

Àlgebra Lineal i Geometria

Enric Cosme

2026-07-16

Taula de continguts

0	Preliminars	4
0.1	Matrius sobre un cos	5
0.2	Operacions amb matrius	6
1	Sistemes d'equacions	9
1.1	Operacions elementals	10
1.2	Mètode de Gauss-Jordan	13
1.3	Teorema de Rouché-Frobenius	23
2	Espais vectorials	26
2.1	Subespais vectorials	29
2.2	Sistemes generadors, independència lineal i bases	32
2.3	Dimensió	39
2.4	Coordenades	45
3	Aplicacions lineals	51
3.1	Imatge i nucli	54
3.2	Teorema d'extensió	57
3.3	Matriu associada a una aplicació lineal	60
3.4	L'espai vectorial $\text{Hom}_{\mathbb{K}}(V_1, V_2)$	62
4	Equivalència de matrius	65
4.1	Matrius elementals	67
4.2	Equivalència i rang	71
4.3	Rang i transposició	76
5	Determinant	79
5.1	Propietats del determinant	79
5.2	Existència i unicitat	83
6	Diagonalització	97
6.1	Valors i vectors propis	98
7	Formes bilineals	111
7.1	Congruència	115
7.2	Ortogonalitat i simetria	118
7.3	Matrius simètriques reals	123

8	Productes escalars	129
8.1	Espais vectorials euclidians	130
8.2	Bases ortonormals	133
8.3	Complement ortogonal	138
8.4	Isometries	140
9	Espai afí	147
9.1	Sistemes de referència afí	149
9.2	Varietats afins	152
9.3	Operacions entre varietats afins	159
10	Afinitats	162
10.1	Expressió matricial d'una afinitat	166
10.2	Grup afí	168
10.3	Exemples d'afinitats	171
11	Espai afí euclidià	174
11.1	Projecció ortogonal	174
11.2	Distàncies entre varietats afins	176
11.3	Angles entre varietats afins	181
11.4	Moviments	183
11.5	Moviments en $\mathbb{R}^2$ i $\mathbb{R}^3$	187

0 Preliminars

Introduïm els conceptes necessaris per al desenvolupament dels temes que tractarem en el següents capítols.

Definició 0.1 (Cos). Un **cos** és una tupla $(\mathbb{K}, +, \cdot, 0, 1)$ on

- $\mathbb{K}$ és un conjunt d'elements els quals anomenarem **escalars**;
- $+$ i $\cdot$ són operacions binàries internes en $\mathbb{K}$ que anomenarem, respectivament, **suma** i **producte**. Aquestes operacions compleixen les propietats associativa, commutativa i distributiva del producte respecte la suma;
- $0 \in \mathbb{K}$ és l'element neutre per a la suma;
- $1 \in \mathbb{K}$ és l'element neutre per al producte;
- Tot element de $\mathbb{K}$ és invertible per a la suma. Als inversos per a la suma els anomenarem **oposats**;
- Tot element de $\mathbb{K}$, a excepció del 0, és invertible per al producte.

Se'n dedueix de la definició que $(\mathbb{K}, +, 0)$ i $(\mathbb{K} - \{0\}, \cdot, 1)$ són grups abelians. Quan se sobreentenguen les operacions suma i producte, així com els seus neutres, utilitzarem únicament $\mathbb{K}$ per a referir-nos al cos $(\mathbb{K}, +, \cdot, 0, 1)$.

Exemple 0.1. Els conjunts $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$ i $\mathbb{C}$ de nombres racionals, reals i complexos, respectivament, amb les operacions habituals de suma i producte són cossos. Per contra, els conjunts $\mathbb{N}$ i $\mathbb{Z}$, de nombres naturals i enters, respectivament, amb les operacions habituals de suma i producte no són cossos.

Associada a tot cos tenim la noció de característica.

Definició 0.2 (Característica d'un cos). Sigui $(\mathbb{K}, +, \cdot, 0, 1)$ un cos. Anomenem **característica del cos** $\mathbb{K}$, denotada $\text{car}(\mathbb{K})$, al menor natural no nul $n \in \mathbb{N}$ de forma que, en sumar 1 amb ell mateix n vegades, s'obté com a resultat 0. En aquest cas, escriurem $\text{car}(\mathbb{K}) = n$. En cas de no existir aquest natural, direm que el cos $\mathbb{K}$ té característica zero i escriurem $\text{car}(\mathbb{K}) = 0$.

Exemple 0.2.

- i. Per a un nombre primer $p \in \mathbb{P}$, el cos $\mathbb{Z}_p$ té característica p ;
- ii. Els cossos $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$ i $\mathbb{C}$ tenen característica 0.

Proposició 0.1. Siga $\mathbb{K}$ un cos no trivial amb $\text{car}(\mathbb{K}) \neq 2$, aleshores $\mathbb{K} \neq \{0, 1\}$, és a dir, $\mathbb{K}$ conté més elements que 0 i 1.

Demostració. Considerem l'element $1 + 1$. Anem a comprovar que $1 + 1$ és un element diferent a 1 i a 0. Suposem per reducció a l'absurd que aquest no fóra el cas.

Si $1 + 1 = 1$, aleshores restant 1 a ambdues bandes tindríem que $1 = 0$. Notem que si $x \in \mathbb{K}$ es tindria que $x = 1x = 0x = 0$. Llavors arribaríem a contradicció, ja que el cos seria trivial. Per altra banda, si $1 + 1 = 0$, aleshores arribaríem a contradicció ja que el cos tindria característica 2.

Per tant, l'element $1 + 1 \in \mathbb{K} - \{0, 1\}$. □

0.1 Matrius sobre un cos

A continuació presentem una sèrie de definicions bàsiques sobre matrius.

Definició 0.3. Donats $m, n \in \mathbb{N}$, una **matriu** A d' m files i n columnes sobre un cos $\mathbb{K}$ és una aplicació de la forma $A: \{1, \dots, m\} \times \{1, \dots, n\} \rightarrow \mathbb{K}$ que es representa com una taula amb mn entrades de la següent forma

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \cdots & \alpha_{mn} \end{bmatrix}$$

on, per a tot $1 \leq i \leq m$ i $1 \leq j \leq n$, es té que l'element $A(i, j) = \alpha_{ij}$ pertany a $\mathbb{K}$. En aquest cas direm que la matriu A té **tamany** m, n . Les matrius també solen representar-se de forma compacta com a $A = (\alpha_{ij})$, on se sobreentén el rang de variació dels índexs i i j . Direm que les matrius A i B són iguals si tenen el mateix tamany i per a cada parell d'índexs i, j , les entrades en la posició (i, j) coincideixen.

Denotem per $M_{mn}(\mathbb{K})$ al conjunt de totes les matrius de tamany m, n sobre $\mathbb{K}$. Si $m = n$, direm que la matriu és **quadrada** i en aquest cas escriurem $M_n(\mathbb{K})$ en compte de $M_{nn}(\mathbb{K})$. Les matrius quadrades són aquelles que tenen el mateix nombre de files i columnes.

Direm que una matriu $A = (\alpha_{ij})$ es

- **diagonal**, si per tot parell d'índexs $i \neq j$ es té que $\alpha_{ij} = 0$;
- **triangular superior**, si per a tot parell d'índexs $i < j$ es té que $\alpha_{ij} = 0$;
- **triangular inferior**, si per a tot parell d'índexs $i > j$ es té que $\alpha_{ij} = 0$.

Anomenem **pivot** de la fila i d'una matriu A al primer element no nul d'aquesta fila.

Direm que la matriu A és **esglaonada per files** si

1. les files nul·les d' A estan baix del tot
2. els pivots de tota fila no nula valen 1 i

3. el pivot de cada fila no nula està a la dreta dels pivots de les files anteriors.

Direm que la matriu A és **esglaonada reduïda per files** si és esglaonada per files i, a més,

4. les entrades a sobre de cada pivot són igual a 0.

Exemple 0.3. Considerem les següents matrius sobre $\mathbb{Q}$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 9 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

La matriu A és una matriu quadrada, la matriu B és una matriu esglaonada i triangular superior, la matriu C és una matriu quadrada esglaonada reduïda i la matriu D és una matriu diagonal.

0.2 Operacions amb matrius

Acabem aquest capítol amb algunes operacions bàsiques sobre matrius que emprarem en capítols posteriors.

Definició 0.4 (Matriu transposada). Siga $A = (\alpha_{ij})$ una matriu en $M_{mn}(\mathbb{K})$. Definim la **matriu transposada** d' A , i la denotem per A^t , a la matriu en $M_{nm}(\mathbb{K})$ donada per

$$A^t = (\alpha_{ji}).$$

Podem considerar l'operador de transposició com l'aplicació

$$\begin{array}{ccc} (\cdot)^t: & M_{mn}(\mathbb{K}) & \longrightarrow M_{nm}(\mathbb{K}) \\ & A & \longmapsto A^t \end{array}.$$

Notem que $(\cdot)^t \circ (\cdot)^t = \text{id}_{M_{mn}(\mathbb{K})}$. És a dir, la transposada de la transposada és la matriu original. A més, si $D \in M_n(\mathbb{K})$ és una matriu diagonal, aleshores $D^t = D$.

Recordem la definició de matriu identitat.

Definició 0.5 (Matriu identitat). Si n és un natural en $\mathbb{N}$, definim la **matriu identitat** de tamany n sobre $\mathbb{K}$, i la denotem per I_n , com la matriu en $M_n(\mathbb{K})$ donada per $I_n = (\iota_{ij})$, on ι és l'aplicació

$$\begin{array}{ccc} \iota: & \{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, n\} & \longrightarrow \mathbb{K} \\ & (i, j) & \longmapsto \begin{cases} 1 & \text{si } i = j; \\ 0 & \text{si } i \neq j. \end{cases} \end{array}$$

És a dir, I_n és una matriu quadrada de tamany n conformada per una diagonal d'uns

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}.$$

A continuació introduïm el producte de matrius i recordem les seues propietats bàsiques.

Definició 0.6 (Producte de matrius). Siguen $A \in M_{mn}(\mathbb{K})$ i $B \in M_{np}(\mathbb{K})$ matrius sobre $\mathbb{K}$ amb el mateix nombre de columnes i files, respectivament. Aleshores, si $A = (\alpha_{ij})$ i $B = (\beta_{jk})$, definim el **producte d'A per B**, i el denotem per AB , com la matriu en $M_{mp}(\mathbb{K})$ donada per

$$AB = \left(\sum_{j=1}^n \alpha_{ij} \beta_{jk} \right).$$

Notem que, en l'anterior matriu tenim una entrada per a cada parell (i, k) . El producte de matrius, per tant, és una operació del tipus

$$\begin{array}{ccc} M_{mn}(\mathbb{K}) \times M_{np}(\mathbb{K}) & \longrightarrow & M_{mp}(\mathbb{K}) \\ (A, B) & \longmapsto & AB \end{array}.$$

El producte de matrius és una operació associativa, però no necessàriament commutativa.

Si A és una matriu quadrada en $M_n(\mathbb{K})$ i $k \in \mathbb{N}$, definim la **potència k -èssima d'A**, i la denotem per A^k , per recurrència com segueix

$$\begin{cases} A^0 &= I_n \\ A^{k+1} &= AA^k \end{cases} \quad \text{per a } k > 0.$$

Proposició 0.2. *Siga $A \in M_{mn}(\mathbb{K})$, aleshores*

$$I_m A = A = A I_n.$$

En particular, $I_n^k = I_n$, per a tot $k \in \mathbb{N}$.

La transposada del producte és el producte de les transposades en ordre invers.

Proposició 0.3. *Siguen $A \in M_{mn}(\mathbb{K})$ i $B \in M_{np}(\mathbb{K})$, aleshores*

$$(AB)^t = B^t A^t.$$

Definició 0.7 (Matriu invertible). Sigui A una matriu quadrada en $M_n(\mathbb{K})$. Direm que A és **invertible** si existeix una matriu $B \in M_n(\mathbb{K})$ per a la qual

$$AB = BA = I_n.$$

De les anteriors equacions podem deduir la unicitat de la matriu B , ja que si existira una altra matriu $B' \in M_n(\mathbb{K})$ per a la qual

$$AB' = B'A = I_n,$$

aleshores trobaríem la següent cadena d'igualtats

$$B = BI_n = B(AB') = (BA)B' = I_n B' = B'.$$

Per tant, a la matriu B la denotem per A^{-1} i l'anomenem **matriu inversa d' A** . Notem que $(A^{-1})^{-1} = A$.

Denotem per $GL_n(\mathbb{K})$ al conjunt de totes les matrius quadrades de tamany n sobre $\mathbb{K}$ invertibles, és a dir

$$GL_n(\mathbb{K}) = \{A \in M_n(\mathbb{K}) \mid A \text{ és invertible}\}.$$

El producte de matrius invertibles és una matriu invertible i la transposada d'una matriu invertible és una matriu invertible.

Proposició 0.4. *Siguin $A \in GL_n(\mathbb{K})$ i $B \in GL_n(\mathbb{K})$, aleshores*

- i. $AB \in GL_n(\mathbb{K})$ i, a més, $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$;*
- ii. $A^t \in GL_n(\mathbb{K})$ i, a més, $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$.*

1 Sistemes d'equacions

En aquest capítol estudiem les propietats bàsiques dels sistemes d'equacions sobre un cos.

Definició 1.1 (Sistema d'equacions). Donats $m, n \in \mathbb{N}$, un **sistema $\mathcal{S}$ d' m equacions amb n incògnites sobre un cos $\mathbb{K}$** és un conjunt d' m equacions del tipus

$$\left. \begin{array}{cccccc} \alpha_{11}x_1 & + & \alpha_{12}x_2 & + & \cdots & + & \alpha_{1n}x_n & = & \beta_1 \\ \alpha_{21}x_1 & + & \alpha_{22}x_2 & + & \cdots & + & \alpha_{2n}x_n & = & \beta_2 \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{m1}x_1 & + & \alpha_{m2}x_2 & + & \cdots & + & \alpha_{mn}x_n & = & \beta_m \end{array} \right\} \quad (\mathcal{S})$$

on, els elements α_{ij} , amb $1 \leq i \leq m$ i $1 \leq j \leq n$, s'anomenen **coeficients del sistema** i pertanyen a $\mathbb{K}$, els elements β_i , amb $1 \leq i \leq m$, s'anomenen **termes independents del sistema** i pertanyen a $\mathbb{K}$ i els elements x_j , amb $1 \leq j \leq n$, són variables desconegudes anomenades **incògnites**.

Direm que el sistema $\mathcal{S}$ és **homogeni**, si tots els termes independents són igual a 0.

Direm que els sistemes $\mathcal{S}$ i $\mathcal{T}$ són iguals si tenen el mateix nombre d'equacions i d'incògnites i, a més, per a cada parella d'índexs i, j , els coeficients en la posició (i, j) coincideixen i, per a cada índex i , amb $1 \leq i \leq n$, els termes independents en la posició i coincideixen.

Direm que el sistema d'equacions $\mathcal{S}$ **té solució** si existeix una tupla $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n$ tal que, en substituir, per a cada j , amb $1 \leq j \leq n$, les incògnites x_j pels elements a_j , se satisfan les m equacions del sistema. Denotem per $\text{Sol}(\mathcal{S})$ al conjunt de totes les solucions del sistema $\mathcal{S}$, és a dir,

$$\text{Sol}(\mathcal{S}) = \left\{ (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n \mid \begin{array}{cccc} \alpha_{11}a_1 & + & \cdots & + & \alpha_{1n}a_n & = & \beta_1 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{m1}a_1 & + & \cdots & + & \alpha_{mn}a_n & = & \beta_m \end{array} \right\}.$$

Exemple 1.1. Es considera el següent sistema, a esquerra, de 3 equacions amb 3 incògnites sobre $\mathbb{Q}$. Aquest sistema admet a $(1, 3, 1)$ com a solució, ja que se satisfan les següents 3 equacions, a dreta.

$$\left. \begin{array}{rrrr} 2x & + & 2y & + & 10z & = & 18 \\ 2x & + & 3y & + & 12z & = & 23 \\ & & 2y & + & 5z & = & 11 \end{array} \right\} \qquad \left. \begin{array}{rrrr} 2 & + & 6 & + & 10 & = & 18 \\ 2 & + & 9 & + & 12 & = & 23 \\ & & 6 & + & 5 & = & 11 \end{array} \right\}$$

Definició 1.2 ((In)Compatible | (In)Determinat). Un sistema d'equacions pot tindre solució o no tindre'n. En cas d'existir solució, anomenarem al sistema *compatible*, en cas de no tindre'n, l'anomenarem *incompatible*. S'usaran les següents abreviatures

- [SC] Sistema Compatible;
- [SI] Sistema Incompatible.

Donat un sistema compatible, la solució del sistema pot ser única o no. En cas de tindre unicitat en la solució anomenarem al sistema *Compatible Determinat*, en cas de no tindre unicitat en la solució l'anomenarem *Compatible Indeterminat*. S'usaran les següents abreviatures

- [SCD] Sistema Compatible Determinat;
- [SCI] Sistema Compatible Indeterminat.

Exemple 1.2. Es consideren els següents sistemes d'una equació amb una incògnita sobre $\mathbb{R}$

$$(\mathcal{S}_1) \quad 0x = 1 \quad \} \quad (\mathcal{S}_2) \quad x = 1 \quad \} \quad (\mathcal{S}_3) \quad 0x = 0 \quad \}$$

El sistema $(\mathcal{S}_1)$ és incompatible, el sistema $(\mathcal{S}_2)$ és compatible determinat, amb única solució $x = 1$, i el sistema $(\mathcal{S}_3)$ és compatible indeterminat, ja que admet a qualsevol element $a \in \mathbb{R}$ com a solució.

Definició 1.3 (Sistemes equivalents). Siguen $\mathcal{S}$ i $\mathcal{T}$ dos sistemes d' m equacions i n incògnites sobre $\mathbb{K}$. Direm que $\mathcal{S}$ i $\mathcal{T}$ són **equivalents** si $\text{Sol}(\mathcal{S}) = \text{Sol}(\mathcal{T})$. És a dir, $\mathcal{S}$ i $\mathcal{T}$ són equivalents si tenen les mateixes solucions.

i Nota

Nota. Tot sistema d'equacions té les mateixes solucions que ell mateix. Si un sistema d'equacions té les mateixes solucions que un altre, aquest altre té les mateixes solucions que l'original. Si un sistema d'equacions té les mateixes solucions que un altre i aquest altre té les mateixes solucions que un tercer, el primer sistema i el tercer tenen les mateixes solucions.

1.1 Operacions elementals

Hi han transformacions de sistemes d'equacions que ens permeten garantir que el sistema d'equacions resultant siga equivalent a l'original. Aquestes transformacions reben el nom d'**operacions elementals**. Les enumerem a continuació i demostrem que el sistema transformat és equivalent a l'original.

1.1.1 Intercanviar files

Donat un sistema $\mathcal{S}$ d' m equacions amb n incògnites i donats dos índexs i, j , amb $1 \leq i, j \leq m$, denotem per $\mathcal{S}_{i \leftrightarrow j}$ el sistema que resulta d'intercanviar les files i i j en $\mathcal{S}$. Indiquem aquesta operació amb una fletxa on es descriu el canvi de files.

$$\left\{ \begin{array}{cccc} \alpha_{11}x_1 & + & \cdots & + & \alpha_{1n}x_n & = & \beta_1 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{i1}x_1 & + & \cdots & + & \alpha_{in}x_n & = & \beta_i \\ \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{j1}x_1 & + & \cdots & + & \alpha_{jn}x_n & = & \beta_j \\ \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{m1}x_1 & + & \cdots & + & \alpha_{mn}x_n & = & \beta_m \end{array} \right\} \xrightarrow{f_i \leftrightarrow f_j} \left\{ \begin{array}{cccc} \alpha_{11}x_1 & + & \cdots & + & \alpha_{1n}x_n & = & \beta_1 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{j1}x_1 & + & \cdots & + & \alpha_{jn}x_n & = & \beta_j \\ \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{i1}x_1 & + & \cdots & + & \alpha_{in}x_n & = & \beta_i \\ \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{m1}x_1 & + & \cdots & + & \alpha_{mn}x_n & = & \beta_m \end{array} \right\}$$

Proposició 1.1. *Els sistemes d'equacions $\mathcal{S}$ i $\mathcal{S}_{i \leftrightarrow j}$ són equivalents.*

Demostració. Siga $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n$ una solució del sistema $\mathcal{S}$. Així, en fer les substitucions pertinents, trobem que les següents m equacions, a esquerra, són certes. Com que aquestes m equacions són certes, les m següents equacions, a dreta, que resulten d'intercanviar l'equació i per la j , també són certes

$$\left\{ \begin{array}{cccc} \alpha_{11}a_1 & + & \cdots & + & \alpha_{1n}a_n & = & \beta_1 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{i1}a_1 & + & \cdots & + & \alpha_{in}a_n & = & \beta_i \\ \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{j1}a_1 & + & \cdots & + & \alpha_{jn}a_n & = & \beta_j \\ \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{m1}a_1 & + & \cdots & + & \alpha_{mn}a_n & = & \beta_m \end{array} \right\} \quad \left\{ \begin{array}{cccc} \alpha_{11}a_1 & + & \cdots & + & \alpha_{1n}a_n & = & \beta_1 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{j1}a_1 & + & \cdots & + & \alpha_{jn}a_n & = & \beta_j \\ \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{i1}a_1 & + & \cdots & + & \alpha_{in}a_n & = & \beta_i \\ \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{m1}a_1 & + & \cdots & + & \alpha_{mn}a_n & = & \beta_m \end{array} \right\}$$

Així, $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n$ és una solució del sistema $\mathcal{S}_{i \leftrightarrow j}$.

D'altra banda, si considerem una solució del sistema $\mathcal{S}_{i \leftrightarrow j}$, pel que acabem de veure, aquesta solució també ho serà del sistema $(\mathcal{S}_{i \leftrightarrow j})_{i \leftrightarrow j}$. Notem que aquest últim sistema és el sistema original. $\square$

1.1.2 Multiplicar una fila per un escalar no nul

Donat un sistema $\mathcal{S}$ d' m equacions lineals amb n incògnites, donat un índex i , amb $1 \leq i \leq m$, i un escalar $\lambda \in \mathbb{K} - \{0\}$, denotem per $\mathcal{S}_{\lambda i}$ el sistema que resulta de multiplicar la fila i

per λ en $\mathcal{S}$. Indiquem aquesta operació amb una fletxa on es descriga la multiplicació corresponent.

$$\left. \begin{array}{cccc} \alpha_{11}x_1 & + & \cdots & + & \alpha_{1n}x_n & = & \beta_1 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{i1}x_1 & + & \cdots & + & \alpha_{in}x_n & = & \beta_i \\ \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{m1}x_1 & + & \cdots & + & \alpha_{mn}x_n & = & \beta_m \end{array} \right\} \xrightarrow{f_i = \lambda f_i} \left. \begin{array}{cccc} \alpha_{11}x_1 & + & \cdots & + & \alpha_{1n}x_n & = & \beta_1 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ \lambda\alpha_{i1}x_1 & + & \cdots & + & \lambda\alpha_{in}x_n & = & \lambda\beta_i \\ \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{m1}x_1 & + & \cdots & + & \alpha_{mn}x_n & = & \beta_m \end{array} \right\}$$

Proposició 1.2. *Els sistemes d'equacions $\mathcal{S}$ i $\mathcal{S}_{\lambda i}$, amb $\lambda \in \mathbb{K} - \{0\}$, són equivalents.*

Demostració. Siga $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n$ una solució del sistema $\mathcal{S}$. Així, en fer les substitucions pertinents, trobem que les següents m equacions a esquerra són certes. Com que aquestes m equacions són certes, les m següents equacions, a dreta, que resulten de multiplicar l'equació i per λ , també són certes

$$\left. \begin{array}{cccc} \alpha_{11}a_1 & + & \cdots & + & \alpha_{1n}a_n & = & \beta_1 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{i1}a_1 & + & \cdots & + & \alpha_{in}a_n & = & \beta_i \\ \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{m1}a_1 & + & \cdots & + & \alpha_{mn}a_n & = & \beta_m \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{cccc} \alpha_{11}a_1 & + & \cdots & + & \alpha_{1n}a_n & = & \beta_1 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ \lambda\alpha_{i1}a_1 & + & \cdots & + & \lambda\alpha_{in}a_n & = & \lambda\beta_i \\ \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{m1}a_1 & + & \cdots & + & \alpha_{mn}a_n & = & \beta_m \end{array} \right\}$$

Així, $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n$ és una solució del sistema $\mathcal{S}_{\lambda i}$.

D'altra banda, si considerem una solució del sistema $\mathcal{S}_{\lambda i}$, pel que acabem de veure, aquesta solució també ho serà del sistema $(\mathcal{S}_{\lambda i})_{\lambda^{-1}i}$. Notem que aquest últim sistema és el sistema original. Açò ho hem pogut fer perquè λ és un escalar no nul i, per tant, podem considerar λ^{-1} . $\square$

1.1.3 Sumar a una fila una altra multiplicada per un escalar

Donat un sistema $\mathcal{S}$ d' m equacions amb n incògnites, donats dos índexs i, j , amb $1 \leq i, j \leq m$, i donat un escalar $\lambda \in \mathbb{K}$, denotem per $\mathcal{S}_{i+\lambda j}$ el sistema que resulta de sumar a la fila i la fila j multiplicada per λ en $\mathcal{S}$. Indiquem aquesta operació amb una fletxa on es descriga la suma corresponent.

$$\left. \begin{array}{cccc} \alpha_{11}x_1 & + & \cdots & + & \alpha_{1n}x_n & = & \beta_1 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{i1}x_1 & + & \cdots & + & \alpha_{in}x_n & = & \beta_i \\ \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{j1}x_1 & + & \cdots & + & \alpha_{jn}x_n & = & \beta_j \\ \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{m1}x_1 & + & \cdots & + & \alpha_{mn}x_n & = & \beta_m \end{array} \right\} \xrightarrow{f_i = f_i + \lambda f_j}$$

$$\left. \begin{array}{ccccccc} \alpha_{11}x_1 & + & \cdots & + & \alpha_{1n}x_n & = & \beta_1 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ (\alpha_{i1} + \lambda\alpha_{j1})x_1 & + & \cdots & + & (\alpha_{in} + \lambda\alpha_{jn})x_n & = & \beta_i + \lambda\beta_j \\ \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{j1}x_1 & + & \cdots & + & \alpha_{jn}x_n & = & \beta_j \\ \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{m1}x_1 & + & \cdots & + & \alpha_{mn}x_n & = & \beta_m \end{array} \right\}$$

Proposició 1.3. *Els sistemes d'equacions $\mathcal{S}$ i $\mathcal{S}_{i+\lambda j}$ són equivalents.*

Demostració. Siga $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n$ una solució del sistema $\mathcal{S}$. Així, en fer les substitucions pertinents, trobem que les següents m equacions, a esquerra, són certes. Com que aquestes m equacions són certes, les m següents equacions, a dreta, que resulten de sumar a l'equació i la j multiplicada per λ , també són certes

$$\left. \begin{array}{ccccccc} \alpha_{11}a_1 & + & \cdots & + & \alpha_{1n}a_n & = & \beta_1 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{i1}a_1 & + & \cdots & + & \alpha_{in}a_n & = & \beta_i \\ \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{j1}a_1 & + & \cdots & + & \alpha_{jn}a_n & = & \beta_j \\ \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{m1}a_1 & + & \cdots & + & \alpha_{mn}a_n & = & \beta_m \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{ccccccc} \alpha_{11}a_1 & + & \cdots & + & \alpha_{1n}a_n & = & \beta_1 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ (\alpha_{i1} + \lambda\alpha_{j1})a_1 & + & \cdots & + & (\alpha_{in} + \lambda\alpha_{jn})a_n & = & \beta_i + \lambda\beta_j \\ \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{j1}a_1 & + & \cdots & + & \alpha_{jn}a_n & = & \beta_j \\ \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{m1}a_1 & + & \cdots & + & \alpha_{mn}a_n & = & \beta_m \end{array} \right\}$$

Així, $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n$ és una solució del sistema $\mathcal{S}_{i+\lambda j}$.

D'altra banda, si considerem una solució del sistema $\mathcal{S}_{i+\lambda j}$, pel que acabem de veure, aquesta solució també ho serà del sistema $(\mathcal{S}_{i+\lambda j})_{i-\lambda j}$. Notem que aquest últim sistema és el sistema original. $\square$

1.2 Mètode de Gauss-Jordan

En l'anterior secció hem descrit tres famílies d'operacions elementals sobre sistemes d'equacions que transformen un sistema donat en un altre d'equivalent. L'aplicació successiva d'aquestes transformacions garanteix que el sistema transformat final siga equivalent a l'original.

Definició 1.4 (Sistemes equivalents per files). Siguen $\mathcal{S}$ i $\mathcal{T}$ dos sistemes d' m equacions i n incògnites sobre $\mathbb{K}$. Direm que $\mathcal{S}$ i $\mathcal{T}$ són **equivalents per files** si existeix una seqüència finita de transformacions elementals per fila que transformen el sistema $\mathcal{S}$ en el sistema $\mathcal{T}$.

i Nota

Nota. Tot sistema d'equacions és equivalent per files amb ell mateix. La seqüència de transformacions elementals per fila que ho verifica és la seqüència buida. No cal fer res. Si un sistema d'equacions és equivalent per files a un altre, aquest altre també és equivalent per files a l'original. Només cal notar, com hem vist a les demostracions anteriors, que les operacions elementals per fila sempre es poden desfer per a retornar al sistema original. Si un sistema d'equacions és equivalent per files a un altre i aquest altre és equivalent per files a un tercer, el primer sistema i el tercer són equivalents per files. Només cal concatenar les respectives seqüències de transformacions elementals per fila per a passar del primer al tercer.

La importància d'aquesta discussió es veu clarament en el següent exemple.

Exemple 1.3. Considerem el sistema de 3 equacions amb 3 incògnites sobre $\mathbb{Q}$ considerat en l'Exemple 1.1. Es considera la següent seqüència d'operacions elementals

$$\left. \begin{array}{rcl} 2x & + & 2y & + & 10z & = & 18 \\ 2x & + & 3y & + & 12z & = & 23 \\ & & 2y & + & 5z & = & 11 \end{array} \right\} \xrightarrow{f_1 = \frac{1}{2}f_1} \left. \begin{array}{rcl} x & + & y & + & 5z & = & 9 \\ 2x & + & 3y & + & 12z & = & 23 \\ & & 2y & + & 5z & = & 11 \end{array} \right\}$$

$$\xrightarrow{f_2 = f_2 - 2f_1} \left. \begin{array}{rcl} x & + & y & + & 5z & = & 9 \\ & & y & + & 2z & = & 5 \\ & & 2y & + & 5z & = & 11 \end{array} \right\}$$

$$\xrightarrow{f_3 = f_3 - 2f_2} \left. \begin{array}{rcl} x & + & y & + & 5z & = & 9 \\ & & y & + & 2z & = & 5 \\ & & & & z & = & 1 \end{array} \right\}$$

Notem que tots els sistemes d'equacions que apareixen en l'anterior seqüència són equivalents en virtut de les Proposicions 1.1, 1.2 i 1.3. La modificació feta té un objectiu últim, simplificar el sistema original. De fet en l'últim sistema ja podríem recuperar una solució per a la incògnita z . Una solució del sistema original deurà satisfer l'equació $z = 1$.

Continuem amb el procés de simplificació des de l'últim sistema d'equacions.

$$\left. \begin{array}{rcl} x + y + 5z & = & 9 \\ y + 2z & = & 5 \\ z & = & 1 \end{array} \right\} \xrightarrow{f_2=f_2-2f_3} \left. \begin{array}{rcl} x + y + 5z & = & 9 \\ y & = & 3 \\ z & = & 1 \end{array} \right\}$$

$$\xrightarrow{f_1=f_1-f_2} \left. \begin{array}{rcl} x + 5z & = & 6 \\ y & = & 3 \\ z & = & 1 \end{array} \right\}$$

$$\xrightarrow{f_1=f_1-5f_3} \left. \begin{array}{rcl} x & = & 1 \\ y & = & 3 \\ z & = & 1 \end{array} \right\}$$

Aquest procediment de simplificació ens ha permès obtindre tres conseqüències interessants: (1) que el sistema original és equivalent a l'últim, ja que hem passat d'un a l'altre mitjançant l'aplicació d'una seqüència finita d'operacions elementals, (2) que l'últim sistema admet únicament a $(1, 3, 1)$ com a solució i (3) que aquesta solució és única, ja que no hi ha una altra assignació possible que faça l'últim sistema d'equacions cert. Es dedueix d'aquest procediment que el sistema original és compatible i determinat.

El que vorem en aquesta secció és que aquest procés de simplificació es pot donar en tot sistema d'equacions. Per a simplificar més encara el procediment el que farem serà representar els sistemes d'equacions mitjançant matrius. D'aquesta forma, evitarem repetir tota la informació supèrflua que arrosseguem en cada aplicació d'operacions elementals. Presentem a continuació una forma de representar tot sistema d'equacions mitjançant una matriu.

Definició 1.5 (Representació matricial). Donat el sistema d' m equacions amb n incògnites sobre un cos $\mathbb{K}$

$$\left. \begin{array}{cccccc} \alpha_{11}x_1 & + & \alpha_{12}x_2 & + & \cdots & + & \alpha_{1n}x_n & = & \beta_1 \\ \alpha_{21}x_1 & + & \alpha_{22}x_2 & + & \cdots & + & \alpha_{2n}x_n & = & \beta_2 \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{m1}x_1 & + & \alpha_{m2}x_2 & + & \cdots & + & \alpha_{mn}x_n & = & \beta_m \end{array} \right\} \quad (\mathcal{S})$$

Anomenem **representació matricial del sistema $\mathcal{S}$** a l'expressió matricial següent

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \cdots & \alpha_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix},$$

on $A = (\alpha_{ij})$ és la **matriu de coeficients**, de tamany m, n , $X = (x_j)$ és la **matriu d'incògnites**, de tamany $n, 1$, i $B = (\beta_i)$ és la **matriu de termes independents**, de

tamany $m, 1$. Així, un sistema d'equacions lineals pot escriure's en forma matricial com a $AX = B$.

Definim la **matriu ampliada del sistema** $\mathcal{S}$, denotada per $[A|B]$, a la següent matriu

$$[A|B] = \left[\begin{array}{cccc|c} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} & \beta_1 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} & \beta_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \cdots & \alpha_{mn} & \beta_m \end{array} \right]$$

La matriu ampliada té tamany $m, n + 1$. Notem que dos sistemes d'equacions lineals són iguals si i només si les respectives matrius ampliades són iguals.

La introducció de la matriu ampliada d'un sistema ens permet quedar-nos amb la informació més relevant del sistema. D'aquesta forma, tot sistema d' m equacions amb n incògnites pot representar-se mitjançant la seua matriu ampliada, és a dir, una matriu de tamany $m, n + 1$. D'igual manera, a partir d'una matriu de tamany $m, n + 1$ sempre podem recuperar un sistema d' m equacions amb n incògnites.

Aquesta codificació també ens permet parlar d'operacions elementals entre matrius com vorem en el següent exemple.

Exemple 1.4. Reescriuim la seqüència d'operacions elementals descrita en l'Exemple 1.3 utilitzant les corresponents matrius ampliades

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 10 & 18 \\ 2 & 3 & 12 & 23 \\ 0 & 2 & 5 & 11 \end{array} \right] & \xrightarrow{f_1 = \frac{1}{2}f_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 5 & 9 \\ 2 & 3 & 12 & 23 \\ 0 & 2 & 5 & 11 \end{array} \right] & \xrightarrow{f_2 = f_2 - 2f_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 5 & 9 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 2 & 5 & 11 \end{array} \right] \\ & \xrightarrow{f_3 = f_3 - 2f_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 5 & 9 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right] & \xrightarrow{f_2 = f_2 - 2f_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 5 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right] \\ & \xrightarrow{f_1 = f_1 - 2f_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right] & \xrightarrow{f_1 = f_1 - 5f_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right] \end{aligned}$$

El fet de treballar amb matrius ens permet observar amb major claredat que el procés seguit ens ha permès passar d'una matriu qualsevol a una matriu de coeficients intermitja esglaonada, la quarta, i a una matriu de coeficients esglaonada reduïda, l'última.

Per extensió del que hem vist fins al moment, introduïm la relació d'equivalència per files sobre el conjunt de les matrius d'un tamany determinat.

Definició 1.6 (Matrius equivalents per fila). Direm que dues matrius en $M_{mn}(\mathbb{K})$ són **equivalents per files** si podem transformar una en l'altra mitjançant l'aplicació d'una seqüència finita d'operacions elementals per fila.

i Nota

Nota. Ser equivalents per fila és una relació d'equivalència en $M_{mn}(\mathbb{K})$.

El procediment realitzat en l'Exemple 1.4 ens ha permès passar d'un sistema d'equacions a un sistema d'equacions que té com a matriu ampliada una matriu esglaonada reduïda. En la següent definició posem nom a aquesta propietat.

Definició 1.7 (Forma normal d'un sistema d'equacions). Donat un sistema lineal $\mathcal{S}$ d' m equacions amb n incògnites, anomenem **forma normal per files** d' $\mathcal{S}$ a tot sistema d'equacions $\mathcal{U}$ equivalent a $\mathcal{S}$ que tinga com a matriu ampliada una matriu esglaonada reduïda per files.

Direm que un sistema $\mathcal{U}$ està **en forma normal per files** si la matriu ampliada d' $\mathcal{U}$ és esglaonada reduïda per files. Si $\mathcal{U}$ està en forma normal per files, direm que l'incògnita x_j , per a un índex j amb $1 \leq j \leq n$, és **principal** si existeix algun índex i , amb $1 \leq i \leq m$, de forma que l'entrada α_{ij} de la matriu de coeficients és el pivot de la fila i .

En les següents subseccions vorem com, donat un sistema d'equacions lineal, sempre podem trobar-li una forma normal per files i també demostrarem que aquesta forma normal per files és única.

1.2.1 Existència de forma normal

El següent algorisme ens garanteix que, donada una matriu qualsevol sempre podem transformar-la mitjançant l'aplicació d'una seqüència finita de transformacions elementals per fila en una matriu esglaonada reduïda per files. Açò ens permetrà garantir l'existència d'un procediment per obtenir formes normals per files de sistemes d'equacions lineals.

Proposició 1.4 (Mètode d'Eliminació de Gauss-Jordan). *Siga A una matriu en $M_{m,n}(\mathbb{K})$, aleshores existeix una seqüència finita d'operacions elementals per fila que transformen la matriu A en una matriu esglaonada (reduïda) per files.*

Demostració. Considerem la matriu $A = (\alpha_{ij})$. La demostració serà algorísmica.

Si la matriu A és la matriu 0, és a dir la matriu en què tota entrada és 0, aleshores aquesta matriu ja és esglaonada reduïda. Per tant podem suposar que existeixen índexs i, j , amb $1 \leq i \leq m$ i $1 \leq j \leq n$, per als quals l'entrada α_{ij} és un element no nul.

- **Pas 1.** Si hi ha un element no nul en la primera columna d' A el portem a la posició (1,1).

Pot ocòrrer que (1) la primera columna d'A té un element no zero en la posició i , amb $1 \leq i \leq m$; o (2) la primera columna d'A és una columna de zeros.

En cas (1), intercanviem la fila 1 per la fila i . D'aquesta manera garantim que l'element α_{11} en la matriu transformada siga diferent de zero.

En cas (2), deixarem queta la primera columna i començarem des del Pas 1 amb la submatriu d'A donada per $\bar{A} = (\alpha_{ij})$, amb $1 \leq i \leq m$ i $1 \leq j \leq n$. Aquesta etapa no pot repetir-se indefinidament, ja que només hi ha m columnes i tenim garantits des del primer moment l'existència d'un element α_{ij} no nul en A.

En qualsevol cas, garantim l'objectiu del Pas 1, és a dir, mitjançant una seqüència finita d'operacions elementals per fila, portar un element no nul a la posició (1, 1). Aquest element és pivot per a la primera fila d'A.

- **Pas 2.** Transformem l'element no nul α_{11} d'A en un 1.

Com que l'element α_{11} és no nul, existeix el seu invers en $\mathbb{K}$. Aleshores podem multiplicar la primera fila d'A per l'invers d' α_{11} .

Garantim així l'objectiu del Pas 2, és a dir, mitjançant una seqüència finita d'operacions elementals per fila, assegurar que l'element α_{11} és un 1. Aquest element és pivot per a la primera fila d'A.

- **Pas 3.** Transformem tots els element de la primera columna d'A per davall d' α_{11} en 0.

Siga α_{i1} amb $1 \leq i \leq m$ un element de la primera columna d'A per davall d' α_{11} . Si l'element α_{i1} és l'element 0, ja estaria, en cas contrari sumem a la fila i la fila 1 multiplicada per $-\alpha_{i1}$.

Repetim fins completar tots els índexs i , amb $2 \leq i \leq m$.

Garantim així l'objectiu del Pas 3, és a dir, mitjançant una seqüència finita d'operacions elementals per fila, assegurar que tots els element α_{i1} , amb $2 \leq i \leq m$, siguen 0. D'aquesta manera la primera columna de la matriu A serà una columna amb un 1 en la posició 1 i un 0 en les posicions inferiors.

- **Pas 4.** Treballem en la submatriu que resulta de llevar la primera fila i la primera columna.

Considerem la submatriu d'A donada per $\bar{A} = (\alpha_{ij})$, amb $2 \leq i \leq m$ i $2 \leq j \leq n$. Reiniciem l'algorisme amb aquesta nova matriu.

Aquest procediment no pot repetir-se indefinidament, ja que en cada passada reduïm el tamany de la submatriu i el nombre de files i columnes d'A és finit. Garantim, per tant, la transformació de la matriu A mitjançant una seqüència finita d'operacions elementals fila en una matriu esglaonada.

- **Pas 5.** Eliminem les entrades damunt dels pivots.

Per a completar la transformació d'una matriu esglaonada en una matriu esglaonada reduïda només caldrà, per a cada índex i , amb $1 \leq i \leq m$, eliminar els elements no nuls per damunt del pivot de la fila i . Per a fer-ho, sumarem a cada fila k , per a $1 \leq k \leq i - 1$, per damunt de la fila del pivot la fila i multiplicada per l'oposat de cada element α_{ki} .

Garantim, per tant, la transformació de la matriu esglaonada A mitjançant una seqüència finita d'operacions elementals fila en una matriu esglaonada reduïda per files. $\square$

Corol·lari 1.1. *Tot sistema d'equacions es pot transformar mitjançant l'aplicació d'una seqüència finita d'operacions elementals en un sistema equivalent que té com a matriu ampliada una matriu esglaonada reduïda. És a dir, tot sistema d'equacions és equivalent per files a un sistema d'equacions en forma normal. Igualment, tota matriu és equivalent per files a una matriu en forma esglaonada reduïda per files.*

1.2.2 Unicitat de la forma normal

Notem que el mètode de Gauss-Jordan permet obtenir una forma normal d'un sistema d'equacions qualsevol. En tot cas, aquest procediment no té per què ser únic. Tampoc sabem encara si la forma normal d'un sistema ha de ser necessàriament única. Açò és el que demostrarem a continuació per a sistemes d'equacions compatibles. El següent lema ens diu que, donats dos sistemes d'equacions compatibles en forma normal, si aquests sistemes d'equacions són equivalents és perquè són el mateix sistema.

Lema 1.1. *Siguen $\mathcal{U}$ i $\mathcal{V}$ dos sistemes compatibles d' m equacions amb n incògnites. Si $\mathcal{U}$ i $\mathcal{V}$ són equivalents i estan en forma normal, aleshores $\mathcal{U}$ i $\mathcal{V}$ són iguals.*

Demostració. Siguen $[A|B]$ i $[C|D]$ les matrius ampliades de, respectivament, $\mathcal{U}$ i $\mathcal{V}$. Com que $\mathcal{U}$ i $\mathcal{V}$ estan en forma normal, es té que les matrius $[A|B]$ i $[C|D]$ són esglaonades reduïdes per fila. Per veure que $\mathcal{U}$ i $\mathcal{V}$ són el mateix sistema només cal comprovar que $[A|B]$ i $[C|D]$ són iguals. Notem que les matrius $[A|B]$ i $[C|D]$ tenen tamany $m, n + 1$.

Ho farem per inducció sobre n , el nombre d'incògnites dels sistemes.

- **Cas base.** $n = 1$.

Si els dos sistemes estan en forma normal i tenen una única incògnita, les matrius ampliades necessàriament han de ser de la forma

$$[A|B] = \left[\begin{array}{c|c} 1 & \beta_1 \\ 0 & \beta_2 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & \beta_m \end{array} \right] \qquad [C|D] = \left[\begin{array}{c|c} 1 & \delta_1 \\ 0 & \delta_2 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & \delta_m \end{array} \right]$$

Notem que les últimes columnes de les dues matrius no poden tindre pivots. Si els tinguera, els sistemes serien incompatibles, ja que tindríem una equació del tipus $0 = 1$. Per tant, les matrius associades als sistemes han de ser, necessàriament, de la forma

$$[A|B] = \left[\begin{array}{c|c} 1 & \beta_1 \\ 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \end{array} \right] \quad [C|D] = \left[\begin{array}{c|c} 1 & \delta_1 \\ 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \end{array} \right]$$

Notem que el sistema $\mathcal{U}$ són un grapat d'equacions del tipus $0 = 0$ i una equació del tipus $x = \beta_1$. Per tant, β_1 és una solució del sistema d'equacions $\mathcal{U}$. Com que $\mathcal{U}$ i $\mathcal{V}$ són sistemes equivalents, β_1 també ha de ser una solució de $\mathcal{V}$. Així s'ha de satisfer la primera equació de $\mathcal{V}$, és a dir, $x = \delta_1$, en substituir x per β_1 . Aleshores $\beta_1 = \delta_1$ ha de ser certa. Concloem que les matrius $[A|B]$ i $[C|D]$ són iguals i, per tant, els sistemes $\mathcal{U}$ i $\mathcal{V}$ són iguals.

- **Hipòtesi inductiva.** Suposem l'enunciat cert per a sistemes amb, com a molt, $n - 1$ incògnites.

És a dir, si tenim dos sistemes compatibles amb, com a molt, $n - 1$ incògnites en forma normal i són equivalents, aleshores aquests dos sistemes són iguals.

Anem a demostrar l'enunciat per a $\mathcal{U}$ i $\mathcal{V}$, dos sistemes equivalents i compatibles d' m equacions amb n incògnites. Ara, les matrius associades als sistemes han de ser de la forma

$$[A|B] = \left[\begin{array}{c|ccc|c} 1 & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} & \beta_1 \\ 0 & & & & \\ \vdots & & & & \\ 0 & & & & \end{array} \right] \quad [C|D] = \left[\begin{array}{c|ccc|c} 1 & \gamma_{12} & \cdots & \gamma_{1n} & \delta_1 \\ 0 & & & & \\ \vdots & & & & \\ 0 & & & & \end{array} \right]$$

Considerem el sistema d'equacions $\mathcal{U}'$ associat a la submatriu $[A'|B']$. Notem que les solucions del sistema $\mathcal{U}$ i $\mathcal{U}'$ estan relacionades. Si $(a_1, \dots, a_n)$ és una solució del sistema $\mathcal{U}$, aleshores $(a_2, \dots, a_n)$ és una solució del sistema $\mathcal{U}'$. Per altra banda, si $(a_2, \dots, a_n)$ és una solució del sistema $\mathcal{U}'$, aleshores

$$\left(\beta_1 - \sum_{j=2}^n \alpha_{1j} a_j, a_2, \dots, a_n \right)$$

és una solució del sistema $\mathcal{U}$.

De manera anàloga raonariem per a $\mathcal{V}'$, el sistema d'equacions associat a la submatriu $[C'|D']$.

Concloem que els sistemes $\mathcal{U}'$ i $\mathcal{V}'$ són compatibles i equivalents, ja que els sistemes $\mathcal{U}$ i $\mathcal{V}$ ho són. A més, com que les matrius $[A|B]$ i $[C|D]$ són esglaonades reduïdes per fila, les submatrius $[A'|B']$ i $[C'|D']$ també ho seran. Així, $\mathcal{U}'$ i $\mathcal{V}'$ són sistemes compatibles, tenen com a molt, $n - 1$ incògnites, estan en forma normal i són equivalents. Per hipòtesi inductiva són iguals. Així les submatrius $[A'|B']$ i $[C'|D']$ són iguals.

Per tant, trobem que

$$[A|B] = \left[\begin{array}{c|ccc|c} 1 & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} & \beta_1 \\ 0 & & & & \\ \vdots & & & & \\ 0 & & & & \end{array} \right] \quad [C|D] = \left[\begin{array}{c|ccc|c} 1 & \gamma_{12} & \cdots & \gamma_{1n} & \delta_1 \\ 0 & & & & \\ \vdots & & & & \\ 0 & & & & \end{array} \right].$$

Només queda demostrar que les primeres files són iguals. Considerem dos casos, en funció de si A' té pivots o de que no en tinga.

- **Cas 1. A' té pivots**

Primer de tot considerem el cas en què A' tinga algun pivot. Aleshores aquest pivot es correspondrà a un pivot de la matriu A que estarà en alguna posició del tipus (i, j) , amb $2 \leq j \leq n$. Com que A està en forma esglaonada reduïda, aleshores l'entrada $\alpha_{1j} = 0$, ja que damunt del corresponent pivot trobem una columna de zeros. Com que $A' = C'$, raonant de forma anàloga, trobem que $\gamma_{1j} = 0$.

Considerem el sistema d'equacions $\mathcal{U}''$ associat a la submatriu $[1 \ \alpha_{12} \ \cdots \ \alpha_{1n} \ | \ \beta_1]$. Definim el conjunt d'índexs $I = \{k_1, k_2, \dots, k_r\}$ satisfent que $1 = k_1 < k_2 < \dots < k_r \leq n$ i que $\alpha_{1k} \neq 0$ per a tot $k \in I$. Aleshores podem pensar que $\mathcal{U}''$ és un sistema amb r incògnites, és a dir, les incògnites associades a les entrades no nul·les de la matriu de coeficients $[1 \ \alpha_{12} \ \cdots \ \alpha_{1n}]$. Com que $\alpha_{1j} = 0$ per a algun índex j , amb $2 \leq j \leq n$, es té que el sistema d'equacions $\mathcal{U}''$ té, com a molt, $n - 1$ incògnites.

Notem que les solucions del sistemes $\mathcal{U}$ i $\mathcal{U}''$ estan relacionades. Si $(a_1, \dots, a_n)$ és una solució del sistema $\mathcal{U}$, aleshores $(a_1, a_{k_2}, \dots, a_{k_r})$ és una solució del sistema $\mathcal{U}''$. Per altra banda, si $(a_1, a_2, \dots, a_r)$ és una solució del sistema $\mathcal{U}''$, aleshores la tupla $(a'_1, \dots, a'_n)$, on

$$a'_j = \begin{cases} a_i & \text{si } j = k_i \\ \lambda_j & \text{si } j \notin I \text{ i } x_j \text{ no és principal} \\ \beta_i - \sum_{k=i+1}^n \alpha_{ik} a'_k & \text{si } j \notin I \text{ i } x_j \text{ és principal per al pivot } \alpha_{ij} \end{cases}$$

és una solució del sistema $\mathcal{U}$, on els λ_j anteriors són paràmetres en $\mathbb{K}$.

De manera anàloga raonariem per a $\mathcal{V}''$, el sistema d'equacions associat a $[1 \ \gamma_{12} \ \cdots \ \gamma_{1n} \ | \ \delta_1]$.

Concloem que els sistemes $\mathcal{U}''$ i $\mathcal{V}''$ són compatibles i equivalents, ja que els sistemes $\mathcal{U}$ i $\mathcal{V}$ ho són. A més, les seues respectives matrius ampliades, és a dir, $[1 \ \alpha_{12} \ \cdots \ \alpha_{1n} \ | \ \beta_1]$ i $[1 \ \gamma_{12} \ \cdots \ \gamma_{1n} \ | \ \delta_1]$ són esglaonades reduïdes per fila. Així, $\mathcal{U}''$ i $\mathcal{V}''$ són sistemes compatibles, tenen com a molt, $n - 1$ incògnites, estan en forma normal i són equivalents. Per hipòtesi inductiva són iguals. Així trobem que les submatrius $[A|B]$ i $[C|D]$ són iguals.

- **Cas 2. A' no té pivots**

Si la submatriu A' no té pivots és perquè $A' = 0$. Com que el sistema $\mathcal{U}$ és compatible, aleshores també s'ha de tindre que $B' = 0$. D'aquesta forma trobem que $[C'|D'] = [0|0]$.

Per tant, ens trobem en el cas

$$[A|B] = \left[\begin{array}{c|ccc|c} 1 & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} & \beta_1 \\ 0 & & & & \\ \vdots & & & & \\ 0 & & 0 & & 0 \end{array} \right] \quad [C|D] = \left[\begin{array}{c|ccc|c} 1 & \gamma_{12} & \cdots & \gamma_{1n} & \delta_1 \\ 0 & & & & \\ \vdots & & & & \\ 0 & & 0 & & 0 \end{array} \right].$$

Notem que $(\beta_1, 0, \dots, 0)$ és una solució d' $\mathcal{U}$. Com que $\mathcal{U}$ i $\mathcal{V}$ són equivalents, s'ha de satisfer l'equació $\beta_1 = \delta_1$. Per altra banda, per a cada índex j amb $2 \leq j \leq n$, es té que la tupla $(a_1^j, \dots, a_n^j)$, on

$$a_k^j = \begin{cases} \beta_1 - \alpha_{1j} & \text{si } k = 1 \\ 1 & \text{si } k = j \\ 0 & \text{si } k \neq 1, j \end{cases}$$

és solució d' $\mathcal{U}$. Com que $\mathcal{U}$ i $\mathcal{V}$ són equivalents, s'ha de satisfer l'equació $\beta_1 - \alpha_{1j} + \gamma_{1j} = \delta_1$. Com ja hem vist que $\beta_1 = \delta_1$, l'última equació se simplifica fins obtenir $\alpha_{1j} = \gamma_{1j}$.

Així trobem que les submatrius $[A|B]$ i $[C|D]$ són iguals.

Açò conclou la demostració del Lema 1.1. □

i Nota

Nota. En la demostració del Lema 1.1 és necessari que els sistemes siguin compatibles. Notem que els següents sistemes d'equacions són incompatibles, per tant són equivalents, en ser del mateix tamany, i estan en forma normal, però no són iguals.

$$\left. \begin{array}{rcl} x & + & y = 0 \\ & & z = 0 \\ & & 0 = 1 \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{rcl} x & + & z = 0 \\ & & y = 0 \\ & & 0 = 1 \end{array} \right\}$$

Acabem aquesta secció amb una serie de resultats que són conseqüència directa del resultat d'unicitat que acabem de veure. El següent resultat ens diu que les dues relacions considerades fins al moment sobre sistemes d'equacions, és a dir, ser equivalents i ser equivalents per files, són iguals pel que respecta als sistemes compatibles.

Corol·lari 1.2. *Siguen $\mathcal{S}$ i $\mathcal{T}$ dos sistemes d' m equacions i n incògnites compatibles. Les següents afirmacions són equivalents*

1. $\mathcal{S}$ i $\mathcal{T}$ són equivalents per files.
2. $\mathcal{S}$ i $\mathcal{T}$ són equivalents.

Demostració. Si $\mathcal{S}$ i $\mathcal{T}$ són equivalents per files, aleshores podem trobar una seqüència finita d'operacions elementals fila que permeten transformar el sistema $\mathcal{S}$ en el sistema $\mathcal{T}$. Les Proposicions 1.1, 1.2 i 1.3 garantitzen que tots els sistemes que trobem en aquest procés de transformació seran equivalents. En particular, $\mathcal{S}$ i $\mathcal{T}$ són equivalents.

Per a l'altra implicació, suposem que $\mathcal{S}$ i $\mathcal{T}$ són equivalents. Apliquem Gauss-Jordan sobre $\mathcal{S}$ fins a obtenir $\mathcal{U}$, un sistema d'equacions en forma normal equivalent amb $\mathcal{S}$. Com $\mathcal{S}$ és compatible, $\mathcal{U}$ també ho és. Per altra banda, apliquem Gauss-Jordan sobre $\mathcal{T}$ fins a obtenir $\mathcal{V}$, un sistema d'equacions en forma normal equivalent amb $\mathcal{T}$. Com $\mathcal{T}$ és compatible, $\mathcal{V}$ també ho és. Com que $\mathcal{S}$ i $\mathcal{T}$ són equivalents, els sistemes $\mathcal{U}$ i $\mathcal{V}$ també són equivalents. Així hem trobat dos sistemes, $\mathcal{U}$ i $\mathcal{V}$, que són compatibles, equivalents i es troben en forma normal. Pel Lema 1.1, concloem que $\mathcal{U} = \mathcal{V}$.

Ara, per a transformar el sistema $\mathcal{S}$ en el sistema $\mathcal{T}$ mitjançant una seqüència finita de transformacions elemental fila farem com segueix: Passem del sistema $\mathcal{S}$ al sistema $\mathcal{U}$ seguint el procés de Gauss-Jordan que transformava $\mathcal{S}$ en $\mathcal{U}$. Ara, des del sistema $\mathcal{U}$, que és el mateix que $\mathcal{V}$, desfem el procés de Gauss-Jordan que transformava $\mathcal{T}$ en $\mathcal{V}$. Açò permet trobar una seqüència finita de transformacions elemental fila que permeten transformar el sistema $\mathcal{S}$ en el sistema $\mathcal{T}$. És a dir, $\mathcal{S}$ i $\mathcal{T}$ són equivalents per fila. $\square$

En el Corol·lari 1.1 ja vam veure que tota matriu és equivalent per files a una matriu en forma esglaonada reduïda per files. L'últim corol·lari d'aquesta secció ens garanteix la unicitat d'aquesta matriu en forma esglaonada reduïda.

Corol·lari 1.3. *Siga A una matriu en $M_{mn}(K)$. Aleshores A és equivalent per files a una única matriu en forma esglaonada reduïda per files.*

Demostració. Suposem que A és equivalent per files a dues matrius esglaonades reduïdes per fila B i C . Al seu torn, B i C són equivalents per fila. Considerem els sistemes d'equacions homogenis $\mathcal{U}$ i $\mathcal{V}$ associats a les matrius ampliades $[B|0]$ i $[C|0]$, respectivament. Els sistemes $\mathcal{U}$ i $\mathcal{V}$ són del mateix tamany, compatibles, equivalents i es troben en forma normal. Pel Lema 1.1, concloem que $\mathcal{U} = \mathcal{V}$. Per tant, $B = C$. $\square$

1.3 Teorema de Rouché-Frobenius

El teorema de Rouché-Frobenius permet saber el nombre de solucions d'un sistema d'equacions en funció de la matriu de coeficients, de la matriu ampliada i del nombre d'incògnites associades al sistema. Per a fer-ho introduïm la noció de rang d'una matriu.

Definició 1.8 (Rang d'una matriu). Siga A una matriu en $M_{mn}(K)$. Definim el **rang** de la matriu A , denotat per $\text{rang}(A)$, com el nombre de pivots de l'única matriu esglaonada reduïda per files que resulta d'aplicar el mètode de Gauss-Jordan a la matriu A . Notem que la noció de rang d'una matriu està ben definida pel Corol·lari 1.3.

i Nota

Nota. De la pròpia definició de matriu esglaonada reduïda per files i de la definició de rang es dedueix que, per a tota matriu A en $M_{mn}(K)$, s'ha de satisfer la desigualtat $\text{rang}(A) \leq \min(m, n)$.

Teorema 1.1 (Teorema de Rouché-Frobenius). *Siga $\mathcal{S}$ un sistema d' m equacions i n incògnites sobre $\mathbb{K}$ i siga $[A|B]$ la seua matriu ampliada. Es té que*

1. *El sistema d'equacions $\mathcal{S}$ és compatible si, i només si, $\text{rang}(A) = \text{rang}([A|B])$.*
2. *El sistema d'equacions $\mathcal{S}$ és compatible determinat si, i només si, $\text{rang}(A) = \text{rang}([A|B]) = n$.*
3. *El sistema d'equacions $\mathcal{S}$ és compatible indeterminat si, i només si, $\text{rang}(A) = \text{rang}([A|B]) < n$. En aquest cas, tota solució del sistema d'equacions $\mathcal{S}$ dependrà d' $n - \text{rang}(A)$ paràmetres.*

Demostració. Notem que $\text{rang}(A) \leq \text{rang}([A|B]) \leq \text{rang}(A) + 1$, ja que la matriu ampliada només té una columna més que la matriu de coeficients.

Si suposem que $\text{rang}([A|B]) \neq \text{rang}(A)$ és perquè $[A | B]$ té un pivot en l'última columna, és a dir, podem transformar la matriu $[A | B]$ mitjançant una seqüència finita d'operacions elementals fila en un matriu que tinga una fila del tipus

$$\left[\begin{array}{ccc|c} \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \end{array} \right]$$

El sistema associat és incompatible, ja que té una equació del tipus $0 = 1$. Aleshores el sistema original és incompatible.

Suposem ara que $\text{rang}([A|B]) = \text{rang}(A)$. Aleshores podem distingir dos casos; que totes les incògnites siguen principals, o que no totes les incògnites siguen principals.

- **Cas 1.** Totes les incògnites són principals.

En aquest cas, necessàriament es té que $m \geq n$. A més, podem trobar una seqüència finita d'operacions elementals fila que transformen la matriu ampliada del sistema en una del tipus

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \dots & 0 & \delta_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \delta_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \delta_n \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Aleshores, la tupla $(\delta_1, \dots, \delta_n)$ és l'única solució d'aquest sistema. Per tant, el sistema original és compatible determinat. Notem que, en aquest cas, $\text{rang}(A) = \text{rang}([A|B]) = n$.

- **Cas 2.** No totes les incògnites són principals.

Apliquem Gauss-Jordan a la matriu $[A|B]$ fins obtindre una matriu en forma esglaonada reduïda per files de la forma

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & \gamma_{12} & \cdots & \gamma_{1n} & \delta_1 \\ 0 & \gamma_{22} & \cdots & \gamma_{2n} & \delta_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \gamma_{m2} & \cdots & \gamma_{mn} & \delta_m \end{array} \right].$$

Considerem el conjunt P d'índexs associats a incògnites principals

$$P = \{j \in \mathbb{N} \mid 1 \leq j \leq n, x_j \text{ és variable principal}\}.$$

Notem que $|P| = \text{rang}(A)$. Aleshores la tupla $(a_1, \dots, a_n)$, on

$$a_j = \begin{cases} \lambda_j & \text{si } j \notin P \\ \beta_i - \sum_{k=i+1}^n \gamma_{ik} a_k & \text{si } j \in P \text{ i } x_j \text{ és principal per al pivot } \gamma_{ij} \end{cases}$$

és una solució del sistema $\mathcal{S}$, on els λ_j anteriors són paràmetres en $\mathbb{K}$. És a dir el sistema és compatible indeterminat i la solució depèn de $n - \text{rang}(A)$ paràmetres. $\square$

Corol·lari 1.4. *Per a que un sistema d'equacions amb n incògnites siga compatible determinat, ha de tindre almenys n equacions.*

2 Espais vectorials

Per a l'inici d'aquest capítol és crucial adonar-se que, en la resolució d'un sistema d'equacions lineal qualsevol, si trobem dues solucions concretes del sistema, aleshores la seua diferència serà solució del sistema d'equacions lineals homogeni associat. És a dir, si fixem una solució del sistema original i coneixem totes les solucions del sistema homogeni corresponent, podem recuperar totes les solucions del sistema original.

