : -xp_3 : xp_2 + yp_1 = \left| \begin{smallmatrix} -np_3 & -mp_3 & mp_2 + np_1 \\ p_1 & p_2 & p_3 \end{smallmatrix} \right|$$

und daraus berechnet man:

$$x : y = -(mp_1 p_2 + np_3^2 + np_1^2) : (mp_3^2 + mp_2^2 + np_1 p_2),$$

$$\text{oder} \quad \frac{x}{y} = -\frac{mp_1 p_2 + n(p_1^2 + p_3^2)}{m(p_2^2 + p_3^2) + np_1 p_2}.$$

Um die Zonenindices $|mn|$ derjenigen Zonenkante zu bestimmen, deren conjugirte zugleich die senkrechte ist, haben wir die Indices p_1, p_2, p_3 durch die projectivischen p_1', p_2', p_3' zu ersetzen und dann die analytische Gleichung der Rechtwinkligkeit aufzustellen, d. h. die Gleichung:

$$\begin{vmatrix} -n\{(a_2a_3-a_3a_4)p_1-a_1a_5p_2+a_1a_4p_3\}-m\{(a_2a_5-a_3a_4)p_1-a_1a_5p_2+a_1a_4p_3\} & \{m(-a_2p_1+a_1p_3)+na_4p_1\} \\ -np_3 & -mp_3 & m(a_4p_2+a_5p_3)+n(a_1p_1+a_2p_2+a_3p_3) \\ a_1p_1+a_2p_2+a_3p_3 & a_4p_2+a_5p_3 & p_3 \end{vmatrix} = 0. \quad (G)$$

Diese Gleichung ist aber eine quadratische in Bezug auf das Verhältniss m/n . Sind die beiden Wurzeln dieser Gleichung die Zahlen x_1 und x_2 , so entsprechen diese Zahlen den Zonenindices derjenigen zwei conjugirten Kanten, welche zu einander senkrecht stehen, d. h. den Haupttaxen der Schnittellipse des Syngonie-Ellipsoids durch die Fläche $p(p_1p_2p_3)$.

Da die Coëfficienten der Projectivitätsgleichungen (die geometrischen Constanten) a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 im Allgemeinen irrationale Zahlen sind, so werden auch die betreffenden Wurzeln im Allgemeinen irrational.

Im Besonderen finden wir für verschiedene Syngoniearten (für sämtliche ausser der triklinen) und bestimmte Schnitte auch rationale Wurzeln. Alle diese Fälle sind so leicht vorauszusehen, dass es kaum nöthig erscheint, diese Gleichung einer speciellen Prüfung zu unterziehen.

Speciell für kubische Syngonie haben wir $a_1 = a_4 = 4$; $a_2 = a_3 = a_5 = 0$, und dann reducirt sich diese Gleichung auf eine Identität

$$\begin{vmatrix} -np_3 & -mp_3 & mp_2 + np_1 \\ -np_3 & -mp_3 & mp_2 + np_1 \\ p_1 & p_2 & p_3 \end{vmatrix} = 0,$$

welche als Ausdruck des Satzes gelten kann, dass sämtliche Schnitte Kreisschnitte sind, d. h. das Ellipsoid ist eine Sphäre und sämtliche Zonen sind isotrope.

Da speciell für hexagonale Syngonie die Projectivitätsgleichungen sind: für die Flächen

$$p_1' : p_2' : p_3' = ap_1 + p : ap_2 + p : ap_3 + p \quad (p = p_1 + p_2 + p_3)$$

und für die Kanten

$$r_1' : r_2' : r_3' = (a+3)r_1 - r : (a+3)r_2 - r : (a+3)r_3 - r \quad (r = r_1 + r_2 + r_3),$$

so muss die Gleichung (G) durch die folgende

$$\begin{vmatrix} -n\{(a+3)p_3-p\} & -m\{(a+3)p_3-p\} & m\{(a+3)p_2-p\} + n\{(a+3)p_1-p\} \\ -n(ap_1+p) & -m(ap_3+p) & m(ap_2+p) + n(ap_1+p) \\ ap_1 + p & ap_2 + p & ap_3 + p \end{vmatrix} = 0 \quad (G')$$

ersetzt werden.

Für die Zone [111] reducirt sich diese Gleichung auf die Identität

$$\begin{vmatrix} -na & -ma & ma + na \\ -n(a+3) & -m(a+3) & m(a+3) + n(a+3) \\ a+3 & a+3 & a+3 \end{vmatrix} = 0,$$

und diese Identität ist der Ausdruck des Isotropismus dieser speciellen Zone.