

# Sull'integrazione dell'Equazione differenziale $\Delta^{2n} = 0$ .

(Di EMILIO ALMANSI, a Torino.)

---

## I.

1. Sia  $f$  una funzione di quante variabili si voglia  $x, y, \dots$ . Rappresentiamo con  $\Delta^2 f$  l'espressione:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \dots$$

Poniamo inoltre:

$$\begin{aligned}\Delta^4 f &= \Delta^2 \Delta^2 f, \\ \Delta^6 f &= \Delta^2 \Delta^2 \Delta^2 f, \text{ ecc. ;}\end{aligned}$$

e in generale con  $\Delta^{2n} f$  indichiamo la funzione che si ottiene eseguendo  $n$  volte, sulla funzione  $f$ , l'operazione rappresentata dal simbolo  $\Delta^2$ .

« Una funzione, regolare in un certo spazio, e che soddisfa all'equazione  $\Delta^{2n} = 0$ , si può, in generale, rappresentare mediante  $n$  funzioni, regolari nello stesso spazio, che soddisfano all'equazione  $\Delta^2 = 0$ . »

Questo teorema, che noi dimostreremo per le funzioni di tre variabili, ma che vale per funzioni di quante variabili si voglia, suggerisce un metodo assai semplice, per la soluzione di alcuni problemi relativi all'equazione  $\Delta^{2n} = 0$ , e, in particolare, all'equazione  $\Delta^4 = 0$ , di cui è nota l'importanza in varie questioni di Fisica matematica, e specialmente nella teoria dell'Elasticità.

2. Consideriamo il prodotto delle due funzioni  $p, q$ , delle variabili  $x, y, z$ , e formiamo l'espressione  $\Delta^2(pq)$ . Si ottiene:

$$\Delta^2(pq) = p \Delta^2 q + q \Delta^2 p + 2 \left( \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\partial q}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial y} \frac{\partial q}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial z} \frac{\partial q}{\partial z} \right).$$

Sia in particolare:

$$p = ax + by + cz + d, \quad (a, b, c, d = \text{cost.}).$$

Si avrà evidentemente:

$$\Delta^2(pq) = p \Delta^2 q + 2 \left( a \frac{\partial q}{\partial x} + b \frac{\partial q}{\partial y} + c \frac{\partial q}{\partial z} \right).$$

Da questa formula si ricava:

$$\Delta^4(pq) = p \Delta^4 q + 4 \left( a \frac{\partial \Delta^2 q}{\partial x} + b \frac{\partial \Delta^2 q}{\partial y} + c \frac{\partial \Delta^2 q}{\partial z} \right), \text{ ecc.}$$

E in generale:

$$\Delta^{2i}(pq) = p \Delta^{2i} q + 2i \left( a \frac{\partial}{\partial x} + b \frac{\partial}{\partial y} + c \frac{\partial}{\partial z} \right) \Delta^{2(i-1)} q. \quad (1)$$

Ora, in luogo di una funzione qualunque come la  $q$ , poniamo una funzione che soddisfi all'equazione  $\Delta^{2(n-1)} = 0$ . Per indicare una funzione che soddisfa all'equazione  $\Delta^{2n} = 0$ , useremo, in generale, una lettera dell'alfabeto greco, coll'indice  $n$ . Seguendo questa notazione porremo:

$$q = \varphi_{n-1}.$$

Sarà dunque:

$$\Delta^{2(n-1)} \varphi_{n-1} = 0;$$

e, a maggior ragione:

$$\Delta^{2n} \varphi_{n-1} = 0.$$

Per conseguenza, se nella formula (1) sostituiamo ad  $i$ , prima  $n-1$ , poi  $n$ , otterremo le due equazioni:

$$\Delta^{2(n-1)}(p \varphi_{n-1}) = \left( A \frac{\partial}{\partial x} + B \frac{\partial}{\partial y} + C \frac{\partial}{\partial z} \right) \Delta^{2(n-2)} \varphi_{n-1}. \quad (A = 2(n-1)a, \text{ ecc.}) \quad (2)$$

$$\Delta^{2n}(p \varphi_{n-1}) = 0. \quad (3)$$

L'equazione (3) mostra che moltiplicando una funzione  $\varphi_{n-1}$ , una funzione, cioè, che soddisfa all'equazione  $\Delta^{2(n-1)} = 0$ , per una funzione lineare  $p$ , si ottiene una funzione che soddisfa all'equazione  $\Delta^{2n} = 0$ , e che potremo chiamare  $\varphi_n$ .

Mediante due funzioni  $\varphi_{n-1}$ ,  $\psi_{n-1}$ , si otterrà pure una funzione  $\varphi_n$ , ponendo:

$$\varphi_n = p \varphi_{n-1} + \psi_{n-1}. \quad (4)$$

Vogliamo ora dimostrare che una funzione  $\varphi_n$ , regolare in uno spazio  $S$ , si può sempre rappresentare con una formula di questo tipo, essendo  $\varphi_{n-1}$  e  $\psi_{n-1}$  funzioni regolari nello stesso spazio, e  $p$  una funzione lineare.

Sulla natura dello spazio  $S$  facciamo questa sola restrizione: che esista almeno una direzione tale che tutte le rette ad essa parallele incontrino in due soli punti la superficie che lo limita.

La funzione lineare  $p$  la prenderemo in modo che le rette:

$$p = \text{cost.}$$

soddisfino a questa condizione. Lo stesso dicasi per le altre funzioni lineari, che introdurremo nel corso della dimostrazione.

Si tratta di far vedere che, data la funzione  $\varphi_n$ , si può sempre determinare la funzione  $\varphi_{n-1}$ , regolare in  $S$ , in modo che sia:

$$\left. \begin{aligned} \Delta^{2(n-1)} \varphi_{n-1} &= 0, \\ \Delta^{2(n-1)} (p \varphi_{n-1} - \varphi_n) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

La prima di queste due equazioni possiamo scriverla:

$$\Delta^2 \Delta^{2(n-2)} \varphi_{n-1} = 0; \quad (6)$$

e la seconda, ricordando la formula (2):

$$\left( A \frac{\partial}{\partial x} + B \frac{\partial}{\partial y} + C \frac{\partial}{\partial z} \right) \Delta^{2(n-2)} \varphi_{n-1} = \Delta^{2(n-1)} \varphi_n. \quad (7)$$

Poniamo:

$$\Delta^{2(n-1)} \varphi_n = \sigma_1, \quad \Delta^{2(n-2)} \varphi_{n-1} = \tau_1.$$

Si avranno le due equazioni:

$$\left. \begin{aligned} \Delta^2 \tau_1 &= 0, \\ \left( A \frac{\partial}{\partial x} + B \frac{\partial}{\partial y} + C \frac{\partial}{\partial z} \right) \tau_1 &= \sigma_1. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Alle variabili  $x, y, z$ , sostituiamo tre nuove variabili  $u, v, w$ ; e questa sostituzione corrisponda, geometricamente, a riferire lo spazio a tre nuovi assi ortogonali, il primo dei quali abbia per coseni di direzione i rapporti:

$$\frac{A}{R}, \frac{B}{R}, \frac{C}{R},$$

essendo  $R = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$ . Con questa sostituzione l'equazione  $\Delta^2 \tau_1 = 0$  non cambia. La seconda delle (8) diventa:

$$\frac{d \tau_1}{d u} = R \sigma_1.$$

Per ottenere una funzione che soddisfi a queste due equazioni, prendiamo da prima la funzione:

$$\tau' = R \int \sigma_1 d u.$$

L'integrazione s'intende fatta lungo una retta  $v = \text{cost.}$ ,  $w = \text{cost.}$ , a cominciare dal punto in cui essa incontra la superficie che limita lo spazio  $S$ . La funzione  $\tau'$ , così ottenuta, è regolare in questo spazio, e soddisfa all'equazione:

$$\frac{\partial \tau'}{\partial u} = R \sigma_1;$$

d'onde si ricava:

$$\frac{\partial}{\partial u} \Delta^2 \tau' = 0,$$

ossia:

$$\Delta^2 \tau' = f(v, w).$$

Prendiamo poi una funzione  $\tau''$  delle sole variabili  $v, w$ , regolare anch'essa, e tale che si abbia:

$$\Delta^2 \tau'' = -f(v, w);$$

e poniamo:

$$\tau_1 = \tau' + \tau''.$$

La funzione  $\tau_1$  così ottenuta soddisfa alle due equazioni:

$$\Delta^2 \tau_1 = 0, \quad \frac{\partial \tau_1}{\partial u} = R \sigma_1, \quad (9)$$

e quindi alle (8): ed è regolare nello spazio  $S$ .

Se ora prendiamo una funzione  $\varphi_{n-1}$ , regolare in  $S$ , che soddisfi all'equazione:

$$\Delta^{2(n-2)} \varphi_{n-1} = \tau_1,$$

essa soddisferà alle equazioni (6) e (7), ossia alle (5). La formula (4) è così dimostrata.

Nel seguito della dimostrazione indicheremo, in generale, con  $p^{(i)}$  il prodotto di  $i$  funzioni lineari. Perciò chiameremo  $p^{(1)}$  la funzione  $p$ . E si avrà:

$$\varphi_n = p^{(1)} \varphi_{n-1} + \psi_{n-1}.$$

Ragionando ora sulla funzione  $\varphi_{n-1}$  come si è ragionato sulla funzione  $\varphi_n$ , potremo porre:

$$\varphi_{n-1} = p^{(1)'} \varphi_{n-2} + \psi_{n-2},$$

essendo  $p^{(1)'}$  una nuova funzione lineare. Sarà quindi:

$$\varphi_n = p^{(1)} p^{(1)'} \varphi_{n-2} + (p^{(1)} \psi_{n-2} + \psi_{n-1}).$$

La funzione in parentesi soddisfa all'equazione  $\Delta^{2(n-1)} = 0$ , e potremo indicarla con  $\psi'_{n-1}$ . Il prodotto di due funzioni lineari  $p^{(1)} p^{(1)'}$  lo indicheremo con  $p^{(2)}$ . Si avrà così:

$$\varphi_n = p^{(2)} \varphi_{n-2} + \psi'_{n-1}.$$

Analogamente, posto  $\varphi_{n-2} = p^{(2)'} \varphi_{n-3} + \psi_{n-3}$ , otterremo:

$$\varphi_n = p^{(2)} p^{(2)'} \varphi_{n-3} + \psi'_{n-1}, \text{ ecc.}$$

E finalmente:

$$\varphi_n = p^{(n-1)} \varphi_1 + \psi_{n-1}^{[n-2]}.$$

Così abbiamo rappresentata una funzione che soddisfa all'equazione  $\Delta^{2n} = 0$ , mediante una funzione che soddisfa all'equazione  $\Delta^2 = 0$ , ed una che soddisfa all'equazione  $\Delta^{2(n-1)} = 0$ , tutte regolari nello spazio  $S$ .

Per semplicità indicheremo con  $\theta_{n-1}$  la funzione  $\psi_{n-1}^{[n-2]}$ . Dovendo poi introdurre altre funzioni  $\varphi_1$ , chiameremo  $\varphi'_1$  quella che compare nella formula precedente. Si avrà:

$$\varphi_n = p^{(n-1)} \varphi'_1 + \theta_{n-1}.$$

In modo analogo si troverebbe:

$$\theta_{n-1} = p^{(n-2)} \varphi_1'' + \theta_{n-2},$$

$$\theta_{n-2} = p^{(n-3)} \varphi_1''' + \theta_{n-3},$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\theta_2 = p^{(4)} \varphi_1^{[n-1]} + \theta_1.$$

Sommando tutte queste equazioni, e scrivendo, per uniformità di notazione,  $\varphi_i^{(n)}$  in luogo di  $\theta_i$ , si ottiene la formula:

$$\varphi_n = p^{(n-1)} \varphi_1' + p^{(n-2)} \varphi_1'' + \dots + p^{(1)} \varphi_1^{[n-1]} + \varphi_1^{[n]}, \quad (10)$$

colla quale il teorema enunciato in principio resta dimostrato. Esso infatti esprime, nello spazio  $S$ , la funzione regolare  $\varphi_n$ , mediante le  $n$  funzioni  $\varphi_1'$ ,  $\varphi_1''$ , ...  $\varphi_1^{[n]}$ , regolari anch'esse, e che soddisfano all'equazione  $\Delta^2 = 0$ .

Come risulta dalla dimostrazione, il teorema sussiste per funzioni di quante variabili si voglia.

3. La formula (10) vale anche per un altro tipo di funzioni  $p$ .

Consideriamo infatti il prodotto delle due funzioni  $p$ ,  $\varphi_{n-1}$ , essendo ora:

$$p = r^2 - R^2, \quad (r^2 = x^2 + y^2 + z^2, R = \text{cost.}).$$

Poichè  $x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} + z \frac{\partial}{\partial z} = r \frac{\partial}{\partial r}$ , sarà evidentemente:

$$\Delta^2 (p \varphi_{n-1}) = p \Delta^2 \varphi_{n-1} + 6 \varphi_{n-1} + 4 r \frac{\partial \varphi_{n-1}}{\partial r},$$

$$\Delta^4 (p \varphi_{n-1}) = p \Delta^4 \varphi_{n-1} + 20 \Delta^2 \varphi_{n-1} + 8 r \frac{\partial \Delta^2 \varphi_{n-1}}{\partial r}, \text{ ecc. ;}$$

e in generale:

$$\Delta^{2i} (p \varphi_{n-1}) = p \Delta^{2i} \varphi_{n-1} + A_i r \frac{\partial \Delta^{2(i-1)} \varphi_{n-1}}{\partial r} + B_i \Delta^{2(i-1)} \varphi_{n-1},$$

ove  $A_i$ ,  $B_i$ , sono costanti positive. Se in luogo di  $i$  poniamo, prima  $n-1$ , poi  $n$ , otterremo le due formule:

$$\left. \begin{aligned} \Delta^{2(n-1)} (p \varphi_{n-1}) &= A r \frac{\partial \Delta^{2(n-2)} \varphi_{n-1}}{\partial r} + B \Delta^{2(n-2)} \varphi_{n-1}, \quad (A = A_{n-1}, B = B_{n-1}), \\ \Delta^{2n} (p \varphi_{n-1}) &= 0. \end{aligned} \right\} (11)$$

Come nel caso precedente, si tratta di dimostrare che data la funzione  $\varphi_n$ , si può sempre trovare una funzione  $\varphi_{n-1}$ , regolare in  $S$ , e che soddisfa alle due equazioni:

$$\left. \begin{aligned} \Delta^{2(n-1)} \varphi_{n-1} &= 0, \\ \Delta^{2(n-1)} (p \varphi_{n-1} - \varphi_n) &= 0. \end{aligned} \right\} (12)$$

In questo caso faremo la seguente restrizione sulla natura dello spazio  $S$ , e sulla posizione dell'origine delle coordinate: che cioè questo punto appar-

tenga allo spazio  $S$ , e che ogni retta uscente da esso, incontri in un sol punto la superficie che limita quello spazio.