Les solucions del sistema homogeni corresponent tenen un comportament més interessant que les solucions del sistema original. Primer de tot, sabem que tot sistema homogeni té solució, només cal adonar-se que l'assignació a cada incògnita de l'element 0 és solució d'un sistema homogeni. En segon lloc, es comporten bé amb les operacions de suma i producte per un escalar. Si tinc dues solucions d'un sistema homogeni, aleshores la seua suma, i diferència, són solució del sistema homogeni. Si, a més, tinc una solució del sistema homogeni i la multiplique per un escalar, aquesta nova assignació també és solució del sistema homogeni.

En aquest capítol farem abstracció d'aquestes propietats, parlarem d'espais vectorials, i descobrirem les estructures algebraïques que amaguen.

Definició 2.1 (Espai vectorial). Donat un cos $\mathbb{K}$, un **$\mathbb{K}$ -espai vectorial** és una tupla $(V, +, \cdot, 0)$ on

- V és un conjunt d'elements els quals anomenarem **vectors**;
- $+$ és una operació binària interna en V que anomenarem **suma**. Aquesta operació compleix la propietat associativa i commutativa;
- $0 \in V$, el **vector zero**, és l'element neutre per a la suma;
- Tot element de V és invertible per a la suma;
- L'operació $\cdot$, que anomenarem **producte per un escalar**, és una aplicació del tipus

$$\begin{aligned} \cdot: \quad \mathbb{K} \times V &\longrightarrow V \\ (\lambda, v) &\longmapsto \lambda v \end{aligned}$$

que satisfà les següents propietats, per tot $v, w \in V$ i $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$,

1. $\lambda(v + w) = \lambda v + \lambda w$;
2. $(\lambda + \mu)v = \lambda v + \mu v$;
3. $\lambda(\mu v) = (\lambda\mu)v$;
4. $1v = v$.

Quan se sobreentenguen l'element nul i les operacions suma i producte per un escalar, utilitzarem únicament V per a referir-nos al $\mathbb{K}$ -espai vectorial $(V, +, \cdot, 0)$.

A continuació presentem diferents exemples d'espais vectorials.

Exemple 2.1. Siga $\mathcal{S}$ un sistema homogeni d' m equacions amb n incògnites sobre el cos $\mathbb{K}$. Aleshores el conjunt de totes les solucions del sistema $\mathcal{S}$, amb la suma component a component, la solució 0 i el producte per un escalar, que associa a una solució i un escalar, la solució donada per la multiplicació de l'escalar component a component, és un espai vectorial sobre $\mathbb{K}$.

Exemple 2.2. Donat un cos $\mathbb{K}$ i un natural $n \in \mathbb{N}$, definim $\mathbb{K}^n$ com al producte cartesià de $\mathbb{K}$ amb ell mateix n vegades, és a dir

$$\mathbb{K}^n = \{(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \mid \forall i \in \{1, \dots, n\} (\alpha_i \in \mathbb{K})\}.$$

El conjunt $\mathbb{K}^n$, d' n -tuples sobre $\mathbb{K}$, amb

- vector 0 donat per la **n -tupla nul·la** de $\mathbb{K}^n$

$$0 = (0, \dots, 0);$$

- suma donada component a component, és a dir, si $(\alpha_1, \dots, \alpha_n), (\beta_1, \dots, \beta_n) \in \mathbb{K}^n$,

$$(\alpha_1, \dots, \alpha_n) + (\beta_1, \dots, \beta_n) = (\alpha_1 + \beta_1, \dots, \alpha_n + \beta_n);$$

- i producte per un escalar donat component a component, és a dir, si $\lambda \in \mathbb{K}$ i $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n$,

$$\lambda(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = (\lambda\alpha_1, \dots, \lambda\alpha_n);$$

compleix que $(\mathbb{K}^n, +, \cdot, 0)$ és un $\mathbb{K}$ -espai vectorial.

Exemple 2.3. Donat un cos $\mathbb{K}$ i un natural $n \in \mathbb{N}$, un **polinomi sobre $\mathbb{K}$ de grau n** és una expressió formal del tipus

$$p(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \dots + \alpha_n x^n \quad \text{o en forma compacta,} \quad p(x) = \sum_{i=0}^n \alpha_i x^i,$$

on x és una **indeterminada** i, per a tot $i \in \{0, \dots, n\}$, $\alpha_i \in \mathbb{K}$. Amb l'expressió $\delta(p(x))$ denotarem el **grau** de $p(x)$, en aquest cas n .

Denotem per

- $\mathbb{K}_n[x]$ al conjunt dels polinomis sobre $\mathbb{K}$ de grau n , és a dir

$$\mathbb{K}_n[x] = \{p(x) \mid \delta(p(x)) = n\};$$

- $\mathbb{K}_{\leq n}[x]$ al conjunt dels polinomis sobre $\mathbb{K}$ de grau fitat per n , és a dir,

$$\mathbb{K}_{\leq n}[x] = \{p(x) \mid \delta(p(x)) \leq n\};$$

- $\mathbb{K}[x]$ al conjunt de tots els polinomis sobre $\mathbb{K}$, és a dir,

$$\mathbb{K}[x] = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{K}_n[x].$$

El conjunt $\mathbb{K}_{\leq n}[x]$, de polinomis sobre $\mathbb{K}$ de grau fitat per n , amb

- vector 0 donat pel **polinomi nul** de $\mathbb{K}_{\leq n}[x]$

$$p(x) = 0;$$

- suma donada component a component, és a dir, si $p_1(x), p_2(x) \in \mathbb{K}_{\leq n}[x]$,

$$p_1(x) + p_2(x) = \sum_{i=0}^{\max(n_1, n_2)} (\alpha_i + \beta_i)x^i, \quad \text{on } p_1(x) = \sum_{i=0}^{n_1} \alpha_i x^i, \quad p_2(x) = \sum_{i=0}^{n_2} \beta_i x^i;$$

- i producte per un escalar donat component a component, és a dir, si $\lambda \in \mathbb{K}$ i $p_1(x) \in \mathbb{K}_{\leq n}[x]$,

$$\lambda p_1(x) = \sum_{i=0}^{n_1} (\lambda \alpha_i) x^i, \quad \text{on } p_1(x) = \sum_{i=0}^{n_1} \alpha_i x^i;$$

compleix que $(\mathbb{K}_{\leq n}[x], +, \cdot, 0)$ és un $\mathbb{K}$ -espai vectorial.

A continuació presentem diferents propietats que es dedueixen de la definició d'espai vectorial.

Proposició 2.1. *Siga V un $\mathbb{K}$ -espai vectorial, v un vector en V , i λ un escalar en $\mathbb{K}$, aleshores*

- i. $\lambda 0 = 0$;
- ii. $0v = 0$;
- iii. $(-\lambda)v = \lambda(-v) = -(\lambda v)$.

Demostració. Per a (i) notem que se satisfà la següent seqüència d'identitats

$$\lambda 0 = \lambda(0 + 0) = \lambda 0 + \lambda 0,$$

on la primera igualtat és conseqüència de que 0 és l'element neutre per a la suma de V i la segona igualtat empra la propietat 1 de la Definició 2.1. D'aquesta igualtat, restant $\lambda 0$ a ambdues parts, arribem a que $0 = \lambda 0$.

Per a (ii) notem que se satisfà la següent seqüència d'identitats

$$0v = (0 + 0)v = 0v + 0v,$$

on la primera igualtat és conseqüència de que 0 és l'element neutre per a la suma en $\mathbb{K}$ i la segona igualtat empra la propietat 2 de la Definició 2.1. D'aquesta igualtat, restant $0v$ a ambdues parts, arribem a que $0 = 0v$.

Per a (iii) notem que se satisfan les següents seqüències d'identitats

$$\lambda v + (-\lambda)v = (\lambda - \lambda)v = 0v = 0, \quad \lambda v + \lambda(-v) = \lambda(v - v) = \lambda 0 = 0,$$

on, per a la seqüència de l'esquerra, la primera igualtat és conseqüència de la propietat 2 de la Definició 2.1, la segona igualtat avalua l'operació de suma d'escalars i la tercera igualtat ha estat provada en (ii). Per altra banda, en la seqüència de la dreta, la primera igualtat és conseqüència de la propietat 1 de la Definició 2.1, la segona igualtat avalua l'operació de suma de vectors i la tercera igualtat ha estat provada en (i). De la primera i segona seqüència es dedueix, respectivament, que $(-\lambda)v = -(\lambda v)$ i que $\lambda(-v) = -(\lambda v)$. $\square$

2.1 Subespais vectorials

En aquesta secció introduïrem els conceptes de subespai vectorial i les operacions d'intersecció i suma. Introduïm també la noció de suma directa de subespais.

Definició 2.2 (Subespai vectorial). Siga V un $\mathbb{K}$ -espai vectorial. Direm que $W \subseteq V$ és un **subespai vectorial de V** si

- W conté el vector nul, és a dir $0 \in W$;
- W està tancat per a la suma, és a dir, si $w_1, w_2 \in W$, es té que $w_1 + w_2 \in W$;
- W està tancat per al producte per un escalar, és a dir, si $\lambda \in \mathbb{K}$ i $w \in W$, es té que $\lambda w \in W$.

Es dedueix de la definició que $(W, +, 0)$ és un subgrup de $(V, +, 0)$. De vegades emprarem la notació $W \leq V$ per a dir que W és subespai vectorial de V . Denotem per $\text{Sub}_{\mathbb{K}}(V)$ al conjunt de tots els subespais vectorials de V .

Donarem a continuació una caracterització alternativa de la noció de subespai vectorial.

Proposició 2.2. Siga V un $\mathbb{K}$ -espai vectorial i W un subconjunt de V no buit. Són equivalents

- W és subespai vectorial de V ;
- Per a tot parell d'escalars $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ i vectors $w_1, w_2 \in W$ es té que $\lambda w_1 - \mu w_2 \in W$.

Demostració. Provarem que (i) implica (ii).

Siguen λ i μ escalars en $\mathbb{K}$ i siguen w_1 i w_2 vectors en W . Del fet que W està tancat per al producte per un escalar, es dedueix que λw_1 i μw_2 són vectors de W . Per la Proposició 2.1, tenim que $(-\mu)w_2 = -(\mu w_2)$. Del fet que W està tancat per a la suma, es dedueix que $\lambda w_1 - \mu w_2 \in W$.

Provarem que (ii) implica (i).

Com que W no és buit, podem prendre un vector $w \in W$. Aleshores, per a qualsevol escalar $\lambda \in \mathbb{K}$, podem deduir que $\lambda w - \lambda w = 0 \in W$. Així, el conjunt W conté el vector

nul. Siguen ara w_1 i $w_2 \in W$, aleshores per als escalars 1 i -1 de $\mathbb{K}$, podem deduir que $1w_1 - (-1w_2) = w_1 + w_2 \in W$. Notem que l'anterior igualtat se segueix de la propietat 4 de la Definició 2.1. Així, el conjunt W està tancat per a la suma. Siguen ara $w \in W$ i $\lambda \in \mathbb{K}$, aleshores per a l'escalar $0 \in \mathbb{K}$, podem deduir que $\lambda w - 0w = \lambda w \in W$. Així, el conjunt W està tancat per al producte per escalars. Per tant, W és un subespai vectorial de V . $\square$

Presentem un exemple de subespai vectorial.

Exemple 2.4. Considerem l' $\mathbb{R}$ -espai vectorial $\mathbb{R}^2$. Siga W el subconjunt d' $\mathbb{R}^2$ donat per

$$W = \{(\eta, 2\eta) \in \mathbb{R}^2 \mid \eta \in \mathbb{R}\}.$$

Anem a veure que W és un subespai vectorial d' $\mathbb{R}^2$. Notem que, per a $\eta = 0 \in \mathbb{R}$, es té que $(0, 0) \in W$. Així W conté el vector nul. Siguen ara dos vectors $w_1, w_2 \in W$ i dos escalars $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Com que w_1 i $w_2 \in W$ existeixen escalars η_1 i η_2 en $\mathbb{R}$, respectivament, tals que $w_1 = (\eta_1, 2\eta_1)$ i $w_2 = (\eta_2, 2\eta_2)$. Tenim la següent seqüència d'igualtats

$$\begin{aligned} \lambda w_1 - \mu w_2 &= \lambda(\eta_1, 2\eta_1) - \mu(\eta_2, 2\eta_2) \\ &= (\lambda\eta_1, \lambda(2\eta_1)) - (\mu\eta_2, \mu(2\eta_2)) \\ &= ((\lambda\eta_1 - \mu\eta_2), 2(\lambda\eta_1 - \mu\eta_2)) \end{aligned}$$

En l'anterior seqüència, la primera igualtat substitueix els vectors w_1 i w_2 per la forma anteriorment descrita, en la segona igualtat utilitzem la definició de producte per escalar en $\mathbb{R}^2$ i en la tercera igualtat utilitzem la definició de suma en $\mathbb{R}^2$. Finalment, notem que l'última tupla està en W , ja que té la forma $(\eta, 2\eta)$ per a l'escalar $\eta = \lambda\eta_1 - \mu\eta_2 \in \mathbb{R}$.

Per la Proposició 2.2, concloem que W és un subespai vectorial d' $\mathbb{R}^2$.

2.1.1 Intersecció de subespais vectorials

A continuació veurem que, donat un $\mathbb{K}$ -espai vectorial V i dos subespais vectorials de V , aleshores la seua intersecció també és subespai vectorial.

Proposició 2.3. *Siga V un $\mathbb{K}$ -espai vectorial i siguen W_1 i W_2 dos subespais vectorials de V , aleshores $W_1 \cap W_2$ també és subespai vectorial de V .*

Demostració. Notem que $0 \in W_1$ i $0 \in W_2$, així la intersecció $W_1 \cap W_2$ conté l'element 0. En particular, aquesta intersecció no és buida. Comprovarem que $W_1 \cap W_2$ és subespai vectorial de V per la caracterització presentada en la Proposició 2.2.

Siguen λ, μ escalars en $\mathbb{K}$ i siguen w_1, w_2 vectors en $W_1 \cap W_2$. Volem comprovar que $\lambda w_1 - \mu w_2$ és un vector de $W_1 \cap W_2$. Com que w_1 pertany a $W_1 \cap W_2$, aleshores w_1 pertany a W_1 i a W_2 . D'igual forma w_2 pertany a W_1 i a W_2 . Com que W_1 és subespai vectorial, tenim per la Proposició 2.2 que el vector $\lambda w_1 - \mu w_2$ també pertany a W_1 . Per un raonament similar, arribem a que $\lambda w_1 - \mu w_2$ també pertany a W_2 . Així $\lambda w_1 - \mu w_2 \in W_1 \cap W_2$. $\square$

2.1.2 Unió de subespais vectorials

En contraposició al que ocorre amb la intersecció, donat un $\mathbb{K}$ -espai vectorial V i dos subespais vectorials de V , aleshores la seua unió no té per què ser subespai vectorial. Ho vorem clarament en el següent exemple.

Exemple 2.5. Considerem l' $\mathbb{R}$ -espai vectorial $\mathbb{R}^2$ i els subespais vectorials següents

$$W_1 = \{(\lambda, 2\lambda) \in \mathbb{R}^2 \mid \lambda \in \mathbb{R}\}; \quad W_2 = \{(0, \mu) \in \mathbb{R}^2 \mid \mu \in \mathbb{R}\}.$$

Així, els vectors $(1, 2)$ i $(0, 1)$ pertanyen a $W_1 \cup W_2$ però el vector

$$(1, 1) = (1, 2) - (0, 1) \notin W_1 \cup W_2.$$

Per la Proposició 2.2 deduïm que $W_1 \cup W_2$ no és subespai vectorial d' $\mathbb{R}^2$.

2.1.3 Suma de subespais vectorials

A continuació veurem que, donat un $\mathbb{K}$ -espai vectorial V i dos subespais vectorials de V , aleshores la seua suma, que definirem a continuació, també és subespai vectorial.

Proposició 2.4. *Siga V un $\mathbb{K}$ -espai vectorial i siguin W_1 i W_2 dos subespais vectorials de V , aleshores la **suma de** W_1 i W_2 , denotada per $W_1 + W_2$, definida com segueix*

$$W_1 + W_2 = \{w_1 + w_2 \in V \mid w_1 \in W_1, w_2 \in W_2\},$$

també és subespai vectorial de V .

Demostració. El vector $0 = 0 + 0$ pertany a $W_1 + W_2$. En particular, el conjunt $W_1 + W_2$ no és buit. Comprovarem que $W_1 + W_2$ és subespai vectorial de V per la caracterització presentada en la Proposició 2.2.

Siguin λ, μ escalars en $\mathbb{K}$ i siguin v_1, v_2 vectors en $W_1 + W_2$. Volem comprovar que $\lambda v_1 - \mu v_2$ és un vector de $W_1 + W_2$. Per la forma que té el conjunt $W_1 + W_2$, existeixen vectors w_{11}, w_{12} en W_1 i vectors w_{21}, w_{22} en W_2 tals que

$$v_1 = w_{11} + w_{21}, \quad v_2 = w_{12} + w_{22}.$$

Se segueix la següent seqüència d'igualtats

$$\begin{aligned} \lambda v_1 - \mu v_2 &= \lambda(w_{11} + w_{21}) - \mu(w_{12} + w_{22}) \\ &= \lambda w_{11} + \lambda w_{21} - \mu w_{12} - \mu w_{22} \\ &= (\lambda w_{11} - \mu w_{12}) + (\lambda w_{21} - \mu w_{22}). \end{aligned}$$

En la primera igualtat utilitzem les equacions anteriors que descriuen els vectors v_1 i v_2 com a vectors en $W_1 + W_2$; en la segona igualtat fem la propietat 1 de la Definició 2.1; en la tercera igualtat simplement reagrupem termes.

Notem que, com w_{11} i w_{12} són vectors en W_1 , per la Proposició 2.2, el vector $\lambda w_{11} - \mu w_{12}$ pertany a W_1 . Per altra banda, com que w_{21} i w_{22} són vectors en W_2 , per la Proposició 2.2, el vector $\lambda w_{21} - \mu w_{22}$ pertany a W_2 . Així, garantim que el vector $\lambda v_1 - \mu v_2$ pertany a $W_1 + W_2$. $\square$

i Nota

Nota. Es pot comprovar que el conjunt $\text{Sub}_{\mathbb{K}}(V)$ amb les operacions d'intersecció i suma i els elements mínim $\{0\}$ i màxim V té estructura de reticle algebraic $(\text{Sub}_{\mathbb{K}}(V), \cap, +, \{0\}, V)$.

Definició 2.3 (Suma directa). Siga V un $\mathbb{K}$ -espai vectorial i siguin W_1 i W_2 dos subespais vectorials de V , direm que la suma $W_1 + W_2$ és **directa** si $W_1 \cap W_2 = \{0\}$. En aquest cas, utilitzarem $W_1 \oplus W_2$ en compte de $W_1 + W_2$.

A continuació presentem una caracterització per a les sumes directes.

Proposició 2.5. Siga V un $\mathbb{K}$ -espai vectorial i siguin W_1 i W_2 dos subespais vectorials de V . Són equivalents

- i. La suma $W_1 + W_2$ és directa;
- ii. Per a tot parell de vectors $w_1 \in W_1$ i $w_2 \in W_2$, si $w_1 + w_2 = 0$, aleshores $w_1 = w_2 = 0$;
- iii. Tot vector no nul de $W_1 + W_2$ s'escriu de forma única com a suma d'un vector de W_1 i un vector de W_2 .

Demostració. Provarem que (i) implica (ii). Siguin $w_1 \in W_1$ i $w_2 \in W_2$ tals que $w_1 + w_2 = 0$, aleshores es té que $w_1 = -w_2$. Per tant, $w_1 \in W_1 \cap W_2 = \{0\}$ i $w_2 \in W_1 \cap W_2 = \{0\}$.

Provarem que (ii) implica (iii). Siga $v \in W_1 + W_2$. Suposem que podem escriure $v = w_1 + w_2$ i $v = u_1 + u_2$, amb $w_1, u_1 \in W_1$ i $w_2, u_2 \in W_2$. Aleshores $(w_1 - u_1) + (w_2 - u_2) = 0$ i $w_1 - u_1 \in W_1$ i $w_2 - u_2 \in W_2$. Per la suposició, arribem a que $w_1 - u_1 = 0$ i $w_2 - u_2 = 0$. Així, $w_1 = u_1$ i $w_2 = u_2$.

Provarem que (iii) implica (i). Suposem que v és un vector en $W_1 \cap W_2$. Suposem, per reducció a l'absurd, que v no és nul. Aleshores pot expressar-se com a $v = v + 0$ i com a $v = 0 + v$. És a dir, hem trobat un vector no nul que admet dues expressions com a suma de vectors en W_1 i W_2 , contradient la suposició. Per tant, $v = 0$. $\square$

2.2 Sistemes generadors, independència lineal i bases

En aquesta secció introduïm, per a un subconjunt de vectors d'un espai vectorial, les nocions de sistema generador, independència lineal i base.

Definició 2.4 (Combinació lineal | Subespai generat). Siga V un $\mathbb{K}$ -espai vectorial i siga $S \subseteq V$ un conjunt de vectors. Una **combinació lineal de vectors d' S** és un vector del tipus

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_k v_k, \quad \text{o en forma compacta,} \quad \sum_{j=1}^k \lambda_j v_j,$$

on $k \in \mathbb{N}$, i per a tot $j \in \{1, \dots, k\}$, λ_j és un escalar en $\mathbb{K}$ i v_j és un vector en S .

Anomenem **subespai vectorial generat per S** , denotat $\langle S \rangle$, al conjunt de totes les combinacions lineals d' S , és a dir,

$$\langle S \rangle = \left\{ \sum_{j=1}^k \lambda_j v_j \in V \mid k \in \mathbb{N} \text{ i } \forall j \in \{1, \dots, k\}, (\lambda_j \in \mathbb{K} \text{ i } v_j \in S) \right\}.$$

En cas que $S = \emptyset$, prendrem el conveni $\langle \emptyset \rangle = \{0\}$. Direm que un vector $v \in V$ és **combinació lineal d' S** si $v \in \langle S \rangle$. Si S és no buit i finit, és a dir, si $S = \{v_1, \dots, v_k\}$, per a algun $k \in \mathbb{N}$, i v és un vector en $\langle S \rangle$, direm que v és combinació lineal dels vectors $v_1, \dots, v_k$. En aquest cas, direm que $\langle S \rangle$ és finitament generat.

Exemple 2.6. Considerem l' $\mathbb{R}$ -espai vectorial $\mathbb{R}^3$ i el conjunt de vectors

$$S = \{(1, 2, 0), (1, -2, 1), (-1, -1, 3)\} \subseteq \mathbb{R}^3.$$

El vector $(-2, 2, 5)$ és combinació lineal de $(1, 2, 0)$, $(1, -2, 1)$ i $(-1, -1, 3)$ ja que

$$(-2, 2, 5) = (1, 2, 0) - (1, -2, 1) + 2(-1, -1, 3).$$

Notem també que cadascun dels vectors que componen S és combinació lineal d' S .

A continuació comprovarem que per a tot $\mathbb{K}$ -espai vectorial V i per a qualsevol conjunt de vectors en V , el subespai generat per aquest conjunt de vectors és, efectivament, un subespai vectorial.

Proposició 2.6. Siga V un $\mathbb{K}$ -espai vectorial i siga $S \subseteq V$ un conjunt de vectors. Aleshores, el conjunt de combinacions lineals d' S , és a dir $\langle S \rangle$, és un subespai vectorial de V .

Demostració. Si $S = \emptyset$, aleshores $\langle S \rangle = \{0\}$. Es comprova fàcilment que aquest conjunt és un subespai vectorial de V .

Així, podem suposar que S és no buit. Siga $v \in S$, aleshores $v \in \langle S \rangle$. En particular, el conjunt $\langle S \rangle$ tampoc és buit. Comprovarem que $\langle S \rangle$ és subespai vectorial de V per la caracterització presentada en la Proposició 2.2.

Siguen λ, μ escalars en $\mathbb{K}$ i siguen v, w vectors en $\langle S \rangle$. Volem demostrar que $\lambda v - \mu w$ és un vector de $\langle S \rangle$. Per la forma que té el conjunt $\langle S \rangle$, els vectors v i w són combinacions lineals

d'elements d' S , així existeixen naturals $m, n \in \mathbb{N}$, escalars $\lambda_k, \mu_l \in \mathbb{K}$ i vectors $v_k, w_l \in S$, per a $k \in \{1, \dots, m\}$, $l \in \{1, \dots, n\}$, respectivament, per als quals,

$$v = \sum_{k=1}^m \lambda_k v_k, \quad w = \sum_{l=1}^n \mu_l w_l.$$

Se segueix la següent seqüència d'igualtats

$$\lambda v - \mu w = \lambda \left(\sum_{k=1}^m \lambda_k v_k \right) - \mu \left(\sum_{l=1}^n \mu_l w_l \right) = \sum_{k=1}^m (\lambda \lambda_k) v_k - \sum_{l=1}^n (\mu \mu_l) w_l.$$

En la primera igualtat utilitzem les equacions anteriors que descriuen els vectors v i w com a vectors en $\langle S \rangle$; mentre que la segona igualtat és conseqüència de la propietat 1 de la Definició 2.1. Notem que els escalars que acompanyen els vectors, bé siguin $\lambda \lambda_k$ o $\mu \mu_l$, per a algun $k \in \{1, \dots, m\}$ i algun $l \in \{1, \dots, n\}$, són escalars en $\mathbb{K}$. Si algun vector apareguera tant en la combinació lineal que defineix v com en la de w , una vegada reagrupats els termes, l'escalar que acompanyaria aquest vector tindria la forma $\lambda \lambda_k - \mu \mu_l$, per a algun $k \in \{1, \dots, m\}$ i algun $l \in \{1, \dots, n\}$. En qualsevol cas, vegem que $\lambda v - \mu w$ és combinació lineal de vectors en S . $\square$

Definició 2.5 (Sistema generador). Siga V un $\mathbb{K}$ -espai vectorial i siga $S \subseteq V$ un conjunt de vectors. Direm que S és **sistema generador de V** si $\langle S \rangle = V$, és a dir, si tot vector de V es pot escriure com a combinació lineal dels vectors en S .

Si S és finit, és a dir, si $S = \{v_1, \dots, v_k\} \subseteq V$, per a algun $k \in \mathbb{N}$, i S és sistema generador de V , direm que els vectors $v_1, \dots, v_k$ generen V . En aquest cas direm que V és **finítament generat**.

Exemple 2.7. Considerem l' $\mathbb{R}$ -espai vectorial $\mathbb{R}^3$ i el conjunt de vectors

$$S = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 1, -1), (2, 3, 1)\} \subseteq \mathbb{R}^3.$$

Siga $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ un vector qualsevol d' $\mathbb{R}^3$. Notem la següent igualtat

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \alpha_1(1, 0, 0) + (\alpha_2 + \alpha_3)(0, 1, 0) - \alpha_3(0, 1, -1) + 0(2, 3, 1).$$

D'ací deduïm que tot vector d' $\mathbb{R}^3$ es pot escriure com a combinació lineal dels vectors en S . Per tant, S és sistema generador d' $\mathbb{R}^3$.

Proposició 2.7. Siga V un $\mathbb{K}$ -espai vectorial i siga $S \subseteq V$ un conjunt de vectors. Aleshores les següents condicions són equivalents

- i. S és sistema generador;
- ii. Tot subconjunt $R \subseteq V$ amb $S \subseteq R$ és sistema generador.

Definició 2.6 (Independència lineal). Siga V un $\mathbb{K}$ -espai vectorial i siga $S \subseteq V$ un conjunt de vectors. Direm que S és **linealment independent** si tota combinació lineal de vectors d' S igualada a 0

$$\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_k v_k = 0 \quad \text{o en forma compacta,} \quad \sum_{j=1}^k \lambda_j v_j = 0,$$

satisfà que, per a tot $j \in \{1, \dots, k\}$, l'escalar λ_j ha de ser nul, és a dir $\lambda_j = 0$.

És a dir, S és linealment independent si el vector 0 només es pot escriure com a combinació lineal dels vectors $v_1, \dots, v_k$ d' S en la forma $0v_1 + \cdots + 0v_k$.

En cas que $S = \emptyset$, prendrem el conveni que $\emptyset$ és un conjunt linealment independent. Si S és un conjunt finit linealment independent, és a dir, si $S = \{v_1, \dots, v_k\}$, per a algun $k \in \mathbb{N}$, direm que els vectors $v_1, \dots, v_k$ són linealment independents.

Exemple 2.8. Considerem l' $\mathbb{R}$ -espai vectorial $\mathbb{R}^3$ i el conjunt de vectors

$$\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 1, -1), (2, 3, 1)\} \subseteq \mathbb{R}^3.$$

Aquest conjunt és linealment dependent, ja que podem trobar la següent combinació lineal

$$2(1, 0, 0) + 4(0, 1, 0) - (0, 1, -1) - (2, 3, 1) = (0, 0, 0).$$

Notem que cap dels escalars que intervenen és igual a zero.

Exemple 2.9. Considerem l' $\mathbb{R}$ -espai vectorial $\mathbb{R}^3$ i el conjunt de vectors

$$\{(0, 1, 0), (0, 1, -1), (2, 3, 1)\} \subseteq \mathbb{R}^3.$$

Comprovem que aquest conjunt de vectors és linealment independent. Per a demostrar-ho, suposem que tenim una combinació lineal dels vectors anteriors igualada a 0

$$\lambda_1(0, 1, 0) + \lambda_2(0, 1, -1) + \lambda_3(2, 3, 1) = (0, 0, 0)$$

Operant, arribem a que els següents vectors són iguals

$$(2\lambda_3, \lambda_1 + \lambda_2 + 3\lambda_3, -\lambda_2 + \lambda_3) = (0, 0, 0)$$

Per tant, els escalars $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ són solució del següent sistema d'equacions lineal homogeni, a esquerra, que, per Gauss-Jordan, podem escriure en forma normal, a dreta.

$$\left. \begin{array}{rrcr} & & 2\lambda_3 & = & 0 \\ \lambda_1 & + & \lambda_2 & + & 3\lambda_3 & = & 0 \\ & - & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{rcl} \lambda_1 & = & 0 \\ \lambda_2 & = & 0 \\ \lambda_3 & = & 0 \end{array} \right\}$$

Per tant, els vectors $(0, 1, 0), (0, 1, -1), (2, 3, 1)$ són linealment independents.

Proposició 2.8. *Siga V un $\mathbb{K}$ -espai vectorial i siga $S \subseteq V$ un conjunt de vectors. Aleshores les següents condicions són equivalents*

- i. S és linealment independent;*
- ii. Tot subconjunt $R \subseteq S$ és linealment independent.*

Definició 2.7 (Base). *Siga V un $\mathbb{K}$ -espai vectorial i siga $\mathcal{B} \subseteq V$ un conjunt de vectors. Direm que $\mathcal{B}$ és **base de V** si és sistema generador i conjunt linealment independent.*

Per a denotar bases emprarem $\mathcal{B}$ i derivats.

Exemple 2.10. *Siga $\mathbb{K}$ un cos i siga el $\mathbb{K}$ -espai vectorial $\mathbb{K}^n$. Per a cada $j \in \{1, \dots, n\}$ definim el vector e_j com el vector que té en tota posició diferent a la j un 0 i un 1 en la posició j , és a dir*

$$e_j = (0, \dots, 1, \dots, 0).$$

Comprovarem que el conjunt $\{e_1, \dots, e_n\}$ és base de $\mathbb{K}^n$. Per a demostrar-ho, caldrà comprovar que $\{e_1, \dots, e_n\}$ és sistema generador i linealment independent.

Siga $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ un vector qualsevol de $\mathbb{K}^n$. Aleshores, podem escriure aquest vector com a combinació lineal dels vectors $e_1, \dots, e_n$ com segueix

$$\alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n = (\alpha_1, \dots, \alpha_n).$$

Per tant, $\{e_1, \dots, e_n\}$ és sistema generador.

Suposem ara que tenim una combinació lineal dels vectors $e_1, \dots, e_n$ igualada a 0

$$\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n = (0, \dots, 0).$$

Operant, arribem a que els següents vectors són iguals

$$(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = (0, \dots, 0).$$

D'on deduïm que per a tot $j \in \{1, \dots, n\}$, es té que $\lambda_j = 0$. Per tant, els vectors $e_1, \dots, e_n$ són linealment independents.

El conjunt $\{e_1, \dots, e_n\}$ s'anomenarà **base canònica de $\mathbb{K}^n$** i la denotarem per $\mathcal{B}_c$.

La següent proposició ens dona caracteritzacions d'una base com a sistema generador minimal i com a conjunt de vectors linealment independents maximal.

Proposició 2.9. *Siga V un $\mathbb{K}$ -espai vectorial i siga $\mathcal{B}$ un conjunt finit de vectors en V . Aleshores, són equivalents*

- i. $\mathcal{B}$ és base de V ;*
- ii. $\mathcal{B}$ és sistema generador minimal;*
- iii. $\mathcal{B}$ és conjunt de vectors linealment independents maximal.*

Demostració. Provarem que (i) implica (ii). Notem que, com $\mathcal{B}$ és base, aleshores és un sistema generador. Per a vore que és minimal, considerem un subconjunt S de vectors en V tal que $S \subset \mathcal{B}$. Comprovarem que S no pot ser sistema generador.

Suposem que $S = \{v_1, \dots, v_k\}$. Com que S és un subconjunt estricte de $\mathcal{B}$, podem trobar un vector $v \in \mathcal{B}$ que no estiga en S . Suposem, per reducció a l'absurd, que S és sistema generador. Aleshores el vector v pot escriure's com a combinació lineal dels vectors $v_1, \dots, v_k$. Així, existeixen escalars $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ en $\mathbb{K}$, per als quals

$$v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k$$

D'on podem derivar l'expressió següent

$$v - \lambda_1 v_1 - \dots - \lambda_k v_k = 0.$$

Així, hem pogut trobar una combinació lineal de vectors en $\mathcal{B}$ igualada a 0 on no tots els escalars són nuls. Açò contradiu el fet que $\mathcal{B}$ és un conjunt de vectors linealment independents. Per tant, S no pot ser sistema generador.

Provarem que (ii) implica (iii). Suposem que $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_k\}$. Cal provar en primer lloc que $\mathcal{B}$ és linealment independent. Siguen escalars $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ en $\mathbb{K}$ i una expressió del tipus

$$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k = 0.$$

Suposem, per reducció a l'absurd, que existeix un índex $j \in \{1, \dots, k\}$, per al qual l'escalar λ_j és diferent de 0. Així, de l'expressió de dalt, aïllant v_j , trobem que

$$v_j = \frac{1}{\lambda_j} (-\lambda_1 v_1 - \dots - \lambda_{j-1} v_{j-1} - \lambda_{j+1} v_{j+1} - \dots - \lambda_k v_k).$$

És a dir, el vector v_j pot escriure's com a combinació lineal de tota la resta de vectors. Així el conjunt $\mathcal{B} - \{v_j\}$ és generador, contradient el fet que $\mathcal{B}$ era minimal respecte aquesta condició.

Per tant, per a tot $j \in \{1, \dots, k\}$, l'escalar λ_j ha de ser, necessàriament, igual a 0.

Ara faltarà vore que $\mathcal{B}$ és maximal respecte aquesta propietat. Siga S un conjunt de vectors en V tal que $\mathcal{B} \subset S$. Provarem que S no pot ser linealment independent. Com $\mathcal{B} \subset S$, podem trobar un vector $v \in S - \mathcal{B}$. Com que $\mathcal{B}$ és sistema generador, podem trobar escalars $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ en $\mathbb{K}$ per als quals

$$v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k.$$

De l'equació de dalt, passant tots els termes a l'esquerra, tenim que

$$v - \lambda_1 v_1 - \dots - \lambda_k v_k = 0.$$

És a dir, hem trobat una combinació lineal de vectors en S igualada a 0 on no tots els escalars són igual a 0. Per tant, S és linealment dependent.

Finalment, provarem que (iii) implica (i). El conjunt $\mathcal{B}$ ja és linealment independent. Per a vore que és base només queda provar que és sistema generador. Siga v un vector en V qualsevol. Si v és un vector en $\mathcal{B}$, òbviament $v \in \langle \mathcal{B} \rangle$. Per tant, podem suposar que v és un vector que no està en $\mathcal{B}$. Així, per la maximalitat de $\mathcal{B}$ com a conjunt linealment independent es té que, necessàriament, el conjunt $\mathcal{B} \cup \{v\}$ ha de ser linealment dependent.

Així podem trobar escalars $\lambda_1, \dots, \lambda_k, \mu \in \mathbb{K}$, on no tots siguen 0, per als quals

$$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k + \mu v = 0.$$

Notem que μ no pot ser igual a 0. D'altra forma, el conjunt $\mathcal{B}$ no seria linealment independent. Com a conseqüència d'aquest fet, tenim que el vector v pot aïllar-se de l'expressió de dalt. Així

$$v = \frac{1}{\mu}(-\lambda_1 v_1 - \dots - \lambda_k v_k).$$

És a dir, v és combinació lineal dels vectors en $\mathcal{B}$. Per tant, $\langle \mathcal{B} \rangle = V$. □

El següent teorema ens garantitza que, en un espai vectorial finitament generat, sempre podem trobar bases.

Teorema 2.1 (Existència de bases en espais vectorials finitament generats). *Siga V un $\mathbb{K}$ -espai vectorial finitament generat. Aleshores V té una base finita.*

Demostració. Siga S un sistema generador finit de V . Si S és minimal, per la Proposició 2.9, tenim que S és base. En cas contrari, si S no fóra minimal, voldria dir que podem trobar un sistema generador S' estrictament menor que S . Repetim el procediment amb S' . Notem que aquest procediment no pot repetir-se indefinidament perquè S és finit. Així, en algun moment, trobarem un sistema generador minimal. Aquest sistema, per la Proposició 2.9, serà una base finita de V . □

Exemple 2.11. L' $\mathbb{R}$ -espai vectorial $\mathbb{R}^3$ admet diferents bases, per exemple

- $\mathcal{B}_c = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\};$
- $\mathcal{B} = \{(1, 2, 3), (-1, 2, 1), (0, -1, 0)\};$
- $\bar{\mathcal{B}} = \{(2, 1, 0), (1, 1, 0), (-1, 0, 1)\};$
- ...

L'anterior teorema ens garantitza l'existència, però no la unicitat de bases.

2.3 Dimensió

El següent resultat ens permet afirmar que, donada una base i un conjunt de vectors linealment independents, podem substituir vectors de la base pels vectors del conjunt tot garantint que el conjunt resultant continue sent una base.

Lema 2.1. *Siga V un $\mathbb{K}$ -espai vectorial i siga $\mathcal{B}$ una base de V . Siga $\{u_1, \dots, u_k\}$ un conjunt de vectors linealment independents de V , per a algun $k \in \mathbb{N}$. Aleshores podem substituir k vectors de $\mathcal{B}$ pels vectors $u_1, \dots, u_k$ de forma que el conjunt resultant siga una base.*

Demostració. Considerem el primer vector del conjunt linealment independent u_1 . Com que $\mathcal{B}$ és base, per a algun $n \in \mathbb{N}$, podem trobar escalars $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ i vectors $v_1, \dots, v_n \in \mathcal{B}$ per als quals

$$u_1 = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n.$$

Notem que $u_1 \neq 0$ ja que pertany a un conjunt linealment independent. Per tant, en l'anterior expressió hi haurà algun escalar λ_j , per a algun $j \in \{1, \dots, n\}$, amb $\lambda_j \neq 0$.

Siga $\mathcal{B}_1$ el conjunt de vectors que resulta de substituir en $\mathcal{B}$ el vector v_j pel vector u_1 . Anem a provar que $\mathcal{B}_1$ és base de V .

Cal demostrar que $\mathcal{B}_1$ és sistema generador i conjunt de vectors linealment independents. Però abans de res, cal notar la següent propietat. Per a l'elecció de l'anterior j , tenint en compte que $\lambda_j \neq 0$, podem aïllar v_j en l'anterior expressió com segueix.

$$v_j = \frac{1}{\lambda_j} u_1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_j} v_1 - \dots - \frac{\lambda_{j-1}}{\lambda_j} v_{j-1} - \frac{\lambda_{j+1}}{\lambda_j} v_{j+1} - \dots - \frac{\lambda_n}{\lambda_j} v_n.$$

Així es té que $\langle \mathcal{B}_1 \rangle = \langle \mathcal{B} \rangle$. Com que $\mathcal{B}$ és base, tenim que $\langle \mathcal{B} \rangle = V$. És a dir, $\mathcal{B}_1$ és sistema generador. Siga ara una combinació lineal dels elements de $\mathcal{B}_1$ igualada a 0. Si aquesta expressió no conté el vector u_1 , com que $\mathcal{B}$ és linealment independent, aleshores els escalars hauran de ser 0. Per tant, podem suposar que la combinació lineal igualada a 0 sí que conté a u_1 .

És a dir, per a un natural $p \in \mathbb{N}$, siguen $\mu_1, \dots, \mu_p$ escalars en $\mathbb{K}$ i $w_2, \dots, w_p$ vectors en $\mathcal{B} - \{v_j\}$ per als quals

$$\mu_1 u_1 + \mu_2 w_2 + \dots + \mu_p w_p = 0.$$

Volem comprovar que tots els escalars $\mu_1, \dots, \mu_p$ són nuls. En l'anterior equació substituïm u_1 per la seua expressió com a combinació lineal dels elements de $\mathcal{B}$ i reagrupem termes fins obtindre la següent expressió.

$$\mu_1 (\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n) + \mu_2 w_2 + \dots + \mu_p w_p = 0.$$

Notem que aquesta expressió és una combinació lineal de vectors en $\mathcal{B}$ igualada a 0, per tant tots els escalars han de ser 0. Notem que l'escalar que acompanya al vector v_j en l'anterior expressió és $\mu_1 \lambda_j$. Com que λ_j l'havíem elegit amb la propietat que $\lambda_j \neq 0$, aleshores $\mu_1 = 0$.

D'ací, deduïm immediatament que la resta d'escalars $\mu_2, \dots, \mu_p$ han de ser 0. És a dir, el conjunt $\mathcal{B}_1$ és linealment independent.

Ara, suposem que ja hem substituït $l \in \mathbb{N}$, amb $l < k$, dels vectors de $\mathcal{B}$ per $u_1, \dots, u_l$ i que el nou conjunt resultant, diem-li $\mathcal{B}_l$, és base de V . Anem a veure que podem substituir un dels vectors de $\mathcal{B}_l - \{u_1, \dots, u_l\}$ restants per u_{l+1} .

Com que $\mathcal{B}_l$ és base, podrem trobar un $n \in \mathbb{N}$ amb $n > l$, escalars $\gamma_1, \dots, \gamma_n \in \mathbb{K}$ i vectors $v_{l+1}, \dots, v_n \in \mathcal{B}_l - \{u_1, \dots, u_l\}$ per als quals

$$u_{l+1} = \gamma_1 u_1 + \dots + \gamma_l u_l + \gamma_{l+1} v_{l+1} + \dots + \gamma_n v_n.$$

Notem que $u_{l+1} \neq 0$ ja que pertany a un conjunt linealment independent. Per tant, en l'anterior expressió hi haurà algun escalar $\gamma_j \neq 0$, per a algun $j \in \{1, \dots, n\}$. De fet, aquest índex j el podem prendre en el conjunt $\{l+1, \dots, n\}$, ja que si açò no fóra possible, és a dir, si els escalars γ_j amb $j \in \{l+1, \dots, n\}$ foren tots nuls, en l'anterior expressió estaríem dient que u_{l+1} és combinació lineal dels vectors $\{u_1, \dots, u_l\}$. Aquest fet entra en contradicció amb el fet que el conjunt de vectors $\{u_1, \dots, u_k\}$ és linealment independent.

A partir d'aquest punt procedim com en el cas base. □

i Nota

Nota. En la demostració del Lema 2.1 cal anar amb compte en la substitució que es fa. Considerem l' $\mathbb{R}$ -espai vectorial $\mathbb{R}^3$, la seua base canònica $\mathcal{B}_c = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ i el conjunt $\{(1, 1, 0)\}$ de vectors linealment independents. Notem que si en $\mathcal{B}_c$ canviem el vector $(0, 0, 1)$ pel vector $(1, 1, 0)$, el conjunt resultant, $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (1, 1, 0)\}$, és linealment dependent. Per aquest motiu, la substitució no pot ser arbitrària. Cal cenyir-se a les condicions que demana el Lema 2.1.

El següent teorema ens garanteix que, en un $\mathbb{K}$ -espai vectorial finitament generat, tot subconjunt finit de vectors linealment independents pot ampliar-se fins a trobar una base.

Teorema 2.2 (Teorema d'ampliació). *Siga V un $\mathbb{K}$ -espai vectorial finitament generat i siga $S \subseteq V$ un subconjunt finit de vectors linealment independents. Aleshores podem trobar una base de V que conté els vectors d' S .*

Demostració. Pel Teorema 2.1, siga $\mathcal{B}$ una base de V . Com S és un subconjunt finit de vectors linealment independents, pel Lema 2.1 podem substituir $|S|$ vectors de $\mathcal{B}$ pels vectors d' S de forma que el conjunt resultant siga una base. Aquesta base conté els vectors d' S . □

Com a corol·lari del Lema 2.1 podem garantir que totes les bases d'un espai vectorial finitament generat tenen el mateix cardinal.

Corol·lari 2.1. *Siga V un $\mathbb{K}$ -espai vectorial finitament generat. Aleshores totes les bases de V són finites i tenen el mateix cardinal.*

Demostració. Es dedueix del Teorema 2.1 que tot $\mathbb{K}$ -espai vectorial finitament generat admet una base finita $\mathcal{B}$. Si suposem que existeix alguna base infinita $\overline{\mathcal{B}}$, pel Lema 2.1 podem substituir en $\overline{\mathcal{B}}$ una quantitat $|\mathcal{B}|$ de vectors pels vectors de $\mathcal{B}$ i obtindre una base. Aquesta base resultant conté estrictament a $\mathcal{B}$. Açò entra en contradicció amb el resultat de la Proposició 2.9, on s'especifica que $\mathcal{B}$ és maximal per a aquesta propietat. Per tant $\overline{\mathcal{B}}$ ha de ser finit.

Per altra banda, si hi haguera alguna base $\overline{\mathcal{B}}$ amb $|\overline{\mathcal{B}}| \neq |\mathcal{B}|$, podríem d'igual forma construir una nova base, que continguera estrictament tots els vectors de la menor base, siga $\mathcal{B}$ o $\overline{\mathcal{B}}$. Açò entra en contradicció amb el resultat de la Proposició 2.9, on s'especifica que tota base és maximal per a aquesta propietat. Per tant, $|\overline{\mathcal{B}}| = |\mathcal{B}|$. $\square$

Definició 2.8 (Dimensió). Siga V un $\mathbb{K}$ -espai vectorial. Si V és finitament generat, anomenarem **dimensió de V** , denotada per $\dim_{\mathbb{K}}(V)$, al cardinal de qualsevol de les seues bases. Si V no és finitament generat, direm que té dimensió infinita.

El següent corol·lari fita el cardinal de tot conjunt de vectors linealment independents i de tot sistema generador en termes de la dimensió de l'espai.

Corol·lari 2.2. Siga V un $\mathbb{K}$ -espai vectorial finitament generat, siga $L \subseteq V$ un subconjunt de vectors linealment independents i siga $G \subseteq V$ un sistema generador de V . Aleshores

$$|L| \leq \dim_{\mathbb{K}}(V) \leq |G|.$$

Demostració. Suposem que L té una quantitat finita, però estrictament major a $\dim_{\mathbb{K}}(V)$, de vectors. Aleshores, pel Teorema 2.2, d'Ampliació de la Base, podem trobar una base de V que conté tots els vectors d' L . Aquesta base tindria una quantitat estrictament major a $\dim_{\mathbb{K}}(V)$ de vectors. Açò entra en contradicció amb el Corol·lari 2.1, ja que hi hauria dues bases amb tamanyos diferents. Per tant, s'ha de donar la desigualtat $|L| \leq \dim_{\mathbb{K}}(V)$.

Per altra banda, com que V és finitament generat, sempre podem trobar un subconjunt finit $G' \subseteq G$ de forma que G' siga sistema generador. Per la demostració del Teorema 2.1 sempre podem obtindre un subconjunt $G'' \subseteq G'$ que siga sistema generador minimal. Per la Proposició 2.9 aquest conjunt serà una base. Així

$$\dim_{\mathbb{K}}(V) = |G''| \leq |G'| \leq |G|.$$

En definitiva, $|L| \leq \dim_{\mathbb{K}}(V) \leq |G|$. $\square$

Proposició 2.10. Siga V un $\mathbb{K}$ -espai vectorial amb $\dim_{\mathbb{K}}(V) = n$ i siga $\mathcal{B} \subseteq V$ un subconjunt d' n vectors. Aleshores, són equivalents

- i. $\mathcal{B}$ és base;
- ii. $\mathcal{B}$ és sistema generador;
- iii. $\mathcal{B}$ és linealment independent.

Demostració. Si $\mathcal{B}$ és sistema generador i té n elements aleshores, pel Corol·lari 2.2, tenim que $\mathcal{B}$ és necessàriament minimal. Si $\mathcal{B}$ és linealment independent i té n elements aleshores, pel Corol·lari 2.2, tenim que $\mathcal{B}$ és necessàriament maximal.

Dels dos casos es dedueix que $\mathcal{B}$ és base, en virtut de la Proposició 2.9. Així, (ii) i (iii), respectivament, impliquen (i). Trivialment es compleix que (i) implica els altres dos ítems. $\square$

Proposició 2.11. *Siga V un $\mathbb{K}$ -espai vectorial amb $\dim_{\mathbb{K}}(V) = n$ i siga $W \leq V$ un subespai vectorial de V . Aleshores W és finitament generat i $\dim_{\mathbb{K}}(W) \leq n$. En particular, $W = V$ si, i només si, $\dim_{\mathbb{K}}(W) = n$.*

Demostració. Siga $\mathcal{B}$ una base de V . Aquesta base existeix pel Teorema 2.1. En particular $\mathcal{B}$ és finita i, llavors, tot conjunt de vectors linealment independent en V ha de tindre, com a molt, $|\mathcal{B}|$ vectors.

Si $W = \{0\}$, aleshores $\emptyset$ és sistema generador de W . Per tant, podem suposar que $W \neq \{0\}$. Siga $w_1 \in W - \{0\}$ un vector no nul en W . Aleshores, $\{w_1\}$ és linealment independent. Si aquest conjunt fóra maximal per la propietat de ser linealment independent en W , tindríem que $\{w_1\}$ seria base de W per la Proposició 2.9. En cas contrari, açò vol dir que podem trobar un conjunt de vectors $\{w_1, w_2\} \subseteq W$, estrictament major que l'anterior i amb la propietat de ser linealment independent. Raonariem ara sobre aquest conjunt. Aquest procediment no pot allargar-se indefinidament perquè el cardinal d'un conjunt de vectors linealment independent està fitat. En última instància trobaríem un conjunt de vectors linealment independent en W maximal per a aquesta propietat. Aquest conjunt seria una base de W per la Proposició 2.9. En particular, W és finitament generat.

Com W és finitament generat, pel Teorema 2.1, siga $\mathcal{B}_W$ una base de W . Aleshores $\mathcal{B}_W$ és un conjunt de vectors linealment independents en V . Pel Corol·lari 2.2, tenim que

$$\dim_{\mathbb{K}}(W) = |\mathcal{B}_W| \leq \dim_{\mathbb{K}}(V) = n.$$

Per a l'últim apartat, si $W = V$ es té trivialment que $\dim_{\mathbb{K}}(W) = n$. Per altra banda, si $\dim_{\mathbb{K}}(W) = n$, tota base $\mathcal{B}_W$ de W és un conjunt d' n vectors linealment independents en V . Com que $\dim_{\mathbb{K}}(V) = n$, per la Proposició 2.10, tota base $\mathcal{B}_W$ de W és base de V . En particular, $W = \langle \mathcal{B}_W \rangle = V$. $\square$

Proposició 2.12 (Fórmula de Grassmann per a les dimensions). *Siga V un $\mathbb{K}$ -espai vectorial finitament generat i siguen $U, W \leq V$ subespais vectorials en V . Aleshores*

$$\dim_{\mathbb{K}}(U + W) = \dim_{\mathbb{K}}(U) + \dim_{\mathbb{K}}(W) - \dim_{\mathbb{K}}(U \cap W).$$

Demostració. Suposem que $\dim_{\mathbb{K}}(U \cap W) = r$, $\dim_{\mathbb{K}}(U) = s$ i $\dim_{\mathbb{K}}(W) = t$. Per la Proposició 2.11, tenim que $r \leq s$ i que $r \leq t$.

Siga $\{v_1, \dots, v_r\}$ una base de $U \cap W$. Pel Teorema 2.2, d'Ampliació de la Base, podem obtindre una base $\{v_1, \dots, v_r, u_{r+1}, \dots, u_s\}$ d' U que conté l'anterior conjunt. D'igual forma també podem ampliar-lo fins obtindre una base $\{v_1, \dots, v_r, w_{r+1}, \dots, w_t\}$ de W .

Anem a provar que el conjunt següent $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_r, u_{r+1}, \dots, u_s, w_{r+1}, \dots, w_t\}$ és base de l'espai suma $U + W$. Notem que aquest conjunt té tamany $s + t - r$.

Cal vore que el conjunt és sistema generador i linealment independent. Siga v un vector de l'espai suma $U + W$. Aleshores existeixen vectors $u \in U$ i $w \in W$ de forma que

$$v = u + w.$$

Per una banda, com que $\{v_1, \dots, v_r, u_{r+1}, \dots, u_s\}$ és base d' U , podem trobar escalars $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ en $\mathbb{K}$ de forma que

$$u = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_r v_r + \lambda_{r+1} u_{r+1} + \dots + \lambda_s u_s.$$

Per l'altra banda, com que $\{v_1, \dots, v_r, w_{r+1}, \dots, w_t\}$ és base de W , podem trobar escalars $\mu_1, \dots, \mu_t$ en $\mathbb{K}$ de forma que

$$w = \mu_1 v_1 + \dots + \mu_r v_r + \mu_{r+1} w_{r+1} + \dots + \mu_t w_t.$$

Així es té que

$$v = u + w = (\lambda_1 + \mu_1)v_1 + \dots + (\lambda_r + \mu_r)v_r + \lambda_{r+1}u_{r+1} + \dots + \lambda_s u_s + \mu_{r+1}w_{r+1} + \dots + \mu_t w_t.$$

És a dir, tot vector de $U + W$ pot escriure's com a combinació lineal dels vectors en $\mathcal{B}$.

Siga ara una combinació lineal dels vectors en $\mathcal{B}$ igualada a 0

$$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_r v_r + \lambda_{r+1} u_{r+1} + \dots + \lambda_s u_s + \lambda_{s+1} w_{r+1} + \dots + \lambda_{s+t-r} w_t = 0 \quad (\triangle)$$

on, per a tot $j \in \{1, \dots, s + t - r\}$, λ_j és un escalar en $\mathbb{K}$. Volem provar que, per a tot $j \in \{1, \dots, s + t - r\}$, $\lambda_j = 0$. Notem que, en l'anterior expressió, en passar l'expressió que acompanya els vectors $w_{r+1}, \dots, w_t$ a la dreta, tenim que

$$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_r v_r + \lambda_{r+1} u_{r+1} + \dots + \lambda_s u_s = -\lambda_{s+1} w_{r+1} - \dots - \lambda_{s+t-r} w_t.$$

Notem que l'element $-\lambda_{s+1} w_{r+1} - \dots - \lambda_{s+t-r} w_t$ està en W , per escriure's com a combinació lineal d'elements en W . D'igual forma, per l'anterior igualtat, notem que aquest mateix element també està en U , per escriure's com a combinació lineal d'elements en U . Així,

$$-\lambda_{s+1} w_{r+1} - \dots - \lambda_{s+t-r} w_t \in U \cap W.$$

Com que $\{v_1, \dots, v_r\}$ és base d' $U \cap W$, podem trobar escalars $\mu_1, \dots, \mu_r$ en $\mathbb{K}$ de forma que

$$-\lambda_{s+1} w_{r+1} - \dots - \lambda_{s+t-r} w_t = \mu_1 v_1 + \dots + \mu_r v_r. \quad (\square)$$

Així, l'equació en $(\triangle)$ es pot escriure com a

$$(\lambda_1 - \mu_1)v_1 + \dots + (\lambda_r - \mu_r)v_r + \lambda_{r+1}u_{r+1} + \dots + \lambda_s u_s = 0$$

Aquesta és una combinació lineal de vectors en $\{v_1, \dots, v_r, u_{r+1}, \dots, u_s\}$ igualada a 0. Com aquest conjunt és base d' U , deduïm que $\lambda_1 = \mu_1, \dots, \lambda_r = \mu_r$ i que $\lambda_{r+1} = \dots = \lambda_s = 0$.

Així, l'equació en $(\square)$ es pot escriure com a

$$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_r v_r + \lambda_{s+1} w_{r+1} + \dots + \lambda_{s+t-r} w_t = 0.$$

Aquesta és una combinació lineal de vectors en $\{v_1, \dots, v_r, w_{r+1}, \dots, w_t\}$ igualada a 0. Com aquest conjunt és base de W , deduïm que $\lambda_1 = \dots = \lambda_r = 0$ i que $\lambda_{s+1} = \dots = \lambda_{s+t-r} = 0$.

Per tant $\mathcal{B}$ és linealment independent.

Així,

$$\dim_{\mathbb{K}}(U + W) = s + t - r = \dim_{\mathbb{K}}(U) + \dim_{\mathbb{K}}(W) - \dim_{\mathbb{K}}(U \cap W).$$

□

Corol·lari 2.3. *Siga V un $\mathbb{K}$ -espai vectorial finitament generat i siguin $U, W \leq V$ subespais vectorials en V . Les següents afirmacions són equivalents*

- i. *La suma $U + W$ és directa;*
- ii. $\dim_{\mathbb{K}}(U + W) = \dim_{\mathbb{K}}(U) + \dim_{\mathbb{K}}(W)$.

Demostració. Per a provar que (i) implica (ii), com que la suma $U + W$ és directa, aleshores $U \cap W = \{0\}$. Per tant, $\dim_{\mathbb{K}}(U \cap W) = 0$. La igualtat de (ii) ix directament de la Fórmula de Grassmann demostrada en la Proposició 2.12.

Per altra banda, de la igualtat en (ii) i la Fórmula de Grassmann demostrada en la Proposició 2.12, tenim que $\dim_{\mathbb{K}}(U \cap W) = 0$, és a dir, el conjunt $\emptyset$ és base de $U \cap W$. Així $U \cap W = \langle \emptyset \rangle = \{0\}$. Per tant, la suma $U + W$ és directa. □

Acabem aquesta secció presentant la noció de subespai complementari i demostrant que, en un espai vectorial finitament generat, tot subespai admet un complementari.

Definició 2.9 (Subespai complementari). Siga V un $\mathbb{K}$ -espai vectorial i siga $W \leq V$ un subespai vectorial. Diem que W té un **subespai complementari** si existeix un subespai vectorial $U \leq V$ de forma que $W \oplus U = V$.

Proposició 2.13. *Siga V un $\mathbb{K}$ -espai vectorial finitament generat, aleshores tot subespai de V admet un subespai complementari.*

Demostració. Siga $W \leq V$ un subespai vectorial de V . Com V és finitament generat, existeix un natural $n \in \mathbb{N}$ per al qual $\dim_{\mathbb{K}}(V) = n$. Notem que W , al seu torn, també és un $\mathbb{K}$ -espai vectorial finitament generat per la Proposició 2.11. Per tant, existeix $k \in \mathbb{N}$ per al qual $\dim_{\mathbb{K}}(W) = k$. Com $W \leq V$, es té $k \leq n$.

Siga $\{w_1, \dots, w_k\}$ una base de W . Pel Teorema 2.2, d'Ampliació de la Base, podem trobar vectors $u_{k+1}, \dots, u_n \in V$ per als quals $\{w_1, \dots, w_k, u_{k+1}, \dots, u_n\}$ és base de V .

Prenem $U = \langle u_{k+1}, \dots, u_n \rangle$.

Com $\{w_1, \dots, w_k, u_{k+1}, \dots, u_n\}$ és base tenim, en particular, que és sistema generador de V . Per altra banda, com que $\langle w_1, \dots, w_k \rangle = W$ i $\langle u_{k+1}, \dots, u_n \rangle = U$, tenim que $\langle w_1, \dots, w_k, u_{k+1}, \dots, u_n \rangle$ és sistema generador per a $W + U$. Així,

$$W + U = \langle w_1, \dots, w_k, u_{k+1}, \dots, u_n \rangle = V.$$

Només quedaria comprovar que la suma és directa. Siga $z \in W \cap U$. Així z pot escriure's com a combinació lineal d'elements en W i d'elements en U , és a dir

$$\begin{aligned} z &= \sum_{i=1}^k \lambda_i w_i \quad \text{on } \forall i \in \{1, \dots, k\} (\lambda_i \in \mathbb{K}); \\ z &= \sum_{j=k+1}^n \lambda_j u_j \quad \text{on } \forall j \in \{k+1, \dots, n\} (\lambda_j \in \mathbb{K}). \end{aligned}$$

Igualant les dues expressions i passant tots els termes a l'altra banda tenim que

$$\lambda_1 w_1 + \dots + \lambda_k w_k - \lambda_{k+1} u_{k+1} - \dots - \lambda_n u_n = 0.$$

Com $\{w_1, \dots, w_k, u_{k+1}, \dots, u_n\}$ és base de V tenim que aquest conjunt és linealment independent. Així, en l'anterior expressió trobem que tots els escalars han de ser zero. Així, $z = 0$.

Per tant, $W \oplus U = V$. És a dir, tot subespai admet un complementari. $\square$

i Nota

Nota. L'existència d'un complementari no garantitza la seua unicitat. Considerem l' $\mathbb{R}$ -espai vectorial $\mathbb{R}^2$. Per a $W = \langle (1, 0) \rangle$, tant $U = \langle (0, 1) \rangle$ com $U' = \langle (1, 1) \rangle$ són subespais complementaris per a W , però $U \neq U'$.

2.4 Coordenades

En aquesta secció introduïm la noció de coordenades d'un vector respecte a una base. Les nocions bàsiques sobre matrius que emprarem (transposada, identitat, producte i matriu invertible) es troben recollides als [preliminars](#).

Donada una base d'un espai vectorial i donat un vector en l'espai, podem escriure'l com a combinació lineal dels vectors de la base. El que provarem a continuació és que aquesta expressió és única.

Proposició 2.14. *Siga V un $\mathbb{K}$ -espai vectorial finitament generat i siga v un vector en V . Aleshores, donada una base $\mathcal{B}$ de V , el vector v s'escriu de forma única com a combinació lineal dels vectors en $\mathcal{B}$.*

Demostració. Siga $\dim_{\mathbb{K}}(V) = n$ i siga $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ una base de V . Suposarem que tenim dues formes d'escriure el vector v com a combinació lineal dels vectors $e_1, \dots, e_n$ en $\mathcal{B}$ i provarem que aquestes expressions són iguals. Siguen $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ i $\mu_1, \dots, \mu_n$, dues famílies d'escalars en $\mathbb{K}$ per a les quals

$$v = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n; \quad v = \mu_1 e_1 + \dots + \mu_n e_n.$$

Igualant ambdues expressions i movent els termes a l'esquerra trobem la següent equació

$$(\lambda_1 - \mu_1)e_1 + \dots + (\lambda_n - \mu_n)e_n = 0.$$

Com els vectors $e_1, \dots, e_n$ són linealment independents, deduïm que, per a tot $i \in \{1, \dots, n\}$, es té que $\lambda_i - \mu_i = 0$. D'on, per a tot $i \in \{1, \dots, n\}$, tenim que $\lambda_i = \mu_i$. $\square$

Definició 2.10 (Matriu de coordenades). Siga V un $\mathbb{K}$ -espai vectorial amb $\dim_{\mathbb{K}}(V) = n$ i siga $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ una base de V . Siga v un vector qualsevol de V . La **matriu de coordenades de v en la base $\mathcal{B}$** és la matriu en $M_{n1}(\mathbb{K})$, denotada per $[v]_{\mathcal{B}}$, que conté els únics escalars $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ que satisfan

$$v = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n.$$

Així,

$$[v]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix}.$$

En certs casos, quan el vector i la base on treballem estiguen clares, utilitzarem lletres majúscules com per exemple X per a denotar la matriu de coordenades. En tot cas sempre s'especificarà què denota cada símbol.

Si X és la matriu de coordenades del vector v en la base $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$, aleshores

$$v = X^t(e_i).$$

Aquesta equació s'anomenarà **expressió coordenada de v en $\mathcal{B}$** . Per la Proposició 2.14 l'expressió coordenada de v en $\mathcal{B}$ és única.

Les coordenades d'un vector depenen de la base en la qual treballem. Un mateix vector pot tindre coordenades diferents en bases diferents. En tot cas, sempre podrem trobar una forma de passar d'unes coordenades a altres com il·lustra el següent exemple.

Exemple 2.12. Es considera l' $\mathbb{R}$ -espai vectorial $\mathbb{R}^2$ i el vector $v = (1, 4) \in \mathbb{R}^2$. Per a les bases

$$\mathcal{B} = \{(1, 7), (0, 1)\}; \quad \overline{\mathcal{B}} = \{(2, 2), (1, -2)\},$$

les coordenades de v en, respectivament, $\mathcal{B}$ i $\bar{\mathcal{B}}$, són

$$X = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}; \quad \bar{X} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Notem per altra banda que els vectors de cadascuna de les bases es poden escriure en les altres bases com segueix

$$\begin{aligned} (1, 7) &= \frac{3}{2}(2, 2) - 2(1, -2) & (2, 2) &= 2(1, 7) - 12(0, 1) \\ (0, 1) &= \frac{1}{6}(2, 2) - \frac{1}{3}(1, -2) & (1, -2) &= 1(1, 7) - 9(0, 1) \end{aligned}$$

Per a les matrius

$$P = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{6} \\ -2 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}; \quad Q = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -12 & -9 \end{bmatrix};$$

es té que

$$PX = \bar{X}; \quad Q\bar{X} = X.$$

Aquestes relacions són vàlides per a qualsevol vector de coordenades en les bases $\mathcal{B}$ i $\bar{\mathcal{B}}$. És a dir, tenim un procediment per a passar d'unes coordenades a altres.

Definició 2.11 (Matriu canvi de base). Siga V un $\mathbb{K}$ -espai vectorial amb $\dim_{\mathbb{K}}(V) = n$ i siguin $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ i $\bar{\mathcal{B}} = \{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n\}$ dues bases de V . Definim la **matriu canvi de base de $\mathcal{B}$ a $\bar{\mathcal{B}}$** a la matriu en $M_n(\mathbb{K})$ que té, per a cada $i \in \{1, \dots, n\}$, com a columna i les coordenades del vector e_i en la base $\bar{\mathcal{B}}$.

Proposició 2.15. Siga V un $\mathbb{K}$ -espai vectorial amb $\dim_{\mathbb{K}}(V) = n$ i siguin $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ i $\bar{\mathcal{B}} = \{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n\}$ dues bases de V . Siga $P = (\alpha_{ij})$ en $M_n(\mathbb{K})$ la matriu canvi de base de $\mathcal{B}$ a $\bar{\mathcal{B}}$. Aleshores, P és l'única matriu que satisfà que, per a tot vector $v \in V$, si X i $\bar{X}$ són les coordenades del vector v en, respectivament, $\mathcal{B}$ i $\bar{\mathcal{B}}$, aleshores

$$PX = \bar{X}.$$

Demostració. Siga v un vector en V i siguin X i $\bar{X}$ les coordenades de v en, respectivament, $\mathcal{B}$ i $\bar{\mathcal{B}}$. Aleshores

$$v = X^t(e_i); \quad v = \bar{X}^t(\bar{e}_i).$$

Siga $P = (\alpha_{ij})$ la matriu canvi de base de $\mathcal{B}$ a $\bar{\mathcal{B}}$. Aleshores, les columnes de P tenen les coordenades dels vectors de $\mathcal{B}$ en la base $\bar{\mathcal{B}}$. Així, s'han de satisfer les n equacions de la dreta

$$P = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \cdots & \alpha_{nn} \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} e_1 &= \alpha_{11}\bar{e}_1 + \cdots + \alpha_{n1}\bar{e}_n \\ \vdots & \quad \quad \quad \vdots \\ e_n &= \alpha_{1n}\bar{e}_1 + \cdots + \alpha_{nn}\bar{e}_n \end{aligned}$$

Aquestes n equacions queden descrites en l'expressió matricial $(e_i) = P^t(\bar{e}_i)$.

Així, substituint en l'expressió coordinada de v en la base $\mathcal{B}$ tenim que

$$v = X^t(e_i) = X^t P^t(\bar{e}_i) = (PX)^t(\bar{e}_i).$$

Per la Proposició 2.14, les coordenades d'un vector en una base són úniques, així

$$PX = \bar{X}.$$

Siga ara P' una matriu en $M_n(\mathbb{K})$ amb la propietat que, per a tot vector $v \in V$, si X i $\bar{X}$ són les coordenades de v en, respectivament, $\mathcal{B}$ i $\bar{\mathcal{B}}$, aleshores es té que

$$P'X = \bar{X}.$$

Anem a provar que $P' = P$. Considerem, per a cada $i \in \{1, \dots, n\}$, el vector e_i de la base $\mathcal{B}$. Siguen X_i i $\bar{X}_i$ les coordenades d' e_i en, respectivament, $\mathcal{B}$ i $\bar{\mathcal{B}}$. Així, per a cada $i \in \{1, \dots, n\}$, es té que

$$P'X_i = \bar{X}_i.$$

Notem que, per a cada $i \in \{1, \dots, n\}$, la matriu de coordenades del vector e_i en la base $\mathcal{B}$, és a dir X_i , ve donada per una matriu tota 0 a excepció de la posició i , on conté un 1. Així, per a cada $i \in \{1, \dots, n\}$, la multiplicació $P'X_i$ retornarà la columna i de la matriu P' . Per altra banda, la matriu de coordenades del vector e_i en la base $\bar{\mathcal{B}}$, és a dir $\bar{X}_i$, és, per definició, la columna i de la matriu P . Així, en l'expressió anterior, per a cada $i \in \{1, \dots, n\}$, es té que la columna i de P' ha de ser igual a la columna i de la matriu P .

Per tant $P' = P$. □

Proposició 2.16. *Siga V un $\mathbb{K}$ -espai vectorial finitament generat i siguen $\mathcal{B}$, $\bar{\mathcal{B}}$ i $\bar{\bar{\mathcal{B}}}$ tres bases de V . Siguen P i Q en $M_n(\mathbb{K})$ les matrius de canvi de base de $\mathcal{B}$ a $\bar{\mathcal{B}}$ i de canvi de base de $\bar{\mathcal{B}}$ a $\bar{\bar{\mathcal{B}}}$, respectivament. Aleshores, QP és la matriu canvi de base de $\mathcal{B}$ a $\bar{\bar{\mathcal{B}}}$.*

Demostració. Siga v un vector de V i siguen X , $\bar{X}$ i $\bar{\bar{X}}$ les coordenades de v en, respectivament, $\mathcal{B}$, $\bar{\mathcal{B}}$, $\bar{\bar{\mathcal{B}}}$. Aleshores se satisfan les següents equacions

$$(QP)X = Q(PX) = Q\bar{X} = \bar{\bar{X}}.$$

Per la Proposició 2.15, la matriu QP és la matriu canvi de base de $\mathcal{B}$ a $\bar{\bar{\mathcal{B}}}$. □

Proposició 2.17. *Siga V un $\mathbb{K}$ -espai vectorial finitament generat i siguen $\mathcal{B}$ i $\bar{\mathcal{B}}$ dues bases de V . Siga P la matriu canvi de base de $\mathcal{B}$ a $\bar{\mathcal{B}}$, aleshores P és una matriu invertible.*

Demostració. Notem que la matriu identitat I és la matriu canvi de base de $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}$. Per altra banda, si considerem Q , la matriu canvi de base de $\bar{\mathcal{B}}$ a $\mathcal{B}$, tenim per la Proposició 2.16 que QP és la matriu canvi de base de $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}$. Així, per la unicitat de la matriu canvi de base, demostrada a la Proposició 2.15, es dedueix que $QP = I$, és a dir, P és invertible. □

i Nota

Nota. Siga n un natural en $\mathbb{N}$. Considerem el $\mathbb{K}$ -espai vectorial $\mathbb{K}^n$. Siga $\mathcal{B}$ una base de $\mathbb{K}^n$ i siga $\mathcal{B}_c$ la base canònica de $\mathbb{K}^n$, aleshores la matriu canvi de base de $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}_c$ és la matriu que conté les components dels vectors de $\mathcal{B}$ escrites en columna.

Aquest fet pot facilitar el càlcul de la matriu canvi de base entre dues bases $\mathcal{B}$ i $\overline{\mathcal{B}}$. Si P és la matriu canvi de base de $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}_c$ i Q és la matriu canvi de base de $\overline{\mathcal{B}}$ a $\mathcal{B}_c$, aleshores la matriu canvi de base de $\mathcal{B}$ a $\overline{\mathcal{B}}$ és $Q^{-1}P$.

Proposició 2.18. Siga n un natural en $\mathbb{N}$. Siga P una matriu quadrada en $M_n(\mathbb{K})$, aleshores les següents afirmacions són equivalents

- i. P és una matriu invertible en $GL_n(\mathbb{K})$;
- ii. Els vectors columna de P , transposats, formen una base de $\mathbb{K}^n$;
- iii. Existeixen bases $\mathcal{B}$ i $\overline{\mathcal{B}}$ de $\mathbb{K}^n$ per a les quals P és la matriu canvi de base de $\mathcal{B}$ a $\overline{\mathcal{B}}$.

Demostració. Provem les diferents implicacions.

Suposem que P té a la matriu Q com a matriu inversa, on

$$P = \begin{bmatrix} \pi_{11} & \cdots & \pi_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \pi_{n1} & \cdots & \pi_{nn} \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} \kappa_{11} & \cdots & \kappa_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \kappa_{n1} & \cdots & \kappa_{nn} \end{bmatrix}.$$

Aleshores de l'equació $PQ = I_n$, obtenim, considerant per a cada $i \in \{1, \dots, n\}$ la columna i -èssima de Q , l'equació següent

$$\begin{bmatrix} \pi_{11} & \cdots & \pi_{1i} & \cdots & \pi_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \pi_{i1} & \cdots & \pi_{ii} & \cdots & \pi_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \pi_{n1} & \cdots & \pi_{ni} & \cdots & \pi_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \kappa_{1i} \\ \vdots \\ \kappa_{ii} \\ \vdots \\ \kappa_{ni} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

És a dir, la columna i -èssima de la matriu identitat de tamany n es recupera com el producte

de P per la columna i -èssima de Q . Desenvolupant, obtenim la següent expressió

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \pi_{11} & \cdots & \pi_{1i} & \cdots & \pi_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \pi_{i1} & \cdots & \pi_{ii} & \cdots & \pi_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \pi_{n1} & \cdots & \pi_{ni} & \cdots & \pi_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \kappa_{1i} \\ \vdots \\ \kappa_{ii} \\ \vdots \\ \kappa_{ni} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \kappa_{1i}\pi_{11} + \cdots + \kappa_{ii}\pi_{1i} + \cdots + \kappa_{ni}\pi_{1n} \\ \vdots \\ \kappa_{1i}\pi_{i1} + \cdots + \kappa_{ii}\pi_{ii} + \cdots + \kappa_{ni}\pi_{in} \\ \vdots \\ \kappa_{1i}\pi_{n1} + \cdots + \kappa_{ii}\pi_{ni} + \cdots + \kappa_{ni}\pi_{nn} \end{bmatrix} \\
&= \kappa_{1i} \begin{bmatrix} \pi_{11} \\ \vdots \\ \pi_{i1} \\ \vdots \\ \pi_{n1} \end{bmatrix} + \cdots + \kappa_{ii} \begin{bmatrix} \pi_{1i} \\ \vdots \\ \pi_{ii} \\ \vdots \\ \pi_{ni} \end{bmatrix} + \cdots + \kappa_{ni} \begin{bmatrix} \pi_{1n} \\ \vdots \\ \pi_{in} \\ \vdots \\ \pi_{nn} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Aleshores, transposant l'anterior expressió arribem a que, per a cada $i \in \{1, \dots, n\}$, s'obté que

$$\begin{aligned}
(0, \dots, 1, \dots, 0) &= \kappa_{1i}(\pi_{11}, \dots, \pi_{i1}, \dots, \pi_{n1}) \\
&\quad + \cdots + \kappa_{ii}(\pi_{1i}, \dots, \pi_{ii}, \dots, \pi_{ni}) \\
&\quad + \cdots + \kappa_{ni}(\pi_{1n}, \dots, \pi_{in}, \dots, \pi_{nn})
\end{aligned}$$

És a dir, la columna i -èssima de la matriu Q són les coordenades del vector i -èssim de la base canònica, és a dir, $(0, \dots, 1, \dots, 0)$, respecte els vectors columna de la matriu P transposats.

És a dir, podem garantir que tots els vectors de la base canònica de $\mathbb{K}^n$ es recuperen com a combinació lineal dels vectors columna de P transposats. És a dir, aquests vectors columna, transposats, són sistema generador de $\mathbb{K}^n$. Com la dimensió de $\mathbb{K}^n$ com a $\mathbb{K}$ -espai vectorial és n , per la Proposició 2.10, s'obté que aquests n vectors formen base de $\mathbb{K}^n$.

Suposem ara (ii), és a dir, que els vectors columna de P , transposats, formen base, diem-li $\mathcal{B}$, de $\mathbb{K}^n$. Per altra banda, considerem $\mathcal{B}_c$, la base canònica de $\mathbb{K}^n$. Aleshores la matriu canvi de base de $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}_c$ és precisament P .

Finalment, (iii) implica (i) apareix demostrat a la Proposició 2.17. □

3 Aplicacions lineals

En aquest capítol introduïm la noció d'aplicació lineal i estudiem les seues propietats bàsiques. Vorem que una aplicació lineal és la forma que tenim de transformar i comparar espais vectorials sobre el mateix cos. Comencem amb la definició d'aplicació lineal.

Definició 3.1 (Aplicació lineal). Siguen V_1 i V_2 dos $\mathbb{K}$ -espais vectorials. Direm que una aplicació $f: V_1 \rightarrow V_2$ és **lineal** si satisfà les següents propietats, per a tot $v, w \in V_1$ i tot $\lambda \in \mathbb{K}$,

- i. $f(v + w) = f(v) + f(w)$;
- ii. $f(\lambda v) = \lambda f(v)$.

Les aplicacions lineals també reben el nom d'**homomorfismes**. Denotem per $\text{Hom}_{\mathbb{K}}(V_1, V_2)$ al conjunt de totes les aplicacions lineals de V_1 a V_2 , és a dir

$$\text{Hom}_{\mathbb{K}}(V_1, V_2) = \{f: V_1 \rightarrow V_2 \mid f \text{ és aplicació lineal}\}.$$

Direm que una aplicació lineal $f: V_1 \rightarrow V_2$ és un

- **monomorfisme** si f és injectiva;
- **epimorfisme** si f és sobrejectiva;
- **isomorfisme** si f és bijectiva;
- **endomorfisme** si $V_1 = V_2$;
- **automorfisme** si f és un endomorfisme bijectiu.

Exemple 3.1. Considerem els $\mathbb{R}$ -espais vectorials $\mathbb{R}^2$ i $\mathbb{R}^4$ i l'aplicació

$$\begin{aligned} f: \quad \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^4 \\ (x, y) &\longmapsto (2x, -y, 0, x + y) \end{aligned}$$

aleshores f és una aplicació lineal. Per a comprovar el primer ítem de la Definició 3.1, considerem dos vectors $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$, aleshores

$$\begin{aligned} f((x_1, y_1) + (x_2, y_2)) &= f(x_1 + x_2, y_1 + y_2) \\ &= (2(x_1 + x_2), -(y_1 + y_2), 0, x_1 + x_2 + y_1 + y_2) \\ &= (2x_1, -y_1, 0, x_1 + y_1) + (2x_2, -y_2, 0, x_2 + y_2) \\ &= f(x_1, y_1) + f(x_2, y_2). \end{aligned}$$

Per a comprovar el segon ítem de la Definició 3.1, considerem un vector $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ i un escalar $\lambda \in \mathbb{R}$, aleshores

$$\begin{aligned} f(\lambda(x, y)) &= f(\lambda x, \lambda y) \\ &= (2(\lambda x), -(\lambda y), 0, \lambda x + \lambda y) \\ &= \lambda(2x, -y, 0, x + y) \\ &= \lambda f(x, y). \end{aligned}$$

Aleshores f és una aplicació lineal.

La següent proposició ens permet combinar les anteriors comprovacions en una sola.

Proposició 3.1. *Siguen V_1 i V_2 dos $\mathbb{K}$ -espais vectorials i siga $f: V_1 \longrightarrow V_2$ una aplicació. Aleshores f és una aplicació lineal si, i només si, per a tot $v, w \in V_1$ i tot $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, es té que*

$$f(\lambda v + \mu w) = \lambda f(v) + \mu f(w).$$

Exemple 3.2. Siguen V_1 i V_2 dos $\mathbb{K}$ -espais vectorials, aleshores l'**aplicació nul** $\cdot$ la

$$\begin{array}{ccc} 0: & V_1 & \longrightarrow & V_2 \\ & v_1 & \longmapsto & 0 \end{array}$$

és una aplicació lineal.

Exemple 3.3. Siga V un $\mathbb{K}$ -espai vectorial i $W \leq V$, aleshores l'**aplicació inclusió**, a esquerra, és una aplicació lineal. En particular, quan $W = V$, l'**aplicació identitat**, a dreta, és una aplicació lineal.

$$\begin{array}{ccc} \text{in}_W: & W & \longrightarrow & V \\ & w & \longmapsto & w \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \text{id}_V: & V & \longrightarrow & V \\ & v & \longmapsto & v \end{array}$$

A continuació provarem que la composició d'aplicacions lineals torna a ser una aplicació lineal.

Proposició 3.2. *Siguen V_1, V_2 i V_3 tres $\mathbb{K}$ -espais vectorials. Siguen $f: V_1 \longrightarrow V_2$ i $g: V_2 \longrightarrow V_3$ dues aplicacions lineals. Aleshores la composició $g \circ f: V_1 \longrightarrow V_3$ és una aplicació lineal.*

Demostració. Siguen v, w vectors en V_1 i λ, μ escalars en $\mathbb{K}$. Aleshores

$$g(f(\lambda v + \mu w)) = g(\lambda f(v) + \mu f(w)) = \lambda g(f(v)) + \mu g(f(w)).$$

Així doncs, $g \circ f$ és una aplicació lineal. □

i Nota

Nota. La composició d'aplicacions lineals és associativa. A més, si $f: V_1 \rightarrow V_2$ és una aplicació lineal, tenim que

$$\text{id}_{V_2} \circ f = f = f \circ \text{id}_{V_1}.$$

Presentem diferents propietats bàsiques de la definició d'aplicació lineal.

Proposició 3.3. *Siguen V_1 i V_2 dos $\mathbb{K}$ -espais vectorials i siga $f: V_1 \rightarrow V_2$ una aplicació lineal, aleshores*

- i. $f(0) = 0$;
- ii. $f(-v) = -f(v)$, per a tot $v \in V_1$;
- iii. Si $W_1 \leq V_1$, aleshores $f[W_1] \leq V_2$;
- iv. Si $W_2 \leq V_2$, aleshores $f^{-1}[W_2] \leq V_1$.

Demostració. Per a (i) siga $v \in V_1$, aleshores

$$f(v) = f(0 + v) = f(0) + f(v).$$

D'on es dedueix que $f(0) = 0$.

Per a (ii) siga $v \in V_1$, aleshores

$$f(v) + f(-v) = f(v - v) = f(0) = 0.$$

D'on es dedueix que $f(-v) = -f(v)$.

Per a (iii) siga W_1 un subespai vectorial de V_1 . Per a comprovar que $f[W_1]$ és subespai vectorial de V_2 , siguen v_2, w_2 vectors en $f[W_1]$ i siguen λ, μ escalars en $\mathbb{K}$. Volem comprovar que $\lambda v_2 - \mu w_2$ torna a ser un vector en $f[W_1]$. Com v_2, w_2 són vectors en $f[W_1]$, aleshores existeixen vectors v_1, w_1 en W_1 , de forma que $v_2 = f(v_1)$ i $w_2 = f(w_1)$, aleshores

$$\lambda v_2 - \mu w_2 = \lambda f(v_1) - \mu f(w_1) = f(\lambda v_1 - \mu w_1).$$

Com que $W_1 \leq V_1$, tenim que $\lambda v_1 - \mu w_1$ és un vector en W_1 , d'on $\lambda v_2 - \mu w_2 \in f[W_1]$.

Per a (iv) siga W_2 un subespai vectorial de V_2 . Per a comprovar que $f^{-1}[W_2]$ és subespai vectorial de V_1 , siguen v_1, w_1 vectors en $f^{-1}[W_2]$ i siguen λ, μ escalars en $\mathbb{K}$. Volem comprovar que $\lambda v_1 - \mu w_1$ torna a ser un vector en $f^{-1}[W_2]$. Com v_1, w_1 són vectors en $f^{-1}[W_2]$, aleshores $f(v_1)$ i $f(w_1)$ són vectors en W_2 . Notem que

$$f(\lambda v_1 - \mu w_1) = \lambda f(v_1) - \mu f(w_1).$$

Com que $W_2 \leq V_2$, tenim que $f(\lambda v_1 - \mu w_1)$ és un vector en W_2 , d'on $\lambda v_1 - \mu w_1 \in f^{-1}[W_2]$. $\square$

3.1 Imatge i nucli

Associada a una aplicació lineal tenim dos subespais associats, el nucli, subespai vectorial en el domini de l'aplicació lineal, i la imatge, subespai vectorial en el codomini de l'aplicació lineal. L'estudi d'aquests subespais permet obtenir informació sobre l'aplicació lineal associada.

Definició 3.2 (Nucli | Imatge). Siguen V_1 i V_2 dos $\mathbb{K}$ -espais vectorials i siga $f: V_1 \longrightarrow V_2$ una aplicació lineal. Definim el **conjunt imatge d' f** , denotat $\text{Im}(f)$, com el conjunt

$$\text{Im}(f) = \{f(v_1) \in V_2 \mid v_1 \in V_1\}.$$

Definim el **nucli d' f** , denotat $\text{Ker}(f)$, com el conjunt

$$\text{Ker}(f) = \{v_1 \in V_1 \mid f(v_1) = 0\}.$$

Corol·lari 3.1. Siguen V_1 i V_2 dos $\mathbb{K}$ -espais vectorials i siga $f: V_1 \longrightarrow V_2$ una aplicació lineal. Aleshores $\text{Im}(f)$ és un subespai vectorial de V_2 i $\text{Ker}(f)$ és un subespai vectorial de V_1 .

Demostració. Només cal adonar-se que

$$\text{Im}(f) = f[V_1]; \quad \text{Ker}(f) = f^{-1}[\{0\}].$$

El resultat és conseqüència directa de la Proposició 3.3. □

Proposició 3.4. Siguen V_1 i V_2 dos $\mathbb{K}$ -espais vectorials i siga $f: V_1 \longrightarrow V_2$ una aplicació lineal. Les següents afirmacions són equivalents.

- i. f és sobrejectiva;
- ii. $\text{Im}(f) = V_2$.

Demostració. Per definició. □

Proposició 3.5. Siguen V_1 i V_2 dos $\mathbb{K}$ -espais vectorials i siga $f: V_1 \longrightarrow V_2$ una aplicació lineal. Siga $S \subseteq V_1$ un subconjunt de vectors en V_1 . Aleshores

$$f[\langle S \rangle] = \langle f[S] \rangle.$$

Demostració. Notem que $\langle S \rangle$ és un subespai vectorial de V_1 . Així, per la Proposició 3.3, tenim que $f[\langle S \rangle]$ és un subespai vectorial de V_2 . A més, per tot $v \in S$, el vector $f(v)$ pertany a $f[S]$. D'aquests dos fets es dedueix que $\langle f[S] \rangle \subseteq f[\langle S \rangle]$.

Per a l'altra inclusió, notem que un vector arbitrari de $f[\langle S \rangle]$ ha de tindre la forma

$$f(\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n),$$

on $n \in \mathbb{N}$ i, per tot $i \in \{1, \dots, n\}$, λ_i és un escalar en $\mathbb{K}$ i v_i un vector en S . És a dir, un vector arbitrari de $f[\langle S \rangle]$ té la forma de la imatge per f d'un vector arbitrari de $\langle S \rangle$. O siga, la imatge per f d'una combinació lineal de vectors en S . Notem que, per la linealitat d' f , aquest vector satisfà la següent equació

$$f(\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n) = \lambda_1 f(v_1) + \dots + \lambda_n f(v_n).$$

És a dir, un vector arbitrari de $f[\langle S \rangle]$ és combinació lineal dels vectors $f(v_1), \dots, f(v_n)$ i aquests vectors pertanyen a $f[S]$. Així doncs, $f[\langle S \rangle] \subseteq \langle f[S] \rangle$. $\square$

Proposició 3.6. *Siguen V_1 i V_2 dos $\mathbb{K}$ -espais vectorials i siga $f: V_1 \longrightarrow V_2$ una aplicació lineal. Les següents afirmacions són equivalents.*

- i. f és injectiva;
- ii. $\text{Ker}(f) = \{0\}$.

Demostració. Demostrarem que (i) implica (ii). Suposem que f és injectiva. Siga $v \in \text{Ker}(f)$, aleshores

$$f(v) = 0 = f(0).$$

Per tant $v = 0$. Així $\text{Ker}(f) = \{0\}$.

Demostrarem ara que (ii) implica (i). Suposem que $\text{Ker}(f) = \{0\}$. Siguen $v, w \in V_1$ tals que $f(v) = f(w)$, aleshores $v - w \in \text{Ker}(f)$ ja que

$$f(v - w) = f(v) - f(w) = 0.$$

Per tant $v - w = 0$. Així $v = w$, és a dir f és injectiva. $\square$

Proposició 3.7. *Siguen V_1 i V_2 dos $\mathbb{K}$ -espais vectorials, $f: V_1 \longrightarrow V_2$ una aplicació lineal i $\mathcal{B}_1$ una base de V_1 . Aleshores*

- i. f és injectiva si, i només si, $f[\mathcal{B}_1]$ és un conjunt de vectors linealment independents en V_2 ;
- ii. f és sobrejectiva si, i només si, $f[\mathcal{B}_1]$ és sistema generador de V_2 ;
- iii. f és bijectiva si, i només si, $f[\mathcal{B}_1]$ és base de V_2 .

Demostració. Per a (i). Suposem que f és injectiva. Anem a provar que $f[\mathcal{B}_1]$ és linealment independent. Considerem una combinació lineal dels vectors en $f[\mathcal{B}_1]$ igualada a zero, és a dir

$$\lambda_1 f(e_1) + \dots + \lambda_n f(e_n) = 0$$

on, $n \in \mathbb{N}$, i per a cada $i \in \{1, \dots, n\}$, λ_i és un escalar en $\mathbb{K}$ i e_i un vector en $\mathcal{B}_1$. Notem que, per la linealitat d' f , s'obté que

$$f(\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n) = \lambda_1 f(e_1) + \dots + \lambda_n f(e_n) = 0 = f(0).$$

Com f és injectiva per hipòtesi, obtenim que

$$\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n = 0.$$

Així, tenim una combinació lineal dels vectors en $\mathcal{B}_1$ igualada a zero. Com $\mathcal{B}_1$ és base, obtenim que, per a tot $i \in \{1, \dots, n\}$, l'escalar λ_i ha de ser igual a zero. Per tant, $f[\mathcal{B}_1]$ és linealment independent.

Suposem ara que $f[\mathcal{B}_1]$ és linealment independent. Anem a provar que f és injectiva. Siga v un vector en $\text{Ker}(f)$. Aleshores, $f(v) = 0$. Per altra banda, com $\mathcal{B}_1$ és base, podem escriure v com a combinació lineal dels vectors en $\mathcal{B}_1$. Així

$$v = \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n$$

on, $n \in \mathbb{N}$, i per a cada $i \in \{1, \dots, n\}$, λ_i és un escalar en $\mathbb{K}$ i e_i un vector en $\mathcal{B}_1$. Notem que, per la linealitat d' f , s'obté que

$$f(\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n) = \lambda_1 f(e_1) + \cdots + \lambda_n f(e_n) = 0.$$

Com el conjunt de vectors $f[\mathcal{B}_1]$ és linealment independent, es té que, per a tot $i \in \{1, \dots, n\}$, l'escalar λ_i ha de ser igual a zero. Així, $v = 0$. Per tant $\text{Ker}(f) = \{0\}$. Per la Proposició 3.6, l'aplicació f és injectiva.

Per a (ii). Suposem que f és sobrejectiva. Anem a provar que $f[\mathcal{B}_1]$ és sistema generador. Emprant la Proposició 3.5 i tenint en compte que $\mathcal{B}_1$ és sistema generador per a V_1 i que f és sobrejectiva, obtenim que

$$\langle f[\mathcal{B}_1] \rangle = f[\langle \mathcal{B}_1 \rangle] = f[V_1] = V_2.$$

És a dir, tot vector de V_2 pot escriure's com a combinació lineal dels vectors en $f[\mathcal{B}_1]$. Per tant, $f[\mathcal{B}_1]$ és sistema generador.

Suposem ara que $f[\mathcal{B}_1]$ és sistema generador de V_2 . Anem a provar que f és sobrejectiva. Emprant la Proposició 3.5 i tenint en compte que $\mathcal{B}_1$ és sistema generador per a V_1 i que $f[\mathcal{B}_1]$ és sistema generador per a V_2 , obtenim que

$$f[V_1] = f[\langle \mathcal{B}_1 \rangle] = \langle f[\mathcal{B}_1] \rangle = V_2.$$

És a dir f és sobrejectiva.

Finalment, (iii) és conseqüència directa dels ítems (i) i (ii). □

3.2 Teorema d'extensió

En aquesta secció estudiarem una forma interessant de donar una aplicació lineal. El següent teorema explica que, per a donar una aplicació lineal, és suficient conèixer les imatges dels vectors d'una base del seu domini de definició.

Proposició 3.8. *Siguen $f: V_1 \rightarrow V_2$ i $g: V_1 \rightarrow V_2$ dues aplicacions lineals amb el mateix domini i codomini. Si S és un subconjunt de V_1 i $f|_S = g|_S$, aleshores*

$$f|_{\langle S \rangle} = g|_{\langle S \rangle}.$$

En particular, si S és sistema generador de V_1 , aleshores $f = g$.

Demostració. Siga $v \in \langle S \rangle$, aleshores existeixen vectors $e_1, \dots, e_k$ en S i escalars $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ en $\mathbb{K}$ per als quals

$$v = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_k e_k.$$

Aleshores, es dona la següent cadena d'igualtats

$$\begin{aligned} f(v) &= f(\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_k e_k) && \text{(definició de } v) \\ &= \lambda_1 f(e_1) + \dots + \lambda_k f(e_k) && (f \text{ és lineal}) \\ &= \lambda_1 g(e_1) + \dots + \lambda_k g(e_k) && (f|_S = g|_S) \\ &= g(\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_k e_k) && (g \text{ és lineal}) \\ &= g(v). && \text{(definició de } v) \end{aligned}$$

Per tant, concloem que $f|_{\langle S \rangle} = g|_{\langle S \rangle}$. □

Teorema 3.1 (Teorema d'extensió). *Siguen V_1 i V_2 dos $\mathbb{K}$ -espais vectorials. Siga $\mathcal{B}_1 = \{e_1, \dots, e_n\}$ una base de V_1 i $f: \mathcal{B}_1 \rightarrow V_2$ una aplicació. Aleshores existeix una única aplicació lineal $f^\sharp: V_1 \rightarrow V_2$ que satisfà $f^\sharp \circ \text{in}_{\mathcal{B}_1} = f$, és a dir, el següent diagrama commuta*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{B}_1 & \xrightarrow{\text{in}_{\mathcal{B}_1}} & V_1 \\ & \searrow f & \downarrow f^\sharp \\ & & V_2 \end{array}$$

Demostració. Siga v un vector de V_1 aleshores, com $\mathcal{B}_1$ és base de V_1 , tenim que v pot escriure's com a combinació lineal dels vectors en $\mathcal{B}_1$, a esquerra, on, per a tot $i \in \{1, \dots, n\}$, λ_i és un escalar en $\mathbb{K}$. Així, definim la imatge de v per $f^\sharp$ com al vector següent, a dreta.

$$v = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i; \qquad f^\sharp(v) = \sum_{i=1}^n \lambda_i f(e_i).$$

Anem a demostrar que $f^\#$ és una aplicació lineal. Siguen vectors $v, w \in V_1$ i escalars $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. Escrivim els vectors v i w com a combinació lineal dels vectors en $\mathcal{B}_1$, a esquerra i dreta respectivament, on, per a tot $i \in \{1, \dots, n\}$, λ_i i μ_i són escalars en $\mathbb{K}$.

$$v = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i; \quad w = \sum_{i=1}^n \mu_i e_i.$$

Aleshores el vector $\lambda v + \mu w$ s'escriu com a combinació lineal dels vectors en $\mathcal{B}_1$ com segueix

$$\lambda v + \mu w = \lambda \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i \right) + \mu \left(\sum_{i=1}^n \mu_i e_i \right) = \sum_{i=1}^n (\lambda \lambda_i + \mu \mu_i) e_i$$

Per tant, la imatge de $\lambda v + \mu w$ per $f^\#$ ve donada pel vector

$$\begin{aligned} f^\#(\lambda v + \mu w) &= f^\# \left(\sum_{i=1}^n (\lambda \lambda_i + \mu \mu_i) e_i \right) \\ &= \sum_{i=1}^n (\lambda \lambda_i + \mu \mu_i) f(e_i) \\ &= \lambda \sum_{i=1}^n \lambda_i f(e_i) + \mu \sum_{i=1}^n \mu_i f(e_i) \\ &= \lambda f^\#(v) + \mu f^\#(w). \end{aligned}$$

Notem, a més, que per a tot $i \in \{1, \dots, n\}$, el vector e_i de $\mathcal{B}_1$ s'escriu com a combinació lineal dels vectors en $\mathcal{B}_1$ com a

$$e_i = 0e_1 + \dots + e_i + \dots + 0e_n,$$

aleshores

$$f^\#(\text{in}_{\mathcal{B}_1}(e_i)) = f^\#(e_i) = 0f(e_1) + \dots + f(e_i) + \dots + 0f(e_n) = f(e_i).$$

La unicitat d' $f^\#$ és conseqüència de la Proposició 3.8. □

Proposició 3.9. *Siguen V_1, V_2 dos $\mathbb{K}$ -espais vectorials. Siga $f: V_1 \longrightarrow V_2$ un isomorfisme, aleshores $f^{-1}: V_2 \longrightarrow V_1$ és un isomorfisme.*

Demostració. Com f és bijectiva, l'aplicació f^{-1} és bijectiva. Només cal comprovar que és una aplicació lineal.

Siguen v_2, w_2 vectors en V_2 i λ, μ escalars en $\mathbb{K}$. Aleshores com f és bijectiva existeixen vectors v_1, w_1 en V_1 de forma que $f(v_1) = v_2$ i $f(w_1) = w_2$. A més, aquests vectors són únics. Notem que, per la linealitat d' f , es té que

$$f(\lambda v_1 + \mu w_1) = \lambda f(v_1) + \mu f(w_1) = \lambda v_2 + \mu w_2.$$

Així,

$$f^{-1}(\lambda v_2 + \mu w_2) = \lambda v_1 + \mu w_1 = \lambda f^{-1}(v_2) + \mu f^{-1}(w_2).$$

És a dir, f^{-1} és una aplicació lineal. $\square$

Definició 3.3 (Espais vectorials isomorfs). Siguen V_1 i V_2 dos $\mathbb{K}$ -espais vectorials. Direm que V_1 i V_2 són **isomorfs**, i ho denotarem per $V_1 \simeq V_2$, si existeix un isomorfisme $f: V_1 \rightarrow V_2$.

i Nota

Nota. Ser isomorfs és una relació binària d'equivalència. (Reflexiva) Un espai vectorial és isomorf a ell mateix mitjançant l'aplicació identitat. (Simètrica) Si un espai vectorial és isomorf a un altre mitjançant l'aplicació lineal f , aleshores aquest espai vectorial és isomorf al primer mitjançant l'aplicació lineal f^{-1} . (Transitiva) Si un espai vectorial és isomorf a un segon espai vectorial mitjançant f i aquest és isomorf a un tercer espai vectorial mitjançant g , aleshores el primer espai vectorial és isomorf al tercer mitjançant l'isomorfisme $g \circ f$.

Teorema 3.2 (Classificació dels $\mathbb{K}$ -espais vectorials finitament generats). Siga V un $\mathbb{K}$ -espai vectorial finitament generat. Aleshores $V \simeq \mathbb{K}^{\dim_{\mathbb{K}}(V)}$.

Demostració. Siga $n = \dim_{\mathbb{K}}(V)$. Pel [teorema d'existència de bases](#), siga $\mathcal{B}$ una base de V . Així $|\mathcal{B}| = n$.

Per altra banda, considerem la base canònica $\mathcal{B}_c$ de $\mathbb{K}^n$. Com $|\mathcal{B}| = |\mathcal{B}_c|$, siga h una aplicació bijectiva de $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}_c$. Així $f = \text{in}_{\mathcal{B}_c} \circ h$ és una aplicació de $\mathcal{B}$ a $\mathbb{K}^n$.

$$f: \mathcal{B} \xrightarrow{h} \mathcal{B}_c \xrightarrow{\text{in}_{\mathcal{B}_c}} \mathbb{K}^n$$

Pel Teorema 3.1 existeix una única aplicació lineal $f^\sharp: V \rightarrow \mathbb{K}^n$ que satisfà $f^\sharp \circ \text{in}_{\mathcal{B}} = f$, és a dir, el següent diagrama commuta

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{B} & \xrightarrow{\text{in}_{\mathcal{B}}} & V \\ & \searrow f & \downarrow f^\sharp \\ & & \mathbb{K}^n \end{array}$$

Notem que $f^\sharp[\mathcal{B}] = h[\mathcal{B}] = \mathcal{B}_c$. És a dir, $f^\sharp[\mathcal{B}]$ és una base de $\mathbb{K}^n$. Per la Proposició 3.7, $f^\sharp$ és una aplicació bijectiva. És a dir, $f^\sharp$ és un isomorfisme entre V i $\mathbb{K}^n$. $\square$

Corol·lari 3.2. Siguen V_1 i V_2 dos $\mathbb{K}$ -espais vectorials finitament generats. Són equivalents

- i. V_1 i V_2 són isomorfs;
- ii. $\dim_{\mathbb{K}}(V_1) = \dim_{\mathbb{K}}(V_2)$.

3.3 Matriu associada a una aplicació lineal

En aquesta secció estudiarem la matriu associada a una aplicació lineal i unes bases fixades en el domini i codomini de definició, respectivament. Estudiarem la seua utilitat i vorem com aquestes matrius són capaces de contindre tota la informació important associada a una aplicació lineal.

Definició 3.4 (Matriu associada a una aplicació lineal). Siguen V_1 i V_2 dos $\mathbb{K}$ -espais vectorials amb $\dim_{\mathbb{K}}(V_1) = n$ i $\dim_{\mathbb{K}}(V_2) = m$. Siguen $\mathcal{B}_1 = \{e_1, \dots, e_n\}$ i $\mathcal{B}_2 = \{d_1, \dots, d_m\}$ bases de V_1 i V_2 , respectivament, i siga $f: V_1 \rightarrow V_2$ una aplicació lineal. Definim la **matriu associada a f de $\mathcal{B}_1$ a $\mathcal{B}_2$** a la matriu en $M_{mn}(\mathbb{K})$ que té, per a cada $j \in \{1, \dots, n\}$, com a columna j les coordenades del vector $f(e_j)$ en la base $\mathcal{B}_2$.

Proposició 3.10. Siguen V_1 i V_2 dos $\mathbb{K}$ -espais vectorials amb $\dim_{\mathbb{K}}(V_1) = n$ i $\dim_{\mathbb{K}}(V_2) = m$. Siguen $\mathcal{B}_1 = \{e_1, \dots, e_n\}$ i $\mathcal{B}_2 = \{d_1, \dots, d_m\}$ bases de V_1 i V_2 , respectivament, i siga $f: V_1 \rightarrow V_2$ una aplicació lineal. Siga $A = (\alpha_{ij})$ en $M_{mn}(\mathbb{K})$ la matriu associada a f de $\mathcal{B}_1$ a $\mathcal{B}_2$. Aleshores, A és l'única matriu que satisfà que, per a tot vector $v \in V_1$, si X i Y són les coordenades dels vectors v i $f(v)$ en $\mathcal{B}_1$ i $\mathcal{B}_2$, respectivament, aleshores

$$AX = Y.$$

Demostració. Siga v un vector en V_1 i siguen X i Y les coordenades dels vectors v i $f(v)$ en $\mathcal{B}_1$ i $\mathcal{B}_2$, respectivament. Aleshores

$$v = X^t(e_j); \quad f(v) = Y^t(d_i).$$

Siga $A = (\alpha_{ij})$ la matriu associada a f de $\mathcal{B}_1$ a $\mathcal{B}_2$. Aleshores, les columnes de A tenen les coordenades dels vectors en $f[\mathcal{B}_1]$ en la base $\mathcal{B}_2$. Així, s'han de satisfer les n equacions de la dreta

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \cdots & \alpha_{mn} \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} f(e_1) = \alpha_{11}d_1 + \cdots + \alpha_{m1}d_m \\ \vdots \\ f(e_n) = \alpha_{1n}d_1 + \cdots + \alpha_{mn}d_m \end{array}$$

Aquestes n equacions queden descrites en l'expressió matricial $(f(e_j)) = A^t(d_i)$.

Així, substituint en l'expressió coordenada de $f(v)$ en la base $\mathcal{B}_2$ tenim que

$$f(v) = f(X^t(e_j)) = X^t(f(e_j)) = X^t(A^t(d_i)) = (AX)^t(d_i).$$

Notem que la linealitat d' f s'ha fet necessària per a afirmar que $f(X^t(e_j)) = X^t(f(e_j))$.

Per la [unicitat de les coordenades d'un vector en una base](#), tenim que

$$AX = Y.$$

Siga ara A' una matriu en $M_{mn}(\mathbb{K})$ amb la propietat que, per a tot vector $v \in V_1$, si X i Y són les coordenades de v i $f(v)$ en, respectivament, $\mathcal{B}_1$ i $\mathcal{B}_2$, aleshores es té que

$$A'X = Y.$$

Anem a provar que $A' = A$. Considerem, per a cada $j \in \{1, \dots, n\}$, el vector e_j de la base $\mathcal{B}_1$. Siguen X_j i Y_j les coordenades d' e_j i $f(e_j)$ en, respectivament, $\mathcal{B}_1$ i $\mathcal{B}_2$. Així, per a cada $j \in \{1, \dots, n\}$, es té que

$$A'X_j = Y_j.$$

Notem que, per a cada $j \in \{1, \dots, n\}$, la matriu de coordenades del vector e_j en la base $\mathcal{B}_1$, és a dir X_j , ve donada per una matriu tota 0 a excepció de la posició j , on conté un 1. Així, per a cada $j \in \{1, \dots, n\}$, la multiplicació $A'X_j$ retornarà la columna j de la matriu A' . Per altra banda, la matriu de coordenades del vector $f(e_j)$ en la base $\mathcal{B}_2$, és a dir Y_j , és, per definició, la columna j de la matriu A . Així, en l'expressió anterior, per a cada $j \in \{1, \dots, n\}$, es té que la columna j de A' ha de ser igual a la columna j de la matriu A .

Per tant $A' = A$. □

i Nota

Nota. Siga V un $\mathbb{K}$ -espai vectorial finitament generat i siguin $\mathcal{B}$ i $\overline{\mathcal{B}}$ dues bases de V . Per a l'aplicació lineal $\text{id}_V: V \rightarrow V$, la matriu associada a id_V de $\mathcal{B}$ a $\overline{\mathcal{B}}$ coincideix amb la [matriu canvi de base](#) de $\mathcal{B}$ a $\overline{\mathcal{B}}$.

Proposició 3.11. *Siguen V_1, V_2 i V_3 tres $\mathbb{K}$ -espais vectorials finitament generats i siguin $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ i $\mathcal{B}_3$ tres bases de, respectivament, V_1, V_2 i V_3 . Siguen $f: V_1 \rightarrow V_2$ i $g: V_2 \rightarrow V_3$ dues aplicacions lineals. Siguen A i B les matrius associades a, respectivament, f de $\mathcal{B}_1$ a $\mathcal{B}_2$ i g de $\mathcal{B}_2$ a $\mathcal{B}_3$. Aleshores, BA és la matriu associada a $g \circ f$ de $\mathcal{B}_1$ a $\mathcal{B}_3$.*

Demostració. Siga v un vector de V_1 i siguin X, Y i Z les coordenades de, respectivament, v en $\mathcal{B}_1$, $f(v)$ en $\mathcal{B}_2$ i $g(f(v))$ en $\mathcal{B}_3$. Aleshores se satisfan les següents equacions

$$(BA)X = B(AX) = BY = Z.$$

Per la Proposició 3.10, la matriu BA és la matriu associada a $g \circ f$ de $\mathcal{B}_1$ a $\mathcal{B}_3$. □

Proposició 3.12. *Siguen V_1 i V_2 dos $\mathbb{K}$ -espais vectorials finitament generats i isomorfs. Siguen $\mathcal{B}_1$ i $\mathcal{B}_2$ bases de V_1 i V_2 , respectivament. Siga f un isomorfisme de V_1 a V_2 . Siga A la matriu associada a f de $\mathcal{B}_1$ a $\mathcal{B}_2$, aleshores A és una matriu invertible.*

Demostració. Notem que en ser V_1 i V_2 isomorfs, tenen la mateixa dimensió pel Corol·lari 3.2. Així la matriu A és una matriu quadrada. Notem també que la matriu identitat I és la matriu associada a id_{V_1} de $\mathcal{B}_1$ a $\mathcal{B}_1$. Per altra banda, si considerem B , la matriu associada a f^{-1} de $\mathcal{B}_2$ a $\mathcal{B}_1$, tenim per la Proposició 3.11 que BA és la matriu associada a id_{V_1} de $\mathcal{B}_1$ a $\mathcal{B}_1$. Així, per la unicitat de la matriu associada a una aplicació lineal, demostrada a la Proposició 3.10, es dedueix que $BA = I$, és a dir, A és invertible. □

3.4 L'espai vectorial $\text{Hom}_{\mathbb{K}}(V_1, V_2)$

El conjunt d'aplicacions lineals entre dos $\mathbb{K}$ -espais vectorials V_1 i V_2 té estructura de $\mathbb{K}$ -espai vectorial.

Proposició 3.13. *Siguen V_1 i V_2 dos $\mathbb{K}$ -espais vectorials. Aleshores el conjunt $\text{Hom}_{\mathbb{K}}(V_1, V_2)$ d'aplicacions lineals entre V_1 i V_2 amb*

i. vector zero l'aplicació lineal nul · la, és a dir

$$\begin{aligned} 0: \quad V_1 &\longrightarrow V_2 \\ v &\longmapsto 0 \end{aligned}$$

ii. suma d'aplicacions lineals $f, g \in \text{Hom}_{\mathbb{K}}(V_1, V_2)$ com segueix

$$\begin{aligned} f + g: \quad V_1 &\longrightarrow V_2 \\ v &\longmapsto f(v) + g(v) \end{aligned}$$

iii. producte d'una aplicació lineal $f \in \text{Hom}_{\mathbb{K}}(V_1, V_2)$ i un escalar $\lambda \in \mathbb{K}$ com segueix

$$\begin{aligned} \lambda f: \quad V_1 &\longrightarrow V_2 \\ v &\longmapsto \lambda f(v) \end{aligned}$$

és un $\mathbb{K}$ -espai vectorial.

Proposició 3.14. *Siguen V_1 i V_2 dos $\mathbb{K}$ -espais vectorials amb $\dim_{\mathbb{K}}(V_1) = n$ i $\dim_{\mathbb{K}}(V_2) = m$. Aleshores $\dim_{\mathbb{K}}(\text{Hom}_{\mathbb{K}}(V_1, V_2)) = mn$.*

Demostració. Siga $\mathcal{B}_1 = \{e_1, \dots, e_n\}$ una base de V_1 i $\mathcal{B}_2 = \{d_1, \dots, d_m\}$ una base de V_2 . Considerem, per a cada $i \in \{1, \dots, m\}$ i $j \in \{1, \dots, n\}$, l'aplicació

$$\begin{aligned} \delta_{i,j}: \quad \mathcal{B}_1 &\longrightarrow V_2 \\ e_k &\longmapsto \begin{cases} 0, & \text{si } k \neq j; \\ d_i, & \text{si } k = j. \end{cases} \end{aligned}$$

Pel Teorema 3.1, aquesta aplicació s'estén a una aplicació lineal $\delta_{i,j}^{\#}: V_1 \longrightarrow V_2$ que satisfà

$$\delta_{i,j}^{\#} \circ \text{in}_{\mathcal{B}_1} = \delta_{i,j}.$$

Notem que, si $v = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n$ és un vector qualsevol de V_1 , aleshores

$$\delta_{i,j}^{\#}(v) = \delta_{i,j}^{\#}(\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n) = \lambda_j d_i = \lambda_j \delta_{i,j}(e_j).$$

Anem a provar que $\mathcal{B} = \{\delta_{i,j}^{\#} \mid i \in \{1, \dots, m\}, j \in \{1, \dots, n\}\}$ és una base de $\text{Hom}_{\mathbb{K}}(V_1, V_2)$. Notem que aquest conjunt té mn elements.

- **Sistema generador.**

Siga $f \in \text{Hom}_{\mathbb{K}}(V_1, V_2)$ una aplicació lineal de V_1 a V_2 . Siga $v \in V_1$, aleshores com $\mathcal{B}_1$ és base de V_1 , podem trobar escalars $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tals que

$$v = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n.$$

Així, per la linealitat d' f ,

$$f(v) = f(\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n) = \lambda_1 f(e_1) + \dots + \lambda_n f(e_n).$$

Per a cada $j \in \{1, \dots, n\}$, com $f(e_j)$ és un vector en V_2 i $\mathcal{B}_2$ és una base de V_2 , podem trobar escalars $\mu_{1,j}, \dots, \mu_{m,j} \in \mathbb{K}$ tals que

$$f(e_j) = \mu_{1,j} d_1 + \dots + \mu_{m,j} d_m = \mu_{1,j} \delta_{1,j}(e_j) + \dots + \mu_{m,j} \delta_{m,j}(e_j).$$

Per tant,

$$\begin{aligned} f(v) &= \lambda_1 f(e_1) + \dots + \lambda_n f(e_n) \\ &= \lambda_1 (\mu_{1,1} \delta_{1,1}(e_1) + \dots + \mu_{m,1} \delta_{m,1}(e_1)) + \dots + \lambda_n (\mu_{1,n} \delta_{1,n}(e_n) + \dots + \mu_{m,n} \delta_{m,n}(e_n)) \\ &= \mu_{1,1} \delta_{1,1}^\#(v) + \dots + \mu_{m,1} \delta_{m,1}^\#(v) + \dots + \mu_{1,n} \delta_{1,n}^\#(v) + \dots + \mu_{m,n} \delta_{m,n}^\#(v) \\ &= (\mu_{1,1} \delta_{1,1}^\# + \dots + \mu_{m,1} \delta_{m,1}^\# + \dots + \mu_{1,n} \delta_{1,n}^\# + \dots + \mu_{m,n} \delta_{m,n}^\#)(v). \end{aligned}$$

Per tant $\mathcal{B}$ és sistema generador.

- **Linealment independent.**

Considerem una combinació lineal dels vectors en $\mathcal{B}$ igualada a zero.

$$\lambda_{1,1} \delta_{1,1}^\# + \dots + \lambda_{m,1} \delta_{m,1}^\# + \dots + \lambda_{1,n} \delta_{1,n}^\# + \dots + \lambda_{m,n} \delta_{m,n}^\# = 0.$$

Considerem, per a cada $j \in \{1, \dots, n\}$, el vector $e_j \in \mathcal{B}_1$ aleshores, en fer actuar les dues aplicacions anteriors sobre e_j , obtenim

$$\begin{aligned} 0 &= 0(e_j) \\ &= (\lambda_{1,1} \delta_{1,1}^\# + \dots + \lambda_{m,1} \delta_{m,1}^\# + \dots + \lambda_{1,n} \delta_{1,n}^\# + \dots + \lambda_{m,n} \delta_{m,n}^\#)(e_j) \\ &= \lambda_{1,j} d_1 + \dots + \lambda_{m,j} d_m \end{aligned}$$

Com $\mathcal{B}_2$ és una base obtenim que, per a cada $j \in \{1, \dots, n\}$, es té que $\lambda_{1,j} = \dots = \lambda_{m,j} = 0$.

Per tant $\mathcal{B}$ és un conjunt de vectors linealment independent. $\square$

Proposició 3.15. *Siguen V_1 i V_2 dos $\mathbb{K}$ -espais vectorials amb $\dim_{\mathbb{K}}(V_1) = n$ i $\dim_{\mathbb{K}}(V_2) = m$. Siguen $\mathcal{B}_1$ i $\mathcal{B}_2$ bases de V_1 i V_2 , respectivament. Aleshores l'aplicació*

$$\begin{aligned} \varphi: \quad \text{Hom}_{\mathbb{K}}(V_1, V_2) &\longrightarrow \text{M}_{mn}(\mathbb{K}) \\ f &\longmapsto A, \text{ matriu associada a } f \text{ de } \mathcal{B}_1 \text{ a } \mathcal{B}_2 \end{aligned}$$

és un isomorfisme de $\mathbb{K}$ -espais vectorials.

Demostració. Anem a demostrar que φ és una aplicació lineal. Siguen f i g aplicacions lineals en $\text{Hom}_{\mathbb{K}}(V_1, V_2)$ i siguen λ, μ escalars en $\mathbb{K}$. Volem comprovar que

$$\varphi(\lambda f + \mu g) = \lambda \varphi(f) + \mu \varphi(g).$$

Denotem per

- A a la matriu associada a f de $\mathcal{B}_1$ a $\mathcal{B}_2$;
- B a la matriu associada a g de $\mathcal{B}_1$ a $\mathcal{B}_2$.

Aleshores se satisfà que, per a tot vector $v \in V_1$, si

- X són les coordenades de v en $\mathcal{B}_1$;
- Y són les coordenades d' $f(v)$ en $\mathcal{B}_2$;
- Z són les coordenades de $g(v)$ en $\mathcal{B}_2$;

les següents equacions se satisfan

$$AX = Y; \quad BX = Z.$$

De les anteriors equacions es dedueix que

$$(\lambda A + \mu B)X = \lambda AX + \mu BX = \lambda Y + \mu Z.$$

És a dir, la matriu $\lambda A + \mu B$ transforma les coordenades del vector v en la base $\mathcal{B}_1$ en les coordenades del vector $\lambda f(v) + \mu g(v)$ en la base $\mathcal{B}_2$. Per tant, $\lambda A + \mu B$ és la matriu associada a $\lambda f + \mu g$ de $\mathcal{B}_1$ a $\mathcal{B}_2$.

Aleshores

$$\varphi(\lambda f + \mu g) = \lambda A + \mu B = \lambda \varphi(f) + \mu \varphi(g).$$

És a dir φ és una aplicació lineal.

Notem ara que $\text{Ker}(\varphi) = \{0\}$, ja que l'única aplicació lineal que té a 0 com a matriu associada és l'aplicació nul $\cdot$ la. Així φ és un monomorfisme. Com $\text{Hom}_{\mathbb{K}}(V_1, V_2)$ i $M_{mn}(\mathbb{K})$ tenen la mateixa dimensió, per la Proposició 3.14, es dedueix que φ és un isomorfisme. $\square$

i Nota

Nota. Siga V un $\mathbb{K}$ -espai vectorial amb $\dim_{\mathbb{K}}(V) = n$ i siga $\mathcal{B}$ una base de V . Denotem per $\text{End}_{\mathbb{K}}(V) = \text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, V)$ al conjunt d'endomorfismes de V . Aleshores l'aplicació

$$\begin{aligned} \varphi: \text{End}_{\mathbb{K}}(V) &\longrightarrow M_n(\mathbb{K}) \\ f &\longmapsto A, \text{ matriu associada a } f \text{ de } \mathcal{B} \text{ a } \mathcal{B} \end{aligned}$$

és un isomorfisme de $\mathbb{K}$ -espais vectorials i un isomorfisme d'anells.

4 Equivalència de matrius

L'últim resultat del capítol anterior ens ha permès trobar, per a dos $\mathbb{K}$ -espais vectorials V_1 i V_2 , amb $\dim_{\mathbb{K}}(V_1) = n$ i $\dim_{\mathbb{K}}(V_2) = m$, un isomorfisme entre el $\mathbb{K}$ -espai vectorial $\text{Hom}_{\mathbb{K}}(V_1, V_2)$, de les aplicacions lineals de V_1 a V_2 , i el $\mathbb{K}$ -espai vectorial $M_{mn}(\mathbb{K})$, de les matrius de tamany m, n sobre $\mathbb{K}$. Aquest isomorfisme depèn de l'elecció prèvia d'unes bases $\mathcal{B}_1$ i $\mathcal{B}_2$ per a V_1 i V_2 , respectivament. El que farem en aquest capítol serà entendre què ocorre si canviem de bases.

Notem la següent relació. Siguen V_1 i V_2 dos $\mathbb{K}$ -espais vectorials finitament generats amb $\dim_{\mathbb{K}}(V_1) = n$ i $\dim_{\mathbb{K}}(V_2) = m$. Siga $f: V_1 \rightarrow V_2$ una aplicació lineal i siguem

- $\mathcal{B}_1, \overline{\mathcal{B}}_1$ dues bases de V_1 ;
- $\mathcal{B}_2, \overline{\mathcal{B}}_2$ dues bases de V_2 .

Considerem

- A la matriu associada a f de $\mathcal{B}_1$ a $\mathcal{B}_2$;
- $\overline{A}$ la matriu associada a f de $\overline{\mathcal{B}}_1$ a $\overline{\mathcal{B}}_2$.

Un dels objectius d'aquest capítol serà entendre la relació entre A i $\overline{A}$. Notem que ambdues matrius, A i $\overline{A}$, són matrius coordenades d' f en bases diferents. Així, per a tot $v \in V_1$, si

- X són les coordenades de v en $\mathcal{B}_1$;
- $\overline{X}$ són les coordenades de v en $\overline{\mathcal{B}}_1$;
- Y són les coordenades d' $f(v)$ en $\mathcal{B}_2$;
- $\overline{Y}$ són les coordenades d' $f(v)$ en $\overline{\mathcal{B}}_2$,

aleshores, les següents equacions se satisfan

$$AX = Y; \quad \overline{A}\overline{X} = \overline{Y}.$$

Ara bé, si considerem les següents matrius canvi de base

- Q la matriu canvi de base de $\overline{\mathcal{B}}_1$ a $\mathcal{B}_1$;
- P la matriu canvi de base de $\mathcal{B}_2$ a $\overline{\mathcal{B}}_2$,

les següents equacions se satisfan

$$Q\overline{X} = X; \quad PY = \overline{Y}.$$

Tenint en compte les anteriors equacions arribem a que

$$(PAQ)\overline{X} = (PA)(Q\overline{X}) = (PA)X = P(AX) = PY = \overline{Y}.$$

És a dir, PAQ és la matriu que transforma les coordenades d'un vector v qualsevol en la base $\overline{\mathcal{B}}_1$ en les coordenades del vector $f(v)$ en la base $\overline{\mathcal{B}}_2$. Per la unicitat de la matriu coordenada,

$$PAQ = \overline{A}.$$

Per a il·lustrar aquesta relació, considerem els següents diagrames on, a esquerra, trobem una representació de les aplicacions lineals subjacents a les anteriors matrius i, a dreta, trobem una representació de les corresponents transformacions de coordenades, on les etiquetes de les fletxes denoten multiplicació a esquerra per les matrius corresponents.

$$\begin{array}{ccc} V_1 & \xrightarrow{f} & V_2 \\ \text{id}_{V_1} \downarrow & & \uparrow \text{id}_{V_2} \\ V_1 & \xrightarrow{f} & V_2 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \overline{X} & \xrightarrow{\overline{A}} & \overline{Y} \\ Q \downarrow & & \uparrow P \\ X & \xrightarrow{A} & Y \end{array}$$

L'anterior discussió ens justifica la següent definició.

Definició 4.1 (Equivalència de matrius). Siguen A i B dues matrius en $M_{mn}(\mathbb{K})$. Direm que A i B són **equivalents**, i ho denotarem $A \sim B$, si existeixen matrius invertibles $P \in GL_m(\mathbb{K})$ i $Q \in GL_n(\mathbb{K})$ tals que

$$PAQ = B.$$

i Nota

Nota. Ser equivalents és una relació d'equivalència en el conjunt de les matrius de tamany m, n sobre un cos $\mathbb{K}$. (Reflexiva) Tota matriu A és equivalent amb ella mateixa, només cal prendre les matrius identitats corresponents per a obtenir que $I_m A I_n = A$. (Simètrica) Si es té una igualtat del tipus $PAQ = B$ on P i Q són matrius invertibles, aleshores $A = P^{-1}BQ^{-1}$. (Transitiva) Si es tenen igualtats $PAQ = B$ i $RBS = C$, on P, Q, R i S són matrius invertibles, aleshores $(RP)A(QS) = C$ on RP i QS són matrius invertibles.

Corol·lari 4.1. Siguen V_1 i V_2 dos $\mathbb{K}$ -espais vectorials finitament generats amb $\dim_{\mathbb{K}}(V_1) = n$ i $\dim_{\mathbb{K}}(V_2) = m$. Siga $f: V_1 \rightarrow V_2$ una aplicació lineal i siguen

- $\mathcal{B}_1, \overline{\mathcal{B}}_1$ dues bases de V_1 ;
- $\mathcal{B}_2, \overline{\mathcal{B}}_2$ dues bases de V_2 .

Considerem

- A la matriu associada a f de $\mathcal{B}_1$ a $\mathcal{B}_2$;
- $\overline{A}$ la matriu associada a f de $\overline{\mathcal{B}}_1$ a $\overline{\mathcal{B}}_2$.

Aleshores A i $\overline{A}$ són matrius equivalents.

Per a poder entendre millor la noció d'equivalència entre matrius necessitarem introduir les matrius elementals.

4.1 Matrius elementals

Comprovarem ara com l'aplicació de transformacions elementals sobre matrius considerades al primer capítol pot ser vista com el resultat de multiplicar certes matrius anomenades elementals sobre la matriu donada.

Definició 4.2 (Matrius elementals). Definim les següents matrius en $M_k(\mathbb{K})$ per a un natural $k \in \mathbb{N}$ qualsevol. Aquestes matrius s'anomenaran **matrius elementals**.

- i. Per a índexs $1 \leq i, j \leq k$, $E_{ij}^{(k)}$ denota la matriu que resulta d'intercanviar la fila i per la fila j en la matriu identitat I_k de tamany k , és a dir

$$E_{ij}^{(k)} = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 0 & \dots & 1 \\ & & \vdots & \ddots & \vdots \\ & & 1 & \dots & 0 \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

- ii. Per a un índex $1 \leq i \leq k$ i un escalar no nul $\lambda \in \mathbb{K} - \{0\}$, $E_{\lambda i}^{(k)}$ denota la matriu que resulta de multiplicar la fila i per λ en la matriu identitat I_k de tamany k , és a dir

$$E_{\lambda i}^{(k)} = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \lambda & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{bmatrix}$$

- iii. Per a índexs $1 \leq i, j \leq k$ i un escalar $\lambda \in \mathbb{K}$, $E_{i+\lambda j}^{(k)}$ denota la matriu que resulta de sumar a la fila i la fila j multiplicada per λ en la matriu identitat I_k de tamany k , és a dir

$$E_{i+\lambda j}^{(k)} = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \lambda \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{bmatrix}$$

Parlarem de matrius elementals de tipus i., ii. i iii., respectivament. Quan el tamany quede clar, evitarem el superíndex en l'escriptura de les matrius elementals.

i Nota

Nota. Notem que les matrius elementals també poden definir-se mitjançant operacions columna.

Proposició 4.1. *Les matrius elementals són invertibles. La inversa d'una matriu elemental és una matriu elemental del mateix tipus.*

Demostració. Considerem un natural $k \in \mathbb{N}$. Només cal notar les següents identitats.

- i. Per a índexs $1 \leq i, j \leq k$, la matriu inversa de $E_{ij}^{(k)}$ és ella mateixa, és a dir, la matriu que resulta de, a la matriu identitat I_k de tamany k , intercanviar la fila i per la fila j . Notem que en multiplicar dues vegades la matriu $E_{ij}^{(k)}$ aquest canvi de files es desfà.

$$\left(E_{ij}^{(k)}\right)^{-1} = E_{ij}^{(k)}.$$

- ii. Per a un índex $1 \leq i \leq k$ i un escalar no nul $\lambda \in \mathbb{K} - \{0\}$, la matriu inversa de $E_{\lambda i}^{(k)}$ és la matriu $E_{\lambda^{-1}i}^{(k)}$, és a dir, la matriu que resulta de, a la matriu identitat I_k de tamany k , multiplicar la fila i per λ^{-1} . Notem que en multiplicar aquestes dues matrius, una multiplica per λ la fila i i l'altra per λ^{-1} , tornant a l'1 inicial.

$$\left(E_{\lambda i}^{(k)}\right)^{-1} = E_{\lambda^{-1}i}^{(k)}.$$

- iii. Per a índexs $1 \leq i, j \leq k$ i un escalar $\lambda \in \mathbb{K}$, la matriu inversa de $E_{i+\lambda j}^{(k)}$ és la matriu $E_{i-\lambda j}^{(k)}$, és a dir, la matriu que resulta de, a la matriu identitat I_k de tamany k , restar a la fila i la fila j multiplicada per λ . Notem que en multiplicar aquestes dues matrius, una suma a la fila i la fila j multiplicada per λ i l'altra resta aquesta mateixa fila multiplicada per λ , tot tornant a la fila inicial.

$$\left(E_{i+\lambda j}^{(k)}\right)^{-1} = E_{i-\lambda j}^{(k)}.$$

Només cal comprovar que les respectives multiplicacions donen la matriu identitat I_k . $\square$

Proposició 4.2. *Per a nombres naturals $m, n \in \mathbb{N}$, siga A una matriu en $M_{mn}(\mathbb{K})$. Siguen $E^{(m)}$ i $E^{(n)}$ matrius elementals de qualsevol dels tres tipus. Aleshores*

- $E^{(m)}A$ és la matriu que resulta de, a la matriu A , fer-li la mateixa operació per files que defineix la matriu elemental $E^{(m)}$;
- $AE^{(n)}$ és la matriu que resulta de, a la matriu A , fer-li la mateixa operació per columnes que defineix la matriu elemental $E^{(n)}$.

Recopilem a continuació tot el que coneixem sobre matrius invertibles.

Proposició 4.3. *Siga A una matriu en $M_n(\mathbb{K})$. Les següents afirmacions són equivalents.*

- i. $A \in GL_n(\mathbb{K})$, és a dir, A és invertible;
- ii. Tot sistema d'equacions $\mathcal{S}$ que en forma matricial s'expressa com a $AX = B$ és compatible determinat;
- iii. Tot sistema d'equacions homogeni $\mathcal{S}$ que en forma matricial s'expressa com a $AX = 0$ és compatible determinat;
- iv. $\text{rang}(A) = n$, és a dir, A té rang màxim;
- v. La forma esglaonada reduïda per files de la matriu A és igual a I_n , és a dir, la matriu identitat de tamany n ;
- vi. A pot expressar-se com a producte finit de matrius elementals.

Demostració. Considerem les diferents implicacions.

- (i)→(ii) Com A és invertible, podem considerar la seua inversa A^{-1} . Aleshores el sistema $AX = B$ pot resoldre's multiplicant per A^{-1} a ambdues bandes per obtenir que $X = A^{-1}B$. Aquesta solució és única.
- (ii)→(iii) Cas particular quan $B = 0$.
- (iii)→(iv) Com el sistema $AX = 0$ és compatible determinat, pel [teorema de Rouché-Frobenius](#) tenim que $\text{rang}(A) = n$, és a dir, el rang d' A coincideix amb el nombre d'incògnites i, per tant, com A és quadrada, aquest rang és màxim.
- (iv)→(v) L'única matriu esglaonada reduïda per files de tamany n que té rang n és la matriu I_n , és a dir, la matriu identitat de tamany n . Per tant, la forma esglaonada reduïda per files d' A és igual a I_n .
- (v)→(vi) Per a passar d' A a la seua forma esglaonada reduïda per files hem d'aplicar, pel [mètode de Gauss-Jordan](#), una seqüència finita d'operacions elementals sobre A . Aquestes aplicacions queden codificades, segons la Proposició 4.2, com a productes a esquerra d' A per matrius elementals. Com la forma esglaonada reduïda d' A és I_n , es té l'existència d'una família finita de matrius elementals $E_1^{(n)}, \dots, E_l^{(n)}$ per a les quals

$$E_l^{(n)} \dots E_1^{(n)} A = I_n.$$

Notem que, per la Proposició 4.1, les matrius elementals són invertibles i, per tant, podem passar-les a l'altra banda en l'expressió de dalt fins a obtenir que

$$A = \left(E_1^{(n)}\right)^{-1} \dots \left(E_l^{(n)}\right)^{-1}.$$

Com les inverses de les matrius elementals tornen a ser matrius elementals, trobem que A s'expressa com a producte finit de matrius elementals.

- (vi)→(i) Com A pot expressar-se com a producte finit de matrius elementals i les matrius elementals són invertibles per la Proposició 4.1, es té que A és invertible.

Queda així provada la proposició. □

Les matrius elementals poden vore's com a matrius canvi de base.

Proposició 4.4. *Siga V un $\mathbb{K}$ -espai vectorial amb $\dim_{\mathbb{K}}(V) = n$. Siga $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ una base de V i siga $E^{(n)}$ una matriu elemental, aleshores existeix una base $\overline{\mathcal{B}}$ de V per a la qual $E^{(n)}$ és la matriu canvi de base de $\overline{\mathcal{B}}$ a $\mathcal{B}$. D'igual forma existeix una base $\overline{\overline{\mathcal{B}}}$ de V per a la qual $E^{(n)}$ és la matriu canvi de base de $\mathcal{B}$ a $\overline{\overline{\mathcal{B}}}$.*

Demostració. Considerem els diferents tipus d'operacions elementals.

- i. Per a índexs $1 \leq i, j \leq n$, es considera la base $\mathcal{B}_{ij} = \{e_1, \dots, e_j, \dots, e_i, \dots, e_n\}$ que resulta d'intercanviar en $\mathcal{B}$ el vector e_i pel vector e_j . Es pot comprovar fàcilment que $\mathcal{B}_{ij}$ és base de V . A més, la matriu canvi de base de $\mathcal{B}_{ij}$ a $\mathcal{B}$ és precisament $E_{ij}^{(n)}$.
- ii. Per a un índex $1 \leq i \leq n$ i un escalar no nul $\lambda \in \mathbb{K} - \{0\}$, es considera la base $\mathcal{B}_{\lambda i} = \{e_1, \dots, \lambda e_i, \dots, e_n\}$ que resulta de substituir en $\mathcal{B}$ el vector e_i pel vector λe_i . Es pot comprovar fàcilment que $\mathcal{B}_{\lambda i}$ és base de V . A més, la matriu canvi de base de $\mathcal{B}_{\lambda i}$ a $\mathcal{B}$ és precisament $E_{\lambda i}^{(n)}$.
- iii. Per a índexs $1 \leq i, j \leq n$ i un escalar $\lambda \in \mathbb{K}$, es considera la base $\mathcal{B}_{i+\lambda j} = \{e_1, \dots, e_i + \lambda e_j, \dots, e_n\}$ que resulta de substituir en $\mathcal{B}$ el vector e_i pel vector $e_i + \lambda e_j$. Es pot comprovar fàcilment que $\mathcal{B}_{i+\lambda j}$ és base de V . A més, la matriu canvi de base de $\mathcal{B}_{i+\lambda j}$ a $\mathcal{B}$ és precisament $E_{i+\lambda j}^{(n)}$.

La segona part de la proposició es pot comprovar fàcilment ja que, donada una matriu canvi de base de $\overline{\mathcal{B}}$ a $\mathcal{B}$, aleshores la matriu inversa és la matriu canvi de base de $\mathcal{B}$ a $\overline{\mathcal{B}}$. A més, per la Proposició 4.1, les inverses de matrius elementals tornen a ser matrius elementals. $\square$

Corol·lari 4.2. *Siga A una matriu en $M_n(\mathbb{K})$. Les següents afirmacions són equivalents.*

- i. $A \in GL_n(\mathbb{K})$, és a dir, A és invertible;
- ii. *Siga V un $\mathbb{K}$ -espai vectorial amb $\dim_{\mathbb{K}}(V) = n$ i siga $\mathcal{B}$ una base de V. Aleshores existeix una base $\overline{\mathcal{B}}$ de V per a la qual A és la matriu canvi de base de $\overline{\mathcal{B}}$ a $\mathcal{B}$. D'igual forma existeix una base $\overline{\overline{\mathcal{B}}}$ de V per a la qual A és la matriu canvi de base de $\mathcal{B}$ a $\overline{\overline{\mathcal{B}}}$.*

Demostració. Considerem les diferents implicacions.

- (i) $\rightarrow$ (ii) Si A és invertible, aleshores per la Proposició 4.3 es té que A pot expressar-se com a producte finit de matrius elementals. Cadascuna d'aquestes matrius elementals és una matriu canvi de base d'acord a la Proposició 4.4, siga d'una base a $\mathcal{B}$ o de $\mathcal{B}$ a una altra base. El corresponent producte, és a dir A, és, per la [proposició sobre el producte de matrius canvi de base](#), una matriu canvi de base.
- (ii) $\rightarrow$ (i) Per la [proposició sobre la invertibilitat de les matrius canvi de base](#).

Queda així demostrat el corol·lari. $\square$

L'anterior corol·lari ens ajuda a comprendre el recíproc del Corol·lari 4.1. Així, donades dues matrius equivalents, aquestes representen el mateix homomorfisme en dues bases diferents.

Corol·lari 4.3. *Siguen A i $\overline{A}$ dues matrius en $M_{mn}(\mathbb{K})$ equivalents. Siguen V_1 i V_2 dos $\mathbb{K}$ -espais vectorials amb $\dim_{\mathbb{K}}(V_1) = n$ i $\dim_{\mathbb{K}}(V_2) = m$. Aleshores existeix una aplicació lineal*

$$f: V_1 \longrightarrow V_2,$$

i existeixen

- $\mathcal{B}_1, \overline{\mathcal{B}}_1$ dues bases de V_1 ;
- $\mathcal{B}_2, \overline{\mathcal{B}}_2$ dues bases de V_2 ;

per a les quals

- A és la matriu associada a f de $\mathcal{B}_1$ a $\mathcal{B}_2$;
- $\overline{A}$ és la matriu associada a f de $\overline{\mathcal{B}}_1$ a $\overline{\mathcal{B}}_2$.

Demostració. Com A i $\overline{A}$ són equivalents, existeixen matrius invertibles $P \in GL_m(\mathbb{K})$ i $Q \in GL_n(\mathbb{K})$ per a les quals es té que

$$PAQ = \overline{A}.$$

Siga $\overline{\mathcal{B}}_1$ una base de V_1 i siga $\overline{\mathcal{B}}_2$ una base de V_2 . Considerem $f: V_1 \rightarrow V_2$ l'aplicació que té a $\overline{A}$ com a matriu associada de la base $\overline{\mathcal{B}}_1$ a $\overline{\mathcal{B}}_2$. Com Q i P són matrius invertibles, pel Corol·lari 4.2, existeixen bases $\mathcal{B}_1$ i $\mathcal{B}_2$ de V_1 i V_2 , respectivament, per a les quals

- Q és la matriu canvi de base de $\overline{\mathcal{B}}_1$ a $\mathcal{B}_1$;
- P és la matriu canvi de base de $\mathcal{B}_2$ a $\overline{\mathcal{B}}_2$.

Siga $g: V_1 \rightarrow V_2$ l'aplicació que té a A com a matriu associada de la base $\mathcal{B}_1$ a la base $\mathcal{B}_2$. Aleshores, com que se satisfà l'equació $PAQ = \overline{A}$, es té que

$$\text{id}_{V_2} \circ g \circ \text{id}_{V_1} = f,$$

ja que en les bases marcades, P i Q són matrius associades a l'aplicació identitat corresponent. Així $f = g$, és a dir, A i $\overline{A}$ representen la mateixa aplicació lineal en bases diferents. $\square$

4.2 Equivalència i rang

A continuació presentarem algunes proposicions que relacionen l'equivalència de matrius amb els respectius rangs. La primera part d'aquesta secció es dedicarà a construir un representant canònic de la classe d'equivalència per a cada matriu.

Proposició 4.5. *Siga A una matriu en $M_{mn}(\mathbb{K})$ amb $\text{rang}(A) = r$. Aleshores existeixen matrius invertibles $P \in GL_m(\mathbb{K})$ i $Q \in GL_n(\mathbb{K})$ per a les quals*

$$PAQ = \left[\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right]$$

on I_r és la matriu identitat de tamany r . En particular, A és equivalent a la matriu de la dreta en l'expressió anterior.

Demostració. Considerem totes les operacions elementals fila que ens permeten dur, seguint l'algorisme de Gauss-Jordan, la matriu A a la seua forma esglaonada reduïda per files. Aquesta matriu té r pivots. Siga P la matriu que resulta de considerar totes aquestes operacions elementals fila com a matrius elementals i multiplicar-les en l'ordre pertinent. Per a aquesta matriu P es té que PA és la forma esglaonada reduïda per files d' A .

Una vegada en aquest punt, considerarem operacions elementals columna. En un primer pas, eliminem totes les entrades a la dreta dels pivots mitjançant operacions elementals columna de tipus iii. En un segon pas, movem les columnes amb pivots a les primeres posicions, tot respectant l'ordre, amb operacions elementals de tipus i. Siga Q la matriu que resulta de considerar totes aquestes operacions elementals columna com a matrius elementals i multiplicar-les en l'ordre pertinent. Per a aquesta matriu Q es té que

$$PAQ = \left[\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right]$$

Queda així provada la proposició. $\square$

Corol·lari 4.4. Siga A una matriu en $M_{mn}(\mathbb{K})$. Aleshores la matriu A i la matriu

$$\left[\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right],$$

on $r = \text{rang}(A)$, són matrius equivalents.

Anem a reflexionar sobre l'anterior proposició en el següent exemple on, a més, enllacem amb el que hem vist sobre matrius invertibles i matrius canvi de base.

Exemple 4.1. Es consideren els $\mathbb{R}$ -espais vectorials $\mathbb{R}^3$ i $\mathbb{R}^2$ i l'aplicació lineal

$$\begin{aligned} f: \quad \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) &\longmapsto (x + z, x + y) \end{aligned}$$

Es consideren les bases canòniques d' $\mathbb{R}^3$ i $\mathbb{R}^2$, respectivament.

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_c^{(3)} &= \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\} && \text{base canònica d'}\mathbb{R}^3; \\ \mathcal{B}_c^{(2)} &= \{(1, 0), (0, 1)\} && \text{base canònica d'}\mathbb{R}^2. \end{aligned}$$

Així, per a la matriu $A \in M_{23}(\mathbb{R})$, matriu coordenada d' f de $\mathcal{B}_c^{(3)}$ a $\mathcal{B}_c^{(2)}$, es té que

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Seguint la demostració de la Proposició 4.5, anem a trobar les matrius invertibles $P \in GL_2(\mathbb{R})$ i $Q \in GL_3(\mathbb{R})$ de forma que

$$PAQ = \left[\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right]$$

Recordem que P apareix enllaçada a les operacions elementals fila necessàries per a transformar la matriu A en la seua forma esglaonada reduïda per files. En aquest cas concret,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{f_2=f_2-f_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Així, per a la matriu invertible $P = E_{2-1}^{(2)}$ es té que

$$PA = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

En particular A i la seua forma esglaonada reduïda per files són matrius equivalents. Pel Corol·lari 4.3 es té que A i PA són matrius coordinades d' f en bases diferents. Aquesta base, a més, es pot recuperar per la demostració de la Proposició 4.4. En aquest cas, si considerem la següent base d' $\mathbb{R}^2$,

$$\overline{B}^{(2)} = \{(1, 1), (0, 1)\}$$

i anomenem B a la matriu coordinada d' f de $\mathcal{B}_c^{(3)}$ a $\overline{B}^{(2)}$, es comprova fàcilment que

$$B = PA.$$

Continuem des de B amb les operacions elementals columna fins obtenir la matriu desitjada

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{c_3=c_3-c_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{c_3=c_3+c_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Notem que per a la matriu invertible $Q = E_{3-1}^{(3)}E_{3+2}^{(3)}$, on aquestes matrius elementals estan definides per les corresponents operacions columna, es té que

$$PAQ = BQ = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array} \right].$$

En particular A i la matriu que hem trobat a la Proposició 4.5 són matrius equivalents. Pel Corol·lari 4.3 es té que A i PAQ són matrius coordinades d' f en bases diferents. Aquesta base, a més, es pot recuperar per la demostració de la Proposició 4.4. En aquest cas, si considerem la següent base d' $\mathbb{R}^3$,

$$\overline{B}^{(3)} = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (-1, 1, 1)\}$$

i anomenem C a la matriu coordinada d' f de $\overline{B}^{(3)}$ a $\overline{B}^{(2)}$, es comprova fàcilment que

$$C = PAQ.$$

Cal tindre present que la matriu original A i la matriu

$$\left[\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right],$$

on $r = \text{rang}(A)$, són matrius equivalents. Així, si A és una matriu coordinada d'una aplicació lineal f , l'altra matriu també. Ara bé, aquesta darrera matriu és una matriu molt més senzilla i d'açò ens podrem aprofitar de seguida.

El següent teorema arreplega un resultat molt interessant i es basa en el fet que una matriu A i la matriu diagonal corresponent, associada al rang d' A , obtinguda en la Proposició 4.5, són matrius equivalents.

Teorema 4.1. *Siguen V_1 i V_2 dos $\mathbb{K}$ -espais vectorials amb $\dim_{\mathbb{K}}(V_1) = n$ i $\dim_{\mathbb{K}}(V_2) = m$. Siguen $\mathcal{B}_1$ i $\mathcal{B}_2$ bases de V_1 i V_2 , respectivament. Siga $f: V_1 \rightarrow V_2$ una aplicació lineal i siga A la matriu coordinada d' f de $\mathcal{B}_1$ a $\mathcal{B}_2$.*

Aleshores

- i. $\dim_{\mathbb{K}}(V_1) = \dim_{\mathbb{K}}(\text{Im}(f)) + \dim_{\mathbb{K}}(\text{Ker}(f))$;
- ii. $\dim_{\mathbb{K}}(\text{Im}(f)) = \text{rang}(A)$.

Demostració. Anomenem $r = \text{rang}(A)$. Pel Corol·lari 4.4 la matriu A i la matriu diagonal associada al seu rang són matrius equivalents. Pel Corol·lari 4.3, podem trobar bases

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{B}}_1 &= \{e_1, \dots, e_n\} && \text{base de } V_1; \\ \overline{\mathcal{B}}_2 &= \{d_1, \dots, d_m\} && \text{base de } V_2, \end{aligned}$$

per a les quals

$$\left[\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right]$$

és la matriu coordinada d' f de $\overline{\mathcal{B}}_1$ a $\overline{\mathcal{B}}_2$.

Així, es donen les següents igualtats

$$\text{Im}(f) = f[V_1] = f[\langle e_1, \dots, e_n \rangle] = \langle f(e_1), \dots, f(e_n) \rangle = \langle d_1, \dots, d_r, 0, \dots, 0 \rangle = \langle d_1, \dots, d_r \rangle.$$

En la primera igualtat recuperem la definició del subespai imatge; en la segona igualtat ens aprofitem que $\overline{\mathcal{B}}_1$ és sistema generador de V_1 ; la tercera igualtat és conseqüència de la [proposició sobre la imatge del subespai generat](#); la quarta igualtat ve d'observar que la matriu coordinada d' f de $\overline{\mathcal{B}}_1$ a $\overline{\mathcal{B}}_2$ és la matriu diagonal associada al rang d' A , així, per columnes, aquesta matriu guarda la informació relativa a les coordenades dels vectors $f(e_1), \dots, f(e_n)$ en la base $\overline{\mathcal{B}}_2$; l'última igualtat ve d'eliminar els vectors 0 en un subespai generat, ja que són vectors redundants.

Notem que el conjunt $\{d_1, \dots, d_r\}$ és linealment independent, en ser subconjunt d'una base, i que genera tot $\text{Im}(f)$. Així, $\{d_1, \dots, d_r\}$ és base de $\text{Im}(f)$. Per tant, $\dim_{\mathbb{K}}(\text{Im}(f)) = r = \text{rang}(A)$.

Per altra banda, notem les següents igualtats

$$\begin{aligned}
\text{Ker}(f) &= \{v \in V_1 \mid f(v) = 0\} \\
&= \left\{ \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i \in V_1 \mid \left[\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right] \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \\
&= \left\{ \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i \in V_1 \mid \alpha_1 = \cdots = \alpha_r = 0 \right\} \\
&= \left\{ \sum_{i=r+1}^n \alpha_i e_i \in V_1 \mid \alpha_{r+1}, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K} \right\} \\
&= \langle e_{r+1}, \dots, e_n \rangle.
\end{aligned}$$

En la primera igualtat recuperem la definició del subespai nucli d' f ; en la segona igualtat ens aprofitem de que $\bar{\mathcal{B}}_1$ és base de V_1 i que la matriu coordinada d' f de la base $\bar{\mathcal{B}}_1$ a la base $\bar{\mathcal{B}}_2$ és, precisament, la matriu diagonal associada al rang d' A ; la tercera igualtat ve de multiplicar les anteriors matrius i igualar components; la quarta igualtat és conseqüència de que les r primeres coordenades són zero; la cinquena igualtat recupera la definició d'espai vectorial generat pels vectors $e_{r+1}, \dots, e_n$.

Notem que el conjunt $\{e_{r+1}, \dots, e_n\}$ és linealment independent, en ser subconjunt d'una base, i que genera tot $\text{Ker}(f)$. Així, $\{e_{r+1}, \dots, e_n\}$ és base de $\text{Ker}(f)$. Per tant, $\dim_{\mathbb{K}}(\text{Ker}(f)) = n - r$.

Per tant,

$$\dim_{\mathbb{K}}(V_1) = n = r + (n - r) = \dim_{\mathbb{K}}(\text{Im}(f)) + \dim_{\mathbb{K}}(\text{Ker}(f)).$$

□

L'anterior teorema ens permet caracteritzar definitivament quan dues matrius són equivalents.

Proposició 4.6. *Siuen A i B matrius en $M_{mn}(\mathbb{K})$. Les següents afirmacions són equivalents*

- i. A i B són equivalents;*
- ii. $\text{rang}(A) = \text{rang}(B)$.*

Demostració. Si A i B són matrius equivalents, aleshores pel Corol·lari 4.3, podem considerar V_1 i V_2 dos $\mathbb{K}$ -espais vectorials amb $\dim_{\mathbb{K}}(V_1) = n$ i $\dim_{\mathbb{K}}(V_2) = m$ per als quals existeix una aplicació lineal $f: V_1 \rightarrow V_2$ i existeixen

- $\mathcal{B}_1, \bar{\mathcal{B}}_1$ dues bases de V_1 ;
- $\mathcal{B}_2, \bar{\mathcal{B}}_2$ dues bases de V_2 ;

per a les quals

- A és la matriu associada a f de $\mathcal{B}_1$ a $\mathcal{B}_2$;

- B és la matriu associada a f de $\overline{B}_1$ a $\overline{B}_2$.

Com a conseqüència del Teorema 4.1, obtenim que

$$\text{rang}(A) = \dim_{\mathbb{K}}(\text{Im}(f)) = \text{rang}(B).$$

Suposem ara que $\text{rang}(A) = \text{rang}(B) = r$. Aleshores, per la Proposició 4.5 podem trobar matrius invertibles $P, R \in GL_m(\mathbb{K})$ i $Q, S \in GL_n(\mathbb{K})$ per a les quals

$$PAQ = \left[\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right]; \quad RBS = \left[\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right].$$

Així, de l'equació $PAQ = RBS$, deduïm que

$$(R^{-1}P)A(QS^{-1}) = B.$$

Notem que $R^{-1}P$ i QS^{-1} són matrius invertibles. Així A i B són matrius equivalents. $\square$

Corol·lari 4.5. *Siga A una matriu en $M_{mn}(\mathbb{K})$. Aleshores*

- i. $\text{rang}(RA) = \text{rang}(A)$ per a tota $R \in GL_m(\mathbb{K})$;
- ii. $\text{rang}(AS) = \text{rang}(A)$ per a tota $S \in GL_n(\mathbb{K})$.

Demostració. Notem que les matrius A, RA i AS són matrius equivalents. El resultat es dedueix directament de la Proposició 4.6. $\square$

4.3 Rang i transposició

A continuació presentarem algunes proposicions que relacionen el rang d'una matriu amb el de la seua transposada.

Proposició 4.7. *Les transposades de matrius elementals són matrius elementals del mateix tipus.*

Demostració. Considerem un natural $k \in \mathbb{N}$. Només cal notar les següents identitats.

- i. Per a índexs $1 \leq i, j \leq k$, la matriu transposada de $E_{ij}^{(k)}$ és ella mateixa.

$$\left(E_{ij}^{(k)}\right)^t = E_{ij}^{(k)}.$$

- ii. Per a un índex $1 \leq i \leq k$ i un escalar no nul $\lambda \in \mathbb{K} - \{0\}$, la matriu transposada de $E_{\lambda i}^{(k)}$ és ella mateixa.

$$\left(E_{\lambda i}^{(k)}\right)^t = E_{\lambda i}^{(k)}.$$

- iii. Per a índexs $1 \leq i, j \leq k$ i un escalar $\lambda \in \mathbb{K}$, la matriu transposada de $E_{i+\lambda j}^{(k)}$ és la matriu $E_{j+\lambda i}^{(k)}$, és a dir, la matriu que resulta de, a la matriu identitat I_k de tamany k , sumar a la fila j la fila i multiplicada per λ .

$$\left(E_{i+\lambda j}^{(k)}\right)^t = E_{j+\lambda i}^{(k)}.$$

□

Corol·lari 4.6. *Siga A una matriu en $M_n(\mathbb{K})$. Les següents afirmacions són equivalents.*

- i. $A \in GL_n(\mathbb{K})$, és a dir, A és invertible;
- ii. $A^t \in GL_n(\mathbb{K})$, és a dir, A^t és invertible.

Demostració. Considerem les diferents implicacions.

- (i)→(ii) Si A és invertible, aleshores per la Proposició 4.3 es té que A pot expressar-se com a producte finit de matrius elementals.

$$A = E_1 \cdots E_l.$$

Per tant,

$$A^t = E_l^t \cdots E_1^t.$$

Cadascuna d'aquestes matrius transposades de matrius elementals és una matriu elemental d'acord a la Proposició 4.7. El corresponent producte, és a dir A^t , és, per la Proposició 4.3, una matriu invertible.

- (ii)→(i) Anàloga a l'anterior cas, tenint en compte que $(A^t)^t = A$.

Queda així demostrat el corol·lari. □

A continuació provem que el rang d'una matriu coincideix amb el de la seua transposada.

Proposició 4.8. *Siga A una matriu en $M_{mn}(\mathbb{K})$, aleshores $\text{rang}(A) = \text{rang}(A^t)$.*

Demostració. Per a la demostració, considerem les matrius invertibles $P \in GL_m(\mathbb{K})$ i $Q \in GL_n(\mathbb{K})$ que, d'acord a la Proposició 4.5, satisfan l'equació

$$PAQ = \left[\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right] \quad (\in M_{mn}(\mathbb{K}))$$

on I_r és la matriu identitat de tamany $r = \text{rang}(A)$. De l'anterior equació, prenent les respectives transposades s'obté que

$$Q^t A^t P^t = (PAQ)^t = \left[\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right]^t = \left[\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right] \quad (\in M_{nm}(\mathbb{K}))$$

Notem, a més, que les matrius P^t i Q^t són matrius invertibles pel Corol·lari 4.6. Aleshores, emprant el Corol·lari 4.5, obtenim que

$$\text{rang}(A^t) = \text{rang}(Q^t A^t P^t) = \text{rang}\left(\left[\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right]\right) = r = \text{rang}(A).$$

Queda així provada la proposició. $\square$

A continuació estudiem l'aplicació transposició. És fàcil comprovar que la transposició de matrius és un isomorfisme.

Proposició 4.9. *L'aplicació transposició $(\cdot)^t$, que a cada matriu li fa correspondre la seua transposada, és a dir,*

$$\begin{array}{ccc} (\cdot)^t: & M_{mn}(\mathbb{K}) & \longrightarrow M_{nm}(\mathbb{K}) \\ & A & \longmapsto A^t \end{array}$$

és un isomorfisme de $\mathbb{K}$ -espais vectorials.

Demostració. Es comprova fàcilment que $(\cdot)^t$ és una aplicació lineal. Si A, B són dues matrius en $M_{mn}(\mathbb{K})$ i λ, μ escalars en $\mathbb{K}$, aleshores

$$(\lambda A + \mu B)^t = \lambda A^t + \mu B^t.$$

A més, per a comprovar que és bijectiva, només cal adonar-se que transposar una matriu transposada ens retorna la matriu original. Sense pèrdua de generalitat anomenem de la mateixa manera l'aplicació

$$\begin{array}{ccc} (\cdot)^t: & M_{nm}(\mathbb{K}) & \longrightarrow M_{mn}(\mathbb{K}) \\ & A & \longmapsto A^t \end{array}$$

Es comprova fàcilment que $(\cdot)^t \circ (\cdot)^t = \text{id}_{M_{mn}(\mathbb{K})}$, és a dir, $(\cdot)^t$ és invertible. $\square$

Acabem aquest capítol recuperant la [caracterització d'invertibilitat de matrius](#) presentada al capítol 2, aquesta vegada per files, gràcies a l'operació transposada.

Corol·lari 4.7. *Siga n un natural en $\mathbb{N}$. Siga P una matriu quadrada en $M_n(\mathbb{K})$, aleshores les següents afirmacions són equivalents*

- i. P és una matriu invertible en $GL_n(\mathbb{K})$;*
- ii. Els vectors fila de P formen una base de $\mathbb{K}^n$.*

Demostració. Pel Corol·lari 4.6, P és invertible si, i només si, P^t és invertible. Emprant la [caracterització d'invertibilitat de matrius](#), P^t és invertible si, i només si, els vectors columna de P^t , transposats, formen una base de $\mathbb{K}^n$. Ens adonem que els vectors columna de P^t transposats són els vectors fila de P . $\square$

5 Determinant

En aquest capítol introduïrem l'aplicació determinant. Caracteritzarem aquesta aplicació per la seua acció sobre matrius elementals i en deduirem les seues propietats més importants, amb especial atenció a la caracterització de la invertibilitat de matrius en funció del seu determinant.

Definició 5.1 (Determinant). Anomenem **aplicació determinant** a tota aplicació

$$\text{Det}: M_n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}$$

que satisfaga les condicions que s'enumeren a continuació.

- i. $\text{Det}(I_n) = 1$. És a dir, el determinant de la matriu identitat de tamany n és 1;
- ii. Siguen $1 \leq i, j \leq n$ amb $i \neq j$. Aleshores per a tota matriu $A \in M_n(\mathbb{K})$ es té que

$$\text{Det}(E_{ij}^{(n)} A) = -\text{Det}(A);$$

- iii. Siga $1 \leq i \leq n$ i $\lambda \in \mathbb{K} - \{0\}$. Aleshores per a tota matriu $A \in M_n(\mathbb{K})$ es té que

$$\text{Det}(E_{\lambda i}^{(n)} A) = \lambda \text{Det}(A);$$

- iv. Siguen $1 \leq i, j \leq n$ amb $i \neq j$ i $\lambda \in \mathbb{K}$. Aleshores per a tota matriu $A \in M_n(\mathbb{K})$ es té que

$$\text{Det}(E_{i+\lambda j}^{(n)} A) = \text{Det}(A).$$

L'objectiu principal d'aquest capítol serà demostrar que existeix una única aplicació determinant i que aquesta aplicació determinant ens permet caracteritzar la invertibilitat de matrius. No obstant, comprovarem en un primer pas que, de la definició d'aplicació determinant, podem obtenir moltes propietats.

5.1 Propietats del determinant

De la Definició 5.1 obtenim les següents conseqüències.

Corol·lari 5.1. Siga $\text{Det}: M_n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}$ una aplicació determinant. Aleshores

- i. Siguen $1 \leq i, j \leq n$ amb $i \neq j$, aleshores $\text{Det}(E_{ij}^{(n)}) = -1$;
- ii. Siga $1 \leq i \leq n$ i siga $\lambda \in \mathbb{K} - \{0\}$, aleshores $\text{Det}(E_{\lambda i}^{(n)}) = \lambda$;

iii. Siguen $1 \leq i, j \leq n$ amb $i \neq j$ i siga $\lambda \in \mathbb{K}$, aleshores $\text{Det}(E_{i+\lambda j}^{(n)}) = 1$.

Demostració. Només cal notar que tota matriu elemental s'expressa com a $E^{(n)} = E^{(n)} I_n$ i que, de la definició d'aplicació determinant, es té que $\text{Det}(I_n) = 1$. $\square$

Corol·lari 5.2. Siga $A \in M_n(\mathbb{K})$ i siga $E \in M_n(\mathbb{K})$ una matriu elemental. Aleshores

$$\text{Det}(EA) = \text{Det}(E)\text{Det}(A).$$

Demostració. Conseqüència directa de la definició d'aplicació determinant i del Corol·lari 5.1. $\square$

i Nota

Nota. A partir d'ara suposarem que els cossos amb els quals treballem seran no trivials amb característica diferent a 2. Recordem que, per la [proposició corresponent dels preliminars](#), aquests cossos contenen més elements que 0 i 1.

Corol·lari 5.3. Siga $\text{Det}: M_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$ una aplicació determinant. Siga $A \in M_n(\mathbb{K})$, aleshores

- i. Si A té una fila de zeros, aleshores $\text{Det}(A) = 0$;
- ii. Si A té dues files diferents i proporcionals, aleshores $\text{Det}(A) = 0$.

Demostració. Suposem que per a un índex $1 \leq i \leq n$, es té que la fila i d' A és una fila de zeros. Considerem un escalar $\lambda \in \mathbb{K} - \{0, 1\}$, aleshores es té que

$$\text{Det}(A) = \text{Det}(E_{\lambda i}^{(n)} A) = \lambda \text{Det}(A).$$

Si suposem que $\text{Det}(A) \neq 0$, aleshores en l'anterior expressió podem dividir ambdues parts per $\text{Det}(A)$ per a obtenir que $\lambda = 1$, contradient l'elecció de λ . Per tant, $\text{Det}(A) = 0$.

Per al segon apartat. Suposem que per als índexs $1 \leq i, j \leq n$ amb $i \neq j$ es té que les files i i j d' A són proporcionals amb un factor de proporció $\lambda \in \mathbb{K}$. Així $f_i = \lambda f_j$ i, per tant, en restar a la fila i la fila j multiplicada per λ es tindria una fila de zeros. Aleshores, per la definició d'aplicació determinant i per l'anterior apartat, es té que

$$\text{Det}(A) = \text{Det}(E_{i-\lambda j}^{(n)} A) = 0.$$

Queda així provat el corol·lari. $\square$

Proposició 5.1. Siga $A \in M_n(\mathbb{K})$. Són equivalents

- i. $A \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$, és a dir, A és invertible;
- ii. $\text{Det}(A) \neq 0$.

Demostració. Considerem les diferents implicacions.

- (i)→(ii) Suposem que A és invertible. Aleshores per la [caracterització de les matrius invertibles](#), podem expressar A com a un producte finit de matrius elementals

$$A = E_1 \cdots E_l.$$

Aleshores, de la Definició 5.1, obtenim

$$\text{Det}(A) = \text{Det}(E_1 \cdots E_l) = \text{Det}(E_1) \cdots \text{Det}(E_l).$$

Pel Corol·lari 5.1, totes les matrius elementals tenen determinant diferent a zero. Aleshores $\text{Det}(A) \neq 0$.

- (ii)→(i) Ho provem pel contrarecíproc. Suposem que A no és invertible. Anomenem C a la forma esglaonada reduïda per files d' A . Aleshores per la [caracterització de les matrius invertibles](#), C no té rang màxim, és a dir, C necessàriament conté una fila de zeros. Així, pel Corol·lari 5.3, es té que $\text{Det}(C) = 0$.

A més, pel mètode de Gauss-Jordan, podem trobar una seqüència finita d'operacions elementals per fila que transformen la matriu A en la matriu C . Aquestes operacions elementals es codifiquen com una seqüència finita de matrius elementals que multipliquen a A a esquerra fins obtenir C . És a dir, existeixen matrius elementals $E_1, \dots, E_l$ de forma que

$$E_l \cdots E_1 A = C.$$

Per la [invertibilitat de les matrius elementals](#), les matrius elementals són invertibles. Així, de l'anterior expressió, deduïm que

$$A = E_1^{-1} \cdots E_l^{-1} C.$$

Recordem que, a més, les inverses de matrius elementals tornen a ser matrius elementals. Així, pel Corol·lari 5.1, es té que

$$\text{Det}(A) = \text{Det}(E_1^{-1} \cdots E_l^{-1} C) = \text{Det}(E_1^{-1}) \cdots \text{Det}(E_l^{-1}) \text{Det}(C) = 0.$$

Queda així demostrada la proposició. □

Lema 5.1. *Siguen A, B matrius en $M_n(\mathbb{K})$. Si A no és invertible, aleshores AB tampoc és invertible.*

Demostració. Siga A una matriu no invertible. Suposem per reducció a l'absurd que AB és invertible. Aleshores existeix una matriu $C \in M_n(\mathbb{K})$ per a la qual $(AB)C = I_n$. Aleshores

$$A(BC) = (AB)C = I_n.$$

Aleshores arribem a la contradicció que A és invertible. Per tant, AB no és invertible. □

Proposició 5.2. *Siguen A, B matrius en $M_n(\mathbb{K})$. Aleshores*

$$\text{Det}(AB) = \text{Det}(A)\text{Det}(B).$$

Demostració. Considerem dos casos.

Si A és una matriu invertible, per la [caracterització de les matrius invertibles](#), existeixen matrius elementals $E_1, \dots, E_l$ de forma que

$$A = E_1 \cdots E_l.$$

Aleshores

$$\text{Det}(AB) = \text{Det}(E_1 \cdots E_l B) = \text{Det}(E_1) \cdots \text{Det}(E_l) \text{Det}(B) = \text{Det}(A) \text{Det}(B).$$

Si A no és invertible, aleshores AB tampoc és invertible pel Lema [5.1](#). Aleshores, per la Proposició [5.1](#), es té que

$$\text{Det}(A) \text{Det}(B) = 0 = \text{Det}(AB).$$

En qualsevol cas, $\text{Det}(AB) = \text{Det}(A) \text{Det}(B)$. □

Corol·lari 5.4. *Siga $A \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ una matriu invertible. Aleshores*

$$\text{Det}(A^{-1}) = \frac{1}{\text{Det}(A)}.$$

Demostració. Com $A^{-1}A = I_n$ es té, per la Definició [5.1](#) i la Proposició [5.2](#), que

$$1 = \text{Det}(I_n) = \text{Det}(A^{-1}) \text{Det}(A).$$

Per altra banda, com A és una matriu invertible, per la Proposició [5.1](#), el seu determinant no és nul. Per tant, en l'anterior expressió podem passar dividint $\text{Det}(A)$ fins a obtenir l'expressió desitjada. □

Passem a continuació a investigar la relació entre el determinant d'una matriu i el determinant de la seua matriu transposada.

Proposició 5.3. *Siga $E \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ una matriu elemental. Aleshores $\text{Det}(E) = \text{Det}(E^t)$.*

Demostració. Per a la demostració d'aquesta proposició tindrem en compte els resultats de la [proposició sobre transposades de matrius elementals](#), on s'especifica la forma concreta de les respectives matrius elementals. Així, considerem els diferents casos.

- i. Siguen $1 \leq i, j \leq n$ amb $i \neq j$. Aleshores $E_{ij}^t = E_{ij}$ i el resultat se segueix de forma immediata.
- ii. Siga $1 \leq i \leq n$ i siga $\lambda \in \mathbb{K} - \{0\}$. Aleshores $E_{\lambda i}^t = E_{\lambda i}$ i el resultat se segueix de forma immediata.
- iii. Siguen $1 \leq i, j \leq n$ i siga $\lambda \in \mathbb{K}$. Aleshores

$$\text{Det}(E_{i+\lambda j}^t) = \text{Det}(E_{j+\lambda i}) = 1 = \text{Det}(E_{i+\lambda j}).$$

Queda així demostrada la proposició. □

Proposició 5.4. *Siga A una matriu en $M_n(\mathbb{K})$, aleshores $\text{Det}(A) = \text{Det}(A^t)$.*

Demostració. Considerem dos casos per a A: (i) que siga invertible o (ii) que no ho siga.

- i. Si A és una matriu invertible, aleshores per la [caracterització de les matrius invertibles](#), tenim l'existència d'una seqüència finita de matrius elementals $E_1, \dots, E_l$ tals que

$$A = E_1 \cdots E_l.$$

Aleshores, la matriu transposada d'A s'expressa com a

$$A^t = E_l^t \cdots E_1^t.$$

Aleshores, emprant les Proposicions [5.2](#) i [5.3](#), arribem a que

$$\text{Det}(A^t) = \text{Det}(E_l^t \cdots E_1^t) = \text{Det}(E_l^t) \cdots \text{Det}(E_1^t) = \text{Det}(E_l) \cdots \text{Det}(E_1) = \text{Det}(A).$$

- ii. Si A no és invertible aleshores, pel [corol·lari sobre la invertibilitat de la transposada](#), es té que A^t tampoc és invertible. Aleshores per la Proposició [5.1](#) es té que

$$\text{Det}(A^t) = 0 = \text{Det}(A).$$

En qualsevol cas, el determinant d'una matriu coincideix amb el de la seua transposada. $\square$

5.2 Existència i unicitat

En aquesta darrera secció, comprovarem l'existència i unicitat de l'aplicació determinant.

Proposició 5.5 (Unicitat de l'aplicació determinant). *L'aplicació determinant és única.*

Demostració. Suposem que existeixen dues aplicacions determinant

$$\text{Det}: M_n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}; \quad \text{Det}': M_n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}.$$

Aleshores, pel Corol·lari [5.1](#), tenim que les aplicacions Det i Det' coincideixen per a matrius elementals. És a dir, si $E \in M_n(\mathbb{K})$ és una matriu elemental, aleshores

$$\text{Det}(E) = \text{Det}'(E).$$

Siga A una matriu qualsevol en $M_n(\mathbb{K})$. Volem demostrar que $\text{Det}(A) = \text{Det}'(A)$. Considerem dos casos per a A: (i) que siga invertible o (ii) que no ho siga.

- i. Si A és una matriu invertible, aleshores per la [caracterització de les matrius invertibles](#), tenim l'existència d'una seqüència finita de matrius elementals $E_1, \dots, E_l$ tals que

$$A = E_1 \cdots E_l.$$

Aleshores, emprant la Proposició [5.2](#), arribem a que

$$\text{Det}(A) = \text{Det}(E_1 \cdots E_l) = \text{Det}(E_1) \cdots \text{Det}(E_l) = \text{Det}'(E_1) \cdots \text{Det}'(E_l) = \text{Det}'(E_1 \cdots E_l) = \text{Det}'(A).$$

ii. Si A no és invertible aleshores, per la Proposició 5.1, es té que

$$\text{Det}(A) = 0 = \text{Det}'(A).$$

En qualsevol cas, les dues aplicacions són iguals. $\square$

L'existència de l'aplicació determinant es comprovarà per inducció sobre el tamany de les matrius. Per a poder definir-la necessitem introduir la noció de menor d'una matriu.

Definició 5.2 (Menor). Siga $A \in M_{mn}(\mathbb{K})$ amb $A = (\alpha_{ij})$. Siguen $1 \leq k \leq m$ i $1 \leq l \leq n$, anomenem **menor** kl d' A , denotat per $A_{\widehat{kl}}$, a la matriu que resulta d'eliminar en A la fila k i la columna l .

Definim a continuació, per recursió sobre el tamany de la matriu, l'aplicació que després comprovarem que és una aplicació determinant.

Definició 5.3 (Desenvolupament del determinant per una fila). Si $A \in M_1(\mathbb{K})$, aleshores definim

$$\begin{aligned} \text{Det}: M_1(\mathbb{K}) &\longrightarrow \mathbb{K} \\ A &\longmapsto \alpha_{11}, \quad \text{on } A = [\alpha_{11}] \end{aligned}$$

Suposada definida l'aplicació determinant per a matrius de tamany fins a $n - 1$, siga $A \in M_n(\mathbb{K})$ amb $A = (\alpha_{ij})$, i siga $1 \leq k \leq n$ un índex qualsevol que quedarà fixat, aleshores definim

$$\begin{aligned} \text{Det}: M_n(\mathbb{K}) &\longrightarrow \mathbb{K} \\ A &\longmapsto \sum_{l=1}^n (-1)^{k+l} \alpha_{kl} \text{Det}(A_{\widehat{kl}}). \end{aligned}$$

Anomenarem a aquesta definició **desenvolupament del determinant per la fila k** .

Exemple 5.1. Comprovarem l'expressió concreta que té l'aplicació determinant sobre matrius de tamany 2 i 3. Per a l'exemple prendrem la convenció $k = 1$, és a dir, desenvoluparem l'expressió del determinant per la fila 1.

Si $A \in M_2(\mathbb{K})$ amb

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{bmatrix}$$

Aleshores

$$\begin{aligned} \text{Det}(A) &= (-1)^{1+1} \alpha_{11} \text{Det}(A_{\widehat{11}}) + (-1)^{1+2} \alpha_{12} \text{Det}(A_{\widehat{12}}) \\ &= \alpha_{11} \text{Det}([\alpha_{22}]) - \alpha_{12} \text{Det}([\alpha_{21}]) \\ &= \alpha_{11} \alpha_{22} - \alpha_{12} \alpha_{21}. \end{aligned}$$

Si $A \in M_3(\mathbb{K})$ amb

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{bmatrix}$$

Aleshores

$$\begin{aligned}
\text{Det}(\mathbf{A}) &= (-1)^{1+1}\alpha_{11}\text{Det}(\mathbf{A}_{\widehat{11}}) + (-1)^{1+2}\alpha_{12}\text{Det}(\mathbf{A}_{\widehat{12}}) + (-1)^{1+3}\alpha_{13}\text{Det}(\mathbf{A}_{\widehat{13}}) \\
&= \alpha_{11}\text{Det}\left(\begin{bmatrix}\alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{32} & \alpha_{33}\end{bmatrix}\right) - \alpha_{12}\text{Det}\left(\begin{bmatrix}\alpha_{21} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{33}\end{bmatrix}\right) + \alpha_{13}\text{Det}\left(\begin{bmatrix}\alpha_{21} & \alpha_{22} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32}\end{bmatrix}\right) \\
&= \alpha_{11}(\alpha_{22}\alpha_{33} - \alpha_{23}\alpha_{32}) - \alpha_{12}(\alpha_{21}\alpha_{33} - \alpha_{23}\alpha_{31}) + \alpha_{13}(\alpha_{21}\alpha_{32} - \alpha_{22}\alpha_{31}) \\
&= \alpha_{11}\alpha_{22}\alpha_{33} + \alpha_{12}\alpha_{23}\alpha_{31} + \alpha_{21}\alpha_{32}\alpha_{13} - \alpha_{13}\alpha_{22}\alpha_{31} - \alpha_{21}\alpha_{12}\alpha_{33} - \alpha_{32}\alpha_{23}\alpha_{11}.
\end{aligned}$$

Aquesta darrera expressió rep el nom de **Regla de Sarrus** per al càlcul del determinant d'una matriu en $M_3(\mathbb{K})$.

Per a la demostració que l'aplicació Det acabada de definir és una vertadera aplicació determinant, necessitarem considerar els següents lemes previs.

Lema 5.2. *Siga un índex $1 \leq i \leq n$, i siguin $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ i $\mathbf{C}$ les següents matrius en $M_n(\mathbb{K})$*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \xi_{11} & \cdots & \xi_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{i1} & \cdots & \alpha_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \xi_{n1} & \cdots & \xi_{nn} \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \xi_{11} & \cdots & \xi_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_{i1} & \cdots & \beta_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \xi_{n1} & \cdots & \xi_{nn} \end{bmatrix} \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} \xi_{11} & \cdots & \xi_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{i1} + \beta_{i1} & \cdots & \alpha_{in} + \beta_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \xi_{n1} & \cdots & \xi_{nn} \end{bmatrix}$$

Aleshores $\text{Det}(\mathbf{C}) = \text{Det}(\mathbf{A}) + \text{Det}(\mathbf{B})$.

Demostració. Farem la demostració per inducció sobre el tamany de les matrius.

Cas base. Quan $n = 1$. En aquest cas l'únic índex possible és $i = 1$. Així es té que

$$\text{Det}\left(\begin{bmatrix}\alpha_{11} + \beta_{11}\end{bmatrix}\right) = \alpha_{11} + \beta_{11} = \text{Det}\left(\begin{bmatrix}\alpha_{11}\end{bmatrix}\right) + \text{Det}\left(\begin{bmatrix}\beta_{11}\end{bmatrix}\right)$$

Pas inductiu. Suposem que l'equació és certa per a matrius de tamany fins a $n - 1$. Anem a demostrar que la corresponent equació també se satisfà per a matrius de tamany n .

Siga $1 \leq i \leq n$. Per a la demostració necessitarem diferenciar els casos (i) $k = i$ i (ii) $k \neq i$, on k és la fila per la qual desenvolupem el determinant.

i. **Cas $k = i$.** Notem que, per a tot $1 \leq l \leq n$, es té que

$$\mathbf{A}_{\widehat{kl}} = \mathbf{B}_{\widehat{kl}} = \mathbf{C}_{\widehat{kl}}.$$

Així,

$$\begin{aligned}
\text{Det}(\mathbf{C}) &= \sum_{l=1}^n (-1)^{k+l} (\alpha_{kl} + \beta_{kl}) \text{Det}(\mathbf{C}_{\widehat{kl}}) \\
&= \sum_{l=1}^n (-1)^{k+l} \alpha_{kl} \text{Det}(\mathbf{C}_{\widehat{kl}}) + \sum_{l=1}^n (-1)^{k+l} \beta_{kl} \text{Det}(\mathbf{C}_{\widehat{kl}}) \\
&= \sum_{l=1}^n (-1)^{k+l} \alpha_{kl} \text{Det}(\mathbf{A}_{\widehat{kl}}) + \sum_{l=1}^n (-1)^{k+l} \beta_{kl} \text{Det}(\mathbf{B}_{\widehat{kl}}) \\
&= \text{Det}(\mathbf{A}) + \text{Det}(\mathbf{B}).
\end{aligned}$$

ii. **Cas** $k \neq i$. Suposem sense pèrdua de generalitat que $k < i$. Notem que, per a tot $1 \leq l \leq n$, els respectius menors vénen donats per les següents matrius, on l'absència d'una entrada ve marcada per $\widehat{}$

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}_{\widehat{kl}} &= \begin{bmatrix} \xi_{11} & \cdots & \widehat{\xi_{1l}} & \cdots & \xi_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \widehat{\xi_{k1}} & \cdots & \widehat{\xi_{kl}} & \cdots & \widehat{\xi_{kn}} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{i1} & \cdots & \widehat{\alpha_{il}} & \cdots & \alpha_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \xi_{n1} & \cdots & \widehat{\xi_{nl}} & \cdots & \xi_{nn} \end{bmatrix} & \mathbf{B}_{\widehat{kl}} &= \begin{bmatrix} \xi_{11} & \cdots & \widehat{\xi_{1l}} & \cdots & \xi_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \widehat{\xi_{k1}} & \cdots & \widehat{\xi_{kl}} & \cdots & \widehat{\xi_{kn}} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_{i1} & \cdots & \widehat{\beta_{il}} & \cdots & \beta_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \xi_{n1} & \cdots & \widehat{\xi_{nl}} & \cdots & \xi_{nn} \end{bmatrix} \\
\mathbf{C}_{\widehat{kl}} &= \begin{bmatrix} \xi_{11} & \cdots & \widehat{\xi_{1l}} & \cdots & \xi_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \widehat{\xi_{k1}} & \cdots & \widehat{\xi_{kl}} & \cdots & \widehat{\xi_{kn}} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{i1} + \beta_{i1} & \cdots & \widehat{\alpha_{il} + \beta_{il}} & \cdots & \alpha_{in} + \beta_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \xi_{n1} & \cdots & \widehat{\xi_{nl}} & \cdots & \xi_{nn} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Aleshores, per inducció, per a tot $1 \leq l \leq n$, es té que

$$\text{Det}(\mathbf{C}_{\widehat{kl}}) = \text{Det}(\mathbf{A}_{\widehat{kl}}) + \text{Det}(\mathbf{B}_{\widehat{kl}}).$$

D'aquesta forma, se satisfan les següents equacions

$$\begin{aligned}
\text{Det}(\mathbf{C}) &= \sum_{l=1}^n (-1)^{k+l} \xi_{kl} \text{Det}(\mathbf{C}_{\widehat{kl}}) \\
&= \sum_{l=1}^n (-1)^{k+l} \xi_{kl} \left(\text{Det}(\mathbf{A}_{\widehat{kl}}) + \text{Det}(\mathbf{B}_{\widehat{kl}}) \right) \\
&= \sum_{l=1}^n (-1)^{k+l} \xi_{kl} \text{Det}(\mathbf{A}_{\widehat{kl}}) + \sum_{l=1}^n (-1)^{k+l} \xi_{kl} \text{Det}(\mathbf{B}_{\widehat{kl}}) \\
&= \text{Det}(\mathbf{A}) + \text{Det}(\mathbf{B}).
\end{aligned}$$

En qualsevol cas, $\text{Det}(\mathbf{C}) = \text{Det}(\mathbf{A}) + \text{Det}(\mathbf{B})$. □

Provarem a continuació que el determinant d'una matriu amb dues files iguals és zero.

Lema 5.3. *Siga $n \in \mathbb{N}$ amb $n \geq 2$, si l'aplicació $\text{Det}: M_{n-1}(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$ és una aplicació determinant i $\mathbf{B} \in M_n(\mathbb{K})$ és una matriu amb dues files iguals, aleshores $\text{Det}(\mathbf{B}) = 0$.*

Demostració. Siguen $1 \leq i, j \leq n$ índexs amb $i < j$ i siga $\mathbf{B}$ una matriu en $M_n(\mathbb{K})$ tal que la fila i i la fila j coincideixen, és a dir, una matriu del tipus

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \xi_{11} & \cdots & \xi_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_{i1} & \cdots & \beta_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_{j1} & \cdots & \beta_{jn} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \xi_{n1} & \cdots & \xi_{nn} \end{bmatrix}$$

on, per a tot $1 \leq l \leq n$, se satisfà que $\beta_{il} = \beta_{jl}$. Anem a demostrar que $\text{Det}(\mathbf{B}) = 0$.

Cal diferenciar casos depenent de la relació de k , l'índex pel qual desenvolupem l'expressió del determinant de $\mathbf{B}$, i dels índexs i i j . Així distingirem els casos $k = i$, $k = j$ i $k \neq i, j$.

- **Cas $k = i$.** En aquest cas es té que, per a tot $1 \leq l \leq n$, els menors kl i jl de la matriu $\mathbf{B}$ venen donats per les matrius

$$\mathbf{B}_{\widehat{kl}} = \begin{bmatrix} \xi_{11} & \cdots & \widehat{\xi_{1l}} & \cdots & \xi_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \widehat{\beta_{k1}} & \cdots & \widehat{\beta_{kl}} & \cdots & \widehat{\beta_{kn}} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_{j1} & \cdots & \widehat{\beta_{jl}} & \cdots & \beta_{jn} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \xi_{n1} & \cdots & \widehat{\xi_{nl}} & \cdots & \xi_{nn} \end{bmatrix} \quad \mathbf{B}_{\widehat{jl}} = \begin{bmatrix} \xi_{11} & \cdots & \widehat{\xi_{1l}} & \cdots & \xi_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_{k1} & \cdots & \widehat{\beta_{kl}} & \cdots & \beta_{kn} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \widehat{\beta_{j1}} & \cdots & \widehat{\beta_{jl}} & \cdots & \widehat{\beta_{jn}} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \xi_{n1} & \cdots & \widehat{\xi_{nl}} & \cdots & \xi_{nn} \end{bmatrix}$$

En aquest cas es dona la següent igualtat

$$\mathbf{B}_{\widehat{kl}} = \mathbf{E}_{(j-2)(j-1)}^{(n-1)} \cdots \mathbf{E}_{(k+1)(k+2)}^{(n-1)} \mathbf{E}_{k(k+1)}^{(n-1)} \mathbf{B}_{\widehat{jl}}.$$

És a dir, per a obtenir el menor kl de la matriu $\mathbf{B}$, podem partir del menor jl de la matriu $\mathbf{B}$ i traslladar la fila k , cap avall i fila per fila, fins a la posició $j - 1$. Com per hipòtesi $\text{Det}: M_{n-1}(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$ és una aplicació determinant, es té que, per a tot $1 \leq l \leq n$,

$$\text{Det}(\mathbf{B}_{\widehat{kl}}) = (-1)^{j-k+1} \text{Det}(\mathbf{B}_{\widehat{jl}}).$$

Aleshores es té que

$$\begin{aligned}
\text{Det}(\mathbf{B}) &= \sum_{l=1}^n (-1)^{k+l} \beta_{kl} \text{Det}(\widehat{\mathbf{B}}_{kl}) \\
&= \sum_{l=1}^n (-1)^{k+j-j+l} \beta_{jl} (-1)^{j-k+1} \text{Det}(\widehat{\mathbf{B}}_{jl}) \\
&= \sum_{l=1}^n (-1)^{2j-2k+1} (-1)^{j+l} \beta_{jl} \text{Det}(\widehat{\mathbf{B}}_{jl}) \\
&= - \sum_{l=1}^n (-1)^{j+l} \beta_{jl} \text{Det}(\widehat{\mathbf{B}}_{jl}) \\
&= -\text{Det}(\mathbf{B}).
\end{aligned}$$

De l'expressió $\text{Det}(\mathbf{B}) = -\text{Det}(\mathbf{B})$, deduïm que $\text{Det}(\mathbf{B}) = 0$.

- **Cas $k = j$.** En aquest cas es té que, per a tot $1 \leq l \leq n$, els menors kl i il de la matriu $\mathbf{B}$ venen donats per les matrius

$$\widehat{\mathbf{B}}_{kl} = \begin{bmatrix} \xi_{11} & \cdots & \widehat{\xi_{1l}} & \cdots & \xi_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_{i1} & \cdots & \widehat{\beta_{il}} & \cdots & \beta_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \widehat{\beta_{k1}} & \cdots & \widehat{\beta_{kl}} & \cdots & \widehat{\beta_{kn}} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \xi_{n1} & \cdots & \widehat{\xi_{nl}} & \cdots & \xi_{nn} \end{bmatrix} \quad \widehat{\mathbf{B}}_{il} = \begin{bmatrix} \xi_{11} & \cdots & \widehat{\xi_{1l}} & \cdots & \xi_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \widehat{\beta_{i1}} & \cdots & \widehat{\beta_{il}} & \cdots & \widehat{\beta_{in}} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_{k1} & \cdots & \widehat{\beta_{kl}} & \cdots & \beta_{kn} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \xi_{n1} & \cdots & \widehat{\xi_{nl}} & \cdots & \xi_{nn} \end{bmatrix}$$

En aquest cas es dona la següent igualtat

$$\widehat{\mathbf{B}}_{kl} = \mathbf{E}_{(i+1)i}^{(n-1)} \cdots \mathbf{E}_{(k-2)(k-3)}^{(n-1)} \mathbf{E}_{(k-1)(k-2)}^{(n-1)} \widehat{\mathbf{B}}_{il}.$$

És a dir, per a obtenir el menor kl de la matriu $\mathbf{B}$, podem partir del menor il de la matriu $\mathbf{B}$ i traslladar la fila $k-1$, cap amunt i fila per fila, fins a la posició i . Com per hipòtesi $\text{Det}: M_{n-1}(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$ és una aplicació determinant, es té que, per a tot $1 \leq l \leq n$,

$$\text{Det}(\widehat{\mathbf{B}}_{kl}) = (-1)^{i-k+1} \text{Det}(\widehat{\mathbf{B}}_{il}).$$

A partir d'aquest punt, el raonament és anàleg al de l'anterior cas.

- **Cas $k \neq i, j$.** En aquest cas es té que, per a tot $1 \leq l \leq n$, el menor kl de la matriu $\mathbf{B}$

ve donat per la matriu

$$\mathbf{B}_{\widehat{kl}} = \begin{bmatrix} \xi_{11} & \cdots & \widehat{\xi_{1l}} & \cdots & \xi_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_{i1} & \cdots & \widehat{\beta_{il}} & \cdots & \beta_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \widehat{\beta_{k1}} & \cdots & \widehat{\beta_{kl}} & \cdots & \widehat{\beta_{kn}} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_{j1} & \cdots & \widehat{\beta_{jl}} & \cdots & \beta_{jn} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \xi_{n1} & \cdots & \widehat{\xi_{nl}} & \cdots & \xi_{nn} \end{bmatrix}$$

Notem que, per a tot $1 \leq l \leq n$, es té que el menor $\mathbf{B}_{\widehat{kl}}$ té dues files iguals. Pel que fa a aquesta propietat, la posició relativa de k respecte als índexs i i j és indiferent. Com per hipòtesi $\text{Det}: M_{n-1}(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$ és una aplicació determinant, es té que, per a tot $1 \leq l \leq n$,

$$\text{Det}(\mathbf{B}_{\widehat{kl}}) = 0.$$

Aleshores es té que

$$\text{Det}(\mathbf{B}) = \sum_{l=1}^n (-1)^{k+l} \beta_{kl} \text{Det}(\mathbf{B}_{\widehat{kl}}) = 0$$

En qualsevol cas arribem a demostrar que $\text{Det}(\mathbf{B}) = 0$. □

Proposició 5.6 (Existència de l'aplicació determinant). *L'aplicació determinant existeix. Concretament, l'aplicació Det donada en la Definició 5.3 és una aplicació determinant.*

Demostració. Només caldrà comprovar que se satisfan les propietats requerides en la Definició 5.1. Farem la demostració per inducció sobre el tamany de les matrius.

Cas base. Per a matrius de tamany 1 es té que

- i. Siga $\mathbf{I}_1$ la matriu identitat de tamany 1. Així

$$\text{Det}(\mathbf{I}_1) = \text{Det}(\begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}) = 1.$$

- ii. Notem que per a matrius de tamany 1 no podem trobar dos índexs diferents. Aleshores la propietat ii. se satisfà de forma trivial.
- iii. Siga λ un escalar no nul en $\mathbb{K} - \{0\}$. Siga $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} \end{bmatrix} \in M_1(\mathbb{K})$. Aleshores

$$\text{Det}(\mathbf{E}_{\lambda 1} \mathbf{A}) = \text{Det}(\begin{bmatrix} \lambda \alpha_{11} \end{bmatrix}) = \lambda \alpha_{11} = \lambda \text{Det}(\mathbf{A}).$$

- iv. Notem que per a matrius de tamany 1 no podem trobar dos índexs diferents. Aleshores la propietat iv. se satisfà de forma trivial.

Pas inductiu. Suposem que les aplicacions abans definides són, efectivament, aplicacions determinant per a matrius de tamany fins a $n - 1$. Anem a demostrar que l'aplicació definida per a matrius de tamany n és, efectivament, una aplicació determinant.

i. Siga I_n la matriu identitat de tamany n . Així

$$\text{Det}(I_n) = \sum_{l=1}^n (-1)^{k+l} \alpha_{kl} \text{Det}((I_n)_{\widehat{kl}}).$$

Notem que en l'anterior expressió, $\alpha_{kk} = 1$ és l'única entrada no nul·la en la fila k d' I_n . Aleshores, en l'anterior sumatori, només quedaria el terme $l = k$. Notem també que el menor $(I_n)_{\widehat{kk}}$ és la matriu identitat de tamany $n - 1$. Així, per inducció, es té que

$$\text{Det}(I_n) = \sum_{l=1}^n (-1)^{k+l} \alpha_{kl} \text{Det}((I_n)_{\widehat{kl}}) = (-1)^{k+k} (1) \text{Det}(I_{n-1}) = 1.$$

ii. Siguen índexs $1 \leq i, j \leq n$ amb $i \neq j$. Considerem la matriu elemental $E_{ij}^{(n)}$ d'intercanvi de les files i i j . Notem que aquesta matriu pot expressar-se en funció de les altres operacions elementals com segueix

$$E_{ij}^{(n)} = E_{(-1)j}^{(n)} E_{i+j}^{(n)} E_{j-i}^{(n)} E_{i+j}^{(n)},$$

on $E_{(-1)j}^{(n)}$ denota la matriu elemental que multiplica la fila j per -1 , $E_{i+j}^{(n)}$ la que suma a la fila i la fila j i $E_{j-i}^{(n)}$ la que resta a la fila j la fila i .

Per tant, si comprovem que l'aplicació determinant funciona bé amb la resta d'operacions elementals ja ho tindríem, ja que, si $A \in M_n(\mathbb{K})$, es tindria que

$$\text{Det}(E_{ij}^{(n)} A) = \text{Det}(E_{(-1)j}^{(n)} E_{i+j}^{(n)} E_{j-i}^{(n)} E_{i+j}^{(n)} A) = -\text{Det}(A).$$

iii. Siga un índex $1 \leq i \leq n$ i un escalar no nul $\lambda \in \mathbb{K} - \{0\}$. Considerem la matriu elemental $E_{\lambda i}^{(n)}$ que multiplica la fila i per λ . Siga A una matriu en $M_n(\mathbb{K})$. Volem comprovar que

$$\text{Det}(E_{\lambda i}^{(n)} A) = \lambda \text{Det}(A).$$

Considerem diferents casos depenent de la posició relativa de l'índex i respecte a l'índex k sobre el qual desenvolupem el determinant.

• **Cas $i < k$.** En aquest cas, les matrius A i $E_{\lambda i}^{(n)} A$ venen donades per les matrius següents

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{i1} & \cdots & \alpha_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{k1} & \cdots & \alpha_{kn} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \cdots & \alpha_{nn} \end{bmatrix}; \quad E_{\lambda i}^{(n)} A = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda \alpha_{i1} & \cdots & \lambda \alpha_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{k1} & \cdots & \alpha_{kn} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \cdots & \alpha_{nn} \end{bmatrix}.$$

Notem que, per a tot $1 \leq l \leq n$, les entrades kl de les matrius A i $E_{\lambda i}^{(n)} A$ són iguals. També notem que, per a tot $1 \leq l \leq n$, el menor kl de la matriu $E_{\lambda i}^{(n)} A$ coincideix amb el menor kl de la matriu A en totes les files a excepció de la fila i , que queda multiplicada per λ . És a dir, per a tot $1 \leq l \leq n$, es té que

$$(E_{\lambda i}^{(n)} A)_{\widehat{kl}} = E_{\lambda i}^{(n-1)} A_{\widehat{kl}}.$$

Aleshores, per inducció, tenim que

$$\begin{aligned} \text{Det}(E_{\lambda i}^{(n)} A) &= \sum_{l=1}^n (-1)^{k+l} \alpha_{kl} \text{Det}((E_{\lambda i}^{(n)} A)_{\widehat{kl}}) \\ &= \sum_{l=1}^n (-1)^{k+l} \alpha_{kl} \text{Det}(E_{\lambda i}^{(n-1)} A_{\widehat{kl}}) \\ &= \sum_{l=1}^n (-1)^{k+l} \alpha_{kl} \lambda \text{Det}(A_{\widehat{kl}}) \\ &= \lambda \sum_{l=1}^n (-1)^{k+l} \alpha_{kl} \text{Det}(A_{\widehat{kl}}) \\ &= \lambda \text{Det}(A). \end{aligned}$$

- **Cas $i > k$.** En aquest cas, les matrius A i $E_{\lambda i}^{(n)} A$ venen donades per les matrius següents

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{k1} & \cdots & \alpha_{kn} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{i1} & \cdots & \alpha_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \cdots & \alpha_{nn} \end{bmatrix}; \quad E_{\lambda i}^{(n)} A = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{k1} & \cdots & \alpha_{kn} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda \alpha_{i1} & \cdots & \lambda \alpha_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \cdots & \alpha_{nn} \end{bmatrix}.$$

Notem que, per a tot $1 \leq l \leq n$, les entrades kl de les matrius A i $E_{\lambda i}^{(n)} A$ són iguals. També notem que, per a tot $1 \leq l \leq n$, el menor kl de la matriu $E_{\lambda i}^{(n)} A$ coincideix amb el menor kl de la matriu A en totes les files a excepció de la fila $i - 1$, que queda multiplicada per λ . És a dir, per a tot $1 \leq l \leq n$, es té que

$$(E_{\lambda i}^{(n)} A)_{\widehat{kl}} = E_{\lambda(i-1)}^{(n-1)} A_{\widehat{kl}}.$$

A partir d'ací el raonament és anàleg al de l'anterior cas.

- **Cas $i = k$.** En aquest cas, les matrius A i $E_{\lambda k}^{(n)} A$ venen donades per les matrius següents

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{k1} & \cdots & \alpha_{kn} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \cdots & \alpha_{nn} \end{bmatrix}; \quad E_{\lambda k}^{(n)} A = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda \alpha_{k1} & \cdots & \lambda \alpha_{kn} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \cdots & \alpha_{nn} \end{bmatrix}.$$

Notem que, per a tot $1 \leq l \leq n$, l'entrada kl de la matriu $E_{\lambda k}^{(n)}A$ és λ vegades l'entrada kl de la matriu A . També notem que, per a tot $1 \leq l \leq n$, els menors kl de les matrius A i $E_{\lambda k}^{(n)}A$ coincideixen. Aleshores,

$$\begin{aligned} \text{Det}(E_{\lambda k}^{(n)}A) &= \sum_{l=1}^n (-1)^{k+l} \lambda \alpha_{kl} \text{Det}((E_{\lambda k}^{(n)}A)_{\widehat{kl}}) \\ &= \sum_{l=1}^n (-1)^{k+l} \lambda \alpha_{kl} \text{Det}(A_{\widehat{kl}}) \\ &= \lambda \sum_{l=1}^n (-1)^{k+l} \alpha_{kl} \text{Det}(A_{\widehat{kl}}) \\ &= \lambda \text{Det}(A). \end{aligned}$$

En qualsevol cas, queda demostrat que

$$\text{Det}(E_{\lambda i}^{(n)}A) = \lambda \text{Det}(A).$$

- iv. Siguen índexs $1 \leq i, j \leq n$ amb $i < j$ i un escalar $\lambda \in \mathbb{K}$. Considerem la matriu elemental $E_{i+\lambda j}^{(n)}$ que suma a la fila i la fila j multiplicada per λ . Siga A una matriu en $M_n(\mathbb{K})$. Volem comprovar que

$$\text{Det}(E_{i+\lambda j}^{(n)}A) = \text{Det}(A).$$

Considerem diferents casos depenent de la posició relativa dels índexs i i j respecte a l'índex k sobre el qual desenvolupem el determinant.

- **Cas** $k = i$. En aquest cas, les matrius A i $E_{k+\lambda j}^{(n)}A$ venen donades per les matrius següents

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{k1} & \cdots & \alpha_{kn} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{j1} & \cdots & \alpha_{jn} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \cdots & \alpha_{nn} \end{bmatrix}; \quad E_{k+\lambda j}^{(n)}A = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{k1} + \lambda \alpha_{j1} & \cdots & \alpha_{kn} + \lambda \alpha_{jn} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{j1} & \cdots & \alpha_{jn} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \cdots & \alpha_{nn} \end{bmatrix}.$$

Notem que, per a tot $1 \leq l \leq n$, l'entrada kl de la matriu $E_{k+\lambda j}^{(n)}A$ coincideix amb l'entrada kl d' A més λ vegades l'entrada jl d' A . També notem que, per a tot $1 \leq l \leq n$, els menors kl de les matrius A i $E_{k+\lambda j}^{(n)}A$ coincideixen.

Aleshores

$$\begin{aligned}
\text{Det}(\mathbf{E}_{k+\lambda j}^{(n)} \mathbf{A}) &= \sum_{l=1}^n (-1)^{k+l} (\alpha_{kl} + \lambda \alpha_{jl}) \text{Det}((\mathbf{E}_{k+\lambda j}^{(n)} \mathbf{A})_{\widehat{kl}}) \\
&= \sum_{l=1}^n (-1)^{k+l} (\alpha_{kl} + \lambda \alpha_{jl}) \text{Det}(\mathbf{A}_{\widehat{kl}}) \\
&= \sum_{l=1}^n (-1)^{k+l} \alpha_{kl} \text{Det}(\mathbf{A}_{\widehat{kl}}) + \lambda \sum_{l=1}^n (-1)^{k+l} \alpha_{jl} \text{Det}(\mathbf{A}_{\widehat{kl}}) \\
&= \text{Det}(\mathbf{A}) + \lambda \sum_{l=1}^n (-1)^{k+l} \alpha_{jl} \text{Det}(\mathbf{A}_{\widehat{kl}}).
\end{aligned}$$

Notem que el terme $\sum_{l=1}^n (-1)^{k+l} \alpha_{jl} \text{Det}(\mathbf{A}_{\widehat{kl}})$ es correspon al determinant, desenvolupat per la fila k , de la següent matriu

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{j1} & \cdots & \alpha_{jn} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{j1} & \cdots & \alpha_{jn} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \cdots & \alpha_{nn} \end{bmatrix}$$

És a dir, per a la matriu $\mathbf{B}$, que coincideix amb $\mathbf{A}$ en totes les files a excepció de la fila k , on trobem una còpia de la fila j d' $\mathbf{A}$. Pel Lema 5.3 es té que

$$\text{Det}(\mathbf{B}) = 0.$$

Aleshores

$$\text{Det}(\mathbf{E}_{k+\lambda j}^{(n)} \mathbf{A}) = \text{Det}(\mathbf{A}).$$

- **Cas** $k = j$. En aquest cas, les matrius $\mathbf{A}$ i $\mathbf{E}_{i+\lambda k}^{(n)} \mathbf{A}$ venen donades per les matrius següents

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{i1} & \cdots & \alpha_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{k1} & \cdots & \alpha_{kn} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \cdots & \alpha_{nn} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{E}_{i+\lambda k}^{(n)} \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{i1} + \lambda \alpha_{k1} & \cdots & \alpha_{in} + \lambda \alpha_{kn} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{k1} & \cdots & \alpha_{kn} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \cdots & \alpha_{nn} \end{bmatrix}.$$

Notem que, per a tot $1 \leq l \leq n$, l'entrada kl de la matriu $\mathbf{E}_{i+\lambda k}^{(n)}\mathbf{A}$ coincideix amb l'entrada kl d' $\mathbf{A}$. També notem que, per a tot $1 \leq l \leq n$, els menors kl de les matrius $\mathbf{A}$ i $\mathbf{E}_{i+\lambda k}^{(n)}\mathbf{A}$ venen donats per les següents expressions

$$\mathbf{A}_{\widehat{kl}} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \widehat{\alpha_{1l}} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{i1} & \cdots & \widehat{\alpha_{il}} & \cdots & \alpha_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \widehat{\alpha_{k1}} & \cdots & \widehat{\alpha_{kl}} & \cdots & \widehat{\alpha_{kn}} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \cdots & \widehat{\alpha_{nl}} & \cdots & \alpha_{nn} \end{bmatrix}; \quad \left(\mathbf{E}_{i+\lambda k}^{(n)}\mathbf{A}\right)_{\widehat{kl}} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \widehat{\alpha_{1l}} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{i1} + \lambda\alpha_{k1} & \cdots & \widehat{\alpha_{il} + \lambda\alpha_{kl}} & \cdots & \alpha_{in} + \lambda\alpha_{kn} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \widehat{\alpha_{k1}} & \cdots & \widehat{\alpha_{kl}} & \cdots & \widehat{\alpha_{kn}} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \cdots & \widehat{\alpha_{nl}} & \cdots & \alpha_{nn} \end{bmatrix}.$$

Per a cada $1 \leq l \leq n$, considerem la matriu de tamany $n-1$ donada per

$$\mathbf{B}_l = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \widehat{\alpha_{1l}} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{k1} & \cdots & \widehat{\alpha_{kl}} & \cdots & \alpha_{kn} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \widehat{\alpha_{k1}} & \cdots & \widehat{\alpha_{kl}} & \cdots & \widehat{\alpha_{kn}} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \cdots & \widehat{\alpha_{nl}} & \cdots & \alpha_{nn} \end{bmatrix},$$

és a dir, la matriu que resulta de substituir, en el menor $\mathbf{A}_{\widehat{kl}}$, la fila corresponent a la fila i d' $\mathbf{A}$ per la fila k d' $\mathbf{A}$ (sense l'entrada l).

Així, per a tot $1 \leq l \leq n$, pel Lema 5.2 i per inducció arribem a que

$$\text{Det}\left(\left(\mathbf{E}_{i+\lambda k}^{(n)}\mathbf{A}\right)_{\widehat{kl}}\right) = \text{Det}(\mathbf{A}_{\widehat{kl}}) + \lambda \text{Det}(\mathbf{B}_l).$$

Aleshores

$$\begin{aligned} \text{Det}(\mathbf{E}_{i+\lambda k}^{(n)}\mathbf{A}) &= \sum_{l=1}^n (-1)^{k+l} \alpha_{kl} \text{Det}((\mathbf{E}_{i+\lambda k}^{(n)}\mathbf{A})_{\widehat{kl}}) \\ &= \sum_{l=1}^n (-1)^{k+l} \alpha_{kl} \left(\text{Det}(\mathbf{A}_{\widehat{kl}}) + \lambda \text{Det}(\mathbf{B}_l) \right) \\ &= \sum_{l=1}^n (-1)^{k+l} \alpha_{kl} \text{Det}(\mathbf{A}_{\widehat{kl}}) + \lambda \sum_{l=1}^n (-1)^{k+l} \alpha_{kl} \text{Det}(\mathbf{B}_l) \\ &= \text{Det}(\mathbf{A}) + \lambda \sum_{l=1}^n (-1)^{k+l} \alpha_{kl} \text{Det}(\mathbf{B}_l). \end{aligned}$$

Notem que el terme $\sum_{l=1}^n (-1)^{k+l} \alpha_{kl} \text{Det}(\mathbf{B}_l)$ es correspon al determinant, desenvolupat per la fila k , de la següent matriu de tamany n

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1l} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{k1} & \cdots & \alpha_{kl} & \cdots & \alpha_{kn} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{k1} & \cdots & \alpha_{kl} & \cdots & \alpha_{kn} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \cdots & \alpha_{nl} & \cdots & \alpha_{nn} \end{bmatrix},$$

és a dir, la matriu $\mathbf{C}$ que coincideix amb $\mathbf{A}$ en totes les files a excepció de la fila i , on trobem una còpia de la fila k d' $\mathbf{A}$. Notem que $\widehat{\mathbf{C}}_{kl} = \mathbf{B}_l$. Pel Lema 5.3 es té que

$$\text{Det}(\mathbf{C}) = 0.$$

Aleshores

$$\text{Det}(\mathbf{E}_{i+\lambda k}^{(n)} \mathbf{A}) = \text{Det}(\mathbf{A}).$$

- **Cas $k \neq i, j$.** En aquest cas, les matrius $\mathbf{A}$ i $\mathbf{E}_{i+\lambda j}^{(n)} \mathbf{A}$ venen donades per les matrius següents

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{i1} & \cdots & \alpha_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{k1} & \cdots & \alpha_{kn} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{j1} & \cdots & \alpha_{jn} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \cdots & \alpha_{nn} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{E}_{i+\lambda j}^{(n)} \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{i1} + \lambda \alpha_{j1} & \cdots & \alpha_{in} + \lambda \alpha_{jn} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{k1} & \cdots & \alpha_{kn} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{j1} & \cdots & \alpha_{jn} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \cdots & \alpha_{nn} \end{bmatrix}.$$

Notem que per a tot $1 \leq l \leq n$ l'entrada kl de la matriu $\mathbf{E}_{i+\lambda j}^{(n)} \mathbf{A}$ coincideix amb l'entrada kl de la matriu $\mathbf{A}$. A més, el menor kl de la matriu $\mathbf{E}_{i+\lambda j}^{(n)} \mathbf{A}$ ve donat pel menor kl de la matriu $\mathbf{A}$ més una operació elemental de tipus iii., on sumem una fila a una altra multiplicada per un escalar. Pel que fa a aquestes propietats, la posició relativa de k respecte als índexs i i j és indiferent. Per inducció es té que, per a tot $1 \leq l \leq n$,

$$\text{Det} \left(\left(\mathbf{E}_{i+\lambda j}^{(n)} \mathbf{A} \right)_{\widehat{kl}} \right) = \text{Det} \left(\mathbf{A}_{\widehat{kl}} \right).$$

Aleshores

$$\begin{aligned}\text{Det} \left(\mathbf{E}_{i+\lambda j}^{(n)} \mathbf{A} \right) &= \sum_{l=1}^n (-1)^{k+l} \alpha_{kl} \text{Det} \left(\left(\mathbf{E}_{i+\lambda j}^{(n)} \mathbf{A} \right)_{\widehat{kl}} \right) \\ &= \sum_{l=1}^n (-1)^{k+l} \alpha_{kl} \text{Det} \left(\mathbf{A}_{\widehat{kl}} \right) \\ &= \text{Det}(\mathbf{A}).\end{aligned}$$

Hem comprovat que les propietats que defineixen una aplicació determinant són satisfetes per l'aplicació donada en la Definició 5.3. Queda demostrada l'existència de l'aplicació determinant. $\square$

Corol·lari 5.5. *L'aplicació determinant pot desenvolupar-se tant per files com per columnes. Tots els desenvolupaments són iguals.*

Demostració. De la demostració de la Proposició 5.6 es dedueix que l'elecció de la fila no importa.

Per a les columnes, siga un índex $1 \leq k \leq n$ qualsevol. Siga $\mathbf{A}$ una matriu qualsevol en $M_n(\mathbb{K})$. Recordem que, per la Proposició 5.4, el determinant d' $\mathbf{A}$ (desenvolupat per la fila k) coincideix amb el determinant d' $\mathbf{A}^t$ (desenvolupat per la fila k). Recordem que si $\mathbf{A} = (\alpha_{ij})$, aleshores $\mathbf{A}^t = (\alpha_{ji})$.

Així es té que

$$\text{Det}(\mathbf{A}) = \text{Det}(\mathbf{A}^t) = \sum_{l=1}^n (-1)^{k+l} \alpha_{lk} \text{Det}(\mathbf{A}_{\widehat{kl}}^t) = \sum_{l=1}^n (-1)^{k+l} \alpha_{lk} \text{Det}(\mathbf{A}_{\widehat{lk}}),$$

on en l'última igualtat hem emprat que $(\mathbf{A}^t)_{\widehat{kl}} = (\mathbf{A}_{\widehat{lk}})^t$ i, de nou, la Proposició 5.4.

És a dir, el determinant d' $\mathbf{A}$ desenvolupat per la fila k és igual al determinant d' $\mathbf{A}$ desenvolupat per la columna k . $\square$

i Nota

Nota. La fórmula que dóna el desenvolupament per fila o columna del determinant d'una matriu s'anomena l'**expansió de Laplace** per al determinant.

6 Diagonalització

Si no es diu el contrari, treballarem amb espais vectorials de dimensió finita. Fixarem per a tot el tema V un $\mathbb{K}$ -espai vectorial amb $\dim_{\mathbb{K}}(V) = n$. Plantegem el següent problema. Donat un endomorfisme $f: V \rightarrow V$ i dues bases $\mathcal{B}$ i $\bar{\mathcal{B}}$ de V , considerem

- A la matriu coordenada d' f de $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}$;
- $\bar{A}$ la matriu coordenada d' f de $\bar{\mathcal{B}}$ a $\bar{\mathcal{B}}$.

Així, si v és un vector qualsevol de V i anomenem

- X les coordenades de v en $\mathcal{B}$;
- Y les coordenades d' $f(v)$ en $\mathcal{B}$;
- $\bar{X}$ les coordenades de v en $\bar{\mathcal{B}}$;
- $\bar{Y}$ les coordenades d' $f(v)$ en $\bar{\mathcal{B}}$,

tenim que

$$AX = Y, \quad \bar{A}\bar{X} = \bar{Y}.$$

Sabem pels resultats vists al [capítol 4](#) que A i $\bar{A}$ són matrius equivalents perquè representen el mateix homomorfisme en dues bases diferents. No obstant, pel que respecta al plantejament del capítol 4, dues coses han canviat. Notem que f és un endomorfisme i, per tant, domini i codomini són iguals. I el segon canvi resulta de considerar les mateixes bases en domini i codomini. Per tant, tot i ser un problema d'equivalència de matrius, en aquest cas podrem trobar una relació entre les matrius A i $\bar{A}$ molt més forta que la d'equivalència.

Així, si prenem P la matriu canvi de base de $\mathcal{B}$ a $\bar{\mathcal{B}}$, trobem les següents igualtats

$$PX = \bar{X}, \quad PY = \bar{Y}.$$

Per tant, de les anteriors equacions, deduïm que

$$\bar{A}PX = \bar{A}\bar{X} = \bar{Y} = PY.$$

Recordem que, per la [proposició sobre la invertibilitat de les matrius canvi de base](#), la matriu P és invertible. Per tant, arribem a que

$$P^{-1}\bar{A}PX = Y.$$

Per la [unicitat de la matriu associada a una aplicació lineal](#), la matriu coordenada d'una aplicació lineal per a una base donada és única. Així trobem la següent relació entre les matrius A i $\bar{A}$

$$P^{-1}\bar{A}P = A.$$

Definició 6.1 (Matrius semblants). Siguen A i B dues matrius en $M_n(\mathbb{K})$. Direm que A i B són **semblants** si existeix una matriu $P \in GL_n(\mathbb{K})$ de forma que $P^{-1}AP = B$.

i Nota

Nota. Ser semblants és una relació d'equivalència sobre el conjunt $M_n(\mathbb{K})$.

Corol·lari 6.1. Siguen A i B dues matrius semblants en $M_n(\mathbb{K})$, aleshores A i B són matrius equivalents.

Corol·lari 6.2. Siguen A i B dues matrius en $M_n(\mathbb{K})$. Les següents afirmacions són equivalents

- i. Les matrius A i B són semblants;
- ii. Les matrius A i B representen el mateix endomorfisme en bases diferents.

6.1 Valors i vectors propis

Pel que hem vist en el començament del tema, donat un endomorfisme $f: V \rightarrow V$, l'elecció de base repercuteix en la forma que tindrà la matriu coordenada d' f . Ens plantegem el següent problema per al que resta de capítol.

! Important

Pregunta. Donat un endomorfisme $f: V \rightarrow V$, podem trobar una base $\mathcal{B}$ de V de manera que la matriu coordenada d' f de $\mathcal{B}$ en $\mathcal{B}$ siga una matriu diagonal?
El problema pot expressar-se equivalentment per a matrius. Donada una matriu A en $M_n(\mathbb{K})$, podem trobar una matriu P en $GL_n(\mathbb{K})$ de manera que $P^{-1}AP$ siga una matriu diagonal?

El fet de demanar una matriu coordenada diagonal respon al fet que les matrius diagonals són molt més senzilles de manipular que les matrius arbitràries.

Posarem nom a les situacions plantejades en el problema anterior.

Definició 6.2 (Endomorfisme i matriu diagonalitzables). Siga V un $\mathbb{K}$ -espai vectorial i siga $f: V \rightarrow V$ un endomorfisme. Direm que f és **diagonalitzable** si existeix una base $\mathcal{B}$ de V de manera que la matriu coordenada d' f de $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}$ és una matriu diagonal.

Equivalentment, si A és una matriu en $M_n(\mathbb{K})$, direm que és **diagonalitzable** si existeix una matriu invertible P en $GL_n(\mathbb{K})$ de manera que

$$P^{-1}AP = D,$$

on D és una matriu diagonal en $M_n(\mathbb{K})$.

Siga $f: V \rightarrow V$ un endomorfisme. Suposem que siga diagonalitzable. Aleshores podem trobar una base $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ de V de manera que si considerem D la matriu coordenada d' f de $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}$, es té que D és una matriu diagonal en $M_n(\mathbb{K})$. Així,

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

En aquesta situació, per a cada $1 \leq j \leq n$, el vector e_j de $\mathcal{B}$ satisfà que

$$f(e_j) = \lambda_j e_j.$$

Posem nom a aquesta condició.

Definició 6.3 (Vector i valor propi). Siga V un $\mathbb{K}$ -espai vectorial, siga $f: V \rightarrow V$ un endomorfisme i siga λ un escalar en $\mathbb{K}$. Direm que un vector $v \in V$ és **propi** per a λ si satisfà

- i. $v \neq 0$;
- ii. $f(v) = \lambda v$.

En aquest cas, direm que λ és un **valor propi** d' f i que v és un **vector propi** associat a λ .

Corol·lari 6.3. Siga V un $\mathbb{K}$ -espai vectorial i siga $f: V \rightarrow V$ un endomorfisme. Les següents afirmacions són equivalents

- i. f és diagonalitzable;
- ii. Tota matriu coordenada d' f és diagonalitzable;
- iii. Existeix una base $\mathcal{B}$ de V formada per vectors propis.

Exemple 6.1. Considerem l' $\mathbb{R}$ -espai vectorial $\mathbb{R}^2$ i l'endomorfisme

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\longmapsto (3x, x + 2y) \end{aligned}$$

Per a la base canònica d' $\mathbb{R}^2$, $\mathcal{B}_c = \{(1, 0), (0, 1)\}$, anomenem A la matriu coordenada d' f de $\mathcal{B}_c$ a $\mathcal{B}_c$.

Així, la matriu A ve donada per

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

A no és una matriu coordenada diagonal. Per a obtindre'n una ens cal trobar vectors propis.

Notem que, per al vector $(1, 1) \in \mathbb{R}^2$ es té que $(1, 1) \neq (0, 0)$ i que

$$f(1, 1) = (3, 3) = 3(1, 1).$$

És a dir, $(1, 1)$ és un vector propi associat al valor propi 3.

Per altra banda, per al vector $(0, 1) \in \mathbb{R}^2$ es té que $(0, 1) \neq (0, 0)$ i que

$$f(0, 1) = (0, 2) = 2(0, 1).$$

És a dir, $(0, 1)$ és un vector propi associat al valor propi 2.

Notem que el conjunt $\mathcal{B} = \{(1, 1), (0, 1)\}$ és una base d' $\mathbb{R}^2$ formada per vectors propis. Així, si anomenem D la matriu coordinada d' f de $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}$, aleshores la matriu D ve donada per

$$D = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

A més, les matrius A i D són semblants. Si anomenem P la matriu canvi de base de $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}_c$, aleshores la matriu P i la seua inversa venen donades per

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}; \quad P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix},$$

i es dóna la relació de semblança

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = D.$$

És a dir, A és diagonalitzable.

i Nota

Nota. Siga $f: V \rightarrow V$ un endomorfisme. Aleshores, si v i w són vectors associats al valor λ per f , és a dir, $f(v) = \lambda v$ i $f(w) = \lambda w$, aleshores la seua suma, $v + w$, també satisfà que

$$f(v + w) = f(v) + f(w) = \lambda v + \lambda w = \lambda(v + w).$$

Per altra banda, si v és un vector associat al valor λ per f , és a dir, $f(v) = \lambda v$, i $\mu \in \mathbb{K}$ és un escalar qualsevol, aleshores el seu producte, μv , també satisfà que

$$f(\mu v) = \mu f(v) = \mu(\lambda v) = \lambda(\mu v).$$

Açò ens fa pensar que hi ha un subespai vectorial associat a λ .

Definició 6.4 (Espai propi). Siga $f: V \rightarrow V$ un endomorfisme i λ un escalar en $\mathbb{K}$. Definim l'**espai propi associat al valor propi** λ al conjunt de vectors

$$V_\lambda = \{v \in V \mid f(v) = \lambda v\}.$$

Proposició 6.1. Siga V un $\mathbb{K}$ -espai vectorial amb $\dim_{\mathbb{K}}(V) = n$, $f: V \longrightarrow V$ un endomorfisme i λ un escalar en $\mathbb{K}$. Aleshores, se satisfan les següents propietats

- i. $V_{\lambda} = \text{Ker}(f - \lambda \text{id}_V)$;
- ii. V_{λ} és un subespai vectorial de V ;
- iii. $\dim_{\mathbb{K}}(V_{\lambda}) = n - \text{rang}(A - \lambda I_n)$,

on A és qualsevol matriu coordinada d' f en alguna base $\mathcal{B}$ de V .

Demostració. Notem que f i id_V són dues aplicacions lineals en $\text{End}_{\mathbb{K}}(V)$; si prenem la combinació lineal $f - \lambda \text{id}_V$, aquesta torna a ser una aplicació lineal en $\text{End}_{\mathbb{K}}(V)$.

A més, es dona la següent cadena d'igualtats

$$\begin{aligned} \text{Ker}(f - \lambda \text{id}_V) &= \{v \in V \mid (f - \lambda \text{id}_V)(v) = 0\} \\ &= \{v \in V \mid f(v) - \lambda v = 0\} \\ &= \{v \in V \mid f(v) = \lambda v\} \\ &= V_{\lambda}. \end{aligned}$$

Emprant el [corol·lari sobre nucli i imatge](#), com V_{λ} és el nucli d'una aplicació lineal, V_{λ} és un subespai vectorial de V . A més, com $f - \lambda \text{id}_V$ és una aplicació lineal, pel [teorema de les dimensions](#), trobem que

$$\dim_{\mathbb{K}}(V) = \dim_{\mathbb{K}}(\text{Im}(f - \lambda \text{id}_V)) + \dim_{\mathbb{K}}(\text{Ker}(f - \lambda \text{id}_V)) \quad (\star)$$

A més, si $\mathcal{B}$ és una base qualsevol de V i anomenem A la matriu coordinada d' f de $\mathcal{B}$ en $\mathcal{B}$, trobem que I_n és la matriu coordinada d' id_V de $\mathcal{B}$ en $\mathcal{B}$ i, per tant, $A - \lambda I_n$ és la matriu coordinada d' $f - \lambda \text{id}_V$ de $\mathcal{B}$ en $\mathcal{B}$.

Aplicant el [teorema de les dimensions](#), trobem que

$$\dim_{\mathbb{K}}(\text{Im}(f - \lambda \text{id}_V)) = \text{rang}(A - \lambda I_n).$$

Així, substituint en $(\star)$, arribem a que

$$\dim_{\mathbb{K}}(V_{\lambda}) = n - \text{rang}(A - \lambda I_n).$$

Com volíem demostrar. □

Proposició 6.2. Siga V un $\mathbb{K}$ -espai vectorial, $f: V \longrightarrow V$ un endomorfisme i λ un escalar en $\mathbb{K}$.

Les següents afirmacions són equivalents

- i. λ és valor propi d' f ;
- ii. $\text{Det}(A - \lambda I_n) = 0$,

on A és qualsevol matriu coordinada d' f en alguna base $\mathcal{B}$ de V .

Demostració. Es dona la següent cadena d'equivalències

$$\lambda \text{ és valor propi d}'f \Leftrightarrow \exists v \in V - \{0\} \text{ tal que } f(v) = \lambda v \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow \exists X \in M_{n1}(\mathbb{K}) - \{0\} \text{ tal que } AX = \lambda X \quad (2)$$

$$\Leftrightarrow \exists X \in M_{n1}(\mathbb{K}) - \{0\} \text{ tal que } (A - \lambda I_n)X = 0 \quad (3)$$

$$\Leftrightarrow \text{Det}(A - \lambda I_n) = 0. \quad (4)$$

En l'anterior cadena, la primera equivalència ve donada per la Definició 6.3; la segona equivalència ve donada per l'equació i la corresponent representació matricial en prendre coordenades; la tercera equivalència s'obté passant a l'altra banda i agrupant; finalment, la quarta equivalència s'obté del fet que el sistema homogeni $(A - \lambda I_n)X = 0$ admet més d'una solució si, i només si, la matriu $A - \lambda I_n$ no és invertible, és a dir, per la [caracterització de la invertibilitat pel determinant](#), si, i només si, el seu determinant és zero. $\square$

L'anterior proposició ens permet definir el polinomi característic.

Definició 6.5 (Polinomi característic). Siga V un $\mathbb{K}$ -espai vectorial, $\mathcal{B}$ una base de V i $f: V \rightarrow V$ un endomorfisme. Siga A la matriu coordinada d' f de $\mathcal{B}$ en $\mathcal{B}$. Definim el **polinomi característic d' f** , denotat per $\text{polcar}(f)$, al polinomi amb indeterminada x donat per

$$\text{polcar}(f) = \text{Det}(A - xI_n).$$

Per analogia, si A és una matriu quadrada en $M_n(\mathbb{K})$, definim el **polinomi característic d' A** , denotat per $\text{polcar}(A)$, al polinomi amb indeterminada x donat per

$$\text{polcar}(A) = \text{Det}(A - xI_n).$$

El polinomi característic no depèn de la matriu coordinada que s'elegisca. De fet, matrius semblants tenen el mateix polinomi característic, com vegem a continuació.

Proposició 6.3. *Siguen A i B dues matrius en $M_n(\mathbb{K})$. Si A i B són semblants, aleshores $\text{polcar}(A) = \text{polcar}(B)$.*

Demostració. Com A i B són matrius semblants, existeix una matriu invertible P en $GL_n(\mathbb{K})$ tal que

$$P^{-1}AP = B.$$

Aleshores, es dona la següent cadena d'igualtats

$$\begin{aligned}
 \text{polcar}(\mathbf{B}) &= \text{Det}(\mathbf{B} - x\mathbf{I}_n) \\
 &= \text{Det}(\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} - x\mathbf{I}_n) \\
 &= \text{Det}(\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} - x\mathbf{P}^{-1}\mathbf{P}) \\
 &= \text{Det}(\mathbf{P}^{-1}(\mathbf{A} - x\mathbf{I}_n)\mathbf{P}) \\
 &= \text{Det}(\mathbf{P}^{-1})\text{Det}(\mathbf{A} - x\mathbf{I}_n)\text{Det}(\mathbf{P}) \\
 &= \text{Det}(\mathbf{A} - x\mathbf{I}_n) \\
 &= \text{polcar}(\mathbf{A}).
 \end{aligned}$$

Queda, per tant, demostrada la proposició. $\square$

Corol·lari 6.4. *Siga V un $\mathbb{K}$ -espai vectorial, $f: V \rightarrow V$ un endomorfisme i λ un escalar en $\mathbb{K}$.*

Les següents afirmacions són equivalents

- i. λ és valor propi d' f ;*
- ii. λ és arrel del $\text{polcar}(f)$.*

i Nota

Nota. Del polinomi característic només ens interessen les seues arrels. Per tant, per a la definició de polinomi característic d'un endomorfisme f , no hi haurà problema en prendre qualsevol de les dues variants següents

$$\text{polcar}(f) = \text{Det}(\mathbf{A} - x\mathbf{I}_n); \quad \text{polcar}(f) = \text{Det}(x\mathbf{I}_n - \mathbf{A}).$$

Notem que aquests dos polinomis, com a molt, es diferencien en un canvi de signe, però tenen les mateixes arrels.

Exemple 6.2. *(Continuació de l'Exemple 6.1.)* Considerem l' $\mathbb{R}$ -espai vectorial $\mathbb{R}^2$ i l'endomorfisme

$$\begin{aligned}
 f: \quad \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\
 (x, y) &\longmapsto (3x, x + 2y)
 \end{aligned}$$

Per al càlcul del polinomi característic d' f , necessitem una matriu coordinada d' f en alguna base. Per exemple, per a la base canònica d' $\mathbb{R}^2$, $\mathcal{B}_c = \{(1, 0), (0, 1)\}$, prenem $\mathbf{A}$ la matriu coordinada d' f de $\mathcal{B}_c$ a $\mathcal{B}_c$.

Així, la matriu $\mathbf{A}$ ve donada per

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Per tant, el polinomi característic d' f ve donat per

$$\text{polcar}(f) = \text{Det}(x\text{I}_2 - A) = \text{Det}\left(\begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\right) = \text{Det}\left(\begin{bmatrix} x-3 & 0 \\ -1 & x-2 \end{bmatrix}\right) = (x-3)(x-2).$$

Notem que els valors propis d' f són 2 i 3. Per al càlcul de vectors propis, utilitzem la caracterització presentada en la Proposició 6.1

$$\begin{aligned} V_2 &= \text{Ker}(f - 2\text{id}_{\mathbb{R}^2}) \\ &= \left\{ v \in \mathbb{R}^2 \mid (f - 2\text{id}_{\mathbb{R}^2})(v) = 0 \right\} \\ &= \left\{ v \in \mathbb{R}^2 \mid \begin{array}{l} v \text{ té coordenades } X \text{ en } \mathcal{B}_c \text{ i} \\ (A - 2\text{I}_2)X = 0 \end{array} \right\} \\ &= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \\ &= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0 \right\} \\ &= \langle (0, 1) \rangle. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_3 &= \text{Ker}(f - 3\text{id}_{\mathbb{R}^2}) \\ &= \left\{ v \in \mathbb{R}^2 \mid (f - 3\text{id}_{\mathbb{R}^2})(v) = 0 \right\} \\ &= \left\{ v \in \mathbb{R}^2 \mid \begin{array}{l} v \text{ té coordenades } X \text{ en } \mathcal{B}_c \text{ i} \\ (A - 3\text{I}_2)X = 0 \end{array} \right\} \\ &= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \\ &= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - y = 0 \right\} \\ &= \langle (1, 1) \rangle. \end{aligned}$$

Aleshores, el vector $(0, 1)$ és un vector propi associat al valor propi 2 i $(1, 1)$ és un vector propi associat al valor propi 3.

Exemple 6.3. Sobre l' $\mathbb{R}$ -espai vectorial $\mathbb{R}^2$ es consideren les següents aplicacions lineals

$$\begin{array}{lll} f: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ & (x, y) & \longmapsto (x, x + y) \end{array} \qquad \begin{array}{lll} g: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ & (x, y) & \longmapsto (y, -x) \end{array}$$

Anem a comprovar si f i g són diagonalitzables. Per tant, ens caldrà calcular el polinomi característic. Fixem una base de l'espai, per exemple la base canònica $\mathcal{B}_c$ d' $\mathbb{R}^2$, i anomenem

- A la matriu coordenada d' f de $\mathcal{B}_c$ a $\mathcal{B}_c$;
- B la matriu coordenada de g de $\mathcal{B}_c$ a $\mathcal{B}_c$.

Aleshores,

$$\text{polcar}(f) = \text{Det}(xI_2 - A) = (x - 1)^2; \quad \text{polcar}(g) = \text{Det}(xI_2 - B) = x^2 + 1.$$

Notem que $\text{polcar}(g)$ no admet arrels en $\mathbb{R}$. Aleshores ja podem dir que g no té valors propis i, per tant, no és diagonalitzable.

Per altra banda, $\text{polcar}(f)$ té a l'1 com a arrel doble. Així l'1 és l'únic valor propi d' f .

Per al càlcul del subespai propi associat a l'1, per la Proposició 6.1, tenim que

$$\begin{aligned} V_1 &= \{v \in \mathbb{R}^2 \mid f(v) = v\} \\ &= \text{Ker}(f - \text{id}_{\mathbb{R}^2}) \\ &= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (A - I_2) \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \\ &= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0\} \\ &= \langle (0, 1) \rangle. \end{aligned}$$

Com no som capaços de trobar 2 vectors linealment independents que siguin propis per a l'1, concloem que f tampoc és diagonalitzable.

Definició 6.6 (Multiplicitat algebraica | Multiplicitat geomètrica). Siga V un $\mathbb{K}$ -espai vectorial, $f: V \rightarrow V$ un endomorfisme i $\lambda \in \mathbb{K}$ un valor propi per a f . Anomenem

- i. **multiplicitat algebraica** de λ , normalment denotada per α_λ , al major nombre natural tal que $(x - \lambda)^{\alpha_\lambda}$ divideix al polinomi característic d' f ;
- ii. **multiplicitat geomètrica** de λ , normalment denotada per d_λ , a la dimensió del subespai propi associat a λ , és a dir, $d_\lambda = \dim_{\mathbb{K}}(V_\lambda)$.

Exemple 6.4. (Continuació de l'Exemple 6.3.) Per a l'aplicació f definida en l'Exemple 6.3, 1 és valor propi d' f . A més, la multiplicitat algebraica d'1, és a dir α_1 , val 2, ja que aquest és el major natural $k \in \mathbb{N}$ per al qual $(x - 1)^k$ divideix al polinomi característic d' f , que en aquest cas ve donat per $\text{polcar}(f) = (x - 1)^2$.

Per altra banda, com havíem vist que $V_1 = \langle (0, 1) \rangle$, trobem que la multiplicitat geomètrica d'1, és a dir d_1 , val 1, ja que $\dim_{\mathbb{R}}(V_1) = 1$.

Proposició 6.4. Siga V un $\mathbb{K}$ -espai vectorial amb $\dim_{\mathbb{K}}(V) = n$, $f: V \rightarrow V$ un endomorfisme i $\lambda \in \mathbb{K}$ un valor propi d' f . Si anomenem

- α_λ la multiplicitat algebraica de λ ;
- d_λ la multiplicitat geomètrica de λ ,

aleshores $1 \leq d_\lambda \leq \alpha_\lambda$.

Demostració. Siga $\mathcal{B}$ una base qualsevol de V i siga A la matriu coordenada d' f de $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}$.

Aleshores, com λ és un valor propi d' f , per la Proposició 6.2, tenim que $\text{Det}(A - \lambda I_n) = 0$. Per tant, $\text{rang}(A - \lambda I_n) < n$. Així, d'acord a la Proposició 6.1, tenim que

$$d_\lambda = \dim_{\mathbb{K}}(V_\lambda) = n - \text{rang}(A - \lambda I_n) \geq 1.$$

Per a l'altra desigualtat, com que $d_\lambda = \dim_{\mathbb{K}}(V_\lambda)$, podem considerar una base $\mathcal{B}_\lambda$ de V_λ formada per d_λ vectors, així

$$\mathcal{B}_\lambda = \{e_1, \dots, e_{d_\lambda}\}.$$

Pel [teorema d'ampliació](#), podem ampliar $\mathcal{B}_\lambda$ fins a obtindre una base $\mathcal{B}_V$ de V , així

$$\mathcal{B}_V = \{e_1, \dots, e_{d_\lambda}, e_{d_\lambda+1}, \dots, e_n\}.$$

Siga B la matriu coordenada d' f de $\mathcal{B}_V$ a $\mathcal{B}_V$.

Aleshores, com els vectors $e_1, \dots, e_{d_\lambda}$ són propis per a λ , la matriu B ve donada per la matriu

$$B = \left[\begin{array}{cccc|c} \lambda & 0 & \cdots & 0 & \\ 0 & \lambda & \cdots & 0 & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda & \\ \hline & 0 & & & \bar{B} \end{array} \right],$$

on 0 és la matriu nul·la en $M_{(n-d_\lambda), d_\lambda}(\mathbb{K})$, Z és una matriu en $M_{d_\lambda, (n-d_\lambda)}(\mathbb{K})$ i $\bar{B}$ una matriu quadrada en $M_{(n-d_\lambda)}(\mathbb{K})$. El còmput d'aquestes matrius no és important per a concloure l'argument.

Aleshores, el polinomi característic d' f ve donat per

$$\begin{aligned} \text{polcar}(f) &= \text{Det}(xI_n - B) \\ &= \text{Det} \left(\left[\begin{array}{cccc|c} x-\lambda & 0 & \cdots & 0 & \\ 0 & x-\lambda & \cdots & 0 & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ 0 & 0 & \cdots & x-\lambda & \\ \hline & 0 & & & xI_{(n-d_\lambda)} - \bar{B} \end{array} \right] \right) \\ &= (x-\lambda)^{d_\lambda} \text{Det}(xI_{(n-d_\lambda)} - \bar{B}) \\ &= (x-\lambda)^{d_\lambda} \text{polcar}(\bar{B}). \end{aligned}$$

Per tant, $(x-\lambda)^{d_\lambda}$ divideix a $\text{polcar}(f)$. Com la multiplicitat algebraica de λ està definida com el major natural $k \in \mathbb{N}$ per al qual $(x-\lambda)^k$ divideix a $\text{polcar}(f)$, concloem que $d_\lambda \leq \alpha_\lambda$.

Per tant, $1 \leq d_\lambda \leq \alpha_\lambda$. □

Proposició 6.5. *Siga V un $\mathbb{K}$ -espai vectorial, $f: V \rightarrow V$ un endomorfisme i siguin $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ valors propis d' f diferents dos a dos. Considerem per a cada $1 \leq i \leq k$ l'espai propi V_{λ_i} associat al valor propi λ_i . Aleshores la suma de subespais $V_{\lambda_1} + \dots + V_{\lambda_k}$ és directa, és a dir, podem escriure*

$$V_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_k}.$$

Demostració. Per a demostrar-ho recordem la [caracterització de les sumes directes](#), que ens diu que demostrar que la suma és directa és equivalent a demostrar que l'única forma d'aconseguir obtenir el vector 0 com a suma de vectors en cadascun dels subespais és sumant vectors zero.

Siguem, per a cada $1 \leq i \leq k$, vectors v_i en V_{λ_i} de forma que

$$v_1 + \dots + v_k = 0. \quad (\text{A})$$

Anem a demostrar que, per a tot $1 \leq i \leq k$, $v_i = 0$.

Fem la demostració per inducció sobre k .

Cas base. Si $k = 1$, aleshores l'equació en (A) ve donada per

$$v_1 = 0.$$

Aquest cas es dona.

Hipòtesi inductiva. Suposem l'enunciat cert per a $k - 1$, és a dir, si

$$v_1 + \dots + v_{k-1} = 0,$$

aleshores, per a tot $1 \leq i \leq k - 1$, $v_i = 0$.

Anem a demostrar-ho per a k . Siguen, per a cada $1 \leq i \leq k$, vectors v_i en V_{λ_i} que satisfan l'equació en (A).

De l'equació en (A), en multiplicar per λ_k , obtenim que

$$\lambda_k v_1 + \dots + \lambda_k v_k = 0. \quad (\text{B})$$

En fer actuar f a ambdós costats de l'equació en (A) obtenim

$$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k = f(v_1) + \dots + f(v_k) = f(v_1 + \dots + v_k) = f(0) = 0. \quad (\text{C})$$

En restar les dues equacions en (B) i en (C) obtenim

$$(\lambda_k - \lambda_1)v_1 + \dots + (\lambda_k - \lambda_{k-1})v_{k-1} = 0. \quad (\text{D})$$

Com, per a cada $1 \leq i \leq k - 1$, v_i és un vector en V_{λ_i} i, d'acord a la Proposició 6.1, V_{λ_i} és un subespai vectorial de V , aleshores, per a cada $1 \leq i \leq k - 1$, $(\lambda_k - \lambda_i)v_i$ és un vector en V_{λ_i} .

Per tant, de l'equació en (D) obtenim, per hipòtesi inductiva, que $(\lambda_k - \lambda_i)v_i = 0$, per a tot $1 \leq i \leq k-1$. Com que, per hipòtesi, els valors propis són diferents dos a dos, aleshores $v_i = 0$, per a tot $1 \leq i \leq k-1$.

Finalment, substituint en (A), obtenim que $v_k = 0$. Per tant, per a tot $1 \leq i \leq k$, $v_i = 0$.

Així, la suma $V_{\lambda_1} + \cdots + V_{\lambda_k}$ és directa i podem escriure $V_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus V_{\lambda_k}$. $\square$

Corol·lari 6.5. *Siga V un $\mathbb{K}$ -espai vectorial, $f: V \rightarrow V$ un endomorfisme i siguin $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ valors propis d' f diferents dos a dos. Siga v_i un vector propi en V_{λ_i} , per a cada $1 \leq i \leq k$, aleshores $\{v_1, \dots, v_k\}$ és un conjunt de vectors linealment independent.*

Demostració. Considerem una combinació lineal dels vectors $v_1, \dots, v_k$ igualada a zero de la forma

$$\mu_1 v_1 + \cdots + \mu_k v_k = 0, \quad (A')$$

on, per a cada $1 \leq i \leq k$, μ_i és un escalar en $\mathbb{K}$. Volem demostrar que per a tot $1 \leq i \leq k$, $\mu_i = 0$.

Per la Proposició 6.1, per a cada $1 \leq i \leq k$, V_{λ_i} és un subespai vectorial de V . Com, per a cada $1 \leq i \leq k$, v_i és un vector en V_{λ_i} , concloem que, per a tot $1 \leq i \leq k$, $\mu_i v_i$ és un vector en V_{λ_i} . Per la Proposició 6.5, com que la suma $V_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus V_{\lambda_k}$ és directa, de l'equació en (A'), concloem per la [caracterització de les sumes directes](#) que, per a tot $1 \leq i \leq k$, $\mu_i v_i = 0$. Per hipòtesi, per a cada $1 \leq i \leq k$, $v_i \neq 0$, ja que v_i és un vector propi en V . Aleshores, per a tot $1 \leq i \leq k$, $\mu_i = 0$.

És a dir, $\{v_1, \dots, v_k\}$ és un conjunt de vectors linealment independent. $\square$

Teorema 6.1 (Caracterització dels endomorfismes diagonalitzables). *Siga V un $\mathbb{K}$ -espai vectorial amb $\dim_{\mathbb{K}}(V) = n$, $f: V \rightarrow V$ un endomorfisme i siguin $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ tots els valors propis d' f , diferents dos a dos. Denotem, per a cada $1 \leq i \leq k$,*

- α_{λ_i} la multiplicitat algebraica del valor propi λ_i ;
- d_{λ_i} la multiplicitat geomètrica del valor propi λ_i .

Aleshores les següents afirmacions són equivalents

- i. f és diagonalitzable;
- ii. Es donen les dues condicions següents:

- per a tot $1 \leq i \leq k$, $\alpha_{\lambda_i} = d_{\lambda_i}$;
- $\alpha_{\lambda_1} + \cdots + \alpha_{\lambda_k} = n$.

És a dir, f és diagonalitzable si, i només si, les multiplicitats algebraiques i geomètriques de tots els valors propis coincideixen i, a més, la suma de totes les multiplicitats algebraiques (geomètriques) coincideix amb la dimensió de l'espai.

Demostració. Suposem que f és diagonalitzable. Aleshores pel Corol·lari 6.3, podem trobar $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ una base formada per vectors propis.

Per a cada $1 \leq i \leq k$ prenem

$$W_{\lambda_i} = \langle \text{vectors propis en } \mathcal{B} \text{ associats al valor propi } \lambda_i \rangle \leq V.$$

Com que $\mathcal{B}$ és base de V , $W_{\lambda_1} + \dots + W_{\lambda_k} = V$. A més, per la Proposició 6.5, aquesta suma és directa, és a dir,

$$V = W_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus W_{\lambda_k}.$$

Si prenem dimensions en l'anterior equació obtenim

$$n = \dim_{\mathbb{K}}(V) = \dim_{\mathbb{K}} \left(\bigoplus_{1 \leq i \leq k} W_{\lambda_i} \right) = \sum_{i=1}^k \dim_{\mathbb{K}}(W_{\lambda_i}) \leq \sum_{i=1}^k d_{\lambda_i}.$$

L'última desigualtat és conseqüència de que $W_{\lambda_i} \leq V_{\lambda_i}$ per a tot $1 \leq i \leq k$.

Aleshores, trobem la següent seqüència de desigualtats

$$n \leq \sum_{i=1}^k d_{\lambda_i} \leq \sum_{i=1}^k \alpha_{\lambda_i} \leq n.$$

La primera desigualtat ha estat provada abans; la segona desigualtat és conseqüència de la Proposició 6.4; finalment, la tercera desigualtat és conseqüència de que la multiplicitat algebraica és l'exponent d'un factor del polinomi característic i aquest polinomi té grau n .

D'aquestes desigualtats es dedueix que $\sum_{i=1}^k d_{\lambda_i} = \sum_{i=1}^k \alpha_{\lambda_i} = n$. Per altra banda, com que, per a cada $1 \leq i \leq k$, $d_{\lambda_i} \leq \alpha_{\lambda_i}$ i les sumes coincideixen, aleshores concloem que, per a cada $1 \leq i \leq k$, $\alpha_{\lambda_i} = d_{\lambda_i}$.

Per a l'altra implicació, suposem que per a tot $1 \leq i \leq k$, $\alpha_{\lambda_i} = d_{\lambda_i}$ i que $n = \sum_{i=1}^k \alpha_{\lambda_i}$.

Per a cada $1 \leq i \leq k$, considerem V_{λ_i} , el subespai propi associat al valor propi λ_i , i considerem $\mathcal{B}_{\lambda_i}$ una base de V_{λ_i} de la forma

$$\mathcal{B}_{\lambda_i} = \{e_{i,1}, \dots, e_{i,d_{\lambda_i}}\}.$$

Notem que la suma dels subespais propis $V_{\lambda_1} + \dots + V_{\lambda_k}$ és directa per la Proposició 6.5. Aquest subespai vectorial de V té dimensió n , ja que

$$\dim_{\mathbb{K}} \left(\bigoplus_{1 \leq i \leq k} V_{\lambda_i} \right) = \sum_{i=1}^k \dim_{\mathbb{K}}(V_{\lambda_i}) = \sum_{i=1}^k d_{\lambda_i} = \sum_{i=1}^k \alpha_{\lambda_i} = n.$$

Llavors concloem per la [proposició sobre dimensions de subespais](#) que $V = V_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_k}$.

Per tant, el conjunt $\mathcal{B}$ d' n vectors format per tots els vectors de les bases $\mathcal{B}_{\lambda_i}$, per a $1 \leq i \leq k$,

$$\mathcal{B} = \left\{ e_{1,1}, \dots, e_{1,d_{\lambda_1}}, \dots, e_{k,1}, \dots, e_{k,d_{\lambda_k}} \right\}$$

és un sistema generador per a V de tamany n . Per la [caracterització de les bases per la dimensió](#), concloem que $\mathcal{B}$ és una base de V formada per vectors propis per a f . En virtut del Corol·lari [6.3](#), concloem que f és diagonalitzable. $\square$

7 Formes bilineals

En aquest capítol introduïm el concepte de forma bilineal i estudiarem les primeres propietats. Les formes bilineals ens ajudaran a descriure nocions com la de mòdul d'un vector, angle entre vectors o la condició d'ortogonalitat. Per tant, podem pensar les formes bilineals com una ferramenta per a introduir nocions de mesura.

Definició 7.1 (Forma bilineal). Siga V un $\mathbb{K}$ -espai vectorial. Una **forma bilineal sobre** V és una aplicació del tipus

$$f: V \times V \longrightarrow \mathbb{K}$$

que satisfà, per a tot $u_1, u_2, w_1, w_2, v \in V$ i tot $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, les següents equacions

- i. $f(\lambda u_1 + \mu u_2, v) = \lambda f(u_1, v) + \mu f(u_2, v);$
- ii. $f(v, \lambda w_1 + \mu w_2) = \lambda f(v, w_1) + \mu f(v, w_2).$

Exemple 7.1. Per a l' $\mathbb{R}$ -espai vectorial $\mathbb{R}^2$, es considera l'aplicació

$$\begin{aligned} f: \quad \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ ((x, y), (z, t)) &\longmapsto xz - yt \end{aligned}$$

Anem a comprovar la linealitat en la primera component. Per a tot $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (z, t) \in \mathbb{R}^2$ i tot parell d'escalars $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, la següent cadena d'igualtats es compleix

$$\begin{aligned} f(\lambda(x_1, y_1) + \mu(x_2, y_2), (z, t)) &= f((\lambda x_1 + \mu x_2, \lambda y_1 + \mu y_2), (z, t)) \\ &= (\lambda x_1 + \mu x_2)z - (\lambda y_1 + \mu y_2)t \\ &= \lambda x_1 z + \mu x_2 z - \lambda y_1 t - \mu y_2 t \\ &= \lambda(x_1 z - y_1 t) + \mu(x_2 z - y_2 t) \\ &= \lambda f((x_1, y_1), (z, t)) + \mu f((x_2, y_2), (z, t)). \end{aligned}$$

Per a la linealitat en la segona component, fem igual. Per a tot $(x, y), (z_1, t_1), (z_2, t_2) \in \mathbb{R}^2$ i tot parell d'escalars $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, la següent cadena d'igualtats es compleix

$$\begin{aligned} f((x, y), \lambda(z_1, t_1) + \mu(z_2, t_2)) &= f((x, y), (\lambda z_1 + \mu z_2, \lambda t_1 + \mu t_2)) \\ &= x(\lambda z_1 + \mu z_2) - y(\lambda t_1 + \mu t_2) \\ &= \lambda x z_1 + \mu x z_2 - \lambda y t_1 - \mu y t_2 \\ &= \lambda(x z_1 - y t_1) + \mu(x z_2 - y t_2) \\ &= \lambda f((x, y), (z_1, t_1)) + \mu f((x, y), (z_2, t_2)). \end{aligned}$$

Proposició 7.1. Siga V un $\mathbb{K}$ -espai vectorial, $f: V \times V \longrightarrow \mathbb{K}$ una forma bilineal, u, w vectors en V i λ un escalar en $\mathbb{K}$, aleshores

- i. $f(0, w) = f(u, 0) = 0$;
- ii. $f(\lambda u, w) = f(u, \lambda w) = \lambda f(u, w)$.

Demostració. Per al primer ítem, notem la següent cadena d'igualtats

$$f(0, w) = f(0 + 0, w) = f(0, w) + f(0, w).$$

La primera igualtat és conseqüència de que $0 + 0 = 0$; la segona igualtat és conseqüència de la definició de forma bilineal.

En l'anterior expressió, si passem restant un dels escalars $f(0, w)$ a l'altra banda obtenim que $f(0, w) = 0$. La demostració per a $f(u, 0) = 0$ és anàloga.

El segon ítem és conseqüència directa de la definició de forma bilineal. □

Anem a explorar com es relaciona una forma bilineal amb l'expressió coordenada dels vectors sobre els quals actua.

Siga V un $\mathbb{K}$ -espai vectorial amb $\dim_{\mathbb{K}}(V) = n$, siga $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ una base de V , siga $f: V \times V \longrightarrow \mathbb{K}$ una forma bilineal i siguin u, w dos vectors en V . Suposem que l'expressió coordenada dels vectors u i w en la base $\mathcal{B}$ ve donada per

$$u = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n; \quad w = \mu_1 e_1 + \dots + \mu_n e_n;$$

per a alguns escalars $\lambda_1, \dots, \lambda_n, \mu_1, \dots, \mu_n \in \mathbb{K}$.

Aleshores, com f és una forma bilineal, s'obté la següent cadena d'igualtats

$$f(u, w) = f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i, \sum_{j=1}^n \mu_j e_j\right) = \sum_{i=1}^n \lambda_i f\left(e_i, \sum_{j=1}^n \mu_j e_j\right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_i \mu_j f(e_i, e_j).$$

Ens adonem que la imatge d'un parell $(u, w) \in V \times V$ mitjançant una forma bilineal només depèn de les imatges dels vectors $(e_i, e_j) \in \mathcal{B} \times \mathcal{B}$, amb $1 \leq i, j \leq n$, i de les coordenades dels vectors u i w en la base $\mathcal{B}$.

Açò ens motiva a considerar la següent definició.

Definició 7.2 (Matriu coordenada d'una forma bilineal). Siga V un $\mathbb{K}$ -espai vectorial amb $\dim_{\mathbb{K}}(V) = n$, siga $f: V \times V \longrightarrow \mathbb{K}$ una forma bilineal i siga $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ una base de V . Anomenem **matriu coordenada d' f en la base $\mathcal{B}$** a la matriu

$$A = \begin{bmatrix} f(e_1, e_1) & f(e_1, e_2) & \cdots & f(e_1, e_n) \\ f(e_2, e_1) & f(e_2, e_2) & \cdots & f(e_2, e_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f(e_n, e_1) & f(e_n, e_2) & \cdots & f(e_n, e_n) \end{bmatrix}.$$

És a dir, $A = (\alpha_{ij}) \in M_n(\mathbb{K})$ tal que per a tot $1 \leq i, j \leq n$, $\alpha_{ij} = f(e_i, e_j)$.

Proposició 7.2 (Existència i unicitat de la matriu coordinada d'una forma bilineal). *Siga V un $\mathbb{K}$ -espai vectorial amb $\dim_{\mathbb{K}}(V) = n$, siga $f: V \times V \rightarrow \mathbb{K}$ una forma bilineal i siga $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ una base de V . Aleshores la matriu coordinada d' f en $\mathcal{B}$ és l'única matriu en $M_n(\mathbb{K})$ que, per a tot $u, w \in V$, amb*

- X les coordenades d' u en $\mathcal{B}$;
- Y les coordenades de w en $\mathcal{B}$;

satisfà l'equació $X^t A Y = [f(u, w)]$.

Demostració. Si u, w són vectors en V i anomenem

$$X = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix} \quad \text{les coordenades d}'u \text{ en } \mathcal{B}; \quad Y = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_n \end{bmatrix} \quad \text{les coordenades de } w \text{ en } \mathcal{B};$$

aleshores es dona la següent cadena d'igualtats

$$\begin{aligned} X^t A Y &= \begin{bmatrix} \lambda_1 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f(e_1, e_1) & f(e_1, e_2) & \cdots & f(e_1, e_n) \\ f(e_2, e_1) & f(e_2, e_2) & \cdots & f(e_2, e_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f(e_n, e_1) & f(e_n, e_2) & \cdots & f(e_n, e_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_n \end{bmatrix} \\ &= \left[\sum_{i,j=1}^n \lambda_i \mu_j f(e_i, e_j) \right] \\ &= [f(u, w)]. \end{aligned}$$

Per a la unicitat, suposem que f admet dues matrius coordinades $A = (\alpha_{ij})$ i $B = (\beta_{ij})$ en $M_n(\mathbb{K})$ tals que, per a tot $u, w \in V$, amb X les coordenades d' u en $\mathcal{B}$ i Y les coordenades de w en $\mathcal{B}$, satisfan que

$$X^t A Y = [f(u, w)] = X^t B Y.$$

Així, en particular, l'anterior expressió serà certa per als vectors $e_i, e_j \in \mathcal{B}$, amb $1 \leq i, j \leq n$. En aquest cas, si anomenem X_i les coordenades d' e_i en $\mathcal{B}$ i Y_j les coordenades d' e_j en $\mathcal{B}$, notem que X_i és una matriu columna tota zero a excepció de la posició i , on hi ha un 1, i que Y_j és una matriu columna tota zero a excepció de la posició j , on hi ha un 1.

Aleshores, obtenim que

$$[\alpha_{ij}] = X_i^t A Y_j = [f(e_i, e_j)] = X_i^t B Y_j = [\beta_{ij}].$$

És a dir, per a tot $1 \leq i, j \leq n$, les components (i, j) d' A i B són iguals, és a dir, $\alpha_{ij} = \beta_{ij}$. Concloem que $A = B$. $\square$

Proposició 7.3 (Tota matriu quadrada és la matriu coordenada d'una forma bilineal). *Siga V un $\mathbb{K}$ -espai vectorial amb $\dim_{\mathbb{K}}(V) = n$, $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ una base de V i A una matriu quadrada en $M_n(\mathbb{K})$, aleshores existeix una forma bilineal $f: V \times V \rightarrow \mathbb{K}$ de forma que A és la matriu coordenada d' f en la base $\mathcal{B}$.*

Demostració. Considerem l'aplicació

$$\begin{aligned} f: V \times V &\longrightarrow \mathbb{K} \\ (u, w) &\longmapsto \mathbf{X}^t \mathbf{A} \mathbf{Y} \end{aligned} \quad \text{on} \quad \begin{aligned} \mathbf{X} &\text{ són les coordenades d}'u \text{ en } \mathcal{B}, \\ \mathbf{Y} &\text{ són les coordenades de } w \text{ en } \mathcal{B}. \end{aligned}$$

(En aquesta definició estem identificant $M_1(\mathbb{K})$ amb $\mathbb{K}$.)

Caldrà demostrar que aquesta aplicació és una forma bilineal i que la seua matriu coordenada en $\mathcal{B}$ és la matriu A . Per a comprovar que és forma bilineal, considerem vectors u_1, u_2, w_1, w_2, v en V i escalars λ, μ en $\mathbb{K}$. Anomenem

- $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2$ les coordenades d' u_1 i u_2 en $\mathcal{B}$, respectivament; així $\lambda \mathbf{X}_1 + \mu \mathbf{X}_2$ són les coordenades de $\lambda u_1 + \mu u_2$ en $\mathcal{B}$;
- $\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2$ les coordenades de w_1 i w_2 en $\mathcal{B}$, respectivament; així $\lambda \mathbf{Y}_1 + \mu \mathbf{Y}_2$ són les coordenades de $\lambda w_1 + \mu w_2$ en $\mathcal{B}$;
- $\mathbf{Z}$ les coordenades de v en $\mathcal{B}$.

Així, es donen les següents cadenes d'igualtats

$$\begin{aligned} f(\lambda u_1 + \mu u_2, v) &= (\lambda \mathbf{X}_1 + \mu \mathbf{X}_2)^t \mathbf{A} \mathbf{Z} \\ &= (\lambda \mathbf{X}_1^t + \mu \mathbf{X}_2^t) \mathbf{A} \mathbf{Z} \\ &= \lambda \mathbf{X}_1^t \mathbf{A} \mathbf{Z} + \mu \mathbf{X}_2^t \mathbf{A} \mathbf{Z} \\ &= \lambda f(u_1, v) + \mu f(u_2, v); \end{aligned} \quad \begin{aligned} f(v, \lambda w_1 + \mu w_2) &= \mathbf{Z}^t \mathbf{A} (\lambda \mathbf{Y}_1 + \mu \mathbf{Y}_2) \\ &= \lambda \mathbf{Z}^t \mathbf{A} \mathbf{Y}_1 + \mu \mathbf{Z}^t \mathbf{A} \mathbf{Y}_2 \\ &= \lambda f(v, w_1) + \mu f(v, w_2). \end{aligned}$$

És a dir, f és una forma bilineal.

Per a la segona part d'aquesta proposició, si denotem, per a cada $1 \leq i \leq n$, $\mathbf{X}_i$ les coordenades d' e_i en $\mathcal{B}$, aleshores $\mathbf{X}_i$ és una matriu columna tota zero a excepció de la posició i , on hi ha un 1.

Si $A = (\alpha_{ij})$, aleshores, per a cada $1 \leq i, j \leq n$, trobem per la definició d' f que

$$f(e_i, e_j) = \mathbf{X}_i^t \mathbf{A} \mathbf{X}_j = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = [\alpha_{ij}].$$

Per la Definició 7.2, la matriu coordenada d' f en la base $\mathcal{B}$ té la forma

$$\begin{bmatrix} f(e_1, e_1) & f(e_1, e_2) & \cdots & f(e_1, e_n) \\ f(e_2, e_1) & f(e_2, e_2) & \cdots & f(e_2, e_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f(e_n, e_1) & f(e_n, e_2) & \cdots & f(e_n, e_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nn} \end{bmatrix} = A.$$

És a dir, la matriu coordenada d' f en la base $\mathcal{B}$ és A . □

Exemple 7.2. Siga $\mathbb{K}^n$ el $\mathbb{K}$ -espai vectorial estàndard de dimensió n i siga $\mathcal{B}_c$ la base canònica de $\mathbb{K}^n$, aleshores associada a aquesta base i a la matriu identitat I_n de tamany n en $M_n(\mathbb{K})$ trobem la forma bilineal

$$f: \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}$$

$$((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) \longmapsto \begin{bmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

Aquesta forma s'anomena **producte escalar estàndard** en $\mathbb{K}^n$.

7.1 Congruència

En aquesta secció anem a identificar les diferents representacions matricials que poden descriure una forma bilineal depenent de la base que s'elegisca. Així, siga V un $\mathbb{K}$ -espai vectorial amb $\dim_{\mathbb{K}}(V) = n$, $f: V \times V \longrightarrow \mathbb{K}$ una forma bilineal i $\mathcal{B}$ i $\overline{\mathcal{B}}$ dues bases de V . Anomenem

- A la matriu coordenada d' f en $\mathcal{B}$;
- $\overline{A}$ la matriu coordenada d' f en $\overline{\mathcal{B}}$.

Aleshores, per a tot parell de vectors u, w en V amb

- $X, \overline{X}$ les coordenades d' u en $\mathcal{B}$ i $\overline{\mathcal{B}}$, respectivament;
- $Y, \overline{Y}$ les coordenades de w en $\mathcal{B}$ i $\overline{\mathcal{B}}$, respectivament;

es té que

$$X^t A Y = f(u, w) = \overline{X}^t \overline{A} \overline{Y}. \quad (\star)$$

Si anomenem P la matriu canvi de base de $\mathcal{B}$ a $\overline{\mathcal{B}}$, aleshores

$$P X = \overline{X}, \quad P Y = \overline{Y}.$$

Així, substituint en l'expressió en $(\star)$, obtenim que

$$f(u, w) = \overline{X}^t \overline{A} \overline{Y} = (P X)^t \overline{A} (P Y) = X^t (P^t \overline{A} P) Y.$$

Per la unicitat de la matriu coordenada d'una forma bilineal, demostrada en la Proposició 7.2, obtenim que

$$P^t \overline{A} P = A.$$

Aquesta nota motiva la següent definició.

Definició 7.3 (Matrius congruents). Siguen A, B dues matrius quadrades en $M_n(\mathbb{K})$, direm que A i B són **congruents** si existeix una matriu invertible $P \in GL_n(\mathbb{K})$ de forma que

$$P^t A P = B.$$

Proposició 7.4. *Ser congruents és una relació d'equivalència en $M_n(\mathbb{K})$.*

Demostració. Comprovem que satisfà les condicions per a ser relació d'equivalència.

Reflexiva. Siga A una matriu en $M_n(\mathbb{K})$, aleshores per a la matriu identitat I_n es té que

$$I_n^t A I_n = A.$$

Així, A és congruent a A , és a dir, ser congruent és una relació reflexiva.

Simètrica. Siguen A i B dues matrius congruents en $M_n(\mathbb{K})$, aleshores existeix una matriu invertible P en $GL_n(\mathbb{K})$ tal que

$$P^t A P = B. \quad (S)$$

Si transposem les igualtats

$$P^{-1} P = I_n = P P^{-1},$$

obtenim que

$$P^t (P^{-1})^t = I_n = (P^{-1})^t P^t.$$

És a dir, la transposada de la inversa és la inversa de la transposada,

$$(P^{-1})^t = (P^t)^{-1}.$$

Aleshores, de l'equació en (S), aïllant A , obtenim que

$$A = (P^{-1})^t B P^{-1}.$$

Així, B és congruent a A , és a dir, ser congruent és una relació simètrica.

Transitiva. Siguen A, B, C matrius quadrades en $M_n(\mathbb{K})$ tals que A i B són congruents i B i C són congruents. Aleshores existeixen matrius invertibles P, Q en $GL_n(\mathbb{K})$ tals que

$$P^t A P = B; \quad Q^t B Q = C.$$

Per tant, per a la matriu invertible $PQ \in GL_n(\mathbb{K})$ es té que

$$(PQ)^t A (PQ) = Q^t P^t A P Q = Q^t B Q = C.$$

Així, A és congruent a C , és a dir, ser congruent és una relació transitiva. □

Corol·lari 7.1. *Siguen A i B dues matrius quadrades en $M_n(\mathbb{K})$. Aleshores les següents proposicions són equivalents*

- i. A i B són congruents;
- ii. A i B representen la mateixa forma bilineal en bases diferents.

i Nota

Nota. Siguen A, B matrius quadrades en $M_n(\mathbb{K})$. Si A i B són congruents, aleshores són equivalents. Per contra, si A i B són congruents, aleshores no tenen perquè ser semblants.

Considerem per exemple les matrius quadrades I_2 i $4I_2$ en $M_2(\mathbb{R})$. Aquestes matrius són congruents ja que

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^t \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Per contra, I_2 i $4I_2$ no són semblants perquè no tenen el mateix [polinomi característic](#).

La següent proposició ens donarà després un mètode pràctic per a caracteritzar la relació de congruència.

Proposició 7.5. *Siguen A, B en $M_n(\mathbb{K})$, aleshores les següents afirmacions són equivalents.*

- i. A i B són congruents;*
- ii. Podem transformar A en B mitjançant una seqüència finita d'operacions elementals, les mateixes per fila que per columna.*

Demostració. Recordem, per la [caracterització de les matrius invertibles](#), que tota matriu invertible es pot descompondre com a producte finit de matrius elementals. A més, per la [proposició sobre l'acció de les matrius elementals](#), fer operacions elementals fila és equivalent a multiplicar la matriu inicial per la corresponent matriu elemental a l'esquerra, mentre que fer operacions elementals columna és equivalent a multiplicar la matriu inicial per la corresponent matriu elemental a la dreta.

Així, seguint el següent esquema,

$$\left[\begin{array}{c|c} A & I_n \\ \hline I_n & \end{array} \right] \xrightarrow{\text{op. elem.}} \left[\begin{array}{c|c} B & P \\ \hline Q & \end{array} \right] \quad \text{trobem que } PAQ = B,$$

on en el bloc de la dreta acumulem les operacions fila i en el bloc de baix les operacions columna.

El fet que siguen les mateixes operacions per fila que per columna garanteix que

$$Q = P^t.$$

Açò demostra l'equivalència. □

Exemple 7.3. Considerem la matriu A en $M_2(\mathbb{R})$ donada per

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Per altra banda, considerem la següent seqüència d'operacions elementals.

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & & \\ 0 & 1 & & \end{array} \right] \xrightarrow{f_2=f_2-2f_1} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \\ \hline 1 & 0 & & \\ 0 & 1 & & \end{array} \right] \xrightarrow{c_2=c_2-2c_1} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \\ \hline 1 & -2 & & \\ 0 & 1 & & \end{array} \right]$$

Així, obtenim la següent relació de congruència

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

En aquest cas, A i $\text{Diag}(1, -1)$ són matrius congruents.

7.2 Ortogonalitat i simetria

Com hem fet fins ara en els anteriors temes, en el que queda de secció intentarem entendre el que significa aconseguir una base de l'espai on la matriu coordinada d'una forma bilineal siga diagonal.

Siga V un $\mathbb{K}$ -espai vectorial amb $\dim_{\mathbb{K}}(V) = n$, $f: V \times V \rightarrow \mathbb{K}$ una forma bilineal i $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ una base de V . Suposem que la matriu coordinada d' f en la base $\mathcal{B}$ és una matriu diagonal de la forma

$$D = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \alpha_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(e_1, e_1) & f(e_1, e_2) & \cdots & f(e_1, e_n) \\ f(e_2, e_1) & f(e_2, e_2) & \cdots & f(e_2, e_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f(e_n, e_1) & f(e_n, e_2) & \cdots & f(e_n, e_n) \end{bmatrix}.$$

Aleshores estem dient que, per a tot parell d'índexs $1 \leq i, j \leq n$, si $i \neq j$, caldrà imposar la condició

$$f(e_i, e_j) = 0.$$

Més encara, si u, w són vectors en V i anomenem X les coordenades d' u en $\mathcal{B}$ i Y les coordenades de w en $\mathcal{B}$, aleshores, com D és una matriu diagonal, trobem que

$$\begin{bmatrix} f(u, w) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(u, w) \end{bmatrix}^t = (X^t D Y)^t = Y^t D^t (X^t)^t = Y^t D X = \begin{bmatrix} f(w, u) \end{bmatrix}.$$

És a dir, la forma bilineal $f: V \times V \rightarrow \mathbb{K}$ ha de satisfer que, per a tot parell de vectors $u, w \in V$,

$$f(u, w) = f(w, u).$$

Açò motiva les següents definicions.

7.2.1 Ortogonalitat

Presentem a continuació les definicions de vectors ortogonals i base ortogonal.

Definició 7.4 (Vectors ortogonals). Siga V un $\mathbb{K}$ -espai vectorial i $f: V \times V \rightarrow \mathbb{K}$ una forma bilineal. Direm que els vectors u, w en V són **ortogonals per a f** si $f(u, w) = 0$.

Definició 7.5 (Base ortogonal). Siga V un $\mathbb{K}$ -espai vectorial i $f: V \times V \rightarrow \mathbb{K}$ una forma bilineal. Direm que una base $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ de V és una **base ortogonal per a f** si, per a tot $1 \leq i, j \leq n$ amb $i \neq j$, $f(e_i, e_j) = 0$. És a dir, una base ortogonal per a f és una base de V on els seus vectors són ortogonals dos a dos.

Pel que hem parlat abans, obtenim el següent corol·lari.

Corol·lari 7.2. Siga V un $\mathbb{K}$ -espai vectorial amb $\dim_{\mathbb{K}}(V) = n$ i $f: V \times V \rightarrow \mathbb{K}$ una forma bilineal, aleshores les següents afirmacions són equivalents

- i. f admet una matriu coordenada diagonal en alguna base;
- ii. Existeix una base de V ortogonal per a f .

7.2.2 Forma bilineal simètrica

Presentem a continuació la definició de forma bilineal simètrica.

Definició 7.6 (Forma bilineal simètrica). Siga V un $\mathbb{K}$ -espai vectorial i $f: V \times V \rightarrow \mathbb{K}$ una forma bilineal. Direm que f és una **forma bilineal simètrica** si, per a tot parell de vectors $u, w \in V$, es té que

$$f(u, w) = f(w, u).$$

Proposició 7.6. Siga V un $\mathbb{K}$ -espai vectorial finitament generat, $f: V \times V \rightarrow \mathbb{K}$ una forma bilineal i $\mathcal{B}$ una base de V . Considerem A la matriu coordenada d' f en $\mathcal{B}$. Les següents afirmacions són equivalents

- i. f és una forma bilineal simètrica;
- ii. A és una matriu simètrica, és a dir, $A^t = A$.

Demostració. Suposem que f és una forma bilineal simètrica. Anem a comprovar que A és una matriu simètrica. Recordem de la Definició 7.2 que la matriu A ve donada per

$$A = \begin{bmatrix} f(e_1, e_1) & f(e_1, e_2) & \cdots & f(e_1, e_n) \\ f(e_2, e_1) & f(e_2, e_2) & \cdots & f(e_2, e_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f(e_n, e_1) & f(e_n, e_2) & \cdots & f(e_n, e_n) \end{bmatrix}.$$

Notem que per a tot parell d'índexs $1 \leq i, j \leq n$, l'entrada ij d' A ve donada per $f(e_i, e_j)$, que coincideix, en ser f simètrica, amb $f(e_j, e_i)$, és a dir, amb l'entrada ji de la matriu A . És a dir, A és simètrica.

Per altra banda, suposem que A és una matriu simètrica, és a dir, que $A^t = A$. Anem a comprovar que f és una forma bilineal simètrica. Siguen u, w vectors en V i siguen X les coordenades d' u en $\mathcal{B}$ i Y les coordenades de w en $\mathcal{B}$; aleshores, com A , la matriu coordenada d' f en $\mathcal{B}$, és una matriu simètrica, trobem que

$$[f(u, w)] = [f(u, w)]^t = (X^t A Y)^t = Y^t A^t (X^t)^t = Y^t A X = [f(w, u)].$$

És a dir, la forma bilineal f és simètrica. □

i Nota

Nota. Pel raonament presentat al principi de la secció, si ens donen una forma bilineal i volem trobar-li una matriu coordenada diagonal, aleshores aquesta forma haurà de ser simètrica.

Corol·lari 7.3. *Siguen A i B dues matrius congruents en $M_n(\mathbb{K})$. Aleshores A és simètrica si, i només si, B és simètrica.*

Demostració. Com A i B són congruents, existeix una matriu invertible P en $GL_n(\mathbb{K})$ tal que

$$P^t A P = B.$$

Suposem, sense pèrdua de generalitat, que A és simètrica. Així $A^t = A$. Per altra banda,

$$B^t = (P^t A P)^t = P^t A^t (P^t)^t = P^t A P = B.$$

És a dir, B també és simètrica. □

Proposició 7.7. *Siga $\mathbb{K}$ un cos amb $\text{car}(\mathbb{K}) \neq 2$ i $A \in M_n(\mathbb{K})$ una matriu simètrica quadrada. Aleshores A és congruent a una matriu diagonal.*

Demostració. Farem la demostració per inducció sobre n .

Cas base. Si $n = 1$, aleshores $A = [\alpha_{11}]$, que ja és una matriu diagonal.

Hipòtesi inductiva. Suposem l'enunciat cert per a matrius quadrades simètriques de tamany $n - 1$, és a dir, si $A \in M_{n-1}(\mathbb{K})$ és una matriu quadrada simètrica, aleshores A és congruent a una matriu diagonal.

Anem a demostrar-ho per a una matriu $A = (\alpha_{ij}) \in M_n(\mathbb{K})$ simètrica de tamany n . La demostració serà algorísmica. Diferenciem els següents casos.

Si $A = 0$, aleshores A ja és diagonal.

Per tant, podem suposar $A \neq 0$. En aquest punt intentarem aconseguir un element diferent de zero en l'entrada $(1, 1)$ de la matriu.

Cas 0. Si $\alpha_{11} \neq 0$, ja ho hauríem aconseguit.

Si aquest no fóra el cas, és a dir, si $\alpha_{11} = 0$, aleshores pot ocórrer algun dels següents casos.

Cas 1. Algun dels elements de la diagonal α_{ii} és diferent de zero, amb $2 \leq i \leq n$. És a dir, la matriu A té la forma representada a l'esquerra. Sobre aquesta matriu apliquem les operacions elementals que l'acompanyen.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & \alpha_{1i} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{i1} & \cdots & \alpha_{ii} & \cdots & \alpha_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \cdots & \alpha_{ni} & \cdots & \alpha_{nn} \end{bmatrix} \xrightarrow{f_1 \leftrightarrow f_i} \begin{bmatrix} \alpha_{i1} & \cdots & \alpha_{ii} & \cdots & \alpha_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \alpha_{1i} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \cdots & \alpha_{ni} & \cdots & \alpha_{nn} \end{bmatrix} \xrightarrow{c_1 \leftrightarrow c_i} \begin{bmatrix} \alpha_{ii} & \cdots & \alpha_{i1} & \cdots & \alpha_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{1i} & \cdots & 0 & \cdots & \alpha_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{ni} & \cdots & \alpha_{n1} & \cdots & \alpha_{nn} \end{bmatrix}$$

Per la Proposició 7.5, la matriu resultant és congruent a la matriu original A i té un element diferent de zero en la posició $(1, 1)$.

Cas 2. Cap dels elements de la diagonal és diferent de zero, és a dir, $\alpha_{ii} = 0$ per a tot $1 \leq i \leq n$. Com treballem sota la suposició que $A \neq 0$, han d'existir índexs $1 \leq i, j \leq n$ amb $i < j$ per als quals $\alpha_{ij} \neq 0$. És a dir, A té la forma representada a continuació. Sobre aquesta matriu apliquem les operacions elementals que l'acompanyen.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & \alpha_{1i} & \cdots & \alpha_{1j} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{i1} & \cdots & 0 & \cdots & \alpha_{ij} & \cdots & \alpha_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{j1} & \cdots & \alpha_{ji} & \cdots & 0 & \cdots & \alpha_{jn} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \cdots & \alpha_{ni} & \cdots & \alpha_{nj} & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{f_i = f_i + f_j} \begin{bmatrix} 0 & \cdots & \alpha_{1i} & \cdots & \alpha_{1j} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{i1} + \alpha_{j1} & \cdots & \alpha_{ji} & \cdots & \alpha_{ij} & \cdots & \alpha_{in} + \alpha_{jn} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{j1} & \cdots & \alpha_{ji} & \cdots & 0 & \cdots & \alpha_{jn} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \cdots & \alpha_{ni} & \cdots & \alpha_{nj} & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{c_i=c_i+c_j} \begin{bmatrix} 0 & \cdots & \alpha_{1i} + \alpha_{1j} & \cdots & \alpha_{1j} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{i1} + \alpha_{j1} & \cdots & \alpha_{ji} + \alpha_{ij} & \cdots & \alpha_{ij} & \cdots & \alpha_{in} + \alpha_{jn} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{j1} & \cdots & \alpha_{ji} & \cdots & 0 & \cdots & \alpha_{jn} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \cdots & \alpha_{ni} + \alpha_{nj} & \cdots & \alpha_{nj} & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

Com la matriu A és simètrica, $\alpha_{ji} + \alpha_{ij} = 2\alpha_{ij}$. Com $\text{car}(\mathbb{K}) \neq 2$, aleshores $2\alpha_{ij} \neq 0$. Per la Proposició 7.5, la matriu resultant és congruent a la matriu original A i té un element diferent de zero en la posició (i, i) de la diagonal. Aleshores, podem reprendre l'estratègia presentada en el Cas 1 per a moure aquest element a la posició $(1, 1)$.

En qualsevol cas, hem aconseguit una matriu simètrica, congruent a l'original, de la forma

$$\left[\begin{array}{c|ccc} \alpha'_{11} & \alpha'_{12} & \cdots & \alpha'_{1n} \\ \alpha'_{21} & & & \\ \vdots & & A' & \\ \alpha'_{n1} & & & \end{array} \right],$$

on $\alpha'_{11} \neq 0$ i A' és una matriu simètrica de tamany $n - 1$.

En aquest cas podem fer les següents operacions elementals. Per a cada índex $2 \leq i \leq n$, a la fila i li restem la fila 1 multiplicada per $\frac{\alpha'_{ji}}{\alpha'_{11}}$ i després, a la columna i li restem la columna 1 multiplicada per $\frac{\alpha'_{i1}}{\alpha'_{11}}$. Recordem que la matriu és simètrica, aleshores $\alpha'_{1i} = \alpha'_{i1}$ i, per la Proposició 7.5, la matriu resultant, després de fer totes aquestes operacions, té la forma

$$\left[\begin{array}{c|ccc} \alpha'_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & A'' & \\ 0 & & & \end{array} \right].$$

En aquest punt, la submatriu A'' és simètrica i de tamany $n - 1$. Per la hipòtesi inductiva, aquesta submatriu serà congruent a una matriu diagonal. De fet, per a trobar-la repetirem l'algorisme descrit sobre la submatriu A'' .

Açò ens garanteix una matriu diagonal congruent a la matriu simètrica original A . □

Amb aquest últim resultat obtenim la seqüència completa de caracteritzacions de les formes bilineals simètriques definides sobre $\mathbb{K}$ -espais vectorials, amb $\text{car}(\mathbb{K}) \neq 2$.

Corol·lari 7.4. *Siga $\mathbb{K}$ un cos amb $\text{car}(\mathbb{K}) \neq 2$, V un $\mathbb{K}$ -espai vectorial i $f: V \times V \longrightarrow \mathbb{K}$ una forma bilineal. Les següents afirmacions són equivalents.*

i. f és una forma bilineal simètrica;

- ii. Tota matriu coordinada d' f és una matriu simètrica;
- iii. V admet una base ortogonal per a f ;
- iv. f té una matriu coordinada diagonal;
- v. Tota matriu coordinada d' f és congruent a una matriu diagonal.

7.3 Matrius simètriques reals

En les matrius quadrades simètriques amb entrades reals podem dir més.

Proposició 7.8. *Siga $A \in M_n(\mathbb{R})$ una matriu quadrada simètrica real, aleshores A és congruent amb una matriu diagonal de la forma $\text{Diag}(1, \dots, 1, -1, \dots, -1, 0, \dots, 0)$.*

Demostració. Per la Proposició 7.7, sabem que A és congruent amb una matriu diagonal de la forma $\text{Diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$. Sobre aquesta matriu diagonal, d'acord a l'entrada α_i , amb $1 \leq i \leq n$, fem les següents operacions elementals.

- **Si $\alpha_i > 0$.** En aquest cas dividim la fila i i després la columna i per $\sqrt{\alpha_i}$ fins a transformar l'entrada i de la diagonal en un 1.
- **Si $\alpha_i < 0$.** En aquest cas dividim la fila i i després la columna i per $\sqrt{-\alpha_i}$ fins a transformar l'entrada i de la diagonal en un -1 .
- **Si $\alpha_i = 0$.** En aquest cas no modifiquem res.

Només ens quedaria reordenar les entrades fins a posar-les en la posició que ens interessa. En aquest punt, recordem l'estratègia presentada en el Cas 1 de la demostració de la Proposició 7.7. Així, per la Proposició 7.5, concloem que la matriu A és congruent a una matriu diagonal de la forma

$$\text{Diag}(1, \dots, 1, -1, \dots, -1, 0, \dots, 0).$$

Com volíem demostrar. □

i Nota

Nota. Recordem que, sobre el conjunt de matrius quadrades, ser congruents implica ser equivalents. En particular, el rang de la matriu diagonal obtinguda en la Proposició 7.8 coincideix amb el rang de la matriu simètrica A , és a dir, en la matriu diagonal congruent a la matriu A obtinguda en aquest resultat hi ha $n - \text{rang}(A)$ entrades zero.

El que vorem a continuació és que, per a una matriu simètrica real A , la matriu diagonal obtinguda en la Proposició 7.8 congruent a A és única.

Teorema 7.1 (Llei d'inèrcia de Sylvester). *Siga $A \in M_n(\mathbb{R})$ una matriu simètrica real, aleshores A és congruent a una única matriu diagonal de la forma $\text{Diag}(1, \dots, 1, -1, \dots, -1, 0, \dots, 0)$.*

Demostració. Que A és congruent a una matriu d'aquest tipus és conseqüència de la Proposició 7.8. Només ens queda comprovar que aquesta matriu diagonal és única. Denotem per $r = \text{rang}(A)$. Suposem que A és congruent a dues matrius diagonals del tipus

$$\begin{aligned} D &= \text{Diag}(1, \dots, 1, -1, \dots, -1, 0, \dots, 0) && \text{amb } s \text{ uns, } r - s \text{ menys uns i } n - r \text{ zeros;} \\ \bar{D} &= \text{Diag}(1, \dots, 1, -1, \dots, -1, 0, \dots, 0) && \text{amb } s' \text{ uns, } r - s' \text{ menys uns i } n - r \text{ zeros.} \end{aligned}$$

Recordem que, per la nota anterior, el rang d'aquestes dues matrius D i $\bar{D}$ ha de ser el mateix. Només ens quedarà demostrar que $s = s'$.

Com que D i $\bar{D}$ són congruents, aleshores pel Corol·lari 7.1 representen la mateixa forma bilineal $f: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ en algunes bases. Així, podem suposar que, per a algunes bases de $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ i $\bar{\mathcal{B}} = \{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n\}$, respectivament, es té que

- D és la matriu coordenada d' f en $\mathcal{B}$;
- $\bar{D}$ és la matriu coordenada d' f en $\bar{\mathcal{B}}$.

Aleshores, per a cada parell d'índexs $1 \leq i, j \leq n$, es donen les següents igualtats

$$f(e_i, e_j) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j, \\ 1 & \text{si } 1 \leq i = j \leq s, \\ -1 & \text{si } s < i = j \leq r, \\ 0 & \text{si } r < i = j \leq n; \end{cases} \quad f(\bar{e}_i, \bar{e}_j) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j, \\ 1 & \text{si } 1 \leq i = j \leq s', \\ -1 & \text{si } s' < i = j \leq r, \\ 0 & \text{si } r < i = j \leq n. \end{cases}$$

Considerem els següents subespais vectorials

$$U = \langle e_1, \dots, e_s \rangle, \quad W = \langle \bar{e}_{s'+1}, \dots, \bar{e}_n \rangle.$$

Anem a demostrar que la seua suma és directa. Per tant, siga $z \in U \cap W$, aleshores z pot escriure's tant com a combinació lineal dels vectors en U , com a combinació lineal dels vectors en W . Així existeixen escalars $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ en $\mathbb{R}$ i escalars $\mu_{s'+1}, \dots, \mu_n$ en $\mathbb{R}$ de forma que

$$\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_s e_s = z = \mu_{s'+1} \bar{e}_{s'+1} + \dots + \mu_n \bar{e}_n.$$

Ens ocupem ara del resultat d'aplicar la forma f sobre el parell (z, z) . Primerament ho fem emprant la seua expressió com a combinació lineal dels vectors en U i tenint en compte les anteriors igualtats.

$$f(z, z) = f\left(\sum_{i=1}^s \lambda_i e_i, \sum_{i=1}^s \lambda_i e_i\right) = \sum_{i=1}^s \lambda_i^2 \geq 0.$$

A continuació ho fem emprant l'expressió de z com a combinació lineal dels vectors en W i tenint en compte les anteriors igualtats.

$$f(z, z) = f\left(\sum_{i=s'+1}^n \mu_i \bar{e}_i, \sum_{i=s'+1}^n \mu_i \bar{e}_i\right) = - \sum_{i=s'+1}^r \mu_i^2 \leq 0.$$

És a dir, emprant una expressió, $f(z, z) \geq 0$ i, emprant l'altra, $f(z, z) \leq 0$. Per necessitat, $f(z, z) = 0$. En particular, $\sum_{i=1}^s \lambda_i^2 = 0$, el que obliga a que $\lambda_i = 0$, per a tot $1 \leq i \leq s$. En particular, $z = \sum_{i=1}^s \lambda_i e_i = 0$.

Aleshores la suma d' U i W és directa, és a dir, podem escriure $U \oplus W$. Com que $U \oplus W$ és un subespai vectorial d' $\mathbb{R}^n$, tenim la següent desigualtat

$$s + (n - s') = \dim_{\mathbb{R}}(U \oplus W) \leq \dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n) = n.$$

Per tant, concloem que $s \leq s'$.

L'altra desigualtat es pot obtenir de manera anàloga considerant els subespais vectorials

$$U = \langle e_{s+1}, \dots, e_n \rangle, \quad W = \langle \bar{e}_1, \dots, \bar{e}_{s'} \rangle.$$

Concloem que $s = s'$, és a dir, $D = \bar{D}$. □

Així, podem definir rang i signatura d'una forma bilineal simètrica real.

Definició 7.7 (Rang i signatura). Siga V un $\mathbb{R}$ -espai vectorial i $f: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ una forma bilineal simètrica. Anomenem **rang d' f** al rang de qualsevol matriu coordinada. Aquest nombre es denotarà per $\text{rang}(f)$. Anomenem **signatura d' f** al nombre d'uns de l'única matriu diagonal de la forma $\text{Diag}(1, \dots, 1, -1, \dots, -1, 0, \dots, 0)$ que és matriu coordinada d' f en alguna base. Aquest nombre es denotarà per $\text{sig}(f)$.

Per extensió, anomenem **signatura d'una matriu** quadrada simètrica real $A \in M_n(\mathbb{R})$ al nombre d'uns de l'única matriu diagonal de la forma $\text{Diag}(1, \dots, 1, -1, \dots, -1, 0, \dots, 0)$ que és congruent amb A . Aquest nombre es denotarà per $\text{sig}(A)$.

La [lleï d'inèrcia de Sylvester](#) ens garanteix que aquests conceptes estan ben definits.

La següent proposició ens mostra que el rang i la signatura caracteritzen la relació de congruència per a matrius simètriques reals.

Proposició 7.9. *Siguin $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ dues matrius simètriques reals. Aleshores les següents afirmacions són equivalents.*

- i. A i B són congruents;
- ii. $\text{rang}(A) = \text{rang}(B)$ i $\text{sig}(A) = \text{sig}(B)$.

Demostració. Suposem que A i B són congruents. Considerem una d'elles, per exemple la matriu A . Per la [lleï d'inèrcia de Sylvester](#), A és congruent a una única matriu diagonal del tipus $\text{Diag}(1, \dots, 1, -1, \dots, -1, 0, \dots, 0)$. Com B és congruent amb A , aleshores B també és congruent amb aquesta matriu diagonal. Concloem que $\text{rang}(A) = \text{rang}(B)$ i $\text{sig}(A) = \text{sig}(B)$.

Suposem ara que $\text{rang}(A) = \text{rang}(B)$ i $\text{sig}(A) = \text{sig}(B)$, aleshores per la [lleï d'inèrcia de Sylvester](#) A i B són congruents a la mateixa matriu diagonal $\text{Diag}(1, \dots, 1, -1, \dots, -1, 0, \dots, 0)$, amb $\text{sig}(A)$ uns a la diagonal i $n - \text{rang}(A)$ zeros a la diagonal. Llavors A i B són congruents. □

Donada una forma bilineal simètrica definida en un $\mathbb{R}$ -espai vectorial, per a obtindre el seu rang i la seua signatura només ens caldrà considerar una matriu coordinada de la forma en alguna base i aplicar les construccions presentades a les Proposicions 7.7 i 7.8 fins obtindre l'única matriu diagonal descrita a la [lleï d'inèrcia de Sylvester](#).

Exemple 7.4. Siga l' $\mathbb{R}$ -espai vectorial $\mathbb{R}^2$ i la forma bilineal $f: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ que té a

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

com a matriu coordinada d' f en la base canònica d' $\mathbb{R}^2$. Pel Corol·lari 7.4, f és una forma bilineal simètrica perquè admet una matriu coordinada simètrica. Apliquem les construccions presentades a les Proposicions 7.7 i 7.8 fins a obtindre l'única matriu diagonal de la forma $\text{Diag}(1, \dots, 1, -1, \dots, -1, 0, \dots, 0)$ que és congruent amb A .

$$\begin{aligned} A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} &\xrightarrow{f_2 = f_2 - \frac{2}{3}f_1} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} \xrightarrow{c_2 = c_2 - \frac{2}{3}c_1} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} \xrightarrow{f_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}f_1} \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} \\ &\xrightarrow{c_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}c_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} \xrightarrow{f_2 = \sqrt{3}f_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} \xrightarrow{c_2 = \sqrt{3}c_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Aleshores, la signatura d' f és 1 i el rang és 2.

El mètode que acabem de descriure per a obtindre la signatura pot complementar-se amb el mètode que vorem a continuació.

Teorema 7.2 (Criteri de Sylvester per a la signatura). *Siga $A \in M_n(\mathbb{R})$ una matriu simètrica real. Per a cada $1 \leq i \leq n$, anomenem A_i a la submatriu quadrada de tamany i que resulta d'agafar en A les i primeres files i columnes. Si, per a cada $1 \leq i \leq n$, el determinant $\text{Det}(A_i)$ és diferent de zero, aleshores la signatura d' A és el nombre de valors positius de la seqüència*

$$\text{Det}(A_1), \quad \frac{\text{Det}(A_2)}{\text{Det}(A_1)}, \quad \frac{\text{Det}(A_3)}{\text{Det}(A_2)}, \quad \dots, \quad \frac{\text{Det}(A_n)}{\text{Det}(A_{n-1})}.$$

Demostració. Siga V un $\mathbb{R}$ -espai vectorial de dimensió n i $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ una base de V . Anomenem $f: V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ a la forma bilineal que té a A com a matriu coordinada en la base $\mathcal{B}$.

Construïm una nova base $\bar{\mathcal{B}} = \{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n\}$ de V com segueix

$$\begin{aligned} \bar{e}_1 &= e_1, \\ \bar{e}_i &= e_i - \sum_{j=1}^{i-1} \lambda_{ij} e_j, \quad \text{per a } 1 < i \leq n. \end{aligned}$$

És a dir, el primer vector de $\bar{\mathcal{B}}$ serà el primer vector de $\mathcal{B}$ i el vector i -èssim de $\bar{\mathcal{B}}$, per a $1 < i \leq n$, serà el vector i -èssim de $\mathcal{B}$ menys una combinació lineal dels primers $i-1$

vectors en $\mathcal{B}$. Els escalars $\lambda_{ij} \in \mathbb{R}$ que componen aquesta combinació lineal, i que encara no coneixem, els trobarem de forma que la base resultant $\bar{\mathcal{B}}$ siga ortogonal per a f .

Considerem la següent afirmació.

Afirmació. Per a que $\bar{\mathcal{B}}$ siga ortogonal per a f és suficient que

$$f(\bar{e}_i, e_j) = 0, \quad \text{per a tot } 1 \leq j < i \leq n.$$

Comprovem que aquesta afirmació és certa. Siguen $\bar{e}_i, \bar{e}_j \in \bar{\mathcal{B}}$ amb $1 \leq j < i \leq n$, aleshores

$$f(\bar{e}_i, \bar{e}_j) = f\left(\bar{e}_i, e_j - \sum_{k=1}^{j-1} \lambda_{jk} e_k\right) = f(\bar{e}_i, e_j) - \sum_{k=1}^{j-1} \lambda_{jk} f(\bar{e}_i, e_k) = 0.$$

Queda, per tant, demostrada l'afirmació.

Per tant, el nostre objectiu serà trobar escalars $\lambda_{ij} \in \mathbb{R}$ amb $1 \leq j < i \leq n$ tals que $f(\bar{e}_i, e_j) = 0$. Així, per a tot $1 \leq j < i \leq n$, imposem la següent condició

$$0 = f(\bar{e}_i, e_j) = f\left(e_i - \sum_{k=1}^{i-1} \lambda_{ik} e_k, e_j\right) = f(e_i, e_j) - \sum_{k=1}^{i-1} \lambda_{ik} f(e_k, e_j).$$

Aleshores, per a cada $1 \leq i \leq n$, se'ns planteja el següent sistema d'equacions on les incògnites són els escalars $\lambda_{i1}, \dots, \lambda_{i(i-1)}$,

$$\left. \begin{array}{ccccccc} \lambda_{i1} f(e_1, e_1) & + & \cdots & + & \lambda_{i(i-1)} f(e_{i-1}, e_1) & = & f(e_i, e_1) \\ \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ \lambda_{i1} f(e_1, e_{i-1}) & + & \cdots & + & \lambda_{i(i-1)} f(e_{i-1}, e_{i-1}) & = & f(e_i, e_{i-1}) \end{array} \right\}$$

Notem que l'anterior sistema s'escriu, de forma matricial, de la següent forma

$$\begin{bmatrix} f(e_1, e_1) & \cdots & f(e_{i-1}, e_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f(e_1, e_{i-1}) & \cdots & f(e_{i-1}, e_{i-1}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_{i1} \\ \vdots \\ \lambda_{i(i-1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(e_i, e_1) \\ \vdots \\ f(e_i, e_{i-1}) \end{bmatrix},$$

on la matriu més a l'esquerra es correspon a la submatriu A_{i-1} , ja que A és simètrica. Aquesta submatriu té determinant no nul per hipòtesi, $\text{Det}(A_{i-1}) \neq 0$. És a dir, el sistema que determina té solució i és única. Per aquesta raó, podem trobar aquests escalars $\lambda_{ij} \in \mathbb{R}$, per a cada $1 \leq j < i \leq n$. Açò ens garanteix l'existència de la base ortogonal $\bar{\mathcal{B}}$ que volíem.

Notem, a més, que per la definició dels vectors en $\bar{\mathcal{B}}$, per a cada $1 \leq i \leq n$, es té que $\langle e_1, \dots, e_i \rangle = \langle \bar{e}_1, \dots, \bar{e}_i \rangle$.

En particular, per a cada $1 \leq i \leq n$, si prenem el subespai $V_i = \langle e_1, \dots, e_i \rangle$, considerem dues bases per a V_i , donades per $\mathcal{B}_i = \{e_1, \dots, e_i\}$ i $\bar{\mathcal{B}}_i = \{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_i\}$, i la forma bilineal f restringida a V_i ,

$$\begin{aligned} f_i: \quad V_i \times V_i &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (u, w) &\longmapsto f(u, w) \end{aligned}$$

Aleshores trobem que, per a cada $1 \leq i \leq n$, es té que

- A_i és la matriu coordinada d' f_i en la base $\mathcal{B}_i$;
- D_i és la matriu coordinada d' f_i en la base $\overline{\mathcal{B}}_i$.

Dues qüestions ocorren aquí. Com que $\overline{\mathcal{B}}_i$ és una base ortogonal, D_i és una matriu diagonal de la forma $\text{Diag}(\xi_1, \dots, \xi_i)$, per a alguns escalars $\xi_1, \dots, \xi_i \in \mathbb{R}$. Per altra banda, com que A_i i D_i representen la mateixa forma bilineal en dues bases diferents, aleshores pel Corol·lari 7.1, les matrius A_i i D_i són congruents. Així, per a cada $1 \leq i \leq n$, existeix una matriu invertible $P_i \in \text{GL}_i(\mathbb{R})$ de forma que

$$A_i = P_i^t D_i P_i.$$

Si prenem determinants en l'anterior igualtat trobem que, per a cada $1 \leq i \leq n$,

$$\text{Det}(A_i) = \text{Det}(P_i^t D_i P_i) = \text{Det}(P_i^t) \text{Det}(D_i) \text{Det}(P_i) = \text{Det}(P_i)^2 \prod_{j=1}^i \xi_j.$$

Aleshores, trobem la següent cadena d'igualtats

$$\begin{aligned} \text{Det}(A_1) &= \text{Det}(P_1)^2 \xi_1; \\ \frac{\text{Det}(A_2)}{\text{Det}(A_1)} &= \frac{\text{Det}(P_2)^2 \xi_1 \xi_2}{\text{Det}(P_1)^2 \xi_1} = \frac{\text{Det}(P_2)^2}{\text{Det}(P_1)^2} \xi_2; \\ \frac{\text{Det}(A_3)}{\text{Det}(A_2)} &= \frac{\text{Det}(P_3)^2 \xi_1 \xi_2 \xi_3}{\text{Det}(P_2)^2 \xi_1 \xi_2} = \frac{\text{Det}(P_3)^2}{\text{Det}(P_2)^2} \xi_3; \\ &\vdots \\ \frac{\text{Det}(A_n)}{\text{Det}(A_{n-1})} &= \frac{\text{Det}(P_n)^2 \prod_{i=1}^n \xi_i}{\text{Det}(P_{n-1})^2 \prod_{i=1}^{n-1} \xi_i} = \frac{\text{Det}(P_n)^2}{\text{Det}(P_{n-1})^2} \xi_n. \end{aligned}$$

Com que cada quocient anterior és el producte de ξ_i per un nombre estrictament positiu, el signe de cada element de la seqüència coincideix amb el signe del corresponent ξ_i . Aleshores la signatura d' A , que ve donada pel nombre d'elements positius en la seqüència $\xi_1, \dots, \xi_n$, es correspon amb el nombre d'elements positius en la seqüència

$$\text{Det}(A_1), \quad \frac{\text{Det}(A_2)}{\text{Det}(A_1)}, \quad \frac{\text{Det}(A_3)}{\text{Det}(A_2)}, \quad \dots, \quad \frac{\text{Det}(A_n)}{\text{Det}(A_{n-1})},$$

com volíem demostrar. □

8 Productes escalars

Els productes escalars són un cas concret de formes bilineals. De fet, són les formes bilineals que tenen rang i signatura màxims. En aquest tema estudiarem les propietats d'aquestes formes bilineals. En tot el tema treballarem en el cos $\mathbb{R}$.

Definició 8.1 (Producte escalar). Siga V un $\mathbb{R}$ -espai vectorial i $f: V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ una forma bilineal simètrica. Direm que f és un **producte escalar** si, per a tot $u \in V$, se satisfan les següents propietats

- i. $f(u, u) \geq 0$;
- ii. $f(u, u) = 0$ si, i només si, $u = 0$.

Proposició 8.1. Siga V un $\mathbb{R}$ -espai vectorial amb $\dim_{\mathbb{R}}(V) = n$ i $f: V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ una forma bilineal simètrica. Les següents afirmacions són equivalents

- i. f és un producte escalar;
- ii. $\text{rang}(f) = \text{sig}(f) = n$.

Demostració. Suposem que f és un producte escalar. Com f és una forma bilineal simètrica sobre un $\mathbb{R}$ -espai vectorial, aleshores, per la [proposició sobre matrius simètriques reals](#), existeix una base $\mathcal{B}$ de V per a la qual la matriu coordenada d' f en la base $\mathcal{B}$ és de la forma

$$\text{Diag}(1, \dots, 1, -1, \dots, -1, 0, \dots, 0)$$

Si $\text{rang}(f) < n$, aleshores apareixerà almenys un 0 en l'anterior matriu coordenada diagonal. Per tant, trobarem un vector no nul e en $\mathcal{B}$ tal que $f(e, e) = 0$, contradient el supòsit que f és un producte escalar. Per tant $\text{rang}(f) = n$.

Per altra banda, si $\text{sig}(f) < n$, aleshores apareixerà almenys un -1 en l'anterior matriu coordenada diagonal. Per tant, trobarem un vector e en $\mathcal{B}$ tal que $f(e, e) = -1$, contradient el supòsit que f és un producte escalar. Per tant $\text{sig}(f) = n$.

Per a l'altra implicació, suposem que $\text{rang}(f) = \text{sig}(f) = n$. Aleshores, com f és una forma bilineal simètrica sobre un $\mathbb{R}$ -espai vectorial, podem trobar una base $\mathcal{B}$ de V per a la qual la matriu coordenada d' f en la base $\mathcal{B}$ és la matriu identitat I_n . Així, si v és un vector en V i anomenem

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

les coordenades de v en $\mathcal{B}$, trobem que

$$f(v, v) = \mathbf{X}^t \mathbf{I}_n \mathbf{X} = x_1^2 + \cdots + x_n^2 \geq 0.$$

A més, $f(v, v) = 0$ si, i només si, $x_1 = \cdots = x_n = 0$ si, i només si, $v = 0$.

Així, f és un producte escalar. □

i Nota

Notació. Si V és un $\mathbb{R}$ -espai vectorial i $f: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ un producte escalar, obviarem f i escriurem únicament un punt $\cdot$ per a denotar l'operació. Així escriurem

$$\begin{aligned} \cdot: V \times V &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (u, w) &\longmapsto u \cdot w \end{aligned}$$

8.1 Espais vectorials euclidians

Un espai vectorial euclidià serà un espai vectorial dotat d'un producte escalar. En aquesta secció vorem les propietats més destacades d'aquest tipus d'estructures.

Definició 8.2 (Espai vectorial euclidià). Siga V un $\mathbb{R}$ -espai vectorial i $\cdot: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ un producte escalar definit sobre V . Al parell $(V, \cdot)$ l'anomenarem **$\mathbb{R}$ -espai vectorial euclidià**.

Definició 8.3 (Producte escalar estàndard). Considerem l' $\mathbb{R}$ -espai vectorial estàndard de dimensió n . Definim el **producte escalar estàndard d' $\mathbb{R}^n$** com

$$\begin{aligned} \cdot: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ ((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) &\longmapsto x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n. \end{aligned}$$

Notem que el producte escalar estàndard d' $\mathbb{R}^n$ és l'únic producte escalar que té a la matriu identitat $\mathbf{I}_n$ com a matriu coordinada en la base canònica d' $\mathbb{R}^n$.

Definició 8.4 (Norma). Siga $(V, \cdot)$ un $\mathbb{R}$ -espai vectorial euclidià i $v \in V$, es defineix la **norma** de v respecte $\cdot$, denotada per $\|v\|$, com el nombre real donat per

$$\|v\| = +\sqrt{v \cdot v}.$$

Proposició 8.2. Siga $(V, \cdot)$ un $\mathbb{R}$ -espai vectorial euclidià, $v \in V$ i $\lambda \in \mathbb{R}$, aleshores se satisfan les següents propietats

- i. $\|v\| \geq 0$;
- ii. $\|v\| = 0$ si, i només si, $v = 0$;
- iii. $\|\lambda v\| = |\lambda| \|v\|$.

Exemple 8.1. Sobre l' $\mathbb{R}$ -espai vectorial $\mathbb{R}^2$ es consideren els dos productes escalars que, per a la base canònica $\mathcal{B}_c$ d' $\mathbb{R}^2$, tenen les següents matrius coordenades

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Es comprova fàcilment amb el [criteri de Sylvester](#) que A i B representen dos productes escalars.

Així tenim dues estructures d'espai vectorial euclidià definides sobre $\mathbb{R}^2$ i que representarem per $(\mathbb{R}^2, \cdot_A)$ i $(\mathbb{R}^2, \cdot_B)$. Considerem per exemple el vector $(1, 0) \in \mathbb{R}^2$, aleshores la seua norma depén del producte escalar considerat. Així,

$$\begin{aligned} \|(1, 0)\|_A &= +\sqrt{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}} = +\sqrt{3}; \\ \|(1, 0)\|_B &= +\sqrt{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}} = 1. \end{aligned}$$

Proposició 8.3 (Desigualtat de Cauchy-Schwarz). *Siga $(V, \cdot)$ un $\mathbb{R}$ -espai vectorial euclidià i u, w vectors en V , aleshores*

$$|u \cdot w| \leq \|u\| \|w\|.$$

Demostració. Siga $x \in \mathbb{R}$ una variable indeterminada i considerem un vector en V de la forma $u + xw$. Com $\cdot$ és un producte escalar, aleshores s'ha de satisfer la següent desigualtat

$$\begin{aligned} 0 &\leq (u + xw) \cdot (u + xw) \\ &= (u \cdot u) + x(u \cdot w) + x(w \cdot u) + x^2(w \cdot w) \\ &= \|u\|^2 + 2(u \cdot w)x + \|w\|^2 x^2. \end{aligned}$$

Aleshores trobem que el polinomi amb indeterminada x donat per $\|u\|^2 + 2(u \cdot w)x + \|w\|^2 x^2$ ha de ser sempre major o igual a zero. Així, si calculem les seues arrels

$$x = \frac{-2(u \cdot w) \pm \sqrt{4(u \cdot w)^2 - 4\|u\|^2 \|w\|^2}}{2\|w\|^2},$$

trobem que el seu discriminant ha de ser menor o igual a zero, és a dir,

$$4(u \cdot w)^2 - 4\|u\|^2 \|w\|^2 \leq 0.$$

Si simplifiquem aquesta darrera expressió trobem que

$$|u \cdot w| \leq \|u\| \|w\|,$$

com volíem demostrar. □

Proposició 8.4 (Desigualtat triangular o de Minkowski). *Siga $(V, \cdot)$ un $\mathbb{R}$ -espai vectorial euclidià i siguin u, w vectors en V , aleshores*

$$\|u + w\| \leq \|u\| + \|w\|.$$

Demostració. Es dona la següent cadena de desigualtats

$$\begin{aligned} \|u + w\|^2 &= (u + w) \cdot (u + w) \\ &= (u \cdot u) + 2(u \cdot w) + (w \cdot w) \\ &\leq \|u\|^2 + 2\|u\| \|w\| + \|w\|^2 \quad (\text{Cauchy-Schwarz}) \\ &= (\|u\| + \|w\|)^2. \end{aligned}$$

Per tant, concloem que $\|u + w\| \leq \|u\| + \|w\|$. □

Definició 8.5 (Angle entre vectors). *Siga $(V, \cdot)$ un $\mathbb{R}$ -espai vectorial euclidià i siguin u, w vectors no nuls en V . Notem que, per la desigualtat de Cauchy-Schwarz, Proposició 8.3, es té que $|u \cdot w| \leq \|u\| \|w\|$. Aleshores es dona la següent desigualtat*

$$-1 \leq \frac{u \cdot w}{\|u\| \|w\|} \leq 1.$$

Definim l'**angle** que formen els vectors u i w respecte $\cdot$ com a l'únic angle $\alpha \in [0, \pi]$ tal que

$$\cos(\alpha) = \frac{u \cdot w}{\|u\| \|w\|}.$$

i Nota

Nota. *Siga $(V, \cdot)$ un $\mathbb{R}$ -espai vectorial euclidià i siguin u, w vectors no nuls en V . Notem que u i w són ortogonals si, i només si, l'angle que formen és $\frac{\pi}{2}$.*

Teorema 8.1 (Teorema de Pitàgores). *Siga $(V, \cdot)$ un $\mathbb{R}$ -espai vectorial euclidià i siguin u, w vectors ortogonals en V , aleshores*

$$\|u + w\|^2 = \|u\|^2 + \|w\|^2.$$

Demostració. Es donen les següents igualtats

$$\begin{aligned} \|u + w\|^2 &= (u + w) \cdot (u + w) \\ &= (u \cdot u) + 2(u \cdot w) + (w \cdot w) \\ &= \|u\|^2 + \|w\|^2, \quad (u \cdot w = 0) \end{aligned}$$

com volíem demostrar. □

8.2 Bases ortonormals

En aquesta secció comprovarem com d'útil és l'existència de bases ortogonals en un $\mathbb{R}$ -espai vectorial euclidià.

Proposició 8.5 (De la utilitat de les bases ortogonals). *Siga $(V, \cdot)$ un $\mathbb{R}$ -espai vectorial euclidià de dimensió $\dim_{\mathbb{R}}(V) = n$ i $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ una base ortogonal de V . Siga $v \in V$, aleshores*

$$v = \left(\frac{v \cdot e_1}{\|e_1\|^2} \right) e_1 + \dots + \left(\frac{v \cdot e_n}{\|e_n\|^2} \right) e_n.$$

Demostració. Com $\mathcal{B}$ és una base de V , aleshores tot vector v de V pot escriure's com a combinació lineal dels vectors en $\mathcal{B}$. Així, existeixen escalars $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tals que

$$v = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n.$$

Aleshores, per a cada $1 \leq i \leq n$, si considerem el producte escalar de v amb el vector e_i de la base $\mathcal{B}$ obtenim la següent seqüència d'igualtats

$$\begin{aligned} v \cdot e_i &= (\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n) \cdot e_i \\ &= \lambda_1 (e_1 \cdot e_i) + \dots + \lambda_n (e_n \cdot e_i) \quad (\cdot \text{ és forma bilineal}) \\ &= \lambda_i (e_i \cdot e_i) \quad (\mathcal{B} \text{ és base ortogonal}) \\ &= \lambda_i \|e_i\|^2. \end{aligned}$$

Com $\cdot$ és un producte escalar tenim que, per a cada $1 \leq i \leq n$, $\|e_i\| \neq 0$. Així, de l'anterior seqüència d'equacions, concloem que, per a cada $1 \leq i \leq n$,

$$\lambda_i = \frac{v \cdot e_i}{\|e_i\|^2},$$

com volíem demostrar. □

A continuació presentem el mètode de Gram-Schmidt per a l'obtenció de bases ortogonals en un $\mathbb{R}$ -espai vectorial euclidià.

Proposició 8.6 (Mètode de Gram-Schmidt). *Siga $(V, \cdot)$ un $\mathbb{R}$ -espai vectorial euclidià amb $\dim_{\mathbb{R}}(V) = n$ i $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ una base de V . Aleshores existeix una base ortogonal $\bar{\mathcal{B}} = \{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n\}$ de V amb la propietat que, per a cada $1 \leq i \leq n$,*

$$\langle e_1, \dots, e_i \rangle = \langle \bar{e}_1, \dots, \bar{e}_i \rangle.$$

Demostració. Fem la demostració per inducció sobre n .

Cas base. Si $n = 1$, aleshores basta prendre

$$\bar{e}_1 = e_1.$$

Així, $\{\bar{e}_1\}$ és una base ortogonal de V i $\langle \bar{e}_1 \rangle = \langle e_1 \rangle$.

Hipòtesi inductiva. Suposem construïts els vectors $\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_{n-1}$ ortogonals dos a dos i satisfent la propietat que, per a tot $1 \leq i \leq n-1$,

$$\langle e_1, \dots, e_i \rangle = \langle \bar{e}_1, \dots, \bar{e}_i \rangle.$$

Aleshores definim el vector $\bar{e}_n$ com segueix

$$\bar{e}_n = e_n - \sum_{j=1}^{n-1} \lambda_j \bar{e}_j,$$

on, per a cada $1 \leq j \leq n-1$, λ_j és un escalar en $\mathbb{R}$ que vindrà determinat com segueix; com que volem que $\bar{e}_n$ siga ortogonal a cadascun dels vectors $\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_{n-1}$ ja construïts, imposen, per a cada $1 \leq i \leq n-1$, la condició d'ortogonalitat següent

$$0 = \bar{e}_n \cdot \bar{e}_i = \left(e_n - \sum_{j=1}^{n-1} \lambda_j \bar{e}_j \right) \cdot \bar{e}_i = (e_n \cdot \bar{e}_i) - \lambda_i (\bar{e}_i \cdot \bar{e}_i) = (e_n \cdot \bar{e}_i) - \lambda_i \|\bar{e}_i\|^2.$$

Per tant prenem, per a cada $1 \leq i \leq n-1$, com a escalar

$$\lambda_i = \frac{e_n \cdot \bar{e}_i}{\|\bar{e}_i\|^2}.$$

Així, per hipòtesi inductiva, el conjunt $\{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n\}$ és un conjunt de vectors ortogonals dos a dos. A més, per la definició d' $\bar{e}_n$, obtenim que $\langle e_1, \dots, e_n \rangle = \langle \bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n \rangle$. Per tant, $\bar{\mathcal{B}} = \{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n\}$ és una base ortogonal de V amb la propietat que, per a cada $1 \leq i \leq n$,

$$\langle e_1, \dots, e_i \rangle = \langle \bar{e}_1, \dots, \bar{e}_i \rangle.$$

Com volíem demostrar. □

Exemple 8.2. Es considera l' $\mathbb{R}$ -espai vectorial euclidià estàndard $(\mathbb{R}^3, \cdot)$ i la base $\mathcal{B}$ d' $\mathbb{R}^3$

$$\mathcal{B} = \{(1, 2, 1), (1, 0, 1), (1, 1, 0)\}.$$

Apliquem el mètode de Gram-Schmidt fins a obtenir una base ortogonal $\bar{\mathcal{B}} = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ d' $\mathbb{R}^3$.

Així, el primer vector de $\bar{\mathcal{B}}$ ve donat per

$$\bar{e}_1 = (1, 2, 1).$$

El segon vector de $\overline{\mathcal{B}}$ ve donat per

$$\bar{e}_2 = e_2 - \lambda \bar{e}_1 = (1, 0, 1) - \lambda(1, 2, 1),$$

on λ és un escalar en $\mathbb{R}$ que vindrà determinat en imposar la condició d'ortogonalitat següent

$$0 = \bar{e}_2 \cdot \bar{e}_1 = ((1, 0, 1) - \lambda(1, 2, 1)) \cdot (1, 2, 1) = 2 - 6\lambda.$$

Aleshores $\lambda = \frac{1}{3}$. Així, podem completar la descripció del vector $\bar{e}_2$

$$\bar{e}_2 = e_2 - \frac{1}{3}\bar{e}_1 = (1, 0, 1) - \frac{1}{3}(1, 2, 1) = \left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right).$$

El tercer vector de $\overline{\mathcal{B}}$ ve donat per

$$\bar{e}_3 = e_3 - \lambda \bar{e}_1 - \mu \bar{e}_2 = (1, 1, 0) - \lambda(1, 2, 1) - \mu \left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right),$$

on λ i μ són escalars en $\mathbb{R}$ que vindran determinats en imposar les condicions d'ortogonalitat següents

$$\begin{aligned} 0 &= \bar{e}_3 \cdot \bar{e}_1 = \left((1, 1, 0) - \lambda(1, 2, 1) - \mu \left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)\right) \cdot (1, 2, 1) = 3 - 6\lambda; \\ 0 &= \bar{e}_3 \cdot \bar{e}_2 = \left((1, 1, 0) - \lambda(1, 2, 1) - \mu \left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)\right) \cdot \left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) = -\frac{4}{3}\mu. \end{aligned}$$

Aleshores $\lambda = \frac{1}{2}$ i $\mu = 0$. Així, podem completar la descripció del vector $\bar{e}_3$

$$\bar{e}_3 = e_3 - \lambda \bar{e}_1 - \mu \bar{e}_2 = (1, 1, 0) - \frac{1}{2}(1, 2, 1) = \left(\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}\right).$$

Queda així completament determinada la base ortogonal $\overline{\mathcal{B}}$ d' $\mathbb{R}^3$

$$\overline{\mathcal{B}} = \left\{ (1, 2, 1), \left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right), \left(\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}\right) \right\}.$$

Notem, a més, la condició que ens garanteix Gram-Schmidt

- i. $\langle (1, 2, 1) \rangle = \langle (1, 2, 1) \rangle;$
- ii. $\langle (1, 2, 1), (1, 0, 1) \rangle = \left\langle (1, 2, 1), \left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) \right\rangle;$
- iii. $\langle (1, 2, 1), (1, 0, 1), (1, 1, 0) \rangle = \left\langle (1, 2, 1), \left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right), \left(\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}\right) \right\rangle.$

Definició 8.6 (Base ortonormal). Siga $(V, \cdot)$ un $\mathbb{R}$ -espai vectorial euclidià. Direm que un vector $v \in V$ és **unitari** per a $\cdot$ si $\|v\| = 1$. Siga $\mathcal{B}$ una base de V . Direm que $\mathcal{B}$ és una base **unitària** per a $\cdot$ si tots els vectors que componen $\mathcal{B}$ són unitaris per a $\cdot$. Direm que $\mathcal{B}$ és una base **ortonormal** per a $\cdot$ si $\mathcal{B}$ és ortogonal i unitària per a $\cdot$.

Corol·lari 8.1. *Siga $(V, \cdot)$ un $\mathbb{R}$ -espai vectorial euclidià de dimensió $\dim_{\mathbb{R}}(V) = n$ i $\mathcal{B}$ una base ortonormal de V . Aleshores la matriu coordinada del producte escalar $\cdot$ en la base $\mathcal{B}$ és la matriu identitat I_n .*

Proposició 8.7. *Siga $(V, \cdot)$ un $\mathbb{R}$ -espai vectorial euclidià de dimensió $\dim_{\mathbb{R}}(V) = n$ i $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ una base ortogonal de V . Aleshores el conjunt de vectors*

$$\overline{\mathcal{B}} = \left\{ \frac{e_1}{\|e_1\|}, \dots, \frac{e_n}{\|e_n\|} \right\}$$

és una base ortonormal de V .