Se queste condizioni non sono soddisfatte, potranno esistere delle funzioni  $\varphi_n$ , che non sono rappresentabili per mezzo di  $n$  funzioni  $\varphi_i$ , regolari nello spazio  $S$ : come vedremo in seguito, trattando un caso particolare.

Le equazioni (12) possono scriversi:

$$\Delta^2 \Delta^{2(n-2)} \varphi_{n-1} = 0, \quad (13)$$

$$r \frac{\partial \Delta^{2(n-2)} \varphi_{n-1}}{\partial r} + \frac{B}{A} \Delta^{2(n-2)} \varphi_{n-1} = \frac{1}{A} \Delta^{2(n-1)} \varphi_n, \quad (\text{per la (11)}). \quad (14)$$

Posto:

$$\frac{1}{A} \Delta^{2(n-2)} \varphi_{n-1} = \sigma_1, \quad \frac{B}{A} = k, \quad (15)$$

$$\Delta^{2(n-2)} \varphi_{n-1} = \tau_1,$$

si avranno le due equazioni:

$$\Delta^2 \tau_1 = 0, \quad r \frac{\partial \tau_1}{\partial r} + k \tau_1 = \sigma_1, \quad (\Delta^2 \sigma_1 = 0). \quad (16)$$

Ma queste due equazioni sono soddisfatte, se poniamo:

$$\tau_1 = \frac{1}{r^k} \int_0^r r^{k-1} \sigma_1 dr;$$

e la funzione  $\tau_1$ , così ottenuta, è finita e continua in tutto lo spazio in cui è tale la  $\sigma_1$ .

Trovata la funzione  $\tau_1$ , dall'equazione (15) potremo sempre ricavare una funzione regolare  $\varphi_{n-1}$ , che soddisferà alle equazioni (13) e (14), e quindi alle (12).

Anche in questo caso, dunque, data la funzione  $\varphi_n$ , si può sempre porre:

$$\varphi_n = p \varphi_{n-1} + \psi_{n-1},$$

essendo  $\varphi_{n-1}$ ,  $\psi_{n-1}$ , funzioni regolari nello spazio  $S$ .

Il seguito della dimostrazione non differisce dal caso precedente. Indicando in generale con  $p^{(i)}$  il prodotto di  $i$  funzioni del tipo  $r^2 - R^2$ , si otterrà una formula identica alla (10).

Le costanti  $R$  che compariscono nelle  $p$ , si potranno prendere ad arbitrio.

## II.

4. Daremo alcune applicazioni del teorema dimostrato.

In primo luogo, proponiamoci di stabilire l'integrale generale dell'equazione:

$$\Delta^4 \Phi = 0 \quad (*).$$

Sopra una porzione  $\sigma$  del piano  $z = 0$ , si abbia:

$$\Phi = k(x, y), \quad \frac{\partial \Phi}{\partial z} = \lambda(x, y), \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = \mu(x, y), \quad \frac{\partial^3 \Phi}{\partial z^3} = \nu(x, y),$$

ove le quattro funzioni  $k, \lambda, \mu, \nu$  delle variabili  $x, y$ , si suppongono date. Supporremo inoltre che queste funzioni sieno regolari nell'area  $\sigma$ , e che delle funzioni  $k$  e  $\lambda$  sieno regolari anche le derivate prime e seconde.

Ricordiamo come viene espresso l'integrale generale dell'equazione  $\Delta^2 \varphi = 0$ . Se  $\tau, \nu$ , sono due funzioni delle variabili complesse:

$$\xi_1 = x + i r \cos \theta, \quad \xi_2 = y + i r \sin \theta,$$

reali per i valori reali di queste variabili, e regolari per i valori di  $x$  ed  $y$  interni a  $\tau$ , esso è dato dalla formula (\*\*):

$$\varphi = \frac{1}{2\pi} \frac{d}{dz} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^z \tau(\xi_1, \xi_2) \frac{r dr}{\sqrt{z^2 - r^2}} + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^z \nu(\xi_1, \xi_2) \frac{r dr}{\sqrt{z^2 - r^2}}, \quad (17)$$

la quale rappresenta una funzione finita e continua, insieme alle sue derivate, nello spazio occupato da un cilindro simmetrico rispetto al piano  $z = 0$ , avente per base  $\sigma$ , e per altezza  $2R$ , essendo  $R$  il minimo raggio di convergenza dei suddetti elementi. Per i punti di  $\sigma$  risulta:

$$\varphi = \tau(x, y), \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \nu(x, y).$$

Ciò premesso, veniamo all'equazione  $\Delta^4 \Phi = 0$ .

(\*) D'ora in avanti tralascieremo gl'indici 1, 2, ..., coi quali fin qui abbiamo contrassegnate le funzioni che soddisfano alle equazioni  $\Delta^2 = 0$ ,  $\Delta^4 = 0$ , ecc.

(\*\*) Questa formula, che è una conseguenza di quella del Poisson, si trova nella Nota del prof. VOLTERRA, *Esercizi di fisica matematica*. Rivista di Matematica, vol. IV, a. 1891.



Potremo rappresentare la funzione  $\Phi$ , mediante due funzioni  $\varphi$ ,  $\psi$ , che soddisfano all'equazione  $\Delta^2 = 0$ , ponendo:

$$\Phi = z\varphi + \psi; \quad (18)$$

d'onde si ricava:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial z} &= z \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \varphi + \frac{\partial \psi}{\partial z}, \\ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} &= z \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + 2 \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}, \\ \frac{\partial^3 \Phi}{\partial z^3} &= z \frac{\partial^3 \varphi}{\partial z^3} + 3 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + \frac{\partial^3 \psi}{\partial z^3}. \end{aligned}$$

Sulla porzione  $\sigma$  del piano  $z=0$ , sarà dunque:

$$\psi = k, \quad (19)$$

$$\varphi + \frac{\partial \psi}{\partial z} = \lambda, \quad (20)$$

$$2 \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = \mu, \quad (21)$$

$$3 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + \frac{\partial^3 \psi}{\partial z^3} = \nu. \quad (22)$$

Si tratta di determinare la funzione  $z\varphi + \psi$ , in modo che nei punti di  $\sigma$  siano soddisfatte queste condizioni.

Perciò osserviamo che si ha identicamente:

$$\Phi(x, y, z) = \int_0^z \frac{\partial \Phi}{\partial z} dz + \Phi(x, y, 0);$$

ossia, per la formula (18):

$$\Phi(x, y, z) = \int_0^z \left( z \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \varphi + \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) dz + \psi(x, y, 0).$$

Posto:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = U, \quad \varphi + \frac{\partial \psi}{\partial z} = V,$$

si avrà:

$$\Phi(x, y, z) = \int_0^z (z U + V) dz + \psi(x, y, 0). \quad (23)$$

La funzione  $\psi(x, y, 0)$ , nell'area  $\sigma$ , è data dalla prima delle ( $\alpha$ ). Vediamo ora di determinare le funzioni  $U, V$ . Esse soddisfano, come la  $\varphi$  e la  $\psi$ , all'equazione  $\Delta^2 = 0$ . Dalle ( $\alpha$ ) ricaveremo facilmente, per i punti di  $\sigma$ , i valori che assumono esse, e le loro derivate rispetto a  $z$ .

Intanto la (20) ci dà:

$$V = \lambda. \quad (24)$$

Poniamo, per brevità:

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

L'equazione  $\Delta^2 \psi = 0$  potrà allora scriversi:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = -\nabla^2 \psi.$$

Dunque, nei punti di  $\sigma$ , si avrà per la (19):

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = -\nabla^2 k.$$

Dal confronto di questa formula colla (21) si ricava:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{1}{2} (\mu + \nabla^2 k),$$

e:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = \frac{1}{2} (\mu - \nabla^2 k);$$

ossia:

$$U = \frac{1}{2} (\mu + \nabla^2 k), \quad (25)$$

$$\frac{\partial V}{\partial z} = \frac{1}{2} (\mu - \nabla^2 k). \quad (26)$$

Finalmente dalla formula (20) si deduce:

$$\nabla^2 \varphi + \frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial z} = \nabla^2 \lambda,$$

ossia, poichè  $\Delta^2 \varphi = 0$ ,  $\Delta^2 \psi = 0$ :

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = -\nabla^2 \lambda;$$

e questa, combinata colla (22), dà:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = \frac{1}{2} (\nu + \nabla^2 \lambda),$$

ovvero:

$$\frac{\partial U}{\partial z} = \frac{1}{2} (\nu + \nabla^2 \lambda). \quad (27)$$

Riunendo le formule (24), (25), (26), (27), abbiamo dunque, per la porzione  $\sigma$  del piano  $z = 0$ :

$$U = \frac{1}{2} (\mu + \nabla^2 k), \quad V = \lambda,$$

$$\frac{\partial U}{\partial z} = \frac{1}{2} (\nu + \nabla^2 \lambda), \quad \frac{\partial V}{\partial z} = \frac{1}{2} (\mu - \nabla^2 k).$$

Si avranno quindi le due formule, analoghe alla (17):

$$U = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial z} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^z (\mu + \nabla^2 k) \frac{r dr}{\sqrt{z^2 - r^2}} + \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^z (\nu + \nabla^2 \lambda) \frac{r dr}{\sqrt{z^2 - r^2}},$$

$$V = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial z} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^z \lambda \frac{r dr}{\sqrt{z^2 - r^2}} + \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^z (\mu - \nabla^2 k) \frac{r dr}{\sqrt{z^2 - r^2}},$$

le quali varranno per lo spazio occupato da un certo cilindro  $S$ , simmetrico rispetto al piano  $z = 0$ , avente per base  $\sigma$ . In queste formule si deve intendere, che al posto delle variabili reali  $x, y$ , nelle funzioni  $\lambda, \mu, \nu, \nabla^2 \lambda, \nabla^2 k$ , si sieno introdotte le variabili complesse  $\xi_1, \xi_2$ .

Sostituendo ora queste espressioni delle funzioni  $U, V$ , nella formula (23), e ponendo in questa  $k(x, y)$  in luogo di  $\psi(x, y, 0)$ , otterremo l'integrale

generale cercato, sotto la forma:

$$\begin{aligned} \Phi = & \frac{1}{4\pi} \int_0^z \left[ z \left\{ \frac{\partial}{\partial z} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^z (\mu + \nabla^2 k) \frac{r dr}{\sqrt{z^2 - r^2}} + \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^z (\nu + \nabla^2 \lambda) \frac{r dr}{\sqrt{z^2 - r^2}} \right\} + \right. \\ & \left. + 2 \frac{\partial}{\partial z} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^z \lambda \frac{r dr}{\sqrt{z^2 - r^2}} + \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^z (\mu - \nabla^2 k) \frac{r dr}{\sqrt{z^2 - r^2}} \right] dz + k(x, y). \end{aligned}$$

La funzione rappresentata da questa formula, sarà finita e continua insieme alle sue derivate, in tutti i punti del cilindro  $S$ . Ma potrà venir prolungata anche fuori di esso, prendendo un'area piana  $\sigma'$ , compresa in quel cilindro, come base di un altro cilindro  $S'$ ; e così proseguendo fin dove sarà possibile.

Si verifica senza difficoltà che la funzione  $\Phi$ , così espressa, soddisfa effettivamente a tutte le condizioni richieste.

Con un procedimento analogo a quello esposto si possono trovare gl'integrali generali delle equazioni  $\Delta^6 \Phi = 0$ ,  $\Delta^8 \Phi = 0$ , ecc.

5. Un'altra applicazione del teorema che abbiamo dimostrato si presenta nella ricerca di quegli integrali particolari dell'equazione  $\Delta^{2n} = 0$ , che devono soddisfare a certe condizioni ai limiti.

Consideriamo, come primo esempio, il seguente problema:

« *Determinare nello spazio limitato da un circolo di raggio  $R$ , una funzione regolare  $\psi$ , che soddisfi all'equazione  $\Delta^{2n} = 0$ , dati al contorno i valori  $u_0, u_1, u_2, \dots, u_{n-1}$ , della funzione stessa, e delle sue derivate d'ordine  $1, 2, \dots, n-1$ , rispetto alla normale interna.* »

Premettiamo la seguente osservazione. Se la funzione  $\varphi$  soddisfa all'equazione  $\Delta^2 \varphi = 0$ , si ha pure:

$$\Delta^2 \left( r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) = 0,$$

e quindi ancora:

$$\Delta^2 \left( r^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} \right) = \Delta^2 \left\{ r \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \varphi}{\partial r} - \varphi \right) \right\} = 0, \text{ ecc.}$$

E in generale, per qualunque valore di  $m$ :

$$\Delta^2 \left( r^m \frac{\partial^m \varphi}{\partial r^m} \right) = 0. \quad (28)$$

Veniamo ora alla funzione  $\psi$ . La rappresenteremo con  $n$  funzioni  $\varphi, \varphi', \varphi'', \dots, \varphi^{(n-1)}$ , regolari entro il circolo di raggio  $R$ , e che soddisfano all'equazione  $\Delta^2 = 0$ , mediante la formula:

$$\psi = \sum_{h=0}^{n-1} (r^2 - R^2)^h \varphi^{(h)}. \quad \begin{array}{l} (r^2 = x^2 + y^2) \\ (\varphi_0 = \varphi) \end{array} \quad (29)$$

Le condizioni al contorno potremo scriverle:

$$\psi_{r=R} = u_0, \quad \left[ \frac{\partial^i \psi}{\partial r^i} \right]_{r=R} = -u_i, \quad (i = 1, 2, \dots, n-1)$$

La prima di queste formule, supponendo l'origine delle coordinate situata nel centro del cerchio, dà evidentemente:

$$\varphi_{r=R} = u_0;$$

e poichè la funzione  $\varphi$  è regolare entro il cerchio, e soddisfa all'equazione  $\Delta^2 = 0$ , sarà, per una nota formula, nel punto di coordinate  $r, \theta$ , misurando l'angolo  $\theta$  da una retta fissa:

$$\varphi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(R^2 - r^2) u_0}{R^2 + r^2 - 2Rr \cos(\alpha - \theta)} d\alpha, \quad (30)$$

ove  $u_0$  è il valore della funzione  $\varphi$ , nel punto del contorno corrispondente all'angolo  $\alpha$ .

Ora supponiamo che tenendo conto delle condizioni al contorno, espresse dalle  $i$  formule:

$$\psi_{r=R} = u_0, \quad \left[ \frac{\partial \psi}{\partial r} \right]_{r=R} = -u_1, \dots, \quad \left[ \frac{\partial^{i-1} \psi}{\partial r^{i-1}} \right]_{r=R} = -u_{i-1},$$

si sieno determinate le  $i$  funzioni:

$$\varphi, \varphi', \dots, \varphi^{(i-1)}.$$

Dico che tenendo conto della condizione espressa della formula:

$$\left[ \frac{\partial^i \psi}{\partial r^i} \right]_{r=R} = -u_i,$$

si può determinare la funzione  $\varphi^{(i)}$ .

Perciò in quest'ultima formula poniamo, al posto di  $\psi$ , la sua espressione data dalla (29). Avremo:

$$\left[ \sum_{h=0}^{n-1} \frac{\partial^i}{\partial r^i} (r^2 - R^2)^h \varphi^{(h)} \right]_{r=R} = -u_i.$$

La somma che compare nel primo membro scomponiamola in tre parti. Consideriamo, in primo luogo, i termini per i quali  $h$  è maggiore di  $i$ . Essi, facendo  $r = R$ , si annulleranno, giacchè la funzione  $(r^2 - R^2)^h \varphi^{[h]}$ , derivata  $i$  volte rispetto ad  $r$ , conterrà ancora il fattore  $r^2 - R^2$ .

Consideriamo poi il termine, per il quale  $h = i$ , ossia:

$$\frac{\partial^i}{\partial r^i} (r^2 - R^2)^i \varphi^{[i]}.$$

Da questo si otterrà l'unico termine:

$$\left[ \frac{\partial^i}{\partial r^i} (r^2 - R^2)^i \right]_{r=R} \cdot \varphi^{[i]}_{r=R},$$

che scriveremo per brevità:

$$A_i \varphi^{[i]}_{r=R}, \quad (A_i = i! 2^i R^i).$$

Finalmente i termini per i quali  $h$  è minore di  $i$ , facendo  $r = R$ , daranno luogo a dei termini nulli, e ad un certo numero di termini del tipo:

$$C \frac{\partial^m \varphi^{[h]}}{\partial r^m},$$

ove le  $C$  sono costanti che nascono dal porre  $r = R$ , nelle derivate rispetto ad  $r$  delle funzioni  $(r^2 - R^2)^h$ .

Avremo dunque la formula:

$$\left[ A_i \varphi^{[i]} + \sum C \frac{\partial^m \varphi^{[h]}}{\partial r^m} \right]_{r=R} = -u_i, \quad (h < i):$$

e non ci occupiamo di cercare quale sono precisamente i termini che compariscono nella somma del primo membro. Nei casi particolari questa ricerca, come vedremo meglio con un esempio, non può presentare alcuna difficoltà.

Se in luogo delle costanti  $C$ , introduciamo le costanti  $B R^m$ , potremo scrivere:

$$\left[ A_i \varphi^{[i]} + \sum B r^m \frac{\partial^m \varphi^{[h]}}{\partial r^m} \right]_{r=R} = -u_i,$$

Ma, ricordando la formula (28), si vede che la funzione chiusa in parentesi soddisfa all'equazione  $\Delta^2 = 0$ . E poichè nei punti del contorno essa diventa uguale a  $-u_i$ , sarà nel punto di coordinate  $r, \theta$ :

$$A_i \varphi^{[i]} + \sum B r^m \frac{\partial^m \varphi^{[h]}}{\partial r^m} = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(r^2 - R^2) u_i}{R^2 + r^2 - 2Rr \cos(\alpha - \theta)} d\alpha,$$

d'onde si ricava:

$$\varphi^{i1} = -\frac{1}{A_i} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(r^2 - R^2) u_i}{R^2 + r^2 - 2Rr \cos(\alpha - \theta)} d\alpha + \Sigma B r^m \frac{\partial^m \varphi^{h1}}{\partial r^m} \right\}. \quad (h < i)$$

Questa formula risolve il problema: essa infatti ci dà la funzione  $\varphi^{i1}$ , espressa mediante un integrale definito, che contiene quantità note, e le funzioni  $\varphi^{h1}$  ( $h < i$ ), che abbiamo supposto già determinate. La prima di esse, cioè la  $\varphi$  è data dalla formula (30).

6. Come applicazione di questo procedimento, consideriamo un caso particolare, che è poi il più notevole:

« Si vuol determinare la funzione  $\Psi$ , regolare entro il cerchio di raggio  $R$ , e che soddisfa all'equazione  $\Delta^4 \Psi = 0$ , quando si conosca per ogni punto del contorno il valore  $u_0$  della funzione, e il valore  $u_1$  della sua derivata rispetto alla normale interna. »

Porremo:

$$\psi = \varphi + (r^2 - R^2) \varphi', \quad (\Delta^2 \varphi = \Delta^2 \varphi' = 0). \quad (31)$$

Sarà:

$$\varphi_{r=R} = u_0,$$

e quindi nel punto  $(r, \theta)$ :

$$\varphi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(R^2 - r^2) u_0}{R^2 + r^2 - 2Rr \cos(\alpha - \theta)} d\alpha;$$

e inoltre:

$$\left[ 2R\varphi' + \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right]_{r=R} = -u_1,$$

ossia:

$$\left[ 2R\varphi' + \frac{1}{R} r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right]_{r=R} = -u_1;$$

e per conseguenza, nel punto  $(r, \theta)$ :

$$\varphi' = -\frac{1}{2R} \left\{ \frac{r}{R} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(R^2 - r^2) u_i}{R^2 + r^2 - 2Rr \cos(\alpha - \theta)} d\alpha \right\}.$$

In questa formula porremo, al posto di  $\varphi$ , l'espressione trovata sopra: poi sostituiamo nella (31), a  $\varphi$  e  $\varphi'$ , le loro espressioni.

Si otterrà così la formula finale (\*):

$$\psi = \frac{1}{4\pi R} \int_0^{2\pi} \frac{(R^2 - r^2)^2 u_0}{R^2 + r^2 - 2Rr \cos(\alpha - \theta)} d\alpha +$$

$$+ \frac{1}{2\pi R} \int_0^{2\pi} \frac{(R^2 + r^2)(R - r \cos \theta) u_i}{\{R^2 + r^2 - 2Rr \cos(\alpha - \theta)\}^2} d\alpha,$$

colla quale il problema è risoluto.

### III.

7. In questo capitolo ci occuperemo di un problema analogo a quello risoluto nel paragrafo precedente, considerando ora lo spazio limitato non più da un sol circolo, ma da due circoli concentrici, che chiameremo  $C$ ,  $C'$ , di raggi  $R$ ,  $R'$  ( $R > R'$ ).

È noto che nello stesso spazio si determina facilmente, la funzione armonica  $\varphi$ , che assume sopra i due circoli  $C$ ,  $C'$ , due date successioni di valori  $\sigma$ ,  $\sigma'$  quando queste si possono rappresentare mediante serie di FOURIER. Si ottiene allora la funzione  $\varphi$  espressa, in coordinate polari  $r$ ,  $\theta$ , da una formula del tipo:

$$\varphi = \alpha + \alpha_0 \log r + \sum_1^{\infty} \left\{ (\alpha_m r^m + \alpha'_m r^{-m}) \cos m\theta + \right.$$

$$\left. + (\beta_m r^m + \beta'_m r^{-m}) \sin m\theta \right\},$$

ove le  $\alpha$  e le  $\beta$  sono costanti, la cui determinazione risulta dal confronto di questa serie, per  $r = R$ , ed  $r = R'$ , colle serie  $\sigma$ ,  $\sigma'$ .

Supponiamo ora che nello spazio compreso tra i due circoli, si voglia determinare la funzione  $\Phi$ , regolare insieme alle sue derivate, e che soddisfa all'equazione  $\Delta^2 \Phi = 0$ , quando per ogni punto di  $C$ , e di  $C'$ , si conosca il

---

(\*) Questa formula è stata ottenuta, con altro metodo, dal prof. G. LAURICELLA, *Integrazione dell'equazione  $\Delta^2 (\Delta^2 u) = 0$  in un campo di forma circolare*. Atti della R. Acc. delle Scienze di Torino, vol. XXXI. Nel metodo che ho qui seguito, mi son valso della Nota del prof. VOLTERRA, *Sulla Nota del prof. Lauricella*, ecc. Idem.



valore della funzione e della sua derivata rispetto alla normale interna  $\nu$ , nell'ipotesi che queste quattro successioni di valori soddisfino a quelle condizioni, le quali permettono di rappresentarle mediante serie di FOURIER (\*).

Sieno:

$$\left. \begin{aligned} \Phi_{r=R} &= A + \sum_1^{\infty} (A_m \cos m \theta + B_m \sin m \theta), \\ \Phi_{r=R'} &= A' + \sum_1^{\infty} (A'_m \cos m \theta + B'_m \sin m \theta), \\ \left[ \frac{\partial \Phi}{\partial \nu} \right]_{r=R} &= A'' + \sum_1^{\infty} (A''_m \cos m \theta + B''_m \sin m \theta), \\ \left[ \frac{\partial \Phi}{\partial \nu} \right]_{r=R'} &= A''' + \sum_1^{\infty} (A'''_m \cos m \theta + B'''_m \sin m \theta), \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

le quattro serie suddette.

Vediamo se la funzione  $\Phi$  si può, in generale, porre sotto la forma:

$$\Phi = r^2 \varphi + \psi,$$

essendo le funzioni  $\varphi$ ,  $\psi$  date dalle formule:

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= \alpha + \alpha_0 \log r + \sum_1^{\infty} \left\{ (\alpha_m r^m + \alpha'_m r^{-m}) \cos m \theta + \right. \\ &\quad \left. + (\beta_m r^m + \beta'_m r^{-m}) \sin m \theta \right\}, \\ \psi &= \alpha' + \alpha'_0 \log r + \sum_1^{\infty} \left\{ (\alpha''_m r^m + \alpha'''_m r^{-m}) \cos m \theta + \right. \\ &\quad \left. + (\beta''_m r^m + \beta'''_m r^{-m}) \sin m \theta \right\}, \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

ove le  $\alpha$  e le  $\beta$  sono costanti da determinarsi.

Si otterrà:

$$\begin{aligned} \Phi &= \alpha + \alpha_0 \log r + \alpha' r^2 + \alpha'_0 r^2 \log r + \\ &+ \sum_1^{\infty} \left\{ (\alpha_m r^m + \alpha'_m r^{-m} + \alpha''_m r^{m+2} + \alpha'''_m r^{-m+2}) \cos m \theta + \right. \\ &\quad \left. + (\beta_m r^m + \beta'_m r^{-m} + \beta''_m r^{m+2} + \beta'''_m r^{-m+2}) \sin m \theta \right\}. \end{aligned}$$

(\*) Il metodo che seguo è quello a cui accenna il VENSKE, *Zur Integration der Gleichung  $\Delta \Delta u = 0$* , ecc., Nachrichten di Gottinga, a. 1891. Egli però trascura i termini  $\alpha_0 \log r$ ,  $\alpha' \log r$ , che compariscono nelle funzioni  $\varphi$ ,  $\psi$ ; e trascura anche il termine  $r \log r$  ( $a \cos \theta + b \sin \theta$ ). Quindi l'espressione che egli dà per la funzione  $\Phi$  non è generale.

Derivando rispetto ad  $r$ , si ricava:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial r} = & \alpha_0 \frac{1}{r} + 2 \alpha' r + \alpha'_0 (r + 2 r \log r) + \\ & + \sum_1^{\infty} \left\{ [m \alpha_m r^{m-1} - m \alpha'_m r^{-m-1} + (m+2) \alpha''_m r^{m+1} + \right. \\ & \quad \left. + (-m+2) \alpha'''_m r^{-m+1}] \cos m \theta + \right. \\ & \left. + [m \beta_m r^{m-1} - m \beta'_m r^{-m-1} + (m+2) \beta''_m r^{m+1} + \right. \\ & \quad \left. + (-m+2) \beta'''_m r^{-m+1}] \sin m \theta \right\}. \end{aligned}$$

Se in queste due formule poniamo, al posto di  $r$ , prima  $R$ , poi  $R'$ , e quindi le confrontiamo colle (32) (ricordando che per  $r = R$  si ha  $\frac{\partial \Phi}{\partial r} = \frac{\partial \Phi}{\partial v}$ , e per  $r = R'$ ,  $\frac{\partial \Phi}{\partial r} = -\frac{\partial \Phi}{\partial v}$ ), otterremo i seguenti sistemi di equazioni lineari, tra le costanti da determinarsi:

$$\left. \begin{aligned} \alpha + \alpha_0 \log R + \alpha' R^2 + \alpha'_0 R^2 \log R &= A, \\ \alpha + \alpha_0 \log R' + \alpha' R'^2 + \alpha'_0 R'^2 \log R' &= A', \\ \alpha_0 \frac{1}{R} + \alpha' \cdot 2 R + \alpha'_0 (R + 2 R \log R) &= A'', \\ \alpha_0 \frac{1}{R'} + \alpha' \cdot 2 R' + \alpha'_0 (R' + 2 R' \log R') &= -A''', \end{aligned} \right\} (S_1)$$

$$\left. \begin{aligned} \alpha_m R^m + \alpha'_m R^{-m} + \alpha''_m R^{m+2} + \alpha'''_m R^{-m+2} &= A_m, \\ \alpha_m R'^m + \alpha'_m R'^{-m} + \alpha''_m R'^{m+2} + \alpha'''_m R'^{-m+2} &= A'_m, \\ m \alpha_m R^{m-1} - m \alpha'_m R^{-m-1} + (m+2) \alpha''_m R^{m+1} + \\ &+ (-m+2) \alpha'''_m R^{-m+1} = A''_m \\ m \alpha_m R'^{m-1} - m \alpha'_m R'^{-m-1} + (m+2) \alpha''_m R'^{m+1} + \\ &+ (-m+2) \alpha'''_m R'^{-m+1} = -A'''_m, \end{aligned} \right\} (S_2) \quad (m=1, 2, \dots)$$

ed un terzo sistema ( $S_3$ ), analogo a quest'ultimo, in cui compariscono le  $\beta_m$  e le  $B_m$ , in luogo delle  $\alpha_m$  e delle  $A_m$ .

Dal primo di questi sistemi si potranno ottenere i valori delle quattro costanti:

$$\alpha, \quad \alpha_0, \quad \alpha', \quad \alpha'_0, \quad (34)$$

e dagli altri due i valori delle costanti:

$$\left. \begin{array}{l} \alpha_m, \alpha'_m, \alpha''_m, \alpha'''_m, \\ \beta_m, \beta'_m, \beta''_m, \beta'''_m, \end{array} \right\} \quad (35)$$

purchè i determinanti:

$$D_0 = \begin{vmatrix} 1 & \log R & R^2 & R^2 \log R \\ 1 & \log R' & R'^2 & R'^2 \log R' \\ 0 & \frac{1}{R} & 2R & R + 2R \log R \\ 0 & \frac{1}{R'} & 2R' & R' + 2R' \log R' \end{vmatrix}, \quad (36)$$

$$D_m = \begin{vmatrix} R^m & R^{-m} & R^{m+2} & R^{-m+2} \\ R'^m & R'^{-m} & R'^{m+2} & R'^{-m+2} \\ m R^{m-1} & -m R^{-m-1} & (m+2) R^{m+1} & (-m+2) R^{-m+1} \\ m R'^{m-1} & -m R'^{-m-1} & (m+2) R'^{m+1} & (-m+2) R'^{-m+1} \end{vmatrix} \quad (37)$$

non siano nulli. Ma osserviamo che il determinante  $D_1$  è appunto uguale a 0. Se infatti nel determinante  $D_m$  facciamo  $m = 1$ , esso verrà ad avere la prima e l'ultima colonna uguali, e per conseguenza dovrà annullarsi.