Demostració. Notem que, per a cada $1 \leq i \leq n$, la norma del vector e_i satisfà $\|e_i\| > 0$. Per tant

$$\left\langle \frac{e_1}{\|e_1\|}, \dots, \frac{e_n}{\|e_n\|} \right\rangle = \langle e_1, \dots, e_n \rangle = V.$$

Així, $\overline{\mathcal{B}}$ és una base de V . A més, si considerem dos índexs diferents $1 \leq i < j \leq n$, com que $\mathcal{B}$ és una base ortogonal, tenim que

$$\frac{e_i}{\|e_i\|} \cdot \frac{e_j}{\|e_j\|} = \frac{e_i \cdot e_j}{\|e_i\| \|e_j\|} = 0.$$

És a dir, $\overline{\mathcal{B}}$ és una base ortogonal de V . A més, per a cada $1 \leq i \leq n$, trobem que

$$\left\| \frac{e_i}{\|e_i\|} \right\| = \frac{1}{\|e_i\|} \|e_i\| = 1.$$

Concloem que $\overline{\mathcal{B}}$ és una base ortonormal de V . □

Exemple 8.3. *(Continuació de l'Exemple 8.2.)* En l' $\mathbb{R}$ -espai vectorial euclidià estàndard $(\mathbb{R}^3, \cdot)$ la base $\mathcal{B}$ d' $\mathbb{R}^3$ donada per

$$\mathcal{B} = \left\{ (1, 2, 1), \left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3} \right), \left(\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2} \right) \right\}$$

és una base ortogonal. Els vectors d'aquesta base tenen les següents normes

$$\|(1, 2, 1)\| = \sqrt{6}; \quad \left\| \left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3} \right) \right\| = \frac{2}{\sqrt{3}}; \quad \left\| \left(\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2} \right) \right\| = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Així, dividint els vectors de la base $\mathcal{B}$ per la seua norma obtenim

$$\overline{\mathcal{B}} = \left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}} \right), \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right) \right\}$$

Així, $\overline{\mathcal{B}}$ és una base ortonormal d' $\mathbb{R}^3$.

Corol·lari 8.2 (De la utilitat de les bases ortonormals). *Siga $(V, \cdot)$ un $\mathbb{R}$ -espai vectorial euclidià de dimensió $\dim_{\mathbb{R}}(V) = n$ i $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ una base ortonormal de V . Siga $v \in V$, aleshores*

$$v = (v \cdot e_1) e_1 + \dots + (v \cdot e_n) e_n.$$

Definició 8.7 (Matrius ortogonals). Direm que una matriu P en $M_n(\mathbb{R})$ és **ortogonal** si

$$P^t P = I_n.$$

Denotem per $O_n(\mathbb{R})$ al conjunt de totes les matrius ortogonals sobre $\mathbb{R}$ de tamany n , és a dir,

$$O_n(\mathbb{R}) = \{P \in M_n(\mathbb{R}) \mid P^t P = I_n\}.$$

i Nota

Nota. Notem que si P és una matriu ortogonal en $O_n(\mathbb{R})$, aleshores P és una matriu invertible en $GL_n(\mathbb{R})$ i, a més, la seua inversa és la seua transposada, és a dir,

$$P^{-1} = P^t.$$

Proposició 8.8. *El conjunt $O_n(\mathbb{R})$ de matrius ortogonals sobre $\mathbb{R}$ forma un grup amb el producte habitual de matrius.*

Demostració. És clar que la matriu identitat I_n és una matriu ortogonal. A més, si P i Q són dues matrius ortogonals en $O_n(\mathbb{R})$, aleshores el seu producte torna a ser una matriu ortogonal ja que

$$(PQ)^t(PQ) = Q^t P^t P Q = Q^t Q = I_n.$$

A més, per la nota anterior, la inversa d'una matriu ortogonal és la seua transposada, que torna a ser una matriu ortogonal. És a dir, $(O_n(\mathbb{R}), \cdot, I_n)$ és un grup. $\square$

Proposició 8.9. *Siga $(V, \cdot)$ un $\mathbb{R}$ -espai vectorial euclidià de dimensió $\dim_{\mathbb{R}}(V) = n$. Aleshores tota matriu canvi de base entre bases ortonormals de V és una matriu ortogonal.*

Demostració. Siguen $\mathcal{B}$ i $\overline{\mathcal{B}}$ dues bases ortonormals de V . Anomenem

- A la matriu coordenada de $\cdot$ en la base $\mathcal{B}$;
- $\overline{A}$ la matriu coordenada de $\cdot$ en la base $\overline{\mathcal{B}}$;
- P la matriu canvi de base d' $\overline{\mathcal{B}}$ a $\mathcal{B}$.

Aleshores, trobem la relació de congruència entre les matrius A i $\overline{A}$ donada per

$$P^t A P = \overline{A}.$$

Només cal recordar, pel Corol·lari 8.1, que $A = \overline{A} = I_n$. $\square$

Exemple 8.4. (Continuació de l'Exemple 8.3.) En l' $\mathbb{R}$ -espai vectorial euclidià estàndard $(\mathbb{R}^3, \cdot)$ la base $\overline{\mathcal{B}}$ d' $\mathbb{R}^3$ donada per

$$\overline{\mathcal{B}} = \left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}} \right), \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right) \right\}$$

és una base ortonormal d' $\mathbb{R}^3$. Per altra banda, la base canònica $\mathcal{B}_c$ també és una base ortonormal d' $\mathbb{R}^3$. Així, la matriu canvi de base de $\overline{\mathcal{B}}$ a $\mathcal{B}_c$ és una matriu ortogonal en $O_3(\mathbb{R})$. En aquest cas, aquesta matriu ve donada per

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}.$$

Només cal comprovar que $P^t P = I_3$.

8.3 Complement ortogonal

Definició 8.8 (Complement ortogonal). Siga $(V, \cdot)$ un espai vectorial euclidià, $U \leq V$ un subespai vectorial i v un vector en V . Direm que v és **ortogonal a** U , i ho denotarem $v \perp U$, si, per a tot $u \in U$, es té que $u \cdot v = 0$, és a dir, si v és ortogonal a tots els vectors d' U .

A més, denotem per $U^\perp$ al conjunt de tots els vectors que són ortogonals a U , així

$$U^\perp = \{v \in V \mid v \perp U\}.$$

Proposició 8.10. Siga $(V, \cdot)$ un espai vectorial euclidià i $U \leq V$ un subespai vectorial amb $U = \langle u_1, \dots, u_r \rangle$ aleshores, per a tot $v \in V$, les següents afirmacions són equivalents

- i. $v \perp U$;
- ii. $v \perp u_i$, per a tot $1 \leq i \leq r$.

Demostració. Suposem que $v \perp U$, així v és ortogonal a tots els vectors d' U . En particular, als vectors u_i , per a tot $1 \leq i \leq r$.

Per contra, suposem que $v \cdot u_i = 0$, per a tot $1 \leq i \leq r$. Anem a comprovar que v és ortogonal a tots els vectors d' U . Siga u un vector en U . Com que $U = \langle u_1, \dots, u_r \rangle$, aleshores u pot escriure's com a combinació lineal dels vectors $u_1, \dots, u_r$. Així, existeixen escalars $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ en $\mathbb{R}$ tals que

$$u = \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_r u_r.$$

Aleshores, trobem la següent cadena d'igualtats

$$v \cdot u = v \cdot (\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_r u_r) = \lambda_1 (v \cdot u_1) + \dots + \lambda_r (v \cdot u_r) = 0.$$

Concloem que $v \perp U$. □

Proposició 8.11. Siga $(V, \cdot)$ un $\mathbb{R}$ -espai vectorial euclidià amb $\dim_{\mathbb{R}}(V) = n$ i $U \leq V$ un subespai vectorial. Aleshores

- i. $U^{\perp} \leq V$;
- ii. $V = U \oplus U^{\perp}$;
- iii. $\dim_{\mathbb{R}}(V) = \dim_{\mathbb{R}}(U) + \dim_{\mathbb{R}}(U^{\perp})$.

Demostració. Siguen v, w dos vectors en $U^{\perp}$, λ, μ dos escalars en $\mathbb{R}$ i u un vector qualsevol en U . Aleshores es donen les següents igualtats

$$(\lambda v + \mu w) \cdot u = \lambda(v \cdot u) + \mu(w \cdot u) = 0.$$

Per tant, $\lambda v + \mu w \in U^{\perp}$, és a dir, $U^{\perp}$ és un subespai vectorial de V .

Per al segon ítem, siga z un element en $U \cap U^{\perp}$, aleshores

$$z \cdot z = \|z\|^2 = 0.$$

Com que estem treballant amb un producte escalar, aleshores $z = 0$. Per tant, la suma $U + U^{\perp}$ és directa i podem escriure $U \oplus U^{\perp}$.

Falta comprovar que $V = U \oplus U^{\perp}$, és a dir, que tot vector de V pot escriure's com a suma d'un vector en U i un altre en $U^{\perp}$. Considerem $\mathcal{B}_U = \{u_1, \dots, u_r\}$, amb $r \leq n$, una base d' U . Pel [teorema d'ampliació de la base](#), podem ampliar aquesta base fins obtindre una base $\mathcal{B} = \{u_1, \dots, u_r, v_{r+1}, \dots, v_n\}$ de V . Si apliquem el mètode d'ortogonalització de Gram-Schmidt, Proposició 8.6, a la base $\mathcal{B}$, trobem una nova base de V donada per $\bar{\mathcal{B}} = \{\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_r, \bar{u}_{r+1}, \dots, \bar{u}_n\}$ amb la propietat que

$$U = \langle u_1, \dots, u_r \rangle = \langle \bar{u}_1, \dots, \bar{u}_r \rangle.$$

Notem, a més, que com la base $\bar{\mathcal{B}}$ és ortogonal, aleshores

$$U^{\perp} = \langle \bar{u}_{r+1}, \dots, \bar{u}_n \rangle.$$

Per tant, com que $\bar{\mathcal{B}}$ és una base de V , tot vector $v \in V$ pot escriure's com a combinació lineal dels vectors en $\bar{\mathcal{B}}$, així existeixen escalars $\lambda_1, \dots, \lambda_r, \lambda_{r+1}, \dots, \lambda_n$ en $\mathbb{R}$ tals que

$$v = (\lambda_1 \bar{u}_1 + \dots + \lambda_r \bar{u}_r) + (\lambda_{r+1} \bar{u}_{r+1} + \dots + \lambda_n \bar{u}_n) \in U + U^{\perp}.$$

Per tant $V = U \oplus U^{\perp}$. A més, $\dim_{\mathbb{R}}(V) = \dim_{\mathbb{R}}(U) + \dim_{\mathbb{R}}(U^{\perp})$. □

Definició 8.9 (Projecció ortogonal). Siga $(V, \cdot)$ un $\mathbb{R}$ -espai vectorial euclidià, $U \leq V$ un subespai vectorial i v un vector en V . Aleshores, per la Proposició 8.11, v s'escriu de forma única com a $v = u + u^{\perp}$, per a un vector $u \in U$ i un vector $u^{\perp} \in U^{\perp}$. Al vector $u \in U$ associat a v l'anomenem **projecció ortogonal** de v en U i el denotem per $p_U(v)$.

Equivalentment, $p_U(v)$ és l'únic vector que satisfà

- i. $p_U(v) \in U$;

ii. $v - p_U(v) \in U^\perp$.

Teorema 8.2 (Teorema de la millor aproximació). *Siga $(V, \cdot)$ un $\mathbb{R}$ -espai vectorial euclidià, $U \leq V$ un subespai vectorial i v un vector en V , aleshores, per a tot vector $u \in U$,*

$$\|v - p_U(v)\| \leq \|v - u\|.$$

Demostració. Siga $u \in U$, aleshores se satisfà la següent cadena d'igualtats i desigualtats

$$\begin{aligned} \|v - u\|^2 &= \|(v - p_U(v)) + (p_U(v) - u)\|^2 \\ &= \|v - p_U(v)\|^2 + \|p_U(v) - u\|^2 \quad (\text{Pitàgores}) \\ &\geq \|v - p_U(v)\|^2. \end{aligned}$$

Notem que, per la Definició 8.9, $v - p_U(v)$ és un vector en $U^\perp$ i, per la Proposició 8.11 i la Definició 8.9, $p_U(v) - u$ és un vector en U . Així els vectors $v - p_U(v)$ i $p_U(v) - u$ són ortogonals i podem emprar el teorema de Pitàgores, Teorema 8.1. $\square$

8.4 Isometries

Definició 8.10 (Isometria). Siguen $(V, \cdot)$ i $(W, \cdot)$ dos $\mathbb{R}$ -espais vectorials euclidians. Una **isometria** de $(V, \cdot)$ en $(W, \cdot)$ és una aplicació lineal $h: V \rightarrow W$ tal que, per a tot $u, v \in V$, es té que

$$h(u) \cdot h(v) = u \cdot v.$$

Proposició 8.12. *Siguen $(V, \cdot)$ i $(W, \cdot)$ dos $\mathbb{R}$ -espais vectorials euclidians i $h: V \rightarrow W$ una isometria. Aleshores h és una aplicació lineal injectiva, és a dir, h és un monomorfisme.*

Demostració. Com que h és lineal, provar que és injectiva és equivalent, per la [caracterització de la injectivitat pel nucli](#), a demostrar que $\text{Ker}(h) = \{0\}$. Siga $v \in V$ tal que $h(v) = 0$ aleshores, com que h és isometria, es dona la següent igualtat

$$v \cdot v = h(v) \cdot h(v) = 0 \cdot 0 = 0.$$

Com que $\cdot$ és un producte escalar, concloem que $v = 0$.

Així h és un monomorfisme. $\square$

Proposició 8.13. *Siguen $(V, \cdot)$ i $(W, \cdot)$ dos $\mathbb{R}$ -espais vectorials euclidians i siga $h: V \rightarrow W$ una aplicació lineal. Les següents afirmacions són equivalents.*

- i. h és una isometria;
- ii. Per a tot $v \in V$, $\|h(v)\| = \|v\|$.

Demostració. Suposem que h és una isometria, aleshores per a tot $v \in V$ es té que

$$\|h(v)\| = +\sqrt{h(v) \cdot h(v)} = +\sqrt{v \cdot v} = \|v\|.$$

Per altra banda, suposem que, per a tot $v \in V$, $\|h(v)\| = \|v\|$. Siguen u, v dos vectors qualssevol en V , aleshores

$$h(u+v) \cdot h(u+v) = \|h(u+v)\|^2 = \|u+v\|^2 = (u+v) \cdot (u+v).$$

Com que h és lineal, obtenim que

$$\begin{aligned} \|h(u)\|^2 + 2h(u) \cdot h(v) + \|h(v)\|^2 &= h(u+v) \cdot h(u+v) \\ &= (u+v) \cdot (u+v) \\ &= \|u\|^2 + 2(u \cdot v) + \|v\|^2. \end{aligned}$$

Per tant, $2h(u) \cdot h(v) = 2(u \cdot v)$ i, així, $h(u) \cdot h(v) = u \cdot v$. És a dir, h és una isometria. $\square$

Proposició 8.14. *Siguen $(V, \cdot)$ i $(W, \cdot)$ dos $\mathbb{R}$ -espais vectorials euclidians, $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ una base de V i $h: V \rightarrow W$ una aplicació lineal. Les següents afirmacions són equivalents*

- i. h és una isometria;
- ii. Per a tot $1 \leq i, j \leq n$, $h(e_i) \cdot h(e_j) = e_i \cdot e_j$.

Demostració. Si suposem que h és una isometria, aleshores obtenim (ii) com a cas particular.

Per altra banda, suposem que $h(e_i) \cdot h(e_j) = e_i \cdot e_j$ per a tot parell d'índexs $1 \leq i, j \leq n$. Siguen u, v dos vectors en V . Aleshores, com $\mathcal{B}$ és base de V , podem trobar escalars $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ i $\mu_1, \dots, \mu_n$ en $\mathbb{R}$ tals que

$$u = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n; \quad v = \mu_1 e_1 + \dots + \mu_n e_n.$$

Aleshores es dona la següent seqüència d'igualtats

$$\begin{aligned} h(u) \cdot h(v) &= h(\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n) \cdot h(\mu_1 e_1 + \dots + \mu_n e_n) \\ &= (\lambda_1 h(e_1) + \dots + \lambda_n h(e_n)) \cdot (\mu_1 h(e_1) + \dots + \mu_n h(e_n)) \quad (\text{linealitat}) \\ &= \sum_{i,j=1}^n \lambda_i \mu_j (h(e_i) \cdot h(e_j)) \quad (\text{bilinealitat}) \\ &= \sum_{i,j=1}^n \lambda_i \mu_j (e_i \cdot e_j) \quad (\text{hipòtesi}) \\ &= (\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n) \cdot (\mu_1 e_1 + \dots + \mu_n e_n) \quad (\text{bilinealitat}) \\ &= u \cdot v. \end{aligned}$$

Queda, així, demostrada la proposició. $\square$

Corol·lari 8.3. *Siga $(V, \cdot)$ un $\mathbb{R}$ -espai vectorial euclidià, $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ una base de V i $h: V \rightarrow V$ una aplicació lineal. Anomenem*

- *A la matriu coordenada d' h de $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}$;*
- *C la matriu coordenada del producte escalar $\cdot$ en $\mathcal{B}$.*

Les següents afirmacions són equivalents

- i. h és una isometria;*
- ii. $A^t C A = C$.*

Demostració. Notem que, per a cada $1 \leq i, j \leq n$, l'entrada (i, j) de la matriu C és $e_i \cdot e_j$, mentre que l'entrada (i, j) de la matriu $A^t C A$ ve de fer la multiplicació de la fila i d' A^t per la matriu C per la columna j de la matriu A . Notem que

- la fila i d' A^t són les coordenades d' $h(e_i)$ en $\mathcal{B}$, transposades;
- la columna j d' A són les coordenades d' $h(e_j)$ en $\mathcal{B}$.

Així, l'entrada (i, j) de la matriu $A^t C A$ és, precisament, $h(e_i) \cdot h(e_j)$.

El resultat se segueix immediatament de la Proposició 8.14. □

Corol·lari 8.4. *Siga $(V, \cdot)$ un $\mathbb{R}$ -espai vectorial euclidià, $\mathcal{B}$ una base ortonormal de V i $h: V \rightarrow V$ una aplicació lineal. Anomenem A la matriu coordenada d' h de $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}$. Les següents afirmacions són equivalents*

- i. h és una isometria;*
- ii. A és una matriu ortogonal.*

Demostració. Per a una base ortonormal $\mathcal{B}$ tenim, pel Corol·lari 8.1, que la matriu identitat I_n és la matriu coordenada del producte escalar $\cdot$ en $\mathcal{B}$. El resultat se segueix immediatament del Corol·lari 8.3. □

Corol·lari 8.5. *L'aplicació identitat és una isometria i la composició d'isometries torna a ser isometria. L'aplicació inversa d'una isometria bijectiva és una isometria bijectiva.*

8.4.1 Isometries en $(\mathbb{R}, \cdot)$

En aquesta subsecció intentarem descriure com són les isometries en $(\mathbb{R}, \cdot)$, l' $\mathbb{R}$ -espai vectorial estàndard de dimensió 1. Emprarem la caracterització presentada en el Corol·lari 8.4, que ens diu que una aplicació lineal d' $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ és una isometria si, i només si, la seua matriu coordenada en una base ortonormal és ortogonal. Ens aprofitem que, per al producte escalar estàndard, la base canònica $\mathcal{B} = \{1\}$ d' $\mathbb{R}$ és una base ortonormal.

Així, siga $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una aplicació lineal i anomenem A la matriu coordenada d' h de $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}$.

Aleshores, si $A = [\alpha]$, tenim que h és isometria si, i només si, A és una matriu ortogonal. És a dir, si $\alpha^2 = 1$. En aquest cas, les úniques possibilitats són $\alpha = 1$ o $\alpha = -1$.

Cas $\alpha = 1$. Trobem que l'única aplicació lineal $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que té a $[1]$ com a matriu coordenada en la base canònica és l'aplicació identitat, és a dir,

$$\text{id}_{\mathbb{R}}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}.$$

Cas $\alpha = -1$. Trobem que l'única aplicació lineal $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que té a $[-1]$ com a matriu coordenada en la base canònica és l'aplicació identitat multiplicada per -1 , és a dir,

$$-\text{id}_{\mathbb{R}}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}.$$

Corol·lari 8.6. *Les úniques isometries en l'espai vectorial euclidià estàndard $(\mathbb{R}, \cdot)$ són $\text{id}_{\mathbb{R}}$ i $-\text{id}_{\mathbb{R}}$.*

8.4.2 Isometries en $(\mathbb{R}^2, \cdot)$

En aquesta subsecció intentarem descriure com són les isometries en $(\mathbb{R}^2, \cdot)$, l' $\mathbb{R}$ -espai vectorial estàndard de dimensió 2. Emprarem la caracterització presentada en el Corol·lari 8.4, que ens diu que una aplicació lineal d' $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$ és una isometria si, i només si, la seua matriu coordenada en una base ortonormal és ortogonal. Ens aprofitem que, per al producte escalar estàndard, la base canònica $\mathcal{B} = \{(1, 0), (0, 1)\}$ d' $\mathbb{R}^2$ és una base ortonormal.

Així, siga $h: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ una isometria i anomenem A la matriu coordenada d' h de $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}$.

Aleshores, si A té la forma

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{bmatrix},$$

trobem que

- $\begin{bmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{21} \end{bmatrix}$ són les coordenades d' $h(1, 0)$ en $\mathcal{B}$;
- $\begin{bmatrix} \alpha_{12} \\ \alpha_{22} \end{bmatrix}$ són les coordenades d' $h(0, 1)$ en $\mathcal{B}$.

Però, per altra banda, $(1, 0)$ i $(0, 1)$ són vectors de norma 1 en el producte escalar estàndard i, com h preserva les normes, d'acord a la Proposició 8.13, trobem que $h(1, 0) = (\alpha_{11}, \alpha_{21})$ i $h(0, 1) = (\alpha_{12}, \alpha_{22})$ han de tindre norma 1. És a dir, s'han de satisfer les equacions

$$\alpha_{11}^2 + \alpha_{21}^2 = 1, \quad \alpha_{12}^2 + \alpha_{22}^2 = 1.$$

Així existiran angles $\theta \in [0, 2\pi[$ i $\theta' \in [0, 2\pi[$ de forma que

$$h(1, 0) = (\cos(\theta), \sin(\theta)), \quad h(0, 1) = (\cos(\theta'), \sin(\theta')).$$

Per tant, tenim que h és isometria si, i només si, A és una matriu ortogonal. És a dir, si

$$\begin{aligned} A^t A &= \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \cos(\theta') & \sin(\theta') \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \cos(\theta') \\ \sin(\theta) & \sin(\theta') \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos(\theta)^2 + \sin(\theta)^2 & \cos(\theta) \cos(\theta') + \sin(\theta) \sin(\theta') \\ \cos(\theta) \cos(\theta') + \sin(\theta) \sin(\theta') & \cos(\theta')^2 + \sin(\theta')^2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & \cos(\theta - \theta') \\ \cos(\theta - \theta') & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Per tant, caldrà exigir que $\cos(\theta - \theta') = 0$. Així, si $\theta \in [0, 2\pi[$, les úniques opcions per a θ' són $\theta' = \theta - \frac{\pi}{2}$ o $\theta' = \theta - \frac{3\pi}{2}$.

Cas $\theta \in [0, 2\pi[$ i $\theta' = \theta - \frac{\pi}{2}$. En aquest cas la matriu coordinada d' h té la forma

$$A = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \cos(\theta - \frac{\pi}{2}) \\ \sin(\theta) & \sin(\theta - \frac{\pi}{2}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{bmatrix}$$

Estudiem els valors propis d'aquesta matriu per tractar d'entendre l'homomorfisme que subjau. Així, si calculem el polinomi característic d' A trobem que

$$\begin{aligned} \text{polcar}(A) &= \text{Det}(xI_2 - A) \\ &= \text{Det} \left(\begin{bmatrix} x - \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & x + \cos(\theta) \end{bmatrix} \right) \\ &= (x - \cos(\theta))(x + \cos(\theta)) - \sin(\theta)^2 \\ &= x^2 - 1 \\ &= (x + 1)(x - 1). \end{aligned}$$

Així, tenim dos valors propis, l'1 i el -1 . Busquem els subespais propis.

$$\begin{aligned} \mathbb{R}_1^2 &= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right\} \\ &= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \begin{bmatrix} \cos(\theta) - 1 & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) - 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \\ &= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (\cos(\theta) - 1)x + \sin(\theta)y = 0 \right\} \\ &= \langle (\cos(\theta/2), \sin(\theta/2)) \rangle. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{R}_{-1}^2 &= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right\} \\
&= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \begin{bmatrix} \cos(\theta) + 1 & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) + 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \\
&= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (\cos(\theta) + 1)x + \sin(\theta)y = 0 \right\} \\
&= \langle (-\sin(\theta/2), \cos(\theta/2)) \rangle.
\end{aligned}$$

Notem que els vectors $(\cos(\theta/2), \sin(\theta/2))$, propi per a 1, i $(-\sin(\theta/2), \cos(\theta/2))$, propi per a -1 , són ortogonals. En aquest cas ens trobem davant d'una **reflexió** sobre l'eix $\mathbb{R}_1^2$, que forma un angle de $\theta/2$ sobre l'eix de les x : els vectors de l'eix $\mathbb{R}_1^2$ queden fixos i els vectors de la recta perpendicular $\mathbb{R}_{-1}^2$ canvien de sentit.

Cas $\theta \in [0, 2\pi[$ i $\theta' = \theta - \frac{3\pi}{2}$. En aquest cas la matriu coordenada d' h té la forma

$$A = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \cos(\theta - \frac{3\pi}{2}) \\ \sin(\theta) & \sin(\theta - \frac{3\pi}{2}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$$

Estudiem els valors propis d'aquesta matriu per tractar d'entendre l'homomorfisme que subjau. Així, si calculem el polinomi característic d' A trobem que

$$\begin{aligned}
\text{polcar}(A) &= \text{Det}(xI_2 - A) \\
&= \text{Det} \left(\begin{bmatrix} x - \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & x - \cos(\theta) \end{bmatrix} \right) \\
&= (x - \cos(\theta))^2 + \sin(\theta)^2 \\
&= x^2 - 2\cos(\theta)x + 1.
\end{aligned}$$

Aquest polinomi té solució

$$x = \frac{2\cos(\theta) \pm \sqrt{4\cos(\theta)^2 - 4}}{2} = \cos(\theta) \pm \sqrt{\cos(\theta)^2 - 1}.$$

Així, aquesta isometria tindrà valors propis si, i només si, $\theta = 0$ o $\theta = \pi$. Aquests subcasos concrets responen a les respectives matrius

- I_2 , associada a l'aplicació $\text{id}_{\mathbb{R}^2}: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$;
- $-I_2$, associada a l'aplicació $-\text{id}_{\mathbb{R}^2}: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$.

Fora d'aquests casos ens trobem amb una **rotació** d'angle θ al voltant de l'origen.

Corol·lari 8.7. *Les úniques isometries en l'espai vectorial euclidià estàndard $(\mathbb{R}^2, \cdot)$ són les reflexions i els girs.*

8.4.3 Isometries en espais vectorials de dimensió superior

Farem ara una incursió a les isometries en espais vectorials de dimensió superior. Primerament, posem sobre la taula un raonament que ha sobrevolat els anteriors casos. Notem que una isometria, si té valors propis, aquests han de ser necessàriament 1 o -1 . Açò és el que provarem en la següent proposició.

Proposició 8.15. *Siga $(V, \cdot)$ un $\mathbb{R}$ -espai vectorial euclidià i siga $h: V \rightarrow V$ una isometria. Aleshores, si $\lambda \in \mathbb{R}$ és un valor propi d' h , aleshores $\lambda = \pm 1$.*

Demostració. Siga $\lambda \in \mathbb{R}$ un valor propi i siga $v \in V - \{0\}$ un vector propi associat a λ . Així,

$$\|v\|^2 = v \cdot v = h(v) \cdot h(v) = (\lambda v) \cdot (\lambda v) = \lambda^2 \|v\|^2.$$

Com que $v \neq 0$, tenim que $\|v\| \neq 0$. Aleshores trobem que $\lambda^2 = 1$. Així, $\lambda = \pm 1$. □

A més, per a espais vectorials de dimensió imparella, si fixem una base ortonormal i considerem la matriu coordenada de la isometria en aquesta base ortonormal, obtenim que aquesta matriu necessàriament té com a valors propis l'1 o el -1 .

Proposició 8.16. *Siga $(V, \cdot)$ un $\mathbb{R}$ -espai vectorial euclidià amb $\dim_{\mathbb{R}}(V) = 2k+1$ i $h: V \rightarrow V$ una isometria. Aleshores, 1 o -1 és valor propi d' h .*

Demostració. Siga $\mathcal{B}$ una base ortonormal de V i anomenem A la matriu coordenada d' h en $\mathcal{B}$.

Anomenem $n = \dim_{\mathbb{R}}(V)$. Aleshores, pel Corol·lari 8.4, la matriu A és una matriu ortogonal, és a dir, $A^t A = I_n$.

Aleshores trobem les següents igualtats

$$(A - I_n)(A + I_n) = A^2 - I_n = A(A - A^t).$$

Notem que la matriu $A - A^t$ satisfà la següent igualtat

$$(A - A^t)^t = A^t - A = -(A - A^t).$$

Per tant,

$$\text{Det}(A - A^t) = \text{Det}\left((A - A^t)^t\right) = \text{Det}(-(A - A^t)) = (-1)^n \text{Det}(A - A^t).$$

Com n és imparell, concloem que $\text{Det}(A - A^t) = 0$.

Així doncs, una de les següents equacions s'ha de satisfer

$$\text{Det}(A - I_n) = 0; \quad \text{Det}(A + I_n) = 0.$$

És a dir, o bé 1 o bé -1 és valor propi d' A . □

9 Espai afí

En aquest capítol introduïm la noció d'espai afí i presentem les seues propietats fonamentals.

Definició 9.1 (Espai afí). Siga V un $\mathbb{K}$ -espai vectorial. Un **espai afí associat a l'espai vectorial** V és una terna $(A, V, +)$ on

- A és un conjunt no buit d'elements que anomenarem **punts**;
- $+$ és una operació del tipus

$$\begin{aligned} +: A \times V &\longrightarrow A \\ (P, v) &\longmapsto P + v \end{aligned}$$

satisfent les següents condicions

- Per a tot parell de punts $P, Q \in A$ existeix un únic vector $v \in V$ tal que

$$P + v = Q.$$

Aquest vector s'anomenarà el **vector que va de P a Q** i el denotarem per $\overrightarrow{PQ}$.

- Per a tot punt $P \in A$ i tot parell de vectors $v, w \in V$ es té que

$$(P + v) + w = P + (v + w).$$

Anomenarem **dimensió** de l'espai afí $(A, V, +)$ a la dimensió de l'espai vectorial subjacent V .

Exemple 9.1. Donat un cos $\mathbb{K}$ i $n \in \mathbb{N}$, podem considerar $A = \mathbb{K}^n$, $V = \mathbb{K}^n$ i $+$ la suma habitual en $\mathbb{K}^n$, és a dir,

$$\begin{aligned} +: \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n &\longrightarrow \mathbb{K}^n \\ (P, v) &\longmapsto P + v \end{aligned}$$

Aleshores $(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^n, +)$ forma un espai afí, que anomenarem **espai afí estàndard** sobre $\mathbb{K}$ de dimensió n .

Proposició 9.1. Siga $(A, V, +)$ un espai afí. Aleshores, per a qualssevol $P, Q, R, S \in A$ es té que

- $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR}$ (relació de Chasles);
- $\overrightarrow{PQ} = 0$ si, i només si, $P = Q$;
- $\overrightarrow{QP} = -\overrightarrow{PQ}$;
- Si $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{RS}$, aleshores $\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{QS}$ (regla del paral·lelogram).

Demostració. Per al primer ítem notem que

$$P + (\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR}) = (P + \overrightarrow{PQ}) + \overrightarrow{QR} = Q + \overrightarrow{QR} = R.$$

Com que $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR}$ és un vector tal que, en sumar-lo a P , ens permet arribar a R aleshores, per la unicitat d'aquest tipus de vector en un espai afí, concloem que $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR}$.

Per al segon ítem, siguen P, Q punts qualssevol en A , aleshores per la relació de Chasles

$$\overrightarrow{PP} + \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PQ}.$$

Per tant, concloem que $\overrightarrow{PP} = 0$.

Així, si $P = Q$, trobem que $\overrightarrow{PQ} = 0$. Per altra banda, si $\overrightarrow{PQ} = 0$, aleshores trobem que

$$P = P + \overrightarrow{PP} = P + 0 = P + \overrightarrow{PQ} = Q.$$

Per al tercer ítem, siguen P, Q punts qualssevol en A , aleshores per la relació de Chasles

$$\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QP} = \overrightarrow{PP} = 0.$$

Per tant, $\overrightarrow{QP} = -\overrightarrow{PQ}$.

Finalment, siguen P, Q, R, S punts en A . Així, per la relació de Chasles trobem que

$$\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QS} = \overrightarrow{PS} = \overrightarrow{PR} + \overrightarrow{RS}.$$

Aleshores trobem que, si $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{RS}$, necessàriament $\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{QS}$. □

Proposició 9.2. Si $(A, V, +)$ és un espai afí i P és un punt en A , aleshores l'aplicació

$$\begin{array}{ccc} \varphi_P: & A & \longrightarrow V \\ & Q & \longmapsto \overrightarrow{PQ} \end{array}$$

és a dir, l'aplicació que a cada punt Q de l'espai li associa el vector que va de P a Q , és una aplicació bijectiva. En particular, A i V tenen el mateix cardinal.

Demostració. Siguen Q, R punts en A de forma que $\varphi_P(Q) = \varphi_P(R)$, és a dir, tals que $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PR}$, aleshores trobem que

$$Q = P + \overrightarrow{PQ} = P + \overrightarrow{PR} = R.$$

Així, φ_P és injectiva.

Per contra, siga v un vector qualsevol en V , aleshores per al punt $Q = P + v$ trobem que $\overrightarrow{PQ} = v$. Per tant,

$$\varphi_P(Q) = v.$$

Així, φ_P és sobrejectiva. □

9.1 Sistemes de referència afí

A continuació introduïm els sistemes de referència afí i deduïm les equacions del canvi de sistema de referència afí.

Definició 9.2 (Sistema de referència afí). Si $(A, V, +)$ és un espai afí de dimensió finita, aleshores un **sistema de referència afí** és un parell ordenat de la forma

$$\mathcal{R} = (O, \mathcal{B})$$

on O és un punt en A que anomenarem **origen** i $\mathcal{B}$ és una base de V . Si P és un punt en A , anomenarem **coordenades de P en $\mathcal{R}$** a les coordenades del vector $\overrightarrow{OP}$ en $\mathcal{B}$.

Proposició 9.3. Siga $(A, V, +)$ un espai afí de dimensió finita, $\mathcal{R} = (O, \mathcal{B})$ un sistema de referència afí i siguin P, Q punts en A . Anomenem

- X les coordenades de P en $\mathcal{R}$ (coordenades d' $\overrightarrow{OP}$ en $\mathcal{B}$);
- Y les coordenades de Q en $\mathcal{R}$ (coordenades d' $\overrightarrow{OQ}$ en $\mathcal{B}$).

Aleshores $Y - X$ són les coordenades del vector $\overrightarrow{PQ}$ en la base $\mathcal{B}$.

Demostració. Notem que, per la relació de Chasles,

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OQ} = -\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}.$$

Per tant, com les coordenades del vector $\overrightarrow{OP}$ en $\mathcal{B}$ són X i les coordenades del vector $\overrightarrow{OQ}$ són Y , concloem que les coordenades del vector $\overrightarrow{PQ}$ en $\mathcal{B}$ vénen donades per $Y - X$. $\square$

Anem a descriure què ocorre amb les coordenades d'un mateix punt en dos sistemes de referència afí diferents. Siga $(A, V, +)$ un espai afí de dimensió finita per al qual considerem dos sistemes de referència afí diferents

$$\mathcal{R} = (O, \mathcal{B}), \quad \overline{\mathcal{R}} = (\overline{O}, \overline{\mathcal{B}}).$$

Siga P un punt en A . Anomenem

- X les coordenades de P en $\mathcal{R}$ (coordenades d' $\overrightarrow{OP}$ en $\mathcal{B}$);
- $\overline{X}$ les coordenades de P en $\overline{\mathcal{R}}$ (coordenades d' $\overrightarrow{\overline{O}P}$ en $\overline{\mathcal{B}}$).

Així, per la relació de Chasles,

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OO} + \overrightarrow{OP}.$$

Per tant, si anomenem

- B les coordenades d' $\overline{O}$ en $\mathcal{R}$ (coordenades d' $\overrightarrow{OO}$ en $\mathcal{B}$);
- A la matriu canvi de base d' $\overline{\mathcal{B}}$ a $\mathcal{B}$,

trobem que

$$X = B + A\bar{X}.$$

Aquesta expressió rep el nom d'**equació del canvi de sistema de referència afí d' $\bar{\mathcal{R}}$ a $\mathcal{R}$** .

Si suposem que la dimensió de l'espai és n i desenvolupem l'equació del canvi de sistema de referència afí que acabem de deduir, trobem la següent equació entre matrius

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \cdots & \alpha_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \vdots \\ \bar{x}_n \end{bmatrix}.$$

Aquesta darrera equació matricial admet una expressió compacta de la següent forma

$$\begin{bmatrix} 1 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \beta_1 & \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_n & \alpha_{n1} & \cdots & \alpha_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \bar{x}_1 \\ \vdots \\ \bar{x}_n \end{bmatrix}.$$

Definició 9.3 (Matriu de canvi de sistema de referència). Siga $(A, V, +)$ un espai afí de dimensió n i siguin dos sistemes de referència afí

$$\mathcal{R} = (O, \mathcal{B}), \quad \bar{\mathcal{R}} = (\bar{O}, \bar{\mathcal{B}}).$$

Definim la **matriu de canvi de sistema de referència afí d' $\bar{\mathcal{R}}$ a $\mathcal{R}$** com la matriu $P \in M_{n+1}(\mathbb{K})$ donada per

$$P = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline \mathbf{B} & & \mathbf{A} & \end{array} \right] \quad \text{on} \quad \begin{cases} \mathbf{B} \in M_{n1}(\mathbb{K}) & \text{coordenades d}'\bar{O} \text{ en } \mathcal{R}, \\ \mathbf{A} \in M_n(\mathbb{K}) & \text{matriu canvi de base d}'\bar{\mathcal{B}} \text{ a } \mathcal{B}. \end{cases}$$

i Nota

Nota. Les matrius de canvi de sistema de referència afí són invertibles. De fet, el seu determinant coincideix amb el determinant de la matriu canvi de base associada.

Proposició 9.4. Siga $(A, V, +)$ un espai afí de dimensió finita per al qual considerem dos sistemes de referència afí diferents

$$\mathcal{R} = (O, \mathcal{B}), \quad \bar{\mathcal{R}} = (\bar{O}, \bar{\mathcal{B}}).$$

Siga P un punt en A . Anomenem

- X les coordenades de P en $\mathcal{R}$ (coordenades d' $\overrightarrow{OP}$ en $\mathcal{B}$);
- $\bar{X}$ les coordenades de P en $\bar{\mathcal{R}}$ (coordenades d' $\overrightarrow{\bar{O}P}$ en $\bar{\mathcal{B}}$);
- P la matriu canvi de sistema de referència afí d' $\bar{\mathcal{R}}$ a $\mathcal{R}$.

Aleshores, P és l'única matriu en $M_{n+1}(\mathbb{K})$ que satisfà

$$\begin{bmatrix} 1 \\ X \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} 1 \\ \bar{X} \end{bmatrix}.$$

Exemple 9.2. Es considera l' $\mathbb{R}$ -espai afí estàndard $(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2, +)$ i els sistemes de referència afí donats per

$$\begin{aligned} \mathcal{R} &= (O, \mathcal{B}) = ((0, 1), \{(1, 1), (0, 1)\}); \\ \overline{\mathcal{R}} &= (\overline{O}, \overline{\mathcal{B}}) = ((-1, 0), \{(1, 2), (-1, 1)\}). \end{aligned}$$

Siga $P = (1, 3)$ un punt en $\mathbb{R}^2$. Anomenem

- X les coordenades de P en $\mathcal{R}$ (coordenades d' $\overrightarrow{OP}$ en $\mathcal{B}$);
- $\bar{X}$ les coordenades de P en $\overline{\mathcal{R}}$ (coordenades d' $\overrightarrow{\overline{O}P}$ en $\overline{\mathcal{B}}$).

Notem que

$$\overrightarrow{OP} = (1, 2) = 1(1, 1) + 1(0, 1); \quad \overrightarrow{\overline{O}P} = (2, 3) = \frac{5}{3}(1, 2) - \frac{1}{3}(-1, 1).$$

Així, obtenim que

$$X = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \bar{X} = \begin{bmatrix} \frac{5}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

Anomenem

- B les coordenades d' $\overline{O}$ en $\mathcal{R}$ (coordenades d' $\overrightarrow{OO}$ en $\mathcal{B}$);
- A la matriu canvi de base d' $\overline{\mathcal{B}}$ a $\mathcal{B}$.

Notem que $\overrightarrow{OO} = (-1, -1) = -1(1, 1) + 0(0, 1)$ i que

$$(1, 2) = 1(1, 1) + 1(0, 1); \quad (-1, 1) = -1(1, 1) + 2(0, 1).$$

Així, obtenim que

$$B = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Per tant, obtenim l'expressió de canvi de sistema de referència $X = B + A\bar{X}$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{5}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

Finalment, si anomenem P la matriu canvi de sistema de referència d' $\overline{\mathcal{R}}$ a $\mathcal{R}$, trobem que

$$P = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{array} \right].$$

Així, recuperem l'expressió de canvi de sistema de referència d' $\overline{\mathcal{R}}$ a $\mathcal{R}$ donada per

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{5}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

9.2 Varietats afins

En aquesta secció presentem les varietats afins i obtenim les seues propietats bàsiques, així com les presentacions paramètrica i cartesiana d'una varietat afí respecte d'un sistema de referència afí.

Definició 9.4 (Varietat afí). Siga $(A, V, +)$ un espai afí, W un subespai vectorial de V i P un punt en A . Definim la **varietat afí que passa per P i té a W com a espai director** al conjunt de punts

$$W_P = P + W = \{P + w \in A \mid w \in W\}.$$

Exemple 9.3. Siga $(A, V, +)$ un espai afí, W un subespai vectorial de V i P un punt en A . Si $\dim_{\mathbb{K}}(W) = 0$, és a dir, si $W = \{0\}$, tenim que

$$W_P = \{P + w \in A \mid w \in \{0\}\} = \{P\}.$$

Així, $\{P\}$ és una varietat afí.

Si $\dim_{\mathbb{K}}(W) = 1$, és a dir, si $W = \langle w \rangle$, tenim que

$$W_P = \{P + \lambda w \in A \mid \lambda \in \mathbb{K}\}.$$

A la varietat afí W_P l'anomenarem **recta que passa per P i té a w com a vector director**.

Si $\dim_{\mathbb{K}}(W) = 2$, és a dir, si $W = \langle u, w \rangle$, tenim que

$$W_P = \{P + \lambda w + \mu u \in A \mid \lambda, \mu \in \mathbb{K}\}.$$

A la varietat afí W_P l'anomenarem **pla que passa per P i té a W com a espai director**.

Si $\dim_{\mathbb{K}}(V) = n$ i $\dim_{\mathbb{K}}(W) = n - 1$, a la varietat afí W_P l'anomenarem **hiperplà que passa per P i té a W com a espai director**.

Proposició 9.5. Siga $(A, V, +)$ un espai afí, W un subespai vectorial de V i P un punt en A . Aleshores $(W_P, W, +)$, on

$$\begin{aligned} +: \quad W_P \times W &\longrightarrow W_P \\ (Q, w) &\longmapsto Q + w \end{aligned},$$

és un espai afí.

Demostració. En aquest cas W_P és el conjunt de punts, W l'espai vectorial subjacent i la suma ve donada per la suma en $(A, V, +)$ restringida a $W_P \times W$. Només cal comprovar que se satisfan les dues condicions que defineixen un espai afí.

Siguen Q, R dos punts en W_P , aleshores existeixen dos vectors $u, w \in W$ de forma que $Q = P + u$ i $R = P + w$. Per la relació de Chasles, trobem que

$$\overrightarrow{QR} = \overrightarrow{QP} + \overrightarrow{PR} = -u + w \in W.$$

Per altra banda, si Q és un punt en W_P i $u, w \in W$, aleshores, com a conseqüència de que $(A, V, +)$ és un espai afí, trobem que

$$Q + (u + w) = (Q + u) + w.$$

Per tant, concloem que $(W_P, W, +)$ és un espai afí. $\square$

Proposició 9.6. *Siga $(A, V, +)$ un espai afí, W un subespai vectorial de V i P, Q dos punts en A . Aleshores, les següents condicions són equivalents*

- i. $Q \in W_P$;
- ii. $W_P = W_Q$.

Demostració. Suposem que $Q \in W_P$, aleshores existeix un vector $w \in W$ tal que $Q = P + w$. Aleshores $P = Q - w$. Anem a demostrar que $W_P = W_Q$.

Si R és un punt en W_P , aleshores existeix un vector $u \in W$ de forma que $R = P + u$. Així, $R = P + u = (Q - w) + u = Q + (-w + u) \in W_Q$ i obtenim que $W_P \subseteq W_Q$. Per altra banda, si R és un punt en W_Q , aleshores existeix un vector $u \in W$ de forma que $R = Q + u$. Així, $R = Q + u = (P + w) + u = P + (w + u) \in W_P$ i obtenim que $W_Q \subseteq W_P$. Per tant $W_P = W_Q$.

Per contra, si $W_P = W_Q$, aleshores, com que $Q \in W_Q$, concloem que $Q \in W_P$. $\square$

Proposició 9.7. *Siga $(A, V, +)$ un espai afí, U, W dos subespais vectorials de V i P un punt en A . Aleshores són equivalents*

- i. $U \leq W$;
- ii. $U_P \subseteq W_P$.

Demostració. Suposem que $U \leq W$. Si $Q \in U_P$, aleshores existeix un $u \in U$ tal que $Q = P + u$. Com que $U \leq W$, trobem que $Q \in W_P$. Així, $U_P \subseteq W_P$.

Per altra banda, suposem que $U_P \subseteq W_P$. Aleshores, si u és un vector en U , tenim que $P + u \in U_P$. Com que $U_P \subseteq W_P$, existeix un vector $w \in W$ de forma que $P + u = P + w$. En particular, $\overrightarrow{Pw} = w - u$. Per la Proposició 9.1, trobem que $0 = w - u$, és a dir, $u = w \in W$. Així, $U \leq W$. $\square$

Proposició 9.8. Siga $(A, V, +)$ un espai afí, W un subespai vectorial de V i P un punt en A . Aleshores

$$W = \{\overrightarrow{QR} \in V \mid Q, R \in W_P\}.$$

Demostració. Siga $w \in W$, aleshores P i $P + w$ són dos punts en W_P . Per tant

$$w = \overrightarrow{P(P+w)} \in \{\overrightarrow{QR} \in V \mid Q, R \in W_P\}.$$

Per altra banda, siguen Q, R dos punts en W_P , aleshores existeixen dos vectors $u, w \in W$ de forma que $Q = P + u$ i $R = P + w$. Així,

$$\overrightarrow{QR} = \overrightarrow{QP} + \overrightarrow{PR} = -u + w \in W.$$

Concloem que $W = \{\overrightarrow{QR} \in V \mid Q, R \in W_P\}$. □

9.2.1 Presentacions d'una varietat afí

Siga $(A, V, +)$ un espai afí amb $\dim_{\mathbb{K}}(V) = n$, W un subespai vectorial de V amb $\dim_{\mathbb{K}}(W) = r$ i P un punt en A . Siga $\mathcal{B}_W = \{w_1, \dots, w_r\}$ una base de W . Considerem la varietat afí

$$W_P = \{P + w \in A \mid w \in W\} = \{P + \lambda_1 w_1 + \dots + \lambda_r w_r \in A \mid \lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{K}\}.$$

Per tant, $Q \in A$ estarà en W_P si existeixen escalars $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{K}$ de forma que

$$Q = P + \lambda_1 w_1 + \dots + \lambda_r w_r. \quad (\text{Equació vectorial d'un punt } Q \in W_P)$$

Siga $\mathcal{R} = (O, \mathcal{B})$ un sistema de referència afí on $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$. Considerem

- $\begin{bmatrix} p_1 & \dots & p_n \end{bmatrix}^t$ les coordenades de P en $\mathcal{R}$ (coordenades d' $\overrightarrow{OP}$ en $\mathcal{B}$);
- $\begin{bmatrix} q_1 & \dots & q_n \end{bmatrix}^t$ les coordenades de Q en $\mathcal{R}$ (coordenades d' $\overrightarrow{OQ}$ en $\mathcal{B}$).

Per la relació de Chasles,

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OQ}.$$

Aleshores, trobem que $\begin{bmatrix} q_1 - p_1 & \dots & q_n - p_n \end{bmatrix}^t$ són les coordenades d' $\overrightarrow{PQ}$ en $\mathcal{B}$.

Per altra banda, com que P, Q són dos punts en W_P , per la Proposició 9.8, trobem que $\overrightarrow{PQ} \in W$ i, per tant, podrà recuperar-se com a combinació lineal dels vectors en $\mathcal{B}_W$. Així

$$\overrightarrow{PQ} = \lambda_1 w_1 + \dots + \lambda_r w_r.$$

Però com $\mathcal{B}$ és base de V , cada vector w_i , amb $1 \leq i \leq r$, podrà escriure's com a combinació lineal dels vectors en $\mathcal{B}$. Així, per a cada $1 \leq i \leq r$, podem trobar una expressió del tipus

$$w_i = \alpha_{1i} e_1 + \dots + \alpha_{ni} e_n = \sum_{j=1}^n \alpha_{ji} e_j.$$

Per tant,

$$\overrightarrow{PQ} = \lambda_1 w_1 + \cdots + \lambda_r w_r = \lambda_1 \left(\sum_{j=1}^n \alpha_{j1} e_j \right) + \cdots + \lambda_r \left(\sum_{j=1}^n \alpha_{jr} e_j \right).$$

Com que les coordenades d'un vector en una base són úniques per la [proposició corresponent](#), trobem que

$$\begin{bmatrix} q_1 - p_1 \\ \vdots \\ q_n - p_n \end{bmatrix} = \lambda_1 \begin{bmatrix} \alpha_{11} \\ \vdots \\ \alpha_{n1} \end{bmatrix} + \cdots + \lambda_r \begin{bmatrix} \alpha_{1r} \\ \vdots \\ \alpha_{nr} \end{bmatrix} \quad (\text{E})$$

o, equivalentment,

$$\begin{bmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \cdots & \alpha_{nr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_r \end{bmatrix} \quad (\text{Equació paramètrica d'un punt } Q \in W_P)$$

Per eliminació de paràmetres podem aconseguir l'equació cartesiana dels punts que estan en W_P . Per una banda, sabem que la matriu

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \cdots & \alpha_{nr} \end{bmatrix}$$

té rang r per la independència lineal dels vectors en $\mathcal{B}_W$. Per altra banda, tenim l'equació en (E). Aleshores, la matriu

$$\left[\begin{array}{ccc|c} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1r} & q_1 - p_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \cdots & \alpha_{nr} & q_n - p_n \end{array} \right]$$

també té rang r . Així, si esglaonem, trobarem que les últimes $n - r$ files han de ser nul·les. Aquestes $n - r$ equacions s'anomenaran **equacions cartesianes** de W_P .

Exemple 9.4. Considerem l'espai afí estàndard $(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3, +)$. Per al subespai vectorial $W \leq \mathbb{R}^3$ i el punt $P \in \mathbb{R}^3$ donats per

$$P = (1, 1, 0), \quad W = \langle (1, 0, 1), (2, 1, 0) \rangle,$$

treballarem les diferents presentacions de la varietat afí W_P . Notem que

$$W_P = \{P + w \in \mathbb{R}^3 \mid w \in W\} = \{(1, 1, 0) + \lambda(1, 0, 1) + \mu(2, 1, 0) \in \mathbb{R}^3 \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}.$$

Així, un punt $Q \in \mathbb{R}^3$ estarà en W_P si, i només si, existeixen escalars $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ de forma que

$$Q = (1, 1, 0) + \lambda(1, 0, 1) + \mu(2, 1, 0) \quad (\text{Equació vectorial d'un punt } Q \in W_P)$$

Considerem el sistema de referència afí canònic $\mathcal{R}_c = (0_{\mathbb{R}^3}, \mathcal{B}_c)$. Si anomenem $\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix}^t$ les coordenades de Q en $\mathcal{R}_c$ (coordenades d' $\overrightarrow{0_{\mathbb{R}^3}Q}$ en $\mathcal{B}_c$), trobem que

- $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^t$ són les coordenades de P en $\mathcal{R}_c$ (coordenades d' $\overrightarrow{0_{\mathbb{R}^3}P}$ en $\mathcal{B}_c$);
- $\begin{bmatrix} x-1 & y-1 & z \end{bmatrix}^t$ són les coordenades d' $\overrightarrow{PQ}$ en $\mathcal{B}_c$.

Per altra banda, per la Proposició 9.8, tenim que $\overrightarrow{PQ} \in W$. Així, hauran d'existir escalars $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ de forma que

$$\overrightarrow{PQ} = \lambda(1, 0, 1) + \mu(2, 1, 0).$$

A més, $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^t$ són les coordenades de $(1, 0, 1)$ en $\mathcal{B}_c$ i $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}^t$ són les coordenades de $(2, 1, 0)$ en $\mathcal{B}_c$.

Com que les coordenades d'un vector en una base són úniques per la [proposició corresponent](#), trobem que

$$\begin{bmatrix} x-1 \\ y-1 \\ z \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (\text{E})$$

Equivalentment,

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda \\ \mu \end{bmatrix}. \quad (\text{Equació paramètrica d'un punt } Q \in W_P)$$

De l'equació en (E) i del fet que $\dim_{\mathbb{R}}(W) = 2$, concloem que

$$\text{rang} \left(\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & x-1 \\ 0 & 1 & y-1 \\ 1 & 0 & z \end{array} \right] \right) = \text{rang} \left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right) = 2.$$

Així, si fem Gauss-Jordan, les últimes $3 - 2$ files de la matriu ampliada hauran de ser zero. Així

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & x-1 \\ 0 & 1 & y-1 \\ 1 & 0 & z \end{array} \right] \xrightarrow{f_3=f_3-f_1} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & x-1 \\ 0 & 1 & y-1 \\ 0 & -2 & -x+z+1 \end{array} \right] \xrightarrow{f_3=f_3+2f_2} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & x-1 \\ 0 & 1 & y-1 \\ 0 & 0 & -x+2y+z-1 \end{array} \right].$$

Per tant,

$$\begin{aligned} W_P &= \left\{ Q \in \mathbb{R}^3 \mid Q \text{ té coordenades } \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix}^t \text{ en } \mathcal{R}_c \text{ i} \right. \\ &\quad \left. -x + 2y + z - 1 = 0 \right\} \\ &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid -x + 2y + z - 1 = 0\}. \end{aligned} \quad (\text{Equació cartesiana d'un punt } Q \in W_P)$$

Exemple 9.5. Reprenem l'Exemple 9.4. Anem a deduir les equacions paramètrica i cartesiana d'un punt $Q \in W_P$ en un altre sistema de referència. En aquest cas considerarem $\overline{\mathcal{R}}$ donat per

$$\overline{\mathcal{R}} = (\overline{O}, \overline{\mathcal{B}}) = ((3, 1, 0), \{(1, 1, 0), (-1, 1, 0), (0, 0, 1)\}).$$

Anomenem $\begin{bmatrix} \bar{x} & \bar{y} & \bar{z} \end{bmatrix}^t$ les coordenades de Q en $\overline{\mathcal{R}}$ (coordenades d' $\overrightarrow{OQ}$ en $\overline{\mathcal{B}}$).

Com que

$$\overrightarrow{OP} = (1, 1, 0) - (3, 1, 0) = (-2, 0, 0) = -1(1, 1, 0) + 1(-1, 1, 0),$$

trobem que

- $\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^t$ són les coordenades de P en $\overline{\mathcal{R}}$ (coordenades d' $\overrightarrow{OP}$ en $\overline{\mathcal{B}}$);
- $\begin{bmatrix} \bar{x} + 1 & \bar{y} - 1 & \bar{z} \end{bmatrix}^t$ són les coordenades d' $\overrightarrow{PQ}$ en $\overline{\mathcal{B}}$.

Per altra banda, per la Proposició 9.8, tenim que $\overrightarrow{PQ} \in W$. Així, hauran d'existir escalars $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ de forma que

$$\overrightarrow{PQ} = \lambda(1, 0, 1) + \mu(2, 1, 0).$$

A més, $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}^t$ són les coordenades de $(1, 0, 1)$ en $\overline{\mathcal{B}}$ i $\begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}^t$ són les coordenades de $(2, 1, 0)$ en $\overline{\mathcal{B}}$.

Com que les coordenades d'un vector en una base són úniques per la [proposició corresponent](#), trobem que

$$\begin{bmatrix} \bar{x} + 1 \\ \bar{y} - 1 \\ \bar{z} \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (\overline{\text{E}})$$

Equivalentment,

$$\begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda \\ \mu \end{bmatrix}. \quad (\text{Equació paramètrica d'un punt } Q \in W_P)$$

De l'equació en $(\overline{\text{E}})$ i del fet que $\dim_{\mathbb{R}}(W) = 2$, concloem que

$$\text{rang} \left(\left[\begin{array}{cc|c} \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \bar{x} + 1 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \bar{y} - 1 \\ 1 & 0 & \bar{z} \end{array} \right] \right) = \text{rang} \left(\left[\begin{array}{cc} \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{array} \right] \right) = 2.$$

Així, si fem Gauss-Jordan, les últimes $3 - 2$ files de la matriu ampliada hauran de ser zero.

Així

$$\begin{aligned} & \left[\begin{array}{cc|c} \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \bar{x} + 1 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \bar{y} - 1 \\ 1 & 0 & \bar{z} \end{array} \right] \xrightarrow{f_3=f_3-2f_1} \left[\begin{array}{cc|c} \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \bar{x} + 1 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \bar{y} - 1 \\ 0 & -3 & -2\bar{x} + \bar{z} - 2 \end{array} \right] \\ & \xrightarrow{f_2=f_2+f_1} \left[\begin{array}{cc|c} \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \bar{x} + 1 \\ 0 & 1 & \bar{x} + \bar{y} \\ 0 & -3 & -2\bar{x} + \bar{z} - 2 \end{array} \right] \xrightarrow{f_3=f_3+3f_2} \left[\begin{array}{cc|c} \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \bar{x} + 1 \\ 0 & 1 & \bar{x} + \bar{y} \\ 0 & 0 & \bar{x} + 3\bar{y} + \bar{z} - 2 \end{array} \right]. \end{aligned}$$

Per tant,

$$W_P = \left\{ Q \in \mathbb{R}^3 \left| \begin{array}{l} Q \text{ té coordenades } \begin{bmatrix} \bar{x} & \bar{y} & \bar{z} \end{bmatrix}^t \text{ en } \overline{\mathcal{R}} \text{ i} \\ \bar{x} + 3\bar{y} + \bar{z} - 2 = 0 \end{array} \right. \right\}. \quad (\text{Equació cartesiana d'un punt } Q \in W_P)$$

9.2.2 La menor varietat que conté un conjunt de punts

Definició 9.5. Siga $(A, V, +)$ un espai afí i siga $\mathcal{P} \subseteq A$ un conjunt de punts en A . Denotem per $\mathcal{A}(\mathcal{P})$ a la menor varietat afí que conté a $\mathcal{P}$.

Proposició 9.9. Siga $(A, V, +)$ un espai afí i $\mathcal{P} = \{P_1, \dots, P_t\}$ un conjunt finit de punts en A . Aleshores

$$\mathcal{A}(\mathcal{P}) = P_1 + \langle \overrightarrow{P_1 P_2}, \dots, \overrightarrow{P_1 P_t} \rangle.$$

Demostració. Anomenem $\mathcal{L} = P_1 + \langle \overrightarrow{P_1 P_2}, \dots, \overrightarrow{P_1 P_t} \rangle$. Comprovem que $\mathcal{A}(\mathcal{P}) = \mathcal{L}$.

Notem que $\mathcal{L}$ és una varietat afí i $P_1 \in \mathcal{L}$. A més, per a cada $1 \leq i \leq t$ trobem que $P_i \in \mathcal{L}$, ja que $P_i = P_1 + \overrightarrow{P_1 P_i}$, on $\overrightarrow{P_1 P_i}$ és un vector en l'espai director d' $\mathcal{L}$. Per tant, $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{L}$.

Com $\mathcal{A}(\mathcal{P})$ és la menor varietat afí que conté a $\mathcal{P}$, concloem que $\mathcal{A}(\mathcal{P}) \subseteq \mathcal{L}$.

Per a l'altra inclusió. Com que $\mathcal{A}(\mathcal{P})$ és una varietat afí i conté a $\mathcal{P}$, aleshores $\mathcal{A}(\mathcal{P})$ pot escriure's com W_{P_1} per a algun subespai vectorial $W \leq V$. Per altra banda, com que per a tot $1 \leq i \leq t$, $P_i \in \mathcal{P}$, concloem, per la Proposició 9.8, que $\overrightarrow{P_1 P_i}$ és un vector en W , per a tot $1 \leq i \leq t$. Per tant, $\langle \overrightarrow{P_1 P_2}, \dots, \overrightarrow{P_1 P_t} \rangle \leq W$. Així doncs, per la Proposició 9.7, trobem que $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{A}(\mathcal{P})$.

Concloem que $\mathcal{A}(\mathcal{P}) = P_1 + \langle \overrightarrow{P_1 P_2}, \dots, \overrightarrow{P_1 P_t} \rangle$. □

Proposició 9.10. Siga $(A, V, +)$ un espai afí i $\mathcal{P} = \{P_1, \dots, P_t\}$ un conjunt finit de punts en A . El conjunt de vectors $\{\overrightarrow{P_1 P_2}, \dots, \overrightarrow{P_1 P_t}\}$ és linealment independent si, i només si, per a cada $1 \leq i \leq t$, el conjunt de vectors

$$\{\overrightarrow{P_i P_1}, \dots, \overrightarrow{P_i P_{i-1}}, \overrightarrow{P_i P_{i+1}}, \dots, \overrightarrow{P_i P_t}\}$$

és linealment independent. A més, per a cada $1 \leq i \leq t$, es té que

$$\langle \overrightarrow{P_1 P_2}, \dots, \overrightarrow{P_1 P_t} \rangle = \langle \overrightarrow{P_i P_1}, \dots, \overrightarrow{P_i P_{i-1}}, \overrightarrow{P_i P_{i+1}}, \dots, \overrightarrow{P_i P_t} \rangle.$$

Demostració. Comencem amb la independència lineal. De dreta a esquerra ens trobem amb un cas particular. Per a l'altra implicació, suposem que $\{\overrightarrow{P_1 P_2}, \dots, \overrightarrow{P_1 P_t}\}$ és un conjunt de vectors linealment independent. Fixem un índex $1 \leq i \leq t$ i considerem una combinació lineal del tipus

$$\lambda_1 \overrightarrow{P_i P_1} + \dots + \lambda_{i-1} \overrightarrow{P_i P_{i-1}} + \lambda_{i+1} \overrightarrow{P_i P_{i+1}} + \dots + \lambda_t \overrightarrow{P_i P_t} = 0. \quad (\star)$$

Volem comprovar que tots els escalars que apareixen en l'anterior equació han de ser, necessàriament, igual a 0. Ara bé, per a tot $1 \leq k \leq t$ amb $k \neq i$, trobem, per la relació de Chasles, que

$$\overrightarrow{P_i P_k} = \overrightarrow{P_i P_1} + \overrightarrow{P_1 P_k} = -\overrightarrow{P_1 P_i} + \overrightarrow{P_1 P_k}. \quad (\square)$$

Si substituïm en $(\star)$ trobem la següent expressió

$$\begin{aligned}
0 &= \lambda_1 \overrightarrow{P_i P_1} + \cdots + \lambda_{i-1} \overrightarrow{P_i P_{i-1}} + \lambda_{i+1} \overrightarrow{P_i P_{i+1}} + \cdots + \lambda_t \overrightarrow{P_i P_t} \\
&= \lambda_1 \left(-\overrightarrow{P_1 P_i} + \overrightarrow{P_1 P_1} \right) + \cdots + \lambda_{i-1} \left(-\overrightarrow{P_1 P_i} + \overrightarrow{P_1 P_{i-1}} \right) \\
&\quad + \lambda_{i+1} \left(-\overrightarrow{P_1 P_i} + \overrightarrow{P_1 P_{i+1}} \right) + \cdots + \lambda_t \left(-\overrightarrow{P_1 P_i} + \overrightarrow{P_1 P_t} \right) \\
&= - \left(\sum_{k=1, k \neq i}^t \lambda_k \right) \overrightarrow{P_1 P_i} + \lambda_2 \overrightarrow{P_1 P_2} + \cdots + \lambda_{i-1} \overrightarrow{P_1 P_{i-1}} + \lambda_{i+1} \overrightarrow{P_1 P_{i+1}} + \cdots + \lambda_t \overrightarrow{P_1 P_t}.
\end{aligned}$$

Com que $\{\overrightarrow{P_1 P_2}, \dots, \overrightarrow{P_1 P_t}\}$ és linealment independent, concloem que

$$- \left(\sum_{k=1, k \neq i}^t \lambda_k \right) = \lambda_2 = \cdots = \lambda_{i-1} = \lambda_{i+1} = \cdots = \lambda_t = 0.$$

Açò ens permet concloure que $\lambda_1 = \cdots = \lambda_{i-1} = \lambda_{i+1} = \cdots = \lambda_t = 0$, com volíem demostrar.

Finalment, per a cada $1 \leq i \leq t$, es té que la igualtat

$$\langle \overrightarrow{P_1 P_2}, \dots, \overrightarrow{P_1 P_t} \rangle = \langle \overrightarrow{P_i P_1}, \dots, \overrightarrow{P_i P_{i-1}}, \overrightarrow{P_i P_{i+1}}, \dots, \overrightarrow{P_i P_t} \rangle$$

es dona com a conseqüència de $(\square)$. $\square$

Definició 9.6 (Punts afiment independents). Siga $(A, V, +)$ un espai afí i $\mathcal{P} = \{P_1, \dots, P_t\}$ un conjunt finit de punts en A . Direm que $\mathcal{P}$ és **afiment independent** si el conjunt de vectors $\{\overrightarrow{P_1 P_2}, \dots, \overrightarrow{P_1 P_t}\}$ és linealment independent.

Corol·lari 9.1. Siga $(A, V, +)$ un espai afí i $\mathcal{P} = \{P_1, \dots, P_t\}$ un conjunt finit de punts en A afiment independents. Aleshores existeix una única varietat afí de dimensió $t - 1$ que conté tots els punts de $\mathcal{P}$.

9.3 Operacions entre varietats afins

En aquesta secció vorem com es comporten les operacions de suma i intersecció de subespais vectorials quan els considerem com a espais directors en varietats afins.

i Nota

Nota. Siga $(A, V, +)$ un espai afí, $\mathcal{R}$ un sistema de referència afí i siguin W_P i U_Q dues varietats afins donades en la seua presentació cartesiana en $\mathcal{R}$. És clar que si R és un punt en A que satisfà les equacions que defineixen W_P i les equacions que defineixen U_Q , podem concloure que $R \in W_P \cap U_Q$.

Proposició 9.11. Siga $(A, V, +)$ un espai afí, P, Q, R punts en A i W, U subespais vectorials de V . Llavors, si $R \in W_P \cap U_Q$, aleshores

$$W_P \cap U_Q = (W \cap U)_R.$$

Demostració. Siga T un punt en A . Aleshores trobem la següent cadena d'equivalències

$$\begin{aligned} T \in W_P \cap U_Q &\leftrightarrow T \in W_P \text{ i } T \in U_Q && \text{(definició d'intersecció)} \\ &\leftrightarrow T \in W_R \text{ i } T \in U_R && (1) \\ &\leftrightarrow \overrightarrow{RT} \in W \text{ i } \overrightarrow{RT} \in U && (2) \\ &\leftrightarrow \overrightarrow{RT} \in W \cap U && \text{(definició d'intersecció)} \\ &\leftrightarrow T \in (W \cap U)_R, && (2) \end{aligned}$$

on en (1) hem emprat la Proposició 9.6, tenint en compte que $R \in W_P$ i $R \in U_Q$, i en (2) hem emprat la Proposició 9.8. Per tant, $W_P \cap U_Q = (W \cap U)_R$. $\square$

i Nota

Nota. Siga $(A, V, +)$ un espai afí i $\{(W_i)_{P_i}\}_{i \in I}$ una família de varietats afins en A . En general podem afirmar que, si $R \in \bigcap_{i \in I} (W_i)_{P_i}$, aleshores

$$\bigcap_{i \in I} (W_i)_{P_i} = \left(\bigcap_{i \in I} W_i \right)_R.$$

i Nota

Nota. En general, la unió de varietats afins no té per què ser una varietat afí. Siga $(A, V, +)$ un espai afí sobre un $\mathbb{R}$ -espai vectorial que té, almenys, dos punts diferents P i Q . Per a les varietats afins $\{P\}$ i $\{Q\}$, la seua unió ve donada per $\{P, Q\}$. Aquest conjunt de punts no és una varietat afí.

Definició 9.7 (Suma de varietats afins). Siga $(A, V, +)$ un espai afí i $\{(W_i)_{P_i}\}_{i \in I}$ una família de varietats afins. Definim la **suma de la família** $\{(W_i)_{P_i}\}_{i \in I}$ com la menor varietat afí que conté la unió de la família, és a dir,

$$\sum_{i \in I} (W_i)_{P_i} = \mathcal{A} \left(\bigcup_{i \in I} (W_i)_{P_i} \right).$$

Proposició 9.12. Siga $(A, V, +)$ un espai afí i W_P i U_Q dues varietats afins en A , aleshores

$$W_P + U_Q = \left(W + U + \langle \overrightarrow{PQ} \rangle \right)_P.$$

Demostració. Recordem que $W_P + U_Q = \mathcal{A}(W_P \cup U_Q)$. Anem a demostrar les dues inclusions.

Per una banda, notem que $(W + U + \langle \overrightarrow{PQ} \rangle)_P$ és una varietat afí. A més, per la Proposició 9.7, $W_P \subseteq (W + U + \langle \overrightarrow{PQ} \rangle)_P$, ja que $W \leq W + U + \langle \overrightarrow{PQ} \rangle$. Per altra banda, $Q = P + \overrightarrow{PQ} \in (W + U + \langle \overrightarrow{PQ} \rangle)_P$. Per la Proposició 9.6 tenim que $(W + U + \langle \overrightarrow{PQ} \rangle)_P = (W + U + \langle \overrightarrow{PQ} \rangle)_Q$. Aleshores, per la Proposició 9.7, $U_Q \subseteq (W + U + \langle \overrightarrow{PQ} \rangle)_Q$, ja que $U \leq W + U + \langle \overrightarrow{PQ} \rangle$. Concloem, per tant, que $W_P + U_Q \subseteq (W + U + \langle \overrightarrow{PQ} \rangle)_P$.

Per a l'altra inclusió, notem que $P \in W_P$ i que $Q \in U_Q$. Així doncs, per la Proposició 9.6 podem escriure la varietat afí $W_P + U_Q$ indistintament com T_P o com T_Q , amb $T \leq V$ un subespai vectorial. Per construcció, $W_P \subseteq T_P$ i, d'igual forma, $U_Q \subseteq T_Q$. Aleshores, per la Proposició 9.7, $W \leq T$ i $U \leq T$. A més, per la Proposició 9.8, $\overrightarrow{PQ} \in T$. Concloem que $W + U + \langle \overrightarrow{PQ} \rangle \leq T$. Llavors, per la Proposició 9.7, obtenim que $(W + U + \langle \overrightarrow{PQ} \rangle)_P \subseteq W_P + U_Q$.

Així doncs, $W_P + U_Q = (W + U + \langle \overrightarrow{PQ} \rangle)_P$. □

Definició 9.8 (Posicions relatives). Siga $(A, V, +)$ un espai afí i W_P i U_Q dues varietats afins. Direm que

- i. W_P i U_Q es **tallen** si $W_P \cap U_Q \neq \emptyset$;
- ii. W_P i U_Q són **paral · leles** si $W \leq U$ o $U \leq W$;
- iii. W_P i U_Q es **creuen** si no es tallen i no són paral · leles.

i Nota

Nota. Dues varietats afins poden ser paral · leles i tallar-se al mateix temps. En aquest cas, una de les varietats afins estarà completament inclosa en l'altra.

10 Afinitats

En aquest capítol introduïm el concepte d'afinitat entre espais afins sobre el mateix cos.

Definició 10.1 (Afinitat). Siguen $(A, V, +)$ i $(A', V', +)$ dos espais afins amb V i V' $\mathbb{K}$ -espais vectorials. Una aplicació $f: A \rightarrow A'$ s'anomena **aplicació afí** o **afinitat** si existeix una aplicació lineal $\bar{f}: V \rightarrow V'$ de forma que, per a tot $P, Q \in A$, se satisfà la següent equació

$$\overrightarrow{f(P)f(Q)} = \bar{f}(\overrightarrow{PQ}).$$

A l'aplicació $\bar{f}$ l'anomenarem **aplicació lineal subjacent** a f .

Exemple 10.1. Considerem els espais afins estàndard $(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3, +)$ i $(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2, +)$ i l'aplicació

$$\begin{aligned} f: \quad \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) &\longmapsto (3x + y + 2, -z + 1) \end{aligned}$$

Notem que f no és lineal, perquè $f(0, 0, 0) \neq (0, 0)$. Aquesta aplicació, en canvi, sí que és una afinitat, ja que, per a l'aplicació lineal

$$\begin{aligned} \bar{f}: \quad \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) &\longmapsto (3x + y, -z) \end{aligned}$$

trobem que, si $P = (x, y, z)$ i $Q = (x', y', z')$ són dos punts arbitraris en $\mathbb{R}^3$, aleshores es dona la següent cadena d'igualtats

$$\begin{aligned} \overrightarrow{f(P)f(Q)} &= \overrightarrow{(3x + y + 2, -z + 1)(3x' + y' + 2, -z' + 1)} \\ &= (3(x' - x) + (y' - y), -(z' - z)) \\ &= \bar{f}(x' - x, y' - y, z' - z) \\ &= \bar{f}(\overrightarrow{PQ}). \end{aligned}$$

Exemple 10.2. Siga $(A, V, +)$ un espai afí. L'aplicació identitat

$$\text{id}_A: A \rightarrow A$$

és una aplicació afí amb aplicació lineal subjacent l'aplicació identitat $\text{id}_V: V \rightarrow V$, ja que per a qualsevol parell de punts $P, Q \in A$ es té que

$$\overrightarrow{\text{id}_A(P)\text{id}_A(Q)} = \overrightarrow{PQ} = \text{id}_V(\overrightarrow{PQ}).$$

i Nota

Nota. Siguen $(A, V, +)$ i $(A', V', +)$ dos espais afins amb V i V' $\mathbb{K}$ -espais vectorials i $f: A \rightarrow A'$ una afinitat amb aplicació lineal subjacent $\bar{f}: V \rightarrow V'$. Aleshores, si P, Q són punts en A ,

$$\overrightarrow{f(P)f(Q)} = \bar{f}(\overrightarrow{PQ}) \quad \text{si, i només si,} \quad f(Q) = f(P) + \bar{f}(\overrightarrow{PQ}).$$

Equivalentment, si $P \in A$ i $v \in V$, aleshores

$$f(P + v) = f(P) + \bar{f}(v).$$

Proposició 10.1. *Siguen $(A, V, +)$ i $(A', V', +)$ dos espais afins amb V i V' $\mathbb{K}$ -espais vectorials i $f: A \rightarrow A'$ una afinitat, aleshores l'aplicació lineal subjacent a f és única.*

Demostració. Suposem que f admet dues aplicacions lineals subjacents

$$\bar{f}_1: V \rightarrow V', \quad \bar{f}_2: V \rightarrow V'.$$

Siga P un punt en A i v un vector en V . Si anomenem $Q = P + v$, aleshores $\overrightarrow{PQ} = v$. Emprant que $\bar{f}_1$ i $\bar{f}_2$ són aplicacions lineals subjacents a f trobem que

$$\bar{f}_1(v) = \bar{f}_1(\overrightarrow{PQ}) = \overrightarrow{f(P)f(Q)} = \bar{f}_2(\overrightarrow{PQ}) = \bar{f}_2(v).$$

És a dir, $\bar{f}_1(v) = \bar{f}_2(v)$ per a tot $v \in V$. Per tant, $\bar{f}_1 = \bar{f}_2$. □

La següent proposició ens diu que per a donar una afinitat només cal conèixer la imatge d'un punt i l'aplicació lineal subjacent.

Proposició 10.2. *Siguen $(A, V, +)$ i $(A', V', +)$ dos espais afins amb V i V' $\mathbb{K}$ -espais vectorials, $g: V \rightarrow V'$ una aplicació lineal i $P \in A$ i $P' \in A'$ dos punts. Aleshores existeix una única afinitat*

$$f: A \rightarrow A'$$

que satisfà les següents condicions

- i. $f(P) = P'$;
- ii. $\bar{f} = g$.

Demostració. Definim l'aplicació f com segueix

$$f: \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & A' \\ P + v & \longmapsto & P' + g(v) \end{array}.$$

Ens caldrà demostrar que f és afinitat, envia P a P' , té com a aplicació lineal subjacent a g i, a més, és l'única afinitat amb aquestes propietats.

Per definició d' f ,

$$f(P) = f(P + 0) = P' + g(0) = P' + 0 = P'.$$

Siguen Q, R dos punts qualssevol en A , aleshores tenim que

$$f(Q) = f(P + \overrightarrow{PQ}) = P' + g(\overrightarrow{PQ}), \quad f(R) = f(P + \overrightarrow{PR}) = P' + g(\overrightarrow{PR}).$$

Així, trobem que

$$\begin{aligned} \overrightarrow{f(Q)f(R)} &= -g(\overrightarrow{PQ}) + g(\overrightarrow{PR}) \quad (\text{per l'anterior discussió}) \\ &= g(-\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{PR}) \quad (g \text{ és lineal}) \\ &= g(\overrightarrow{QR}) \quad (1) \\ &= g(\overrightarrow{QR}), \quad (\text{Chasles}) \end{aligned}$$

on en (1) hem emprat les [propietats bàsiques dels espais afins](#).

Per tant f és afinitat amb aplicació lineal subjacent g .

Finalment, si $f': A \rightarrow A'$ fóra una altra afinitat satisfent que $f'(P) = P'$ i tal que la seua aplicació lineal subjacent fóra g , aleshores tindríem que, per a tot $v \in V$, es donaria la següent cadena d'igualtats

$$f'(P + v) = f'(P) + \overrightarrow{f'}(v) = P' + g(v) = f(P + v).$$

Queda, així, demostrada la proposició. □

Exemple 10.3. Considerem els espais afins estàndard $(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2, +)$ i $(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3, +)$. Considerem els punts $(0, 1) \in \mathbb{R}^2$ i $(0, 1, -2) \in \mathbb{R}^3$ i l'aplicació lineal

$$g: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x, y) & \longmapsto & (x, x + y, 0) \end{array}.$$

Per la Proposició 10.2 l'aplicació

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (0, 1) + v & \longmapsto & (0, 1, -2) + g(v) \end{array}$$

és l'única afinitat d' $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^3$ que satisfà $f(0, 1) = (0, 1, -2)$ i que té a g com a aplicació lineal subjacent. Notem que tot punt d' $\mathbb{R}^2$ de la forma (x, y) es pot escriure com

$$(x, y) = (0, 1) + (x, y - 1).$$

A més,

$$(0, 1, -2) + g(x, y - 1) = (0, 1, -2) + (x, x + y - 1, 0) = (x, x + y, -2).$$

Per tant, l'afinitat f es pot escriure com

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x, y) & \longmapsto & (x, x + y, -2). \end{array}$$

Es comprova fàcilment que aquesta és l'afinitat desitjada.

Presentem la definició de punt fixe.

Definició 10.2 (Punt fixe). Siga $(A, V, +)$ un espai afí i $f: A \longrightarrow A$ una afinitat. Direm que $P \in A$ és un **punt fixe** per a f si

$$f(P) = P.$$

Denotem per $\text{Fix}(f)$ al conjunt de punts fixos d' f , és a dir,

$$\text{Fix}(f) = \{P \in A \mid f(P) = P\}.$$

A continuació vorem que, si no és buit, el conjunt de punts fixos d'una afinitat és una varietat afí.

Proposició 10.3. Siga $(A, V, +)$ un espai afí i $f: A \longrightarrow A$ una afinitat amb aplicació lineal subjacent $\bar{f}: V \longrightarrow V$. Si $P \in \text{Fix}(f)$, aleshores

$$\text{Fix}(f) = \text{Ker}(\bar{f} - \text{id}_V)_P.$$

Demostració. Siga Q un punt en $\text{Fix}(f)$, aleshores ocorre que

$$\begin{aligned} \overrightarrow{PQ} &= \overrightarrow{f(P)f(Q)} \quad (P \text{ i } Q \text{ són punts fixos}) \\ &= \bar{f}(\overrightarrow{PQ}). \quad (f \text{ és afinitat}) \end{aligned}$$

Per tant, $(\bar{f} - \text{id}_V)(\overrightarrow{PQ}) = 0$, és a dir, $\overrightarrow{PQ} \in \text{Ker}(\bar{f} - \text{id}_V)$. Així,

$$Q = P + \overrightarrow{PQ} \in \text{Ker}(\bar{f} - \text{id}_V)_P.$$

Per altra banda, suposem que Q és un punt en $\text{Ker}(\bar{f} - \text{id}_V)_P$, aleshores existeix un vector $v \in \text{Ker}(\bar{f} - \text{id}_V)$ de forma que $Q = P + v$. Notem en particular que $\bar{f}(v) = v$. Així, trobem que

$$\begin{aligned} f(Q) &= f(P + v) && (\text{caracterització de } Q) \\ &= f(P) + \bar{f}(v) && (f \text{ és afinitat}) \\ &= P + v && (P \in \text{Fix}(f) \text{ i } \bar{f}(v) = v) \\ &= Q. && (\text{caracterització de } Q) \end{aligned}$$

Aleshores, $Q \in \text{Fix}(f)$.

Concloem, per tant, que $\text{Fix}(f) = \text{Ker}(\bar{f} - \text{id}_V)_P$. □

A continuació vorem que les afinitats transformen varietats afins en varietats afins.

Proposició 10.4. *Siguen $(A, V, +)$ i $(A', V', +)$ dos espais afins sobre $\mathbb{K}$, siga W_P una varietat afí en A i siga $f: A \rightarrow A'$ una afinitat amb aplicació lineal subjacent $\bar{f}: V \rightarrow V'$. Aleshores*

$$f[W_P] = \bar{f}[W]_{f(P)}.$$

Demostració. Siga Q un punt en $f[W_P]$, aleshores existeix un punt $R \in W_P$ de forma que $f(R) = Q$. Així trobem que

$$Q = f(R) = f(P + \overrightarrow{PR}) = f(P) + \bar{f}(\overrightarrow{PR}).$$

Notem que, per la [caracterització de l'espai director](#), el vector $\overrightarrow{PR} \in W$. Així, concloem que

$$Q = f(P) + \bar{f}(\overrightarrow{PR}) \in \bar{f}[W]_{f(P)}.$$

Siga ara Q un punt en $\bar{f}[W]_{f(P)}$, aleshores $Q = f(P) + u$, on u és un vector en $\bar{f}[W]$. Ocorre, llavors, que existeix un $w \in W$ de forma que $\bar{f}(w) = u$. Ajuntant-ho tot, trobem que

$$Q = f(P) + u = f(P) + \bar{f}(w) = f(P + w) \in f[W_P].$$

Concloem, per tant, que $f[W_P] = \bar{f}[W]_{f(P)}$. □

10.1 Expressió matricial d'una afinitat

Siguen $(A, V, +)$ i $(A', V', +)$ dos espais afins de dimensió finita sobre un cos $\mathbb{K}$. Considerem dos sistemes de referència afí

- $\mathcal{R} = (O, \mathcal{B})$, sistema de referència afí per a A ;
- $\overline{\mathcal{R}} = (\overline{O}, \overline{\mathcal{B}})$, sistema de referència afí per a A' .

Siga $f: A \rightarrow A'$ una afinitat i P un punt en A . Anomenem

- X les coordenades de P en $\mathcal{R}$ (coordenades d' $\overrightarrow{OP}$ en $\mathcal{B}$);
- Y les coordenades d' $f(P)$ en $\overline{\mathcal{R}}$ (coordenades d' $\overrightarrow{\overline{O}f(P)}$ en $\overline{\mathcal{B}}$).

Considerem l'aplicació lineal subjacent a l'afinitat f , és a dir, $\bar{f}: V \rightarrow V'$, i prenem A la matriu coordenada d' $\bar{f}$ de $\mathcal{B}$ a $\overline{\mathcal{B}}$.

Aleshores trobem que AX són les coordenades d' $\bar{f}(\overrightarrow{OP})$ en la base $\overline{\mathcal{B}}$.

Notem, en particular, que AX no és, necessàriament, igual a Y en aquest cas. No obstant, trobem, per Chasles i pel fet que f és una afinitat, que

$$\overrightarrow{\overline{O}f(P)} = \overrightarrow{\overline{O}f(O)} + \overrightarrow{f(O)f(P)} = \overrightarrow{\overline{O}f(O)} + \bar{f}(\overrightarrow{OP}). \quad (\square)$$

Anomenem, finalment, B les coordenades d' $f(O)$ en $\overline{\mathcal{R}}$ (coordenades d' $\overrightarrow{\overline{O}f(O)}$ en $\overline{\mathcal{B}}$).

Aleshores, per $(\square)$, trobem que

$$Y = B + AX.$$

Anomenarem a aquesta última expressió l'**equació coordenada de l'afinitat** f del sistema de referència afí $\mathcal{R}$ al sistema de referència afí $\overline{\mathcal{R}}$. Aquesta expressió també pot escriure's en forma compacta com segueix

$$\left[\begin{array}{c} 1 \\ Y \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ B & A \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} 1 \\ X \end{array} \right].$$

Exemple 10.4. Considerem els espais afins estàndard $(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2, +)$ i $(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3, +)$ i l'aplicació afí

$$\begin{aligned} f: \quad \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y) &\longmapsto (x + y + 1, x - 2, 3x) \end{aligned}$$

La corresponent aplicació lineal subjacent ve donada per

$$\begin{aligned} \overline{f}: \quad \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y) &\longmapsto (x + y, x, 3x) \end{aligned}$$

Considerem els sistemes de referència afí canònics en $\mathbb{R}^2$ i $\mathbb{R}^3$ i considerem

- $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$ la matriu coordenada d' $\overline{f}$ de la base canònica d' $\mathbb{R}^2$ a la base canònica d' $\mathbb{R}^3$;
- $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}^t$ les coordenades d' $f(O_{\mathbb{R}^2})$ en el sistema de referència canònic d' $\mathbb{R}^3$.

Així, si (x, y) és un punt qualsevol d' $\mathbb{R}^2$, tenim que

- $\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix}^t$ són les coordenades de (x, y) en el sistema de referència canònic d' $\mathbb{R}^2$;
- $\begin{bmatrix} x + y + 1 & x - 2 & 3x \end{bmatrix}^t$ són les coordenades d' $f(x, y)$ en el sistema de referència canònic d' $\mathbb{R}^3$.

Així, efectivament, trobem l'expressió coordenada

$$\begin{bmatrix} x + y + 1 \\ x - 2 \\ 3x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix},$$

o, en la seua forma compacta,

$$\left[\begin{array}{c} 1 \\ x + y + 1 \\ x - 2 \\ 3x \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} 1 \\ x \\ y \end{array} \right].$$

Siga $(A, V, +)$ un espai afí de dimensió n i siga $f: A \rightarrow A$ una afinitat. Considerem un sistema de referència afí $\mathcal{R} = (O, \mathcal{B})$ per a A i anomenem

- A la matriu coordenada d' $\overline{f}$ en $\mathcal{B}$;
- B les coordenades d' $f(O)$ en $\mathcal{R}$ (coordenades d' $\overrightarrow{Of(O)}$ en $\mathcal{B}$).

Aleshores, si P és un punt en A i anomenem

- X les coordenades de P en $\mathcal{R}$ (coordenades d' $\overrightarrow{OP}$ en $\mathcal{B}$);
- Y les coordenades d' $f(P)$ en $\mathcal{R}$ (coordenades d' $\overrightarrow{Of(P)}$ en $\mathcal{B}$),

trobem l'expressió coordenada d' f en $\mathcal{R}$ donada per

$$Y = B + AX.$$

Notem que f tindrà un punt fixe si, i només si, els sistemes següents, que són equivalents, tenen solució

$$X = B + AX; \quad (A - I_n)X = -B.$$

Proposició 10.5. *Siga $(A, V, +)$ un espai afí de dimensió n i siga $f: A \rightarrow A$ una afinitat. Siga $\mathcal{R} = (O, \mathcal{B})$ un sistema de referència afí i siga*

$$Y = B + AX$$

l'expressió coordenada d' f en $\mathcal{R}$. Les següents afirmacions són equivalents

- f té punts fixos;*
- El sistema d'equacions $(A - I_n)X = -B$ té solució.*

Corol·lari 10.1. *Siga $(A, V, +)$ un espai afí de dimensió n i siga $f: A \rightarrow A$ una afinitat. Siga $\mathcal{R} = (O, \mathcal{B})$ un sistema de referència afí i siga*

$$Y = B + AX$$

l'expressió coordenada d' f en $\mathcal{R}$. Si f té punts fixos, és a dir, si $\text{Fix}(f) \neq \emptyset$, aleshores el conjunt de punts fixos és la varietat afí que, en el sistema de referència $\mathcal{R}$, té equacions cartesianes

$$(A - I_n)X = -B.$$

10.2 Grup afí

En aquesta secció comprovarem les propietats bàsiques de la composició d'afinitats i estudiarem la caracterització de les condicions d'injectivitat i sobrejectivitat d'una afinitat en relació a aquestes condicions sobre l'aplicació lineal subjacent.

Proposició 10.6. *Siguen $(A, V, +)$, $(A', V', +)$ i $(A'', V'', +)$ tres espais afins sobre un cos $\mathbb{K}$. Siguen*

- $f: A \longrightarrow A'$ una afinitat amb aplicació lineal subjacent $\bar{f}: V \longrightarrow V'$;
- $g: A' \longrightarrow A''$ una afinitat amb aplicació lineal subjacent $\bar{g}: V' \longrightarrow V''$.

Aleshores $g \circ f: A \longrightarrow A''$ és una afinitat amb aplicació lineal subjacent $\bar{g} \circ \bar{f}: V \longrightarrow V''$, és a dir, la composició de les respectives aplicacions lineals subjacents.

Demostració. Siguen P, Q punts en A , aleshores es dona la següent cadena d'igualtats

$$\begin{aligned} \overrightarrow{(g \circ f)(P)(g \circ f)(Q)} &= \overrightarrow{g(f(P))g(f(Q))} \quad (\text{definició de la composició}) \\ &= \bar{g}(\overrightarrow{f(P)f(Q)}) \quad (g \text{ és afinitat}) \\ &= \bar{g}(\bar{f}(\overrightarrow{PQ})) \quad (f \text{ és afinitat}) \\ &= (\bar{g} \circ \bar{f})(\overrightarrow{PQ}). \quad (\text{definició de la composició}) \end{aligned}$$

Recordem que, per la [proposició sobre la composició d'aplicacions lineals](#), la composició d'aplicacions lineals torna a ser una aplicació lineal. Així doncs, $g \circ f$ torna a ser una afinitat amb aplicació lineal subjacent $\bar{g} \circ \bar{f}$. $\square$

Proposició 10.7. Siguen $(A, V, +)$ i $(A', V', +)$ dos espais afins sobre un cos $\mathbb{K}$. Siga $f: A \longrightarrow A'$ una aplicació afí amb aplicació lineal subjacent $\bar{f}: V \longrightarrow V'$. Aleshores

- f és injectiva si, i només si, $\bar{f}$ és injectiva;
- f és sobrejectiva si, i només si, $\bar{f}$ és sobrejectiva;
- f és bijectiva si, i només si, $\bar{f}$ és bijectiva.

Demostració. Per al primer ítem. Suposem que f és injectiva. Anem a demostrar que $\bar{f}$ és injectiva. Siguen v i w vectors en V tals que $\bar{f}(v) = \bar{f}(w)$. Aleshores, si P és un punt qualsevol en A , com que f és una afinitat, trobem que

$$f(P + v) = f(P) + \bar{f}(v) = f(P) + \bar{f}(w) = f(P + w).$$

Per la injectivitat d' f trobem que $P + v = P + w$. Així doncs,

$$0 = \overrightarrow{(P + v)(P + w)} = w - v.$$

Per tant, $v = w$ i tenim que $\bar{f}$ és injectiva.

Suposem ara que $\bar{f}$ és injectiva. Anem a demostrar que f és injectiva. Siguen P i Q dos punts en A tals que $f(P) = f(Q)$. Aleshores, com que f és una afinitat, trobem que

$$0 = \overrightarrow{f(P)f(Q)} = \bar{f}(\overrightarrow{PQ}).$$

Aleshores $\overrightarrow{PQ}$ és un vector en $\text{Ker}(\bar{f})$. Per la injectivitat d' $\bar{f}$, obtenim que $\overrightarrow{PQ}$ és el vector 0. Per tant, $P = P + 0 = P + \overrightarrow{PQ} = Q$, i tenim que f és injectiva.

Per al segon ítem. Suposem que f és sobrejectiva. Anem a demostrar que $\bar{f}$ és sobrejectiva. Siga v' un vector en V' . Fixem un punt $P \in A$ i considerem el punt $f(P) + v' \in A'$. Aleshores, com que l'aplicació f és sobrejectiva, existeix un punt Q en A de forma que $f(Q) = f(P) + v'$. Així, emprant que f és una afinitat, trobem que

$$f(P) + v' = f(Q) = f\left(P + \overrightarrow{PQ}\right) = f(P) + \bar{f}\left(\overrightarrow{PQ}\right).$$

Aleshores

$$0 = \overrightarrow{(f(P) + v')\left(f(P) + \bar{f}\left(\overrightarrow{PQ}\right)\right)} = \bar{f}\left(\overrightarrow{PQ}\right) - v'.$$

Així, obtenim que $\bar{f}(\overrightarrow{PQ}) = v'$, és a dir, $\bar{f}$ és sobrejectiva.

Suposem ara que $\bar{f}$ és sobrejectiva. Anem a demostrar que f és sobrejectiva. Siga P' un punt en A' . Considerem un punt P en A i la seua imatge $f(P) \in A'$. Aleshores podem considerar el vector $\overrightarrow{f(P)P'} \in V'$. Com que $\bar{f}$ és sobrejectiva, existeix un vector $v \in V$ de manera que $\bar{f}(v) = \overrightarrow{f(P)P'}$. Aleshores, per al punt $P + v$ en A i tenint en compte que f és una afinitat, trobem que

$$f(P + v) = f(P) + \bar{f}(v) = f(P) + \overrightarrow{f(P)P'} = P'.$$

És a dir, f és sobrejectiva.

Finalment, la condició sobre la bijectivitat és conseqüència de les altres dues equivalències. $\square$

i Nota

Nota. Com a conseqüència de la Proposició 10.7 podem parlar de **monomorfismes**, **epimorfismes** i **isomorfismes afins** per a referir-nos a afinitats injectives, sobrejectives i bijectives, respectivament.

Proposició 10.8. *Siguen $(A, V, +)$ i $(A', V', +)$ dos espais afins sobre un cos $\mathbb{K}$ i $f: A \rightarrow A'$ un isomorfisme afí amb isomorfisme subjacent $\bar{f}: V \rightarrow V'$. Aleshores $f^{-1}: A' \rightarrow A$ és un isomorfisme afí amb isomorfisme subjacent $\bar{f}^{-1}: V' \rightarrow V$.*

Demostració. Com $\bar{f}$ és un isomorfisme, la seua aplicació inversa, és a dir, $\bar{f}^{-1}$, és un isomorfisme. A més, si P' i Q' són dos punts en A' , com que f és bijectiva, existeixen uns únics punts P i Q en A tals que $f(P) = P'$ i $f(Q) = Q'$.

Com que f és afinitat, tenim que

$$\overrightarrow{P'Q'} = \overrightarrow{f(P)f(Q)} = \bar{f}(\overrightarrow{PQ}).$$

Com que $\bar{f}$ és bijectiva, trobem que $\bar{f}^{-1}(\overrightarrow{P'Q'}) = \overrightarrow{PQ}$. Aleshores, trobem que

$$\overrightarrow{f^{-1}(P')f^{-1}(Q')} = \overrightarrow{PQ} = \bar{f}^{-1}(\overrightarrow{P'Q'}).$$

Per tant, f^{-1} és una afinitat amb aplicació lineal subjacent $\overline{f}^{-1}$. Finalment, per la Proposició 10.7, concloem que f^{-1} és un isomorfisme afí. $\square$

Definició 10.3 (Grup afí). Siga $(A, V, +)$ un espai afí. Definim el conjunt d'isomorfismes afins en A com

$$\text{GA}(A) = \{f: A \longrightarrow A \mid f \text{ és isomorfisme afí}\}.$$

Per les Proposicions 10.6 i 10.8 i l'Exemple 10.2, és fàcil comprovar que $\text{GA}(A)$ admet una estructura de grup per a la composició d'aplicacions habitual, que anomenarem **grup afí** d' A .

i Nota

Nota. Siga $(A, V, +)$ un espai afí i siga $\mathcal{R}$ un sistema de referència afí per a A . Aleshores l'aplicació que envia cada $f \in \text{GA}(A)$ a la seua matriu coordinada respecte de $\mathcal{R}$ és un isomorfisme de grups.

10.3 Exemples d'afinitats

10.3.1 Translacions

Definició 10.4 (Translació). Siga $(A, V, +)$ un espai afí i v un vector en V . Aleshores la **translació de vector** v es defineix com l'aplicació

$$\begin{aligned} t_v: \quad A &\longrightarrow A \\ P &\longmapsto P + v. \end{aligned}$$

Proposició 10.9. Siga $(A, V, +)$ un espai afí i v un vector en V . Aleshores la translació de vector v és un isomorfisme afí amb aplicació lineal subjacent l'aplicació identitat $\text{id}_V: V \longrightarrow V$.

A més, si v i w són dos vectors en V , aleshores

$$t_v \circ t_w = t_{v+w}.$$

En particular,

$$t_v^{-1} = t_{-v}.$$

Demostració. Siguen P i Q dos punts en A . Aleshores es dona la següent cadena d'igualtats

$$\overrightarrow{t_v(P)t_v(Q)} = \overrightarrow{(P+v)(Q+v)} = \overrightarrow{PQ} = \text{id}_V(\overrightarrow{PQ}).$$

Així, t_v és una afinitat amb aplicació lineal subjacent id_V . Per la Proposició 10.7 es té que t_v és un isomorfisme afí.

Si v i w són dos vectors en V i P un punt en A , aleshores

$$t_v(t_w(P)) = t_v(P + w) = (P + w) + v = P + (v + w) = t_{v+w}(P).$$

Finalment, notem que

$$t_v \circ t_{-v} = t_0 = \text{id}_A.$$

Per tant, $t_v^{-1} = t_{-v}$. □

Exemple 10.5. En l' $\mathbb{R}$ -espai afí estàndard $\mathbb{R}^2$ considerem la translació de vector $(1, 3)$, és a dir,

$$\begin{aligned} t_{(1,3)}: \quad \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\longmapsto (x + 1, y + 3). \end{aligned}$$

Si considerem el sistema de referència afí canònic, aleshores la matriu afí associada a aquesta translació ve donada per la matriu

$$\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{array} \right].$$

10.3.2 Homotècies

Definició 10.5 (Homotècia). Siga $(A, V, +)$ un espai afí sobre $\mathbb{K}$, C un punt en A i α un escalar en $\mathbb{K}$. Definim l'**homotècia de centre C i raó α** com l'aplicació

$$\begin{aligned} h_{C,\alpha}: \quad A &\longrightarrow A \\ P &\longmapsto C + \alpha \overrightarrow{CP} \end{aligned}$$

Proposició 10.10. Siga $(A, V, +)$ un espai afí sobre $\mathbb{K}$, C un punt en A i α un escalar en $\mathbb{K}$. Aleshores l'homotècia de centre C i raó α és una afinitat amb aplicació lineal subjacent l'aplicació

$$\alpha \text{id}_V: V \longrightarrow V.$$

A més, si α i β són dos escalars en $\mathbb{K}$, aleshores

$$h_{C,\alpha} \circ h_{C,\beta} = h_{C,\alpha\beta}.$$

En particular, si $\alpha \neq 0$, aleshores

$$h_{C,\alpha}^{-1} = h_{C,\alpha^{-1}}.$$

Demostració. Siguen P i Q dos punts en A . Notem la següent cadena d'igualtats

$$\overrightarrow{h_{C,\alpha}(P)h_{C,\alpha}(Q)} = \overrightarrow{(C + \alpha\overrightarrow{CP})(C + \alpha\overrightarrow{CQ})} = -\alpha\overrightarrow{CP} + \alpha\overrightarrow{CQ} = \alpha(\overrightarrow{PC} + \overrightarrow{CQ}) = \alpha\overrightarrow{PQ} = \alpha \operatorname{id}_V(\overrightarrow{PQ}).$$

Així, $h_{C,\alpha}$ és una afinitat amb aplicació lineal subjacent $\alpha \operatorname{id}_V$.

Si α i β són dos escalars en $\mathbb{K}$ i P un punt en A , aleshores

$$h_{C,\alpha}(h_{C,\beta}(P)) = h_{C,\alpha}(C + \beta\overrightarrow{CP}) = C + \alpha\overrightarrow{C(C + \beta\overrightarrow{CP})} = C + \alpha\beta\overrightarrow{CP} = h_{C,\alpha\beta}(P).$$

Finalment, si $\alpha \neq 0$, notem que

$$h_{C,\alpha} \circ h_{C,\alpha^{-1}} = h_{C,1} = \operatorname{id}_A.$$

Per tant, $h_{C,\alpha}^{-1} = h_{C,\alpha^{-1}}$. □

Exemple 10.6. En l' $\mathbb{R}$ -espai afí estàndard $\mathbb{R}^2$ considerem l'homotècia de centre $(1, 2)$ i raó 3,

$$\begin{aligned} h_{(1,2),3}: \quad \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\longmapsto (3x - 2, 3y - 4). \end{aligned}$$

Notem que $(1, 2) + 3\overrightarrow{(1, 2)(x, y)} = (1, 2) + 3(x - 1, y - 2) = (3x - 2, 3y - 4)$. Si considerem el sistema de referència afí canònic, aleshores la matriu afí associada a aquesta homotècia ve donada per la matriu

$$\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline -2 & 3 & 0 \\ -4 & 0 & 3 \end{array} \right].$$

11 Espai afí euclidià

Introduïm a continuació el concepte d'espai afí euclidià i els sistemes de referència rectangulars.

Definició 11.1 (Espai afí euclidià). Un **espai afí euclidià** és un espai afí $(E, V, +)$ definit sobre un $\mathbb{R}$ -espai vectorial euclidià $(V, \cdot)$.

Definició 11.2 (Sistema de referència rectangular). Donat un espai afí euclidià $(E, V, +)$, un sistema de referència afí $\mathcal{R} = (O, \mathcal{B})$ s'anomenarà **sistema de referència rectangular** si $\mathcal{B}$ és una base ortonormal.

i Nota

Nota. Siga $(E, V, +)$ un espai afí euclidià de dimensió n i siguin $\mathcal{R} = (O, \mathcal{B})$ i $\overline{\mathcal{R}} = (\overline{O}, \overline{\mathcal{B}})$ dos sistemes de referència rectangulars. Aleshores la matriu afí de canvi de sistema de referència d' $\overline{\mathcal{R}}$ a $\mathcal{R}$, és a dir, la matriu introduïda en la [definició corresponent](#),

$$P = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline \mathbf{B} & & & \mathbf{A} \end{array} \right] \quad \text{on} \quad \begin{cases} \mathbf{B} \in M_{n1}(\mathbb{R}) & \text{coordenades d}'\overline{O} \text{ en } \mathcal{R}, \\ \mathbf{A} \in M_n(\mathbb{R}) & \text{matriu canvi de base d}'\overline{\mathcal{B}} \text{ a } \mathcal{B}, \end{cases}$$

és una matriu per a la qual $\mathbf{A}$ és una matriu ortogonal, d'acord a la [proposició sobre canvis de base entre bases ortonormals](#).

11.1 Projecció ortogonal

En aquesta secció presentem la noció de projecció ortogonal d'un punt respecte d'una varietat afí i donarem diferents caracteritzacions d'aquest punt.

Proposició 11.1. Siga $(E, V, +)$ un espai afí euclidià, P un punt en E i W_Q una varietat afí en E , aleshores existeix un únic punt $T \in E$ que satisfà

- i. $T \in W_Q$;
- ii. $\overrightarrow{PT} \in W^\perp$.

Demostració. Considerem el vector $\overrightarrow{PQ}$ i considerem la seua projecció ortogonal a W , és a dir, $\text{p}_W(\overrightarrow{PQ})$. Per la [definició de projecció ortogonal](#), $\text{p}_W(\overrightarrow{PQ})$ és l'únic vector en W que satisfà

$$\text{i. } \text{p}_W(\overrightarrow{PQ}) \in W; \quad \text{ii. } \overrightarrow{PQ} - \text{p}_W(\overrightarrow{PQ}) \in W^\perp.$$

Definim el punt T com

$$T = Q - \text{p}_W(\overrightarrow{PQ}).$$

Per construcció, obtenim que

$$\text{i. } T \in W_Q; \quad \text{ii. } \overrightarrow{PT} = \overrightarrow{P(Q - \text{p}_W(\overrightarrow{PQ}))} = \overrightarrow{PQ} - \text{p}_W(\overrightarrow{PQ}) \in W^\perp.$$

Només ens queda comprovar la unicitat de T . Suposem que existira un altre punt T' satisfent que

$$\text{i. } T' \in W_Q; \quad \text{ii. } \overrightarrow{PT'} \in W^\perp.$$

Aleshores trobem, per Chasles, que

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PT'} + \overrightarrow{T'Q}.$$

En aquesta darrera expressió, $\overrightarrow{T'Q} \in W$ i $\overrightarrow{PT'} \in W^\perp$. Per la [definició de projecció ortogonal](#), trobem que $\text{p}_W(\overrightarrow{PQ}) = \overrightarrow{T'Q}$. Així,

$$T' = Q - \overrightarrow{T'Q} = Q - \text{p}_W(\overrightarrow{PQ}) = T.$$

Queda així demostrada la unicitat de T . □

Definició 11.3 (Projecció ortogonal d'un punt en una varietat afí). Siga $(E, V, +)$ un espai afí euclidià, P un punt en E i W_Q una varietat afí en E . Definim la **projecció ortogonal de P en W_Q** com a l'únic punt $T \in E$ que satisfà

$$\text{i. } T \in W_Q; \\ \text{ii. } \overrightarrow{PT} \in W^\perp.$$

La Proposició [11.1](#) garanteix l'existència i unicitat d'aquest punt, que denotarem també per

$$\text{p}_{W_Q}(P).$$

La següent proposició ens donarà una forma alternativa d'obtenir la projecció ortogonal d'un punt en una varietat afí. Aquest punt es pot caracteritzar com l'únic element de la intersecció entre la varietat considerada i la varietat que passa pel punt i té com a espai director l'espai perpendicular al director de la varietat donada.

Proposició 11.2. Siga $(E, V, +)$ un espai afí euclidià, P un punt en E i W_Q una varietat afí en E . Aleshores

$$W_Q \cap W_P^\perp = \{pw_Q(P)\}.$$

Demostració. Per simplificar la demostració, anomenem $T = pw_Q(P)$. Seguint la Definició 11.3, T és l'únic punt en E que satisfà

$$\text{i. } T \in W_Q; \quad \text{ii. } \overrightarrow{PT} \in W^\perp.$$

Com a conseqüència de (ii) i de la caracterització de l'espai director tenim que

$$\text{(iii) } T \in W_P^\perp.$$

Notem que $T \in W_Q \cap W_P^\perp$. Així, per la proposició sobre la intersecció de varietats afins i la proposició sobre el complement ortogonal, tenim que

$$W_Q \cap W_P^\perp = (W \cap W^\perp)_T = \{0\}_T = \{T\}.$$

Com volíem demostrar. □

Definició 11.4 (Varietats afins ortogonals). Siga $(E, V, +)$ un espai afí euclidià i W_P i U_Q dues varietats afins en E . Direm que les varietats W_P i U_Q són **perpendiculars**, i ho denotarem $W_P \perp U_Q$, si es dona una de les següents inclusions

$$W \leq U^\perp; \quad U^\perp \leq W.$$

i Nota

Nota. En la Definició 11.4 el perpendicular pot considerar-se tant sobre un subespai com sobre l'altre. Si $(E, V, +)$ és un espai afí euclidià i W_P i U_Q són dues varietats afins, aleshores són equivalents

$$W \leq U^\perp \quad \text{si, i només si,} \quad U \leq W^\perp;$$

$$U^\perp \leq W \quad \text{si, i només si,} \quad W^\perp \leq U.$$

11.2 Distàncies entre varietats afins

En aquesta secció definim les distàncies entre varietats afins i provarem de reduir-les a distàncies entre un punt i una varietat afí.

Definició 11.5 (Distància entre dos punts). Siga $(E, V, +)$ un espai afí euclidià i siguin P i Q dos punts en E . Definim la **distància** entre P i Q , i la denotarem per $d(P, Q)$, com a la norma del vector $\overrightarrow{PQ}$. Definim l'**aplicació distància** com

$$\begin{aligned} d: E \times E &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (P, Q) &\longmapsto \|\overrightarrow{PQ}\| \end{aligned}$$

Les següents propietats són conseqüència directa de la definició de producte escalar.

Corol·lari 11.1. Siga $(E, V, +)$ un espai afí euclidià i siguin P, Q i R tres punts en E , aleshores

- i. $d(P, Q) = 0$ si, i només si, $P = Q$;
- ii. $d(P, Q) = d(Q, P)$;
- iii. $d(P, Q) \leq d(P, R) + d(R, Q)$.

Exemple 11.1. Sobre l'espai afí euclidià estàndard $\mathbb{R}^n$, considerem dos punts P i Q en $\mathbb{R}^n$. Si considerem el sistema de referència canònic $\mathcal{R}_c$ i anomenem

- $\begin{bmatrix} p_1 & \cdots & p_n \end{bmatrix}^t$ les coordenades de P en $\mathcal{R}_c$;
- $\begin{bmatrix} q_1 & \cdots & q_n \end{bmatrix}^t$ les coordenades de Q en $\mathcal{R}_c$,

aleshores $\overrightarrow{PQ} = (q_1 - p_1, \dots, q_n - p_n)$. Així, l'aplicació distància en aquest cas envia el parell (P, Q) a la norma d'aquest vector, és a dir,

$$d(P, Q) = \|\overrightarrow{PQ}\| = +\sqrt{(q_1 - p_1)^2 + \cdots + (q_n - p_n)^2}.$$

A continuació estenem la definició de distància entre punts a distància entre varietats afins.

Definició 11.6 (Distància entre dues varietats afins). Siga $(E, V, +)$ un espai afí euclidià i siguin W_P i U_Q dues varietats afins. Definim la **distància** entre W_P i U_Q , i la denotarem per $d(W_P, U_Q)$, com a la menor de les distàncies possibles entre els punts de W_P i els punts de U_Q , és a dir,

$$d(W_P, U_Q) = \min\{d(R, S) \in \mathbb{R} \mid R \in W_P, S \in U_Q\}.$$

El que vorem a continuació és que les distàncies entre varietats sempre es poden reduir a distàncies entre dos punts. Primerament comprovarem que la distància d'un punt a una varietat afí és la distància entre eixe punt i la seua projecció ortogonal a la varietat afí.

Proposició 11.3. Siga $(E, V, +)$ un espai afí euclidià, P un punt en E i W_Q una varietat afí, aleshores

$$d(P, W_Q) = d(P, p_{W_Q}(P)).$$

Demostració. De la demostració feta en la Proposició 11.1, la projecció ortogonal de P en W_Q és el punt donat per

$$T = Q - p_W(\overrightarrow{PQ}).$$

A més, aquest punt és l'únic que satisfà

$$\text{i. } T \in W_Q; \quad \text{ii. } \overrightarrow{PT} \in W^\perp.$$

Així, si S és un punt qualsevol en W_Q , trobem que

$$\begin{aligned} d(S, P) &= \|\overrightarrow{SP}\| && \text{(definició de distància)} \\ &= \|\overrightarrow{SQ} + \overrightarrow{QP}\| && \text{(Chasles)} \\ &= \|\overrightarrow{SQ} - \overrightarrow{PQ}\| && (1) \\ &\geq \|p_W(\overrightarrow{PQ}) - \overrightarrow{PQ}\| && (2) \\ &= \|\overrightarrow{QT} - \overrightarrow{PQ}\| && \text{(definició de } T) \\ &= \|\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QT}\| && (3) \\ &= \|\overrightarrow{PT}\| && \text{(Chasles)} \\ &= d(T, P), && \text{(definició de distància)} \end{aligned}$$

on en (1) hem emprat les propietats bàsiques dels espais afins, en (2) el teorema de la millor aproximació, tenint en compte que $\overrightarrow{SQ} \in W$, i en (3) les propietats de la norma.

Per tant, $d(P, W_Q) = d(P, T)$. □

En el següent teorema demostrem que la distància entre varietats afins sempre es pot recuperar com a la distància d'un punt a una varietat suma. Açò, juntament amb la proposició anterior, ens garanteix que la distància entre dues varietats afins sempre és la distància entre dos punts d'aquestes varietats afins.

Teorema 11.1 (Distància entre varietats afins). *Siga $(E, V, +)$ un espai afí euclidià i siguin W_P i U_Q dues varietats afins, aleshores*

$$d(W_P, U_Q) = d(P, (W + U)_Q).$$

Demostració. Comprovarem que tota distància entre dos punts de W_P i U_Q , respectivament, es pot recuperar com la distància entre el punt P i un punt en $(W + U)_Q$.

Siguin $R \in W_P$ i $S \in U_Q$, aleshores existeixen vectors $w \in W$ i $u \in U$ de forma que

$$R = P + w; \quad S = Q + u. \quad (\triangle)$$

Aleshores es dona la següent cadena d'igualtats

$$\begin{aligned}
d(R, S) &= \|\overrightarrow{RS}\| && \text{(definició de distància)} \\
&= \|\overrightarrow{(P+w)(Q+u)}\| && (\triangle) \\
&= \|\overrightarrow{PQ} + u - w\| && ((P+w) + (\overrightarrow{PQ} + u - w) = Q+u) \\
&= \|\overrightarrow{P(Q+u-w)}\| && (P + \overrightarrow{PQ} + u - w = Q+u-w) \\
&= d(P, Q+u-w). && \text{(definició de distància)}
\end{aligned}$$

Notem que el punt $Q+u-w$ és un punt en $(W+U)_Q$. Per tant,

$$d(W_P, U_Q) = d(P, (W+U)_Q).$$

□

En el següent exemple aprofitarem el que hem obtingut fins ara per a determinar la distància d'un punt a un hiperplà.

Exemple 11.2. Siga $(E, V, +)$ un espai afí euclidià de dimensió n , siga P un punt en E i W_Q un hiperplà. Siga $\mathcal{R} = (O, \mathcal{B})$ un sistema de referència rectangular.

Com W_Q és un hiperplà, aleshores $\dim_{\mathbb{R}}(W) = n-1$ i, llavors, W_Q ve determinat per una única equació cartesiana respecte $\mathcal{R}$, és a dir,

$$\begin{aligned}
W_Q &= \left\{ R \in E \mid \begin{array}{l} R \text{ té coordenades } [x_1 \ \cdots \ x_n]^t \text{ en } \mathcal{R} \text{ i} \\ a_1x_1 + \cdots + a_nx_n + b = 0 \end{array} \right\} \\
W &= \left\{ w \in V \mid \begin{array}{l} w \text{ té coordenades } [x_1 \ \cdots \ x_n]^t \text{ en } \mathcal{B} \text{ i} \\ a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = 0 \end{array} \right\}.
\end{aligned}$$

Anomenem u al vector de V per al qual $[a_1 \ \cdots \ a_n]^t$ són les coordenades d' u en $\mathcal{B}$.

Notem que, si w és un vector en W i anomenem $[x_1 \ \cdots \ x_n]^t$ les coordenades de w en $\mathcal{B}$, aleshores, per la caracterització de W , es té que

$$0 = a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = [a_1 \ \cdots \ a_n] \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = u \cdot w. \quad (\heartsuit)$$

Per a l'última de les anteriors igualtats només cal adonar-se que $\mathcal{B}$ és una base ortonormal i, aleshores, I_n és la matriu coordenada de $\cdot$ en $\mathcal{B}$.

L'equació en $(\heartsuit)$ ens garanteix que el vector u és ortogonal a tots els vectors de W . Per tant,

$$W^\perp = \langle u \rangle.$$

Suposem que $\begin{bmatrix} p_1 & \cdots & p_n \end{bmatrix}^t$ són les coordenades de P en $\mathcal{R}$ (coordenades d' $\overrightarrow{OP}$ en $\mathcal{B}$).

Anomenem T a la projecció ortogonal de P en W_Q , és a dir, $T = \text{p}_{W_Q}(P)$, i anomenem $\begin{bmatrix} t_1 & \cdots & t_n \end{bmatrix}^t$ les coordenades de T en $\mathcal{R}$ (coordenades d' $\overrightarrow{OT}$ en $\mathcal{B}$).

Per la relació de Chasles,

$$\overrightarrow{PT} = \overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OT} = -\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OT}.$$

Així, $\begin{bmatrix} t_1 - p_1 & \cdots & t_n - p_n \end{bmatrix}^t$ són les coordenades d' $\overrightarrow{PT}$ en $\mathcal{B}$.

Recordem per la Proposició 11.1 que T és l'únic punt en E que satisfà

$$\text{i. } T \in W_Q; \quad \text{ii. } \overrightarrow{PT} \in W^\perp.$$

Aleshores, existirà un escalar $\lambda \in \mathbb{R}$ per al qual $\overrightarrow{PT} = \lambda u$. Així, prenent coordenades d'aquests vectors en la base $\mathcal{B}$, trobem la següent igualtat

$$\begin{bmatrix} t_1 - p_1 \\ \vdots \\ t_n - p_n \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}. \quad (\spadesuit)$$

Així, podem recuperar les coordenades de T en el sistema de referència $\mathcal{R}$ com

$$\begin{bmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}.$$

Com hem dit abans, $T \in W_Q$. Aleshores les coordenades de T en el sistema de referència afí $\mathcal{R}$ satisfan l'equació cartesiana que defineix la varietat afí W_Q , per tant

$$a_1(p_1 + \lambda a_1) + \cdots + a_n(p_n + \lambda a_n) + b = 0.$$

Aquesta darrera expressió ens permet conèixer el valor de λ ,

$$\lambda = \frac{-a_1 p_1 - \cdots - a_n p_n - b}{a_1^2 + \cdots + a_n^2}. \quad (\clubsuit)$$

Aleshores trobem la següent cadena d'igualtats

$$\begin{aligned}
 d(P, W_Q) &= d(P, T) & (1) \\
 &= \|\vec{PT}\| & (\text{definició de distància}) \\
 &= \|\lambda u\| & (\spadesuit) \\
 &= \sqrt{\sum_{i=1}^n \lambda^2 a_i^2} & (\mathcal{B} \text{ és base ortonormal}) \\
 &= |\lambda| \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2} & (2) \\
 &= \frac{|a_1 p_1 + \cdots + a_n p_n + b|}{a_1^2 + \cdots + a_n^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2} & (\clubsuit) \\
 &= \frac{|a_1 p_1 + \cdots + a_n p_n + b|}{\sqrt{a_1^2 + \cdots + a_n^2}},
 \end{aligned}$$

on en (1) hem emprat la Proposició 11.3 i en (2) les [propietats de la norma](#).

D'aquesta forma deduïm la fórmula per a la distància d'un punt a un hiperplà.

11.3 Angles entre varietats afins

En aquesta secció introduïrem els angles entre varietats afins. Aquesta definició només la presentarem per a varietats afins que van associades a un únic vector, és a dir, rectes i hiperplans. Per a aquesta secció és important recordar la [definició d'angle entre vectors](#).

11.3.1 Angle entre dues rectes

Siga $(E, V, +)$ un espai afí euclidià i siguin W_P i U_Q dues rectes en E . Així, existeixen dos vectors $w, u \in V - \{0\}$ de forma que

$$W = \langle w \rangle; \quad U = \langle u \rangle.$$

És natural pensar que l'angle que formen aquestes dues rectes es definisca com a l'angle que formen u i w . No obstant, caldrà veure què ocorre si haguérem agafat uns altres vectors directors. Suposem que w' i u' són vectors en $V - \{0\}$ de forma que

$$W = \langle w \rangle = \langle w' \rangle; \quad U = \langle u \rangle = \langle u' \rangle.$$

Aleshores existeixen escalars λ i μ en $\mathbb{R}$ de forma que

$$w' = \lambda w; \quad u' = \mu u.$$

Anomenem

- θ l'angle que formen els vectors w i u , amb $\theta \in [0, \pi]$;
- θ' l'angle que formen els vectors w' i u' , amb $\theta' \in [0, \pi]$.

Aleshores trobem que

$$\cos(\theta) = \frac{w \cdot u}{\|w\| \|u\|}; \quad \cos(\theta') = \frac{w' \cdot u'}{\|w'\| \|u'\|}.$$

Pel que hem vist adés,

$$\cos(\theta') = \frac{w' \cdot u'}{\|w'\| \|u'\|} = \frac{(\lambda w) \cdot (\mu u)}{\|\lambda w\| \|\mu u\|} = \frac{(\lambda \mu) (w \cdot u)}{|\lambda| |\mu| \|w\| \|u\|} = \pm \cos(\theta).$$

Aquesta diferència de signe podem evitar-la imposant la condició que l'angle que formen les dues rectes haja d'estar comprés entre 0 i $\frac{\pi}{2}$.

Definició 11.7 (Angle entre dues rectes). Siga $(E, V, +)$ un espai afí euclidià i siguen W_P i U_Q dues rectes en E . Així, existeixen dos vectors $w, u \in V - \{0\}$ de forma que

$$W = \langle w \rangle; \quad U = \langle u \rangle.$$

Definim l'**angle que formen** W_P i U_Q com a l'únic $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ tal que

$$\cos(\theta) = \frac{|w \cdot u|}{\|w\| \|u\|}.$$

11.3.2 Angle entre dos hiperplans

Emprarem el mateix criteri que hem vist abans amb les rectes per al cas dels hiperplans. En aquest cas, ens aprofitarem que l'espai ortogonal a l'espai director d'un hiperplà té dimensió 1.

Definició 11.8 (Angle entre dos hiperplans). Siga $(E, V, +)$ un espai afí euclidià i siguen W_P i U_Q dos hiperplans en E . Així, existeixen dos vectors $w, u \in V - \{0\}$ de forma que

$$W^\perp = \langle w \rangle; \quad U^\perp = \langle u \rangle.$$

Definim l'**angle que formen** W_P i U_Q com a l'únic $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ tal que

$$\cos(\theta) = \frac{|w \cdot u|}{\|w\| \|u\|}.$$

11.3.3 Angle entre una recta i un hiperplà

En aquest cas, ens aprofitarem que l'espai ortogonal a l'espai director d'un hiperplà té dimensió 1 i que l'espai director de la recta també té dimensió 1. No obstant, en aquest cas ens caldrà prendre el complementari de l'angle que formen aquests dos vectors.

Definició 11.9 (Angle entre una recta i un hiperplà). Sigui $(E, V, +)$ un espai afí euclidià i siguin W_P una recta i U_Q un hiperplà en E . Així, existeixen dos vectors $w, u \in V - \{0\}$ de forma que

$$W = \langle w \rangle; \quad U^\perp = \langle u \rangle.$$

Definim l'**angle que formen** W_P i U_Q com al complementari de l'únic $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ tal que

$$\cos(\theta) = \frac{|w \cdot u|}{\|w\| \|u\|}.$$

11.4 Moviments

En aquesta secció introduïm les isometries afins i els moviments. Demostrarem que dos espais afins euclidians sobre espais vectorials de la mateixa dimensió són isomorfs. Amb açò conclourem que, per a cada dimensió, l'espai afí euclidià estàndard de la dimensió donada és l'únic model d'espai afí euclidià tret d'isometria afí.

Definició 11.10 (Isometria afí | Moviment). Siguen $(E_1, V_1, +)$ i $(E_2, V_2, +)$ dos espais afins euclidians sobre $\mathbb{R}$. Una aplicació $f: E_1 \rightarrow E_2$ és una **isometria afí** si f és una afinitat i, a més, l'aplicació lineal subjacent $\bar{f}: V_1 \rightarrow V_2$ és una isometria.

Si $(E, V, +)$ és un espai afí euclidià, les isometries afins del tipus $f: E \rightarrow E$ s'anomenen **moviments**.

Una caracterització immediata de la definició d'isometria és que les isometries afins són, precisament, aquelles afinitats que preserven les distàncies.

Proposició 11.4. *Siguen $(E_1, V_1, +)$ i $(E_2, V_2, +)$ dos espais afins euclidians sobre $\mathbb{R}$, amb aplicacions distància d_1 i d_2 , respectivament, i $f: E_1 \rightarrow E_2$ una afinitat. Les següents afirmacions són equivalents.*

- i. f és isometria afí;
- ii. Per a tot parell de punts $P, Q \in E_1$ es té que

$$d_1(P, Q) = d_2(f(P), f(Q)).$$

Demostració. Suposem que f és una isometria afí. Aleshores, d'acord a la Definició 11.10, l'aplicació lineal subjacent a f , és a dir, $\bar{f}: V_1 \longrightarrow V_2$, és una isometria.

Siguen $P, Q \in E_1$, aleshores es dona la següent cadena d'igualtats

$$\begin{aligned} d_1(P, Q) &= \|\overrightarrow{PQ}\|_1 && \text{(definició de distància)} \\ &= \|\bar{f}(\overrightarrow{PQ})\|_2 && (1) \\ &= \|\overrightarrow{f(P)f(Q)}\|_2 && (f \text{ és afinitat}) \\ &= d_2(f(P), f(Q)), && \text{(definició de distància)} \end{aligned}$$

on en (1) hem emprat que les [isometries preserven les normes](#).

Suposem ara que, per a tot parell de punts $P, Q \in E_1$, es té que

$$d_1(P, Q) = d_2(f(P), f(Q)).$$

Així, si $v \in V_1$ i $P \in E_1$, aleshores