Ciò significa che le quattro equazioni in cui compariscono le incognite  $\alpha_1, \alpha'_1, \alpha''_1, \alpha'''_1$ , e quelle analoghe in cui compariscono  $\beta_1, \beta'_1, \beta''_1, \beta'''_1$ , sono, in generale, incompatibili tra loro.

Dunque una funzione  $\Phi$ , la quale debba soddisfare alle condizioni del problema, non può, in generale, venir rappresentata da un'espressione del tipo  $r^2 \varphi + \psi$ , essendo le funzioni  $\varphi, \psi$ , date dalle formole (33).

Tuttavia troveremo facilmente l'espressione generale della funzione  $\Phi$ . Perciò consideriamo la funzione:

$$(a x + b y) \log r, \quad (a, b = \text{cost.})$$

che soddisfa all'equazione  $\Delta^2 = 0$ . Se supponiamo di misurare l'angolo  $\theta$  dall'asse  $x$ , potremo scriverla:

$$r \log r (a \cos \theta + b \sin \theta).$$

Poniamo ora:

$$\Phi = r^2 \varphi + \psi + r \log r (a \cos \theta + b \sin \theta).$$

Esprimendo le funzioni  $\varphi$ ,  $\psi$  colle formole (33), e chiamando ora  $\alpha_1$ ,  $\beta_1$  le costanti  $\alpha_1 + \alpha_1'''$ ,  $\beta_1 + \beta_1'''$ , otterremo:

$$\left. \begin{aligned} \Phi = & \alpha + \alpha_0 \log r + \alpha' r^2 + \alpha'' r^2 \log r + \\ & + (\alpha_1 r + \alpha'_1 r^{-1} + \alpha_1'' r^3 + a r \log r) \cos \theta + (\beta_1 + \beta'_1 r^{-1} + \beta_1'' r^3 + \\ & + b r \log r) \sin \theta + \sum_2^{\infty} \left\{ \alpha_m r^m + \alpha'_m r^{-m} + \alpha_m'' r^{m+2} + \alpha_m''' r^{-m+2} \right\} \cos m\theta + \\ & + (\beta_m r^m + \beta'_m r^{-m} + \beta_m'' r^{m+2} + \beta_m''' r^{-m+2}) \sin m\theta \left\} \right. \quad (38) \end{aligned}$$

Per determinare le costanti (34), e le costanti (35) per  $m = 2, 3, \dots$ , avremo ancora i sistemi di equazioni ( $S_1$ ), ( $S_2$ ), ( $S_3$ ) Avremo poi le equazioni:

$$\begin{aligned} \alpha_1 R + \alpha'_1 R^{-1} + \alpha_1'' R^3 + a R \log R &= A_1, \\ \alpha_1 R' + \alpha'_1 R'^{-1} + \alpha_1'' R'^3 + a R' \log R' &= A_1', \\ \alpha_1 - \alpha'_1 R^{-2} + 3 \alpha_1'' R^2 + a (1 + \log R) &= A_1'', \\ \alpha_1 - \alpha'_1 R'^{-2} + 3 \alpha_1'' R'^2 + a (1 + \log R') &= -A_1'''. \end{aligned}$$

per determinare le costanti  $\alpha_1$ ,  $\alpha_1'$ ,  $\alpha_1''$ ,  $a$ , e quattro analoghe per le costanti  $\beta_1$ ,  $\beta_1'$ ,  $\beta_1''$ ,  $b$ . Dunque i determinanti  $D_0$ , e  $D_m$  per  $m = 2, 3, \dots$ , sono ancora dati dalle formole (36) e (37), mentre per il determinante  $D_1$  si avrà:

$$D_1 = \begin{vmatrix} R & R^{-1} & R^3 & R \log R \\ R' & R'^{-1} & R'^3 & R' \log R' \\ 1 & -R^{-2} & 3 R^2 & \log R + 1 \\ 1 & -R'^{-2} & 3 R'^2 & \log R' + 1 \end{vmatrix}.$$

Si tratta di dimostrare che questi determinanti sono sempre differenti da 0. Consideriamo da primo il determinante  $D_0$ .

$$D_0 = \begin{vmatrix} 1 & \log R & R^2 & R^2 \log R \\ 1 & \log R' & R'^2 & R'^2 \log R' \\ 0 & \frac{1}{R} & 2 R & R + 2 R \log R \\ 0 & \frac{1}{R'} & 2 R' & R' + 2 R' \log R' \end{vmatrix}.$$

Dagli elementi della seconda linea tolgono quelli della prima. Allora nella prima colonna resta soltanto il primo elemento, e il determinante si ri-

duce ad essere del 3° ordine. Al tempo stesso moltiplichiamo gli elementi della terza linea per  $R$ , e quella della quarta per  $R'$ . Otterremo:

$$R R' D_0 = \begin{vmatrix} \log R' - \log R & R'^2 - R^2 & R'^2 \log R' - R^2 \log R \\ 1 & 2 R^2 & R^2 + 2 R^2 \log R \\ 1 & 2 R'^2 & R'^2 + 2 R'^2 \log R' \end{vmatrix}.$$

Sviluppiamo ora il determinante rispetto alla prima colonna. Si ottiene, fatte le riduzioni:

$$R R' D_0 = 4 R'^2 R^2 (\log R' - \log R)^2 - (R'^2 - R^2)^2,$$

ossia :

$$\frac{D_0}{4 R R'} = \left( \log \frac{R'}{R} \right)^2 - \left( \frac{R'^2 - R^2}{2 R R'} \right)^2.$$

Perchè  $D_0$  potesse annullarsi dovrebbe essere:

$$\log \frac{R'}{R} = \frac{R'^2 - R^2}{2 R R'} \quad (*),$$

o ponendo  $\frac{R'}{R} = x$ :

$$\log x = \frac{x^2 - 1}{2 x}. \quad (39)$$

Ma questa equazione, che è soddisfatta, per  $x = 1$ , non può esserlo per alcun valore di  $x$ , differente dall'unità. Ciò può vedersi osservando che la derivata del primo membro, ossia  $\frac{1}{x}$ , è sempre minore della derivata del secondo, che è  $\frac{x^2 + 1}{2 x^2}$ . E infatti si ha :

$$\left(1 - \frac{1}{x}\right)^2 > 0, \quad 1 + \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} > 0, \quad \frac{x^2 + 1}{x^2} > \frac{2}{x}, \quad \frac{1}{x} < \frac{x^2 + 1}{2 x^2}.$$

Resta dunque escluso che l'equazione (39), soddisfatta da  $x = 1$ , possa esserlo da un altro valore di  $x$ .

---

(\*) La soluzione  $\log \frac{R'}{R} = -\frac{R'^2 - R^2}{2 R R'}$  rimane esclusa, dovendo essere  $R' > R$ , e quindi  $\log \frac{R'}{R} > 0$ .

Il determinante  $D_0$  è dunque differente da 0.

Consideriamo ora il determinante  $D_1$ . Se si moltiplicano gli elementi della terza linea per  $R$ , e si sottraggono da essi quelli della prima, e analogamente si moltiplicano quelli della quarta per  $R'$ , e se ne sottraggono quelli della seconda, si ottiene:

$$R R' D_1 = \begin{vmatrix} R & \frac{1}{R} & R^3 & R \log R \\ R' & \frac{1}{R'} & R^3 & R' \log R' \\ 0 & -\frac{2}{R} & 2 R^3 & R \\ 0 & -\frac{2}{R'} & 2 R^3 & R' \end{vmatrix};$$

e sviluppando rispetto agli elementi della prima colonna:

$$R R' D_1 = R \begin{vmatrix} \frac{1}{R'} & R^3 & R' \log R' \\ -\frac{2}{R} & 2 R^3 & R \\ -\frac{2}{R'} & 2 R^3 & R' \end{vmatrix} - R' \begin{vmatrix} \frac{1}{R} & R^3 & R \log R \\ -\frac{2}{R} & 2 R^3 & R \\ -\frac{2}{R'} & 2 R^3 & R' \end{vmatrix}$$

Chiamiamo questi due determinanti  $\Delta_1$ ,  $\Delta'_1$ . Nel determinante  $\Delta_1$  moltiplico la prima linea per  $2 R'$ , la seconda per  $R$ , la terza per  $R'$ : poi divido per 2 la prima e la seconda colonna. Ottengo allora:

$$\Delta_1 = \frac{2}{R R'^2} \begin{vmatrix} 1 & R^4 & 2 R'^2 \log R' \\ -1 & R^4 & R^2 \\ -1 & R^4 & R^2 \end{vmatrix};$$

e sviluppando rispetto agli elementi della prima colonna si trova:

$$\Delta_1 = \frac{2}{R} \{(R^2 - R'^2) + 2 \log R' (R^2 + R'^2)\} \{R^2 - R'^2\}.$$

Per calcolare  $\Delta'_1$  osserviamo che esso può ottenersi da  $\Delta_1$  ponendo  $R$  in luogo di  $R'$ ,  $R'$  in luogo di  $R$ , e poi scambiando tra loro la seconda e la terza linea, ossia mutando il segno del determinante. Sarà dunque:

$$\Delta'_1 = \frac{2}{R'} \{(R'^2 - R^2) + 2 \log R (R'^2 + R^2)\} \{R^2 - R'^2\}.$$

Ma  $R R' D_1 = R \Delta_1 - R' \Delta'_1$ : per conseguenza:

$$R R' D_1 = 4 \left\{ (R^2 - R'^2) + (R^2 + R'^2) \log \frac{R'}{R} \right\} \left\{ R^2 - R'^2 \right\}.$$

Affinchè  $D_1$  potesse annullarsi, dovrebbe essere:

$$(R^2 - R'^2) + (R^2 + R'^2) \log \frac{R'}{R} = 0,$$

ossia, posto  $\frac{R'}{R} = x$ :

$$\log x = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}, \quad x > 1)$$

ciò che è assurdo, come si può verificare, osservando che per  $x = 1$ , le funzioni  $\log x$ ,  $\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$  sono ambedue uguali a 0, e per  $x > 1$  la derivata della prima è sempre maggiore della derivata della seconda. Dunque il determinante  $D_1$  è differente da 0.

Consideriamo ora il determinante  $D_m$ , per un valore qualunque di  $m$  maggiore di 1. Si ha:

$$D_m = \begin{vmatrix} R^m & R^{-m} & R^{m+2} & R^{-m+2} \\ R'^m & R'^{-m} & R'^{m+2} & R'^{-m+2} \\ m R^{m-1} & -m R^{-m-1} & (m+2) R^{m+1} & (-m+2) R^{-m+1} \\ m R'^{m-1} & -m R'^{-m-1} & (m+2) R'^{m+1} & (-m+2) R'^{-m+1} \end{vmatrix}$$

Moltiplico gli elementi della terza linea per  $R$ , quelli della quarta per  $R'$ , e sottraggo da essi rispettivamente quelli della prima e della seconda moltiplicati per  $m$ . Otterrò:

$$R R' D_m = \begin{vmatrix} R^m & R^{-m} & R^{m+2} & R^{-m+2} \\ R'^m & R'^{-m} & R'^{m+2} & R'^{-m+2} \\ 0 & -2m R^{-m} & 2R^{m+2} & 2(-m+1) R^{-m+2} \\ 0 & -2m R'^{-m} & 2R'^{m+2} & 2(-m+1) R'^{-m+2} \end{vmatrix}.$$

Ora moltiplico gli elementi delle linee rispettivamente per  $2m R^m$ ,  $2m R'^m$ ,  $-R^m$ ,  $-R'^m$ ; poi divido per  $2m$  gli elementi della prima e della seconda colonna, per 2 quelli della 3<sup>a</sup> e della 4<sup>a</sup>. Il determinante verrà ad

esser moltiplicato per  $\frac{1}{4}(R R')^{2m}$ : e si avrà:

$$\frac{1}{4}(R R')^{2m+1} D_m = \begin{vmatrix} R^{2m} & 1 & m R^{2m+2} & m R^2 \\ R'^{2m} & 1 & m R'^{2m+2} & m R'^2 \\ 0 & 1 & -R^{2m+2} & (m-1) R^2 \\ 0 & 1 & -R'^{2m+2} & (m-1) R'^2 \end{vmatrix}.$$

Sviluppando rispetto agli elementi della prima colonna otterrò:

$$\frac{1}{4}(R R')^{2m+1} D_m = R^{2m} \Delta_m - R'^{2m} \Delta'_m, \quad (4')$$

ove:

$$\Delta_m = \begin{vmatrix} 1 & m R'^{2m+2} & m R'^2 \\ 1 & -R^{2m+2} & (m-1) R^2 \\ 1 & -R'^{2m+2} & (m-1) R'^2 \end{vmatrix}.$$

e  $\Delta'_m$  si ottiene scambiando, in  $\Delta_m$ ,  $R$  con  $R'$ , e mutando il segno.

Sviluppando  $\Delta_m$  rispetto alla prima colonna, si ricava:

$$\begin{aligned} \Delta_m = & -(m-1) R^2 R'^2 (R^{2m} - R'^{2m}) - m^2 R'^{2m+4} + \\ & + m(m-1) R'^{2m+2} \cdot R^2 + m R^{2m+2} \cdot R'^2; \end{aligned}$$

ossia:

$$\Delta_m = -R^2 R'^2 (R'^{2m} - R^{2m}) - m^2 R'^{2m+2} (R'^2 - R^2).$$

Quindi sarà:

$$\Delta'_m = -R^2 R'^2 (R'^{2m} - R^{2m}) - m^2 R^{2m+2} (R'^2 - R^2).$$

E per la formula (40):

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}(R R')^{2m+1} D_m = & -R^2 R'^2 (R'^{2m} - R^{2m}) (R^{2m} - R'^{2m}) - \\ & - m^2 (R'^2 - R^2) (R'^{2m+2} R^{2m} - R^{2m+2} R'^{2m}), \end{aligned}$$

ovvero:

$$\frac{1}{4}(R R')^{2m+1} D_m = R^2 R'^2 (R'^{2m} - R^{2m})^2 - m^2 R^{2m} R'^{2m} (R'^2 - R^2)^2.$$

Perchè  $D_m$  potesse annullarsi, dovrebbe essere:

$$R^2 R'^2 (R'^{2m} - R^{2m})^2 = m^2 (R R')^{2m} (R'^2 - R^2)^2.$$



ed estraendo la radice quadrata:

$$R R' (R'^{2m} - R^{2m}) = m (R R')^m (R'^2 - R^2) (*),$$

e dividendo per  $(R R')^{m+1}$ :

$$\left(\frac{R'}{R}\right)^m - \left(\frac{R}{R'}\right)^m = m \left(\frac{R'}{R} - \frac{R}{R'}\right), \quad (41)$$

e finalmente, ponendo  $\frac{R'}{R} = x$ :

$$x^m - x^{-m} = m \left(x - \frac{1}{x}\right). \quad (42)$$

Questa equazione dovrebbe esser soddisfatta per un valore di  $m$  maggiore dell'unità, e per un valore di  $x$ , anch'esso maggiore dell'unità.

Per dimostrare che ciò non può essere, supporremo di attribuire ad  $m$  un valore determinato, e mostreremo che facendo variare  $x$  oltre l'unità, il primo membro dell'equazione è sempre maggiore del secondo.

Poichè per  $x = 1$  si annullano ambedue i membri, qualunque sia  $m$ , basterà provare che col crescere di  $x$ , la derivata del primo membro è sempre maggiore della derivata del secondo, ossia che:

$$m x^{m-1} + \frac{m}{x^{m+1}} > m \left(1 + \frac{1}{x^2}\right),$$

ovvero, moltiplicando per  $x$ , e dividendo per  $m$ :

$$x^m + \frac{1}{x^m} > x + \frac{1}{x},$$

od anche:

$$x(x^{m-1} - 1) > \frac{1}{x^m}(x^{m-1} - 1),$$

e dividendo per la quantità positiva  $x^{m-1} - 1$ :

$$x > \frac{1}{x^m},$$

ossia:

$$x^{m+1} > 1,$$

la qual'ultima disuguaglianza è evidentemente soddisfatta, essendo  $x > 1$ .

---

(\*) Essendo  $R' > R$ , l'altra soluzione rimane esclusa.

Ne concludiamo che per  $m > 1$ , nessun valore di  $x$ , ossia di  $\frac{R'}{R}$ , può soddisfare l'equazione (42), cioè la (41). Dunque i determinanti  $D_m$ , per  $m = 2, 3, \dots$ , sono tutti differenti da 0.

Ma si è dimostrato che anche i determinanti  $D_0$  e  $D_1$  sono differenti da 0. Per conseguenza potremo ora asserire che le costanti che compariscono nel secondo membro della formula (38), si possono tutte determinare in modo che, sopra i circoli  $C$  e  $C'$ , la funzione  $\Phi$  che essa rappresenta, e la sua derivata rispetto alla normale interna, prendano i valori voluti.

Ciò significa che la formula (38), supponendo le funzioni  $\varphi, \psi$  rappresentate dalle formule (33), dà l'espressione generale delle funzioni  $\Phi$  che soddisfano alle condizioni del problema.

Risulta ancora, dalle cose dette, che la funzione:

$$r \log r (a \cos \theta + b \sin \theta),$$

nello spazio limitato da due circoli concentrici, non può esser rappresentata da un'espressione come  $r^2 \varphi + \psi$ . Possiamo anzi dire, in un certo senso, che essa è l'unica funzione, regolare in un tale spazio, che soddisfa all'equazione  $\Delta^2 = 0$ , tale che al contorno i suoi valori, e quelli della sua derivata rispetto alla normale interna, si possono rappresentare con serie di FOURIER, e che pure non può esser posta sotto quella forma.

Per chiarir meglio questo punto, proponiamoci di determinare due funzioni  $\varphi, \psi$ , le quali soddisfino alle equazioni:

$$\begin{aligned} r^2 \varphi + \psi &= r \log r (a \cos \theta + b \sin \theta). \\ \Delta^2 \varphi &= 0, \quad \Delta^2 \psi = 0. \end{aligned} \tag{43}$$

Si dovrà trovare che due tali funzioni non sono esprimibili colle formule (33).

Ricordiamo la formula che dà il  $\Delta^2$ , espresso colle coordinate polari  $r, \theta$ . Si ha:

$$\Delta^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \tag{44}$$

Applicando questa formula all'equazione (43), si ottiene:

$$4 \left( \varphi + r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) = \frac{2}{r} (a \cos \theta + b \sin \theta),$$

ossia:

$$\frac{\partial (r \varphi)}{\partial r} = \frac{1}{2r} (a \cos \theta + b \sin \theta);$$

dalla quale, integrando, si ricava:

$$r \varphi = \frac{1}{2} \log r (a \cos \theta + b \sin \theta) + f(\theta),$$

ove  $f$  è una funzione da determinarsi. Divido per  $r$ , e trovo:

$$\varphi = \frac{1}{2} \frac{\log r}{r} (a \cos \theta + b \sin \theta) + \frac{f}{r}. \quad (45)$$

La funzione  $\varphi$  deve soddisfare all'equazione  $\Delta^2 = 0$ . Dovrà dunque aversi:

$$\Delta^2 \left\{ \frac{1}{2} \frac{\log r}{r} (a \cos \theta + b \sin \theta) + \frac{f}{r} \right\} = 0;$$

ed eseguendo il  $\Delta^2$  per mezzo della formula (44):

$$-\frac{1}{r^3} (a \cos \theta + b \sin \theta) + \frac{1}{r^3} \left( f + \frac{d^2 f}{d\theta^2} \right) = 0.$$

Avremo dunque, per determinare la  $f$ , l'equazione differenziale:

$$f + \frac{d^2 f}{d\theta^2} = a \cos \theta + b \sin \theta. \quad (46)$$

Poniamo:

$$f = \frac{\theta}{2} (a \sin \theta - b \cos \theta) + g, \quad (47)$$

ove la  $g$  è una nuova funzione della variabile  $\theta$ . Si ricava:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} = a \cos \theta + b \sin \theta - \frac{\theta}{2} (a \sin \theta - b \cos \theta) + \frac{d^2 g}{d\theta^2};$$

e sommando questa equazione colla precedente:

$$f + \frac{d^2 f}{d\theta^2} = a \cos \theta + b \sin \theta + g + \frac{d^2 g}{d\theta^2}.$$

Dovrà quindi essere, per la (46):

$$g + \frac{d^2 g}{d\theta^2} = 0,$$

equazione il cui integrale generale possiamo scriverlo:

$$g + \frac{1}{2} (c \cos \theta + c' \sin \theta),$$

ove  $c$  e  $c'$  sono costanti. Sarà dunque, sostituendo nella (47):

$$f = \frac{1}{2} \{ \theta (a \cos \theta + b \sin \theta) + c \cos \theta + c' \sin \theta \};$$

e ponendo questa espressione della  $f$  nella formula (45):

$$\varphi = \frac{1}{2r} \{ \log r (a \cos \theta + b \sin \theta) + \theta (a \sin \theta - b \cos \theta) + c \cos \theta + c' \sin \theta \}.$$

Dalla (43) potremo ora ricavare la  $\psi$ , che sarà data dalla formula:

$$\psi = \frac{r}{2} \{ \log r (a \cos \theta + b \sin \theta) - \theta (a \sin \theta - b \cos \theta) - c \cos \theta - c' \sin \theta \}.$$

Queste funzioni, come si era preveduto, non si possono rappresentare per mezzo delle formule (33), a causa delle funzioni, non uniformi:

$$\frac{\theta \sin \theta}{r}, \quad \frac{\theta \cos \theta}{r},$$

che in esse compariscono.

Tuttavia il problema proposto si è potuto risolvere in tutta la sua generalità: la funzione  $\Phi$  è sempre rappresentata dalla formula:

$$\Phi = r^2 \varphi + \psi + r \log r (a \cos \theta + b \sin \theta).$$

#### IV.

8. Una funzione  $\Psi$ , di due variabili  $x, y$ , regolare in un certo campo, e che soddisfa all'equazione:

$$\Delta^{2n} \Psi = 0,$$

si può sempre esprimere colla formula:

$$\Psi = \sum_{h=0}^{h=n-1} p^{(h)} \varphi^{(h)}, \quad (48)$$

ove le funzioni  $\varphi, \varphi', \varphi'', \dots, \varphi^{(h-1)}$ , soddisfano all'equazione  $\Delta^2 = 0$ , e sono regolari in quello stesso campo; e  $p^{(h)}$  è il prodotto di  $h$  funzioni lineari. (Vedi § 2.)

La formula (30) permette di determinare la funzione  $\Psi$ , nello spazio indefinito  $S$ , limitato da una retta  $\sigma$ , dati su questa i valori della funzione stessa, e delle sue derivate d'ordine 1, 2, ...  $n-1$ , rispetto alla normale interna, che chiameremo ancora:

$$u_0, u_1, \dots, u_i, \dots, u_{n-1}.$$

Possiamo assumere, come asse delle  $y$ , la retta  $\sigma$ , e, posta in un suo punto qualunque l'origine delle coordinate, prendere come direzione positiva dell'asse delle  $x$  quella rivolta verso  $S$ .

Sarà allora :

$$\Psi_{x=0} = u_0, \quad \left[ \frac{\partial^i \Psi}{\partial x^i} \right]_{x=0} = u_i \quad (i = 1, 2, \dots, n-1).$$

Ponendo in generale:

$$p^{(i)} = x^i,$$

otterremo la funzione  $\Psi$  rappresentata dalla formula:

$$\Psi = \varphi + x \varphi' + x^2 \varphi'' + \dots + x^{n-1} \varphi^{(n-1)}.$$

La determinazione della funzione  $\Psi$  si fa con un procedimento analogo a quello seguito nel caso dello spazio limitato da un contorno circolare.

Cerchiamo l'espressione della derivata d'ordine  $i$ , rispetto ad  $x$ , della funzione  $\Psi$ , per  $x=0$ , ed uguagliamola ad  $u_i$ . Avremo evidentemente una formula del tipo:

$$\left[ P_i \varphi^{(i)} + \sum C \frac{\partial^m \varphi^{(h)}}{\partial x^m} \right]_{x=0} = u_i,$$

in cui:

$$P_i = i!, \quad h < i.$$

Le  $C$  sono costanti. La somma è estesa a un certo numero di termini, che dipende da  $n$ , e da  $i$ .

Ora la funzione chiusa in parentesi soddisfa all'equazione  $\Delta^2 = 0$ . Dunque, applicando una nota formula, si avrà in un punto  $(x, y)$  dello spazio  $S$ :

$$P_i \varphi^{(i)} + \sum C \frac{\partial^m \varphi^{(h)}}{\partial x^m} = \frac{1}{\pi} \int_{\sigma} \frac{x u_i}{r^2} d\sigma,$$

ove  $r$  è la distanza di un punto qualunque della retta  $\sigma$ , del punto  $(x, y)$  di  $S$ ,  $u_i$  il valore della funzione relativo a quel punto di  $\sigma$ .

Si suppongono soddisfatte dalle quantità  $u_i$ , date sulla retta  $\sigma$ , quelle condizioni colle quali l'integrale che comparisce nella formula precedente, ha un significato: si suppone cioè che nel punto all'infinito della retta le quantità  $u_i$  divengano infinitesime del 2° ordine (\*).

Possiamo scrivere:

$$\varphi^{(i)} = \frac{1}{P_i} \left\{ \frac{1}{\pi} \int_{\sigma} \frac{x u_i}{r^2} d\sigma - \sum C \frac{\partial^m \varphi^{(h)}}{\partial x^m} \right\} \quad (h < i),$$

(\*) E d'ora in avanti queste condizioni, nei casi analoghi, le supporremo sempre soddisfatte, anche senza dirlo esplicitamente.

e questa formula, analoga a quella trovata per il caso di un contorno circolare, risolve il problema, giacchè dà una qualunque delle funzioni:

$$\varphi, \varphi', \varphi'', \dots, \varphi^i, \dots, \varphi^{n-1},$$

espressa mediante le precedenti.

In particolare, per la prima si ha:

$$\varphi = \frac{1}{\pi} \int_0^{\sigma} \frac{x u_0}{r^2} d\sigma;$$

e per la seconda:

$$\varphi' = \frac{1}{\pi} \int_0^{\sigma} \frac{x u_1}{r^2} d\sigma - \frac{\partial \varphi}{\partial x},$$

che può scriversi, sostituendo a  $\varphi$  il suo valore:

$$\varphi' = \frac{1}{\pi} \int_0^{\sigma} \frac{x u_1 - \left(1 - 2 \frac{x^2}{r^2}\right) u_0}{r^2} d\sigma.$$

Se dunque si vuol determinare nello spazio  $S$ , la funzione  $\Psi$ , finita e continua in quello spazio, e che soddisfa alla equazione  $\Delta^2 = 0$ , dati sulla retta  $\sigma$  i valori  $u_0, u_1$ , della funzione stessa, e della sua derivata rispetto alla normale interna, porremo:

$$\Psi = \varphi + x \varphi'.$$

I valori di  $\varphi$  e di  $\varphi'$  sono dati dalle formule precedenti. Otteniamo così:

$$\Psi = \frac{1}{\pi} \int_0^{\sigma} \frac{x^2}{r^2} \left( 2 \frac{x}{r^2} u_0 + u_1 \right) d\sigma.$$

9. Una funzione  $\Psi$ , regolare in uno spazio qualunque  $S$ , e che soddisfa all'equazione  $\Delta^2 = 0$ , è pure determinata in tutti i suoi punti, quando al contorno si conoscano i valori di  $\Psi$  e di  $\Delta^2 \Psi$ . Questo problema si riduce a determinare successivamente, nello spazio  $S$ , due funzioni che soddisfano alla equazione  $\Delta^2 = 0$ , dati i loro valori al contorno.

Nel caso di uno spazio racchiuso da un contorno circolare, o limitato da una retta indefinita, rappresenteremo la funzione  $\Psi$  mediante due funzioni armoniche  $\varphi, \varphi'$ , che si potranno determinare indipendentemente una dall'altra.

Ricordiamo che se  $\theta$  è una funzione regolare nello spazio  $S$ , e che soddisfa all'equazione  $\Delta^2 = 0$ , esiste una sola funzione  $\theta'$ , pure regolare in  $S$ , che soddisfi alle due equazioni:

$$\Delta^2 \theta' = 0, \quad \theta' + r \frac{\partial \theta'}{\partial r} = \theta, \quad (r = \sqrt{x^2 + y^2}) \quad (49)$$

ed è quella data dalla formula:

$$\theta' = \frac{1}{r} \int_0^r \theta dr \text{ ecc. } (*) \quad (50)$$

Ciò posto, supponiamo che il contorno da cui è limitato lo spazio  $S$  sia una circonferenza di raggio  $R$ , nel cui centro si trovi l'origine delle coordinate. Converrà porre:

$$\Psi = \varphi + (r^2 - R^2) \varphi'.$$

Si ricava:

$$\Delta^2 \Psi = 4 \left( \varphi' + r \frac{\partial \varphi'}{\partial r} \right).$$

Al contorno sia:

$$\Psi = u, \quad \Delta^2 \Psi = v,$$

e quindi:

$$\varphi' + r \frac{\partial \varphi'}{\partial r} = \frac{1}{4} v.$$

Sarà nel punto di  $S$  di coordinate  $r, \omega$ :

$$\varphi' + r \frac{\partial \varphi'}{\partial r} = \frac{1}{8\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(R^2 - r^2) v}{R + r^2 - 2Rr \cos(\alpha - \omega)} d\alpha.$$

---

(\*) Si suppongono soddisfatte le condizioni, analoghe a quelle poste nel Cap. I, § 3. Si suppone cioè che nell'interno di  $S$  esista un punto tale che ogni retta uscente da esso incontri il contorno in sol punto. Da questa proprietà deve godere l'origine delle coordinate.

ove la  $v$  si riferisce al punto di coordinate  $R, \alpha$ . E quindi con una formula analoga alla (50):

$$\varphi' = \frac{1}{8\pi r} \int_0^r dr \int_0^{2\pi} \frac{(R^2 - r^2)v}{R^2 + r^2 - 2Rr \cos(\alpha - \omega)} d\alpha.$$

Si ha poi al contorno:

$$\varphi = u,$$

e per conseguenza nel punto  $(r, \omega)$  di  $S$ :

$$\varphi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(R^2 - r^2)u}{R^2 + r^2 - 2Rr \cos(\alpha - \omega)} d\alpha.$$

Avremo dunque la formula:

$$\begin{aligned} \Psi = (r^2 - R^2) \frac{1}{8\pi r} \int_0^r dr \int_0^{2\pi} \frac{(R^2 - r^2)v}{R^2 + r^2 - 2Rr \cos(\alpha - \omega)} d\alpha + \\ + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(R^2 - r^2)u}{R^2 + r^2 - 2Rr \cos(\alpha - \omega)} d\alpha, \end{aligned}$$

che può anche scriversi:

$$\begin{aligned} \Psi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[ \frac{r^2 - R^2}{4r} \int_0^r \frac{(R^2 - r^2)v}{R^2 + r^2 - 2Rr \cos(\alpha - \omega)} dr + \right. \\ \left. + \frac{(R^2 - r^2)u}{R^2 + r^2 - 2Rr \cos(\alpha - \omega)} \right] d\alpha. \end{aligned}$$

Possiamo eseguire l'integrazione tra 0 ed  $r$ . Otterremo allora:

$$\begin{aligned} \Psi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[ \left[ \frac{R^2 - r^2}{4r} \left\{ r^2 + R \left( \cos(\alpha - \omega) \log \frac{R^2 + r^2 - 2Rr \cos(\alpha - \omega)}{R^2} + \right. \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. - 2 \sin(\alpha - \omega) \left[ \text{arc tag} \frac{r - R \cos(\alpha - \omega)}{R \sin(\alpha - \omega)} + \frac{\pi}{2} - (\alpha - \omega) \right] \right\} v + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2 - 2Rr \cos(\alpha - \omega)} u \right] \right] d\alpha. \end{aligned}$$



10. Se lo spazio  $S$  in cui si vuol determinare la funzione  $\Psi$ , è quello limitato della retta  $x = 0$ , porremo:

$$\Psi = \varphi + x \varphi',$$

da cui si ricava:

$$\Delta^2 \Psi = 2 \frac{\partial \varphi'}{\partial x}.$$

Sarà dunque, su quella retta, detti  $u$ ,  $v$  i valori che ivi assumono  $\Psi$  e  $\Delta^2 \Psi$ :

$$\varphi = u, \quad \frac{\partial \varphi'}{\partial x} = \frac{1}{2} v,$$

e in un punto qualunque dello spazio  $S$ :

$$\varphi = \frac{1}{\pi} \int_{\tau} \frac{xu}{r^2} d\tau, \quad \varphi' = \frac{1}{\pi} \int_{\tau} \frac{1}{2} \log r \cdot v d\tau,$$

ove  $r$  è la distanza dal punto di  $S$  che si considera, al punto della retta  $\tau$  a cui si riferiscono i valori  $u$ ,  $v$  di  $\Psi$  e  $\Delta^2 \Psi$ . Per conseguenza:

$$\Psi = \frac{1}{\pi} \int_{\tau} x \left( \frac{1}{2} \log r \cdot v + \frac{u}{r^2} \right) d\tau.$$

11. Problemi analoghi si possono risolvere nello spazio a tre dimensioni.

Una funzione regolare  $\Psi$ , che soddisfa all'equazione  $\Delta^{2n} = 0$ , dati i valori della funzione stessa, e delle sue derivate d'ordine  $1, 2, \dots, n-1$ , rispetto alla normale interna, sulla superficie di una sfera di raggio  $R$ , col centro nell'origine delle coordinate, si potrà determinare in tutti i punti della sfera, facendo uso della formula (18), ove porremo:

$$p^{(h)} = (r^2 - R^2)^h, \quad (i = 0, 1, \dots, n-1),$$

essendo ora:

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

Porremo invece:

$$p^{(h)} = x^h,$$

se quei valori sono dati sul piano  $x = 0$ .

Il problema di determinare una funzione  $\Psi$ , regolare nello spazio limitato da una superficie qualunque, sulla quale si conoscano i valori di  $\Psi$  e di  $\Delta^2 \Psi$ , e che deve soddisfare all'equazione  $\Delta^4 \Psi = 0$ , si riduce alla determinazione successiva di due funzioni, regolari in quello spazio, e che soddisfano all'equazione  $\Delta^2 = 0$ , conoscendosi i loro valori alla superficie.

Nel caso particolare che i valori di  $\Psi$  e di  $\Delta^2 \Psi$  sieno dati sulla superficie di una sfera di raggio  $R$ , faremo uso della formula:

$$\Psi = \varphi + (r^2 - R^2) \varphi', \quad (\Delta^2 \varphi = \Delta^2 \varphi' = 0).$$

Porremo finalmente:

$$\Psi = \varphi + x \varphi',$$

quando la superficie è il piano  $x = 0$ . E le funzioni  $\varphi, \varphi'$ , in questi due casi si potranno determinare indipendentemente una dall'altra.

## V.

12. Faremo ora vedere come il principio di rappresentare una funzione che soddisfa all'equazione  $\Delta^4 = 0$ , mediante due funzioni che soddisfano all'equazione  $\Delta^2 = 0$ , possa esser utilmente applicato allo studio di alcuni problemi di Elasticità, nei quali l'equazione  $\Delta^4 = 0$  è appunto quella che ha maggior importanza.

Le componenti  $\xi, \eta, \zeta$ , dello spostamento, per i punti di un solido elastico, isotropo, sollecitato da sole forze agenti alla sua superficie, soddisfano alle tre equazioni differenziali:

$$\begin{aligned} \Delta^2 \xi + \frac{1}{1-2m} \frac{\partial \theta}{\partial x} &= 0, \\ \Delta^2 \eta + \frac{1}{1-2m} \frac{\partial \theta}{\partial y} &= 0, \\ \Delta^2 \zeta + \frac{1}{1-2m} \frac{\partial \theta}{\partial z} &= 0, \end{aligned} \quad \left\{ \begin{array}{l} \theta = \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z}, \\ m = \text{coef.}^e \text{ di contraz.}^e \end{array} \right. \quad (51)$$

da cui si ricava facilmente:

$$\begin{aligned} \Delta^2 \theta &= 0, \\ \Delta^4 \xi &= 0, \quad \Delta^4 \eta = 0, \quad \Delta^4 \zeta = 0. \end{aligned}$$

Le tre funzioni  $\xi, \eta, \zeta$ , si possono rappresentare, in varii modi, mediante quattro sole funzioni, che soddisfano all'equazione  $\Delta^2 = 0$ .

Sia, da primo,  $\varphi$  una funzione che soddisfi alle due equazioni:

$$\left. \begin{aligned} \Delta^2 \varphi &= 0 \\ 2\varphi + 4r \frac{\partial \varphi}{\partial r} &= -\frac{1}{1-2m} \theta. \end{aligned} \right\} \quad (52)$$

Una tale funzione esiste in generale, come già abbiamo avuto occasione di vedere. (Confr. eq. (16), § 3.)

Poniamo allora:

$$\left. \begin{aligned} \xi &= (r^2 - R^2) \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \lambda, \\ \eta &= (r^2 - R^2) \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \mu, \\ \zeta &= (r^2 - R^2) \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \nu. \end{aligned} \right\} \begin{aligned} R &= \text{cost.} \\ r^2 &= x^2 + y^2 + z^2. \end{aligned} \quad (53)$$

Da queste equazioni, tenendo presenti le (52), si ricava:

$$\begin{aligned} \Delta^2 \xi &= \frac{\partial}{\partial x} \left( -\frac{1}{1-2m} \theta \right) + \Delta^2 \lambda, \\ \Delta^2 \eta &= \frac{\partial}{\partial y} \left( -\frac{1}{1-2m} \theta \right) + \Delta^2 \mu, \\ \Delta^2 \zeta &= \frac{\partial}{\partial z} \left( -\frac{1}{1-2m} \theta \right) + \Delta^2 \nu. \end{aligned}$$

Dunque, per le (51), dovrà essere:

$$\Delta^2 \lambda = 0, \quad \Delta^2 \mu = 0, \quad \Delta^2 \nu = 0. \quad (54)$$

Dalle equazioni (53) si deduce ancora, derivando la prima rispetto ad  $x$ , la seconda rispetto ad  $y$ , la terza rispetto a  $z$ , e sommando:

$$\theta = 2r \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{\partial \lambda}{\partial x} + \frac{\partial \mu}{\partial y} + \frac{\partial \nu}{\partial z};$$

e confrontando questa colla seconda delle (51):

$$(1-2m)\varphi + (3-4m)r \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \lambda}{\partial x} + \frac{\partial \mu}{\partial y} + \frac{\partial \nu}{\partial z} \right) = 0, \quad (55)$$

equazione che lega le quattro funzioni  $\varphi$ ,  $\lambda$ ,  $\mu$ ,  $\nu$ .

Le formule (53), (54) e (55), permettono di determinare in modo assai semplice la deformazione di una sfera, data la deformazione della sua superficie (\*).

13. Ora invece poniamo:

$$\left. \begin{aligned} \xi &= z \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \lambda, \\ \eta &= z \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \mu, \\ \zeta &= z \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \nu, \end{aligned} \right\} \quad (56)$$

ove le funzioni  $\varphi$ ,  $\lambda$ ,  $\mu$ ,  $\nu$  non sono più quelle del caso precedente. La funzione  $\varphi$  soddisfi ora alle due equazioni:

$$\left. \begin{aligned} \Delta^2 \varphi &= 0 \\ \frac{\partial \varphi}{\partial z} &= - \frac{1}{2(1-2m)} \theta \end{aligned} \right\} \quad \text{(Confr.}^a \text{ colle eq.}^i \text{ (9) del § 1.)} \quad (57)$$

Sarà evidentemente, per le formule (56) e (57):

$$\begin{aligned} \Delta^2 \xi &= - \frac{1}{1-2m} \frac{\partial \theta}{\partial x} + \Delta^2 \lambda, \\ \Delta^2 \eta &= - \frac{1}{1-2m} \frac{\partial \theta}{\partial y} + \Delta^2 \mu, \\ \Delta^2 \zeta &= - \frac{1}{1-2m} \frac{\partial \theta}{\partial z} + \Delta^2 \nu, \end{aligned}$$

e quindi, per le (51):

$$\Delta^2 \lambda = 0, \quad \Delta^2 \mu = 0, \quad \Delta^2 \nu = 0.$$

Si ha inoltre dalle (56):

$$\theta = \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} = \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{\partial \lambda}{\partial x} + \frac{\partial \mu}{\partial y} + \frac{\partial \nu}{\partial z};$$

e per la seconda delle (57):

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = G \left( \frac{\partial \lambda}{\partial x} + \frac{\partial \mu}{\partial y} + \frac{\partial \nu}{\partial z} \right) \quad \left( G = \frac{2-4m}{3-4m} \right). \quad (58)$$

---

(\*) ALMANZI, *Sulla deformazione della sfera elastica*. Memorie dell'Acc. R. delle Scienze di Torino, ser. II, vol. XLVII.

Di queste formule ci varremo per determinare la deformazione dello spazio  $S$ , limitato dal piano  $z=0$ , che diremo  $\sigma$ , e corrispondente ai valori positivi di  $z$ , quando, per ogni punto  $(x' y' 0)$  del piano  $\sigma$  si conoscono le componenti  $\xi'$ ,  $\eta'$ ,  $\zeta'$ , dello spostamento (\*).

Perciò, in luogo delle funzioni  $\lambda$ ,  $\mu$ ,  $\nu$ , converrà introdurre le funzioni  $u$ ,  $v$ ,  $w$ , ponendo:

$$\begin{aligned} \Delta^2 u &= 0, & \Delta^2 v &= 0, & \Delta^2 w &= 0, \\ \frac{\partial u}{\partial z} &= \lambda, & \frac{\partial v}{\partial z} &= \mu, & \frac{\partial w}{\partial z} &= \nu. \end{aligned}$$

Allora le formule (56) diventeranno:

$$\left. \begin{aligned} \xi &= z \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}, \\ \eta &= z \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}, \\ \zeta &= z \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial z}; \end{aligned} \right\} \quad (59)$$

e la (58):

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = G \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right).$$

In particolare quest'ultima equazione varrà per i punti del piano  $\sigma$ , nei quali, dunque, la derivata, rispetto alla normale  $z$ , della funzione  $\varphi$ , è uguale a quella della funzione  $4 \left( \frac{\partial \lambda}{\partial x} + \frac{\partial \mu}{\partial y} + \frac{\partial \nu}{\partial z} \right)$ . Ma queste due funzioni devono esser regolari nello spazio  $S$ , e soddisfare all'equazione  $\Delta^2 = 0$ . Ne segue che non potranno differire se non per una costante che possiamo supporre nulla, giacchè nelle formule (56) compariscono soltanto le derivate della funzione  $\varphi$ .

Si avrà per conseguenza:

$$\varphi = G \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right). \quad (60)$$

---

(\*) Il problema della deformazione del solido limitato da un piano indefinito, date su questo piano le componenti dello spostamento, o della tensione, è stato risoluto per la prima volta dal prof. CERRUTI, *Ricerche intorno all'equilibrio dei corpi elastici isotropi*. R. Accademia dei Lincei, ser. III, vol. XIII.

Ora sul piano  $\sigma$  si hanno le formule:

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \xi', \quad \frac{\partial v}{\partial n} = \eta', \quad \frac{\partial w}{\partial n} = \zeta' \quad (n = z = \text{norm.}^a \text{ int.}^a).$$

E poichè le funzioni  $u, v, w$ , che supponiamo regolari nello spazio  $S$ , soddisfano all'equazione  $\Delta^2 = 0$ , avremo, per una nota formula, in un punto qualunque  $(x, y, z)$  di  $S$ , tralasciando una costante che non ha influenza:

$$u = \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma} \frac{\xi'}{r} d\sigma,$$

$$v = \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma} \frac{\eta'}{r} d\sigma, \quad (r = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + z^2})$$

$$w = \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma} \frac{\zeta'}{r} d\sigma;$$

e sostituendo nella formula (60):

$$\varphi = -\frac{G}{2\pi} \int_{\sigma} \frac{(x-x')\xi' + (y-y')\eta' + z\zeta'}{r^3} d\sigma,$$

che può scriversi, più semplicemente:

$$\varphi = -\frac{G}{2\pi} \int_{\sigma} \frac{k' \cos \alpha}{r^2} d\sigma,$$

ove  $k'$  rappresenta lo spostamento del punto  $(x', y', 0)$ ,  $\alpha$  l'angolo che la sua direzione fa colla direzione  $r$ .

Così abbiamo determinate le quattro funzioni che compariscono nelle formule (56); e il problema è risoluto.

## VI.

14. Supponiamo che sul piano  $\sigma$ , invece degli spostamenti  $\xi', \eta', \zeta$ , si conoscano le componenti  $F, G, H$  della tensione.

Le sei tensioni interne, che chiameremo:

$$\begin{array}{ccc} T_{xx}, & T_{yy}, & T_{zz}, \\ T_{yz}, & T_{zx}, & T_{xy}, \end{array}$$

soddisfano alle tre equazioni differenziali:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial T_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial T_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial T_{xz}}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial T_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial T_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial T_{yz}}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial T_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial T_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial T_{zz}}{\partial z} &= 0, \end{aligned} \right\} (T_{xy} = T_{yx}, \text{ ecc.}) \quad (61)$$

che rappresentano le condizioni di equilibrio: e alle altre sei:

$$\left. \begin{aligned} \Delta^2 T_{xx} &= 2M \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, & \Delta^2 T_{yz} &= 2M \frac{\partial^2 T}{\partial y \partial z}, \\ \Delta^2 T_{yy} &= 2M \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}, & \Delta^2 T_{zx} &= 2M \frac{\partial^2 T}{\partial z \partial x}, \\ \Delta^2 T_{zz} &= 2M \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}, & \Delta^2 T_{xy} &= 2M \frac{\partial^2 T}{\partial x \partial y}, \end{aligned} \right\} (62)$$

ove:

$$T = T_{xx} + T_{yy} + T_{zz}, \quad M = -\frac{1}{2(1+m)}.$$

La funzione  $T$  è legata alla dilatazione  $\theta$  dalla formula:

$$T = \frac{E}{1-2m} \theta, \quad (E = \text{modulo di elasticità.}) \quad (63)$$

e quindi soddisfa come  $\theta$  all'equazione:

$$\Delta^2 = 0.$$

Poniamo:

$$\left. \begin{aligned} T_{xx} &= Mz \frac{\partial T}{\partial x} + \lambda, \\ T_{xy} &= Mz \frac{\partial T}{\partial y} + \mu, \\ T_{zz} &= Mz \frac{\partial T}{\partial z} + \nu \end{aligned} \right\} (64)$$

Si ricava:

$$\begin{aligned}\Delta^2 T_{xx} &= 2M \frac{\partial^2 T}{\partial z \partial x} + \Delta^2 \lambda, \\ \Delta^2 T_{xy} &= 2M \frac{\partial^2 T}{\partial z \partial y} + \Delta^2 \mu, \\ \Delta^2 T_{xz} &= 2M \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \Delta^2 \nu.\end{aligned}$$

Dovrà dunque essere, per le formole (62):

$$\Delta^2 \lambda = 0, \quad \Delta^2 \mu = 0, \quad \Delta^2 \nu = 0.$$

Introduciamo le funzioni  $u$ ,  $v$ ,  $w$ , regolari nello spazio  $S$ , definite dalle equazioni:

$$\begin{aligned}\Delta^2 u &= 0, \quad \Delta^2 v = 0, \quad \Delta^2 w = 0. \\ \frac{\partial u}{\partial z} &= \lambda, \quad \frac{\partial v}{\partial z} = \mu, \quad \frac{\partial w}{\partial z} = \nu.\end{aligned}\tag{65}$$

Sul piano  $\sigma$  sarà, per le (64) e (65):

$$\frac{\partial u}{\partial z} = T_{xx}, \quad \frac{\partial v}{\partial z} = T_{xy}, \quad \frac{\partial w}{\partial z} = T_{xz}.$$

Ma nei punti di questo piano le tensioni  $T_{xx}$ ,  $T_{xy}$ ,  $T_{xz}$ , non sono altro che le componenti della tensione esterna, cambiate di segno: e la direzione  $z$  coincide colla direzione della normale interna  $n$ . Potremo dunque scrivere, per i punti di  $\sigma$ :

$$\frac{\partial u}{\partial n} = -F, \quad \frac{\partial v}{\partial n} = -G, \quad \frac{\partial w}{\partial n} = -H.$$

Ne segue che in un punto qualunque  $(x y z)$  di  $S$  si avrà, tralasciando delle costanti che non hanno influenza:

$$u = -\frac{1}{2\pi} \int_{\sigma} \frac{F}{r} d\sigma, \quad v = -\frac{1}{2\pi} \int_{\sigma} \frac{G}{r} d\sigma, \quad w = -\int_{\sigma} \frac{H}{r} d\sigma,\tag{66}$$

ove, al solito,  $r$  rappresenta la distanza dal punto  $(x y z)$  di  $S$ , al punto  $(x' y' 0)$  di  $\sigma$ , a cui si riferiscono le componenti  $F$ ,  $G$ ,  $H$ , della tensione.

Consideriamo ora l'ultima delle equazioni (61): Ponendo  $M z \frac{\partial T}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial z}$ ,



in luogo di  $T_{zz}$ , potremo scriverla:

$$\frac{\partial}{\partial z} \left( M T + \frac{\partial w}{\partial z} \right) = - \left( \frac{\partial T_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial T_{zy}}{\partial y} \right) - M z \frac{\partial^2 T}{d z^2}.$$

Sul piano  $z = 0$ , sarà dunque:

$$\frac{\partial}{\partial n} \left( M T + \frac{\partial w}{\partial z} \right) = \left( \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} \right).$$

Ma, nel primo membro, la funzione in parentesi soddisfa all'equazione  $\Delta^2 = 0$ . Sarà, per conseguenza nel punto  $(x y z)$  di  $S$ :

$$M T + \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{1}{2 \pi} \int_{\sigma} \frac{1}{r} \left( \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} \right) d \sigma,$$

nella qual formula abbiamo tralasciata la costante che vi comparirebbe, giacchè supponiamo che la dilatazione  $\theta$ , e quindi la funzione  $T$ , si annulli all'infinito.

Risolvendo rispetto a  $T$ , otteniamo:

$$T = \frac{1}{M} \left\{ - \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{2 \pi} \int_{\sigma} \frac{1}{r} \left( \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} \right) d \sigma \right\}; \quad (67)$$

e sostituendo a  $w$  il suo valore, dato dall'ultima delle (66):

$$T = \frac{1}{2 \pi M} \int_{\sigma} \frac{1}{r} \left( \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{z H}{r^2} \right) d \sigma.$$

Così conosciamo tutte e quattro le funzioni che compariscono nelle formule (64), e quindi ancora le tre tensioni interne  $T_{zx}$ ,  $T_{zy}$ ,  $T_{zz}$ , ossia le componenti della tensione che agisce sugli elementi dei piani paralleli a  $\sigma$ .

Moltiplicando la funzione  $T$  per il fattore  $\frac{E}{1 - 2m}$ , otterremo, per un punto qualunque di  $S$ , la dilatazione  $\theta$ .

15. La formula (67) si presta alla ricerca dei valori che assume la funzione  $T$  sul piano  $z = 0$ . Osserviamo infatti che l'integrale che compare nel suo secondo membro, ha un valore ben determinato in tutti punti dello spazio, e non subisce discontinuità quando il punto attraversa il piano  $\sigma$ . Si ha inoltre, sul piano  $\sigma$ :  $\frac{\partial w}{\partial z} = T_{zz} = -H$ . Per conseguenza la formula considerata varrà anche per i punti di questo piano. E sarà, detta  $T'$  la funzione  $T$

per  $z = 0$ :

$$T' = \frac{1}{M} \left\{ H + \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma} \frac{1}{r} \left( \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} \right) d\sigma \right\}, \quad (68)$$

ove s'intende che  $r$  vale  $\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}$ .

Ciò posto, ci sarà facile determinare una funzione  $k$ , che dovremo tra poco introdurre nel nostro calcolo, la quale soddisfi alle due equazioni:

$$\Delta^2 k = 0, \quad \frac{\partial k}{\partial z} = \theta,$$

e inoltre sia finita e continua in tutto lo spazio  $S$ , e si annulli all'infinito.

Sarà infatti, nei punti del piano  $\sigma$ , dicendo  $\theta'$  la dilatazione  $\theta$ , per  $z = 0$ :

$$\frac{\partial k}{\partial n} = \theta';$$

e quindi in un punto qualunque di  $S$ :

$$k = \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma} \frac{\theta'}{r} d\sigma. \quad (69)$$

Il valore di  $\theta'$ , conoscendosi già quello di  $T'$ , lo ricaveremo immediatamente dalla formula (63), che ci dà:

$$\theta' = \frac{1-2m}{E} T'.$$

16. Vediamo ora di ottenere la componente  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$  dello spostamento. Ricordiamo che esse soddisfano alle equazioni:

$$\left. \begin{aligned} \Delta^2 \xi + \frac{1}{1-2m} \frac{\partial \theta}{\partial x} &= 0, \\ \Delta^2 \eta + \frac{1}{1-2m} \frac{\partial \theta}{\partial y} &= 0, \\ \Delta^2 \zeta + \frac{1}{1-2m} \frac{\partial \theta}{\partial z} &= 0. \end{aligned} \right\} \left( \theta = \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} \right) \quad (70)$$

Poniamo:

$$\left. \begin{aligned} \xi &= -\frac{1}{2(1-2m)} \left( z \frac{\partial k}{\partial x} + \varphi \right), \\ \eta &= -\frac{1}{2(1-2m)} \left( z \frac{\partial k}{\partial y} + \psi \right), \\ \zeta &= -\frac{1}{2(1-2m)} \left( z \frac{\partial k}{\partial z} + \chi \right), \end{aligned} \right\} \quad (71)$$

essendo  $k$  la funzione considerata al par. precedente. Il problema è ridotto a determinare le tre funzioni  $\varphi$ ,  $\psi$ ,  $\chi$ .

Dalle (71) si ricava, poichè  $\frac{\partial k}{\partial z} = \theta$ :

$$\Delta^2 \xi = -\frac{1}{2(1-2m)} \left( 2 \frac{\partial \theta}{\partial x} + \Delta^2 \varphi \right),$$

$$\Delta^2 \eta = -\frac{1}{2(1-2m)} \left( 2 \frac{\partial \theta}{\partial y} + \Delta^2 \psi \right),$$

$$\Delta^2 \zeta = -\frac{1}{2(1-2m)} \left( 2 \frac{\partial \theta}{\partial z} + \Delta^2 \chi \right).$$

Dunque, per le formule (70), dovrà essere:

$$\Delta^2 \varphi = 0, \quad \Delta^2 \psi = 0, \quad \Delta^2 \chi = 0.$$

Ricordiamo le formule che fornisce la teoria dell'elasticità, per esprimere le tensioni  $T_{zx}$ ,  $T_{zy}$ ,  $T_{zz}$ , mediante gli spostamenti  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$ . Esse sono le seguenti:

$$T_{zx} = E \frac{1}{2(1+m)} \left\{ \frac{\partial \xi}{\partial z} + \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right\},$$

$$T_{zy} = E \frac{1}{2(1+m)} \left\{ \frac{\partial \eta}{\partial z} + \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right\},$$

$$T_{zz} = E \frac{1}{2(1+m)} \left\{ \frac{\partial \zeta}{\partial z} + \frac{m}{1-2m} \theta \right\}.$$

Sostituendo a  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$ , le loro espressioni date dalle formule (71), e ponendo per semplicità  $-\frac{2}{E}(1+m)(1-2m) = A$ , si ricava:

$$\left. \begin{aligned} A T_{zx} &= 2z \frac{\partial^2 k}{\partial x \partial z} + \frac{\partial}{\partial x} (k + \chi) + \frac{\partial \varphi}{\partial z}, \\ A T_{zy} &= 2z \frac{\partial^2 k}{\partial y \partial z} + \frac{\partial}{\partial y} (k + \chi) + \frac{\partial \psi}{\partial z}, \\ A T_{zz} &= 2z \frac{\partial^2 k}{\partial z^2} + 2 \frac{\partial k}{\partial z} + 2 \frac{\partial \chi}{\partial z} - 2m\theta. \end{aligned} \right\} \quad (72)$$

L'ultima di queste, sostituendo  $\theta$  a  $\frac{\partial k}{\partial z}$ , potrà scriversi:

$$\frac{\partial \chi}{\partial z} = \frac{A}{2} T_{zz} - (1-m)\theta - z \frac{\partial^2 k}{\partial z^2}.$$

Sul piano  $\sigma$  sarà dunque:

$$\frac{\partial \chi}{\partial z} = \frac{A}{2} H - (1 - m) \theta ;$$

e in un punto qualunque di  $S$ , ponendo la condizione che all'infinito lo spostamento  $\xi$ , e quindi la funzione  $\chi$ , debba annullarsi:

$$\chi = \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma} \frac{1}{r} \left( \frac{A}{2} H - (1 - m) \theta' \right) d\sigma. \quad (73)$$

La funzione  $\chi$  è così determinata.

Nella prima e nella seconda delle formule (72) compariscono le derivate della funzione  $k + \chi$  rispetto ad  $x$  ed  $y$ . Dalle equazioni (69) e (73), posto per brevità  $\frac{A}{2} H - m \theta' = U$ , si ricava:

$$k + \chi = \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma} \frac{1}{r} U d\sigma. \quad (74)$$

Consideriamo la funzione:

$$\varphi_1 = \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma} \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial x} d\sigma. \quad (75)$$

Dico che si ha:

$$\varphi_1 = \frac{\partial (k + \chi)}{\partial x}.$$

Infatti sul piano  $\sigma$  sarà, per le formule (74) e (75):

$$\frac{\partial}{\partial z} (k + \chi) = U, \quad \frac{\partial}{\partial z} \varphi_1 = \frac{\partial U}{\partial x},$$

e quindi:

$$\frac{\partial}{\partial z} \varphi_1 = \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial (k + \chi)}{\partial x}.$$

Ma le funzioni  $\varphi_1$  e  $\frac{\partial (k + \chi)}{\partial x}$  sono regolari nello spazio  $S$ , soddisfano all'equazione  $\Delta^2 = 0$ , e si annullano all'infinito. Sarà dunque in tutto  $S$ :

$$\varphi_1 = \frac{\partial (k + \chi)}{\partial x}.$$

Analogamente, se poniamo:

$$\varphi_2 = \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma} \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial y} d\sigma,$$

sarà:

$$\varphi_2 = \frac{\partial(k + \chi)}{\partial y}.$$

La  $U$  è espressa mediante le quantità  $H$ , e  $\theta'$  ossia  $\frac{1-2m}{E} T'$ . La  $T'$  è data dalla formula (68), e le sue derivate rispetto ad  $x$  ed  $y$ , analogamente a quanto si è veduto per la funzione  $k + \chi$ , si otterranno derivando, rispetto ad  $x$  ed  $y$ , la quantità  $F$ ,  $G$ ,  $H$ , che compariscono sotto il segno d' integrazione.

Così dunque conosciamo le funzioni  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$ , in tutti i punti di  $S$ , compreso il piano  $\sigma$ , ove le indicheremo con  $\varphi_1'$ ,  $\varphi_2'$ .

Allora la prima e la seconda delle (72), per i punti di  $\sigma$  daranno:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial n} &= A F - \varphi_1', \\ \frac{\partial \psi}{\partial n} &= A G - \varphi_2'. \end{aligned}$$

E in un punto qualunque di  $S$ , supponendo  $\varphi$  e  $\psi$  nulle all'infinito, sarà:

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma} \frac{1}{r} (A F - \varphi_1') d\sigma, \\ \psi &= \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma} \frac{1}{r} (A G - \varphi_2') d\sigma. \end{aligned}$$

Così conosciamo tutte le funzioni che compariscono nelle formule (71), e il problema è risoluto.

## VII.

17. Termineremo questo studio, con un problema relativo alla deformazione dei cilindri, nel quale si presenta l'occasione di applicare alcuni dei risultati ottenuti.

Un caso già considerato è quello d'un cilindro sollecitato da tensioni agenti soltanto alle basi (\*). Ora faremo vedere che un caso molto più generale si può ridurre al precedente: il caso cioè che anche la superficie laterale sia soggetta a tensione, purchè la tensione sia la medesima, in direzione e grandezza, in tutti i punti di una stessa generatrice, potendo del resto variare in un modo qualunque, da una generatrice all'altra, salvo ad esser soddisfatte certe condizioni, come vedremo.

Prendiamo l'asse del cilindro come asse delle  $z$ , e un suo punto qualunque come origine delle coordinate.

Siano  $\varphi$ ,  $\Phi$ , due funzioni delle sole variabili  $x$ ,  $y$ , che soddisfano alle equazioni:

$$\Delta^2 \varphi = 0, \quad \Delta^4 \Phi = 0.$$

Consideriamo il sistema di tensioni interne:

$$\left. \begin{aligned} T_{xx} &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}, & T_{yy} &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}, & T_{zz} &= m \Delta^2 \Phi, \\ T_{yz} &= \frac{\partial \varphi}{\partial x}, & T_{zx} &= -\frac{\partial \varphi}{\partial y}, & T_{xy} &= -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}. \end{aligned} \right\} \quad (76)$$

Si verifica facilmente che le equazioni (61) e (62) sono soddisfatte: d'onde risulta che le tensioni (76) corrispondono ad una deformazione possibile del cilindro.

Le componenti  $F$ ,  $G$ ,  $H$ , della tensione, che agendo sugli elementi della sua superficie esterna, producono questa deformazione, si otterranno dalle note formule:

$$\begin{aligned} -F &= T_{xx} \cos \alpha + T_{xy} \cos \beta + T_{xz} \cos \gamma, \\ -G &= T_{yx} \cos \alpha + T_{yy} \cos \beta + T_{yz} \cos \gamma, \\ -H &= T_{zx} \cos \alpha + T_{zy} \cos \beta + T_{zz} \cos \gamma, \end{aligned}$$

ove  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ , rappresentano gli angoli della normale interna alla superficie, cogli assi coordinati.

Sulla superficie laterale si avrà, sostituendo alle tensioni interne i loro

---

(\*) Vedi, p. es., BETTI, *Teoria dell'elasticità*. Nuovo Cimento, ser. II, vol. VII, e segg.

valori :

$$\left. \begin{aligned} F &= -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \cos \alpha + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \cos \beta, \\ G &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \cos \alpha - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \cos \beta, \\ H &= \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cos \alpha - \frac{\partial \varphi}{\partial x} \cos \beta. \end{aligned} \right\} \quad (77)$$

Sulla base  $b_1$ , rivolta verso la direzione positiva dell'asse delle  $z$ , dette  $F'_1$ ,  $G'_1$ ,  $H'_1$ , la componenti della tensione, sarà:

$$F'_1 = -\frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad G'_1 = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad H'_1 = m \Delta^2 \Phi; \quad (78)$$

e sulla base  $b_2$ :

$$F'_2 = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad G'_2 = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad H'_2 = -m \Delta^2 \Phi. \quad (79)$$

In questo caso particolare di sollecitazione, la tensione, che agisce sulla superficie laterale del cilindro, è la stessa in tutti i punti di una stessa generatrice, come si vede dalle formole (77), ricordando che le funzioni  $\varphi$ ,  $\Phi$  contengono le sole variabili  $x$ ,  $y$ .

18. Ora supponiamo che sulla superficie laterale del cilindro siano date le componenti  $F$ ,  $G$ ,  $H$ , della tensione, uguali in tutti i punti di una stessa generatrice: e vediamo se è possibile determinare le funzioni  $\varphi$ ,  $\Phi$ , in modo che siano soddisfatte le equazioni (77) che si riferiscono alla superficie laterale. Delle tensioni alle basi non ne teniamo conto.

Sia  $k$  l'intersezione della superficie laterale del cilindro, con un piano parallelo al piano  $(xy)$ . I coseni degli angoli  $\varepsilon$ ,  $\omega$ , che la tangente  $t$  al contorno  $k$ , in un suo punto qualunque, fa cogli assi della  $x$  e della  $y$ , sono dati dalle formole:

$$\cos \varepsilon = \cos \beta, \quad \cos \omega = -\cos \alpha. \quad (80)$$

Quindi le formole (77) potremo scriverle:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) \cos \varepsilon + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) \cos \omega &= F, \\ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) \cos \varepsilon + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) \cos \omega &= G, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x} \cos \varepsilon + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cos \omega &= H; \end{aligned}$$

ossia:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = H,$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) = G, \quad \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) = F.$$

Sul contorno  $k$  prendiamo un punto  $O$  come origine, e poniamo la condizione che in  $O$  la funzione  $\varphi$  si annulli, e si annulli pure la funzione  $\Phi$ , insieme alle sue derivate prime. Sarà in un punto qualunque  $M$  di  $k$ :

$$\varphi = \int_0^M H dk, \quad (81)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \int_0^M G dk, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = \int_0^M F dk; \quad (82)$$

e le funzioni  $\varphi$ ,  $\frac{\partial \Phi}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial \Phi}{\partial y}$ , così ottenute, avranno un sol valore in tutti i punti del contorno, purchè le quantità  $F$ ,  $G$ ,  $H$ , soddisfino alle equazioni:

$$\int_k F dk = 0, \quad \int_k G dk = 0, \quad \int_k H dk = 0. \quad (83)$$

Supponiamo che queste condizioni siano verificate.

Dalle formule (82) si ricava:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial n} &= \cos \alpha \int_0^M G dk + \cos \beta \int_0^M F dk, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial t} &= \cos \beta \int_0^M G dk - \cos \alpha \int_0^M F dk. \end{aligned} \right\} \quad (84)$$

Da quest'ultima formula otterremo con una nuova integrazione il valore della funzione  $\Phi$  nel punto  $M$  di  $k$ . Perciò chiameremo ora  $M'$  un punto qualunque dell'intervallo  $OM$ . Sarà allora in  $M'$ , giacchè si è supposto che le derivate prime di  $\Phi$  in  $O$  si annullino:

$$\Phi = \int_0^M \left\{ \cos \beta \int_0^{M'} G dk - \cos \alpha \int_0^{M'} F dk \right\} dk; \quad (85)$$

e la funzione  $\Phi$  avrà un sol valore in ogni punto di  $k$ , purchè sia verifi-



cata l'equazione :

$$\int_k \left\{ \cos \beta \int_0^{M'} G dk - \cos \alpha \int_0^{M'} F dk \right\} dk = 0. \quad (86)$$

Questa formula, come ora dimostreremo, equivale all'altra :

$$\int_k (y F - x G) dk = 0,$$

ove  $x, y$ , sono le coordinate del punto  $M'$ , a cui si riferiscono le tensioni  $F, G$ .

Si ha infatti, identicamente :

$$y F dk = d \left[ y \int_0^{M'} F dk \right] - dy \int_0^{M'} F dk,$$

$$x G dk = d \left[ x \int_0^{M'} G dk \right] - dx \int_0^{M'} G dk;$$

donde, ricordando le formule:

$$dy = \cos \alpha dk,$$

$$dx = -\cos \beta dk,$$

e posto per brevità :

$$y \int_0^{M'} F dk - x \int_0^{M'} G dk = W,$$

si ricava :

$$(y F - x G) dk = dW - \left\{ \cos \beta \int_0^{M'} G dk - \cos \alpha \int_0^{M'} F dk \right\} dk.$$

Integrando ora su tutto il contorno  $k$ , si avrà, in virtù della equazione (86):

$$\int_k (y F - x G) dk = \int_k dW.$$

Ma quando si percorre il contorno  $k$ , le quantità che compariscono in  $W$  riprendono, al punto di partenza, il valore iniziale. Sarà dunque :

$$\int_k dW = 0,$$

e finalmente :

$$\int_k (y F - x G) d = 0. \quad (87)$$

come volevamo dimostrare.

Ammettiamo che le quantità date  $F$ ,  $G$ ,  $H$ , soddisfino a queste condizioni, conosceremo, in virtù delle formole (81), (85) e (84), per ogni punto di  $k$ , il valore di  $\varphi$ , di  $\Phi$  e di  $\frac{\partial \Phi}{\partial n}$ . Ma la funzione  $\varphi$  soddisfa all'equazione  $\Delta^2 \varphi = 0$ , e la funzione  $\Phi$  soddisfa all'equazione  $\Delta^2 \Phi = 0$ . Per conseguenza queste due funzioni delle variabili  $x$ ,  $y$ , saranno determinate in tutto l'arco racchiuso dal contorno  $k$ , e quindi in tutto lo spazio occupato dal cilindro. E le equazioni (77), da cui siamo partiti, saranno verificate su tutta la sua superficie laterale.

Se il cilindro è cavo, il contorno  $k$  sarà formato da due linee chiuse, una interna all'altra. In questo caso dovremo, per ciascuna di queste linee, prendere un punto come origine, e supporre che in esso si annullino le funzioni  $\varphi$  e  $\Phi$ , e le derivate prime di quest'ultima. Quanto alla direzione positiva del contorno, cioè delle sue tangenti, è sempre determinata senza ambiguità dalle formole (80).

Affinchè poi, in ogni punto del contorno, otteniamo per le funzioni  $\varphi$ ,  $\Phi$ ,  $\frac{\partial \Phi}{\partial n}$ , un sol valore, è necessario che le equazioni (83) e (87) siano soddisfatte tanto sulla linea esterna che sulla interna.

19. Ed ora veniamo alla questione accennata in principio. Supponiamo di conoscere, per tutti i punti della superficie del cilindro, le componenti della tensione, e sieno:

$$\left. \begin{array}{l} F, \quad G, \quad H, \quad \text{sulla sup. laterale} \\ F_1, \quad G_1, \quad H_1, \quad \text{sulla base } b_1 \\ F_2, \quad G_2, \quad H_2, \quad \text{sulla base } b_2. \end{array} \right\} \quad (88)$$

Si suppone, al solito, che le quantità  $F$ ,  $G$ ,  $H$ , mantengano lo stesso valore in tutti i punti di una stessa generatrice, e soddisfino alle condizioni espresse dalle formole (83) e (87).

Se col procedimento indicato sopra, sapremo determinare le funzioni  $\varphi$ ,  $\Phi$ , dalle variabili  $x$ ,  $y$ , che sulla superficie laterale soddisfano alle equazioni (77), otterremo dalle formole (76) le tensioni interne corrispondenti alla deforma-

zione prodotta dalle tensioni:

$$\left. \begin{array}{l} F, \quad G, \quad H, \quad \text{sulla sup. laterale} \\ F'_1, \quad G'_1, \quad H'_1, \quad \text{sulla base } b_1 \\ F'_2, \quad G'_2, \quad H'_2, \quad \text{sulla base } b_2. \end{array} \right\} \quad (89)$$

essendo queste ultime, relative alle basi, date dalle formule (78) e (79).

Scomponiamo allora la deformazione prodotta dalle tensioni (88), nelle due deformazioni prodotte, la prima dalle tensioni (89), e la seconda dalle tensioni:

$$\begin{array}{l} 0, \quad 0, \quad 0, \quad \text{sulla sup. laterale} \\ F_1 - F'_1, \quad G_1 - G'_1, \quad H_1 - H'_1, \quad \text{sulla base } b_1 \\ F_2 - F'_2, \quad G_2 - G'_2, \quad H_2 - H'_2, \quad \text{sulla base } b_2. \end{array}$$

Determinate le funzioni  $\varphi$ ,  $\Phi$ , il problema è ridotto a considerare questa seconda deformazione, prodotta da tensioni che agiscono sulle sole basi: ciò che volevamo dimostrare.

La difficoltà principale di questo procedimento consiste nell'integrare la equazione  $\Delta^4 \Phi = 0$ , nell'area racchiusa dal contorno  $k$ , quando su di esso si conoscono i valori delle funzioni  $\Phi$ , e della sua derivata rispetto alla normale interna.

Questo problema si sa risolvere per diverse forme del contorno (\*). Nel caso del cerchio, si ottiene la funzione  $\Phi$  espressa per mezzo d'integrali definiti ( $\Pi - 6$ ).

---

(\*) Vedi le due Note del LEVI-CIVITA: *Sulla Integrazione dell'Equazione  $\Delta^2 \Delta^2 = 0$* . Atti della R. Ac. delle Scienze, vol. XXXIII, a. 1898. — *Sopra una trasformazione in sé stessa della Equazione  $\Delta^2 \Delta^2 = 0$* , Atti del R. Ist. Veneto, Tomo IX, Serie VII, 1897-98. Nella prima di queste, sono indicate alcune delle Note e Memorie relative al problema in questione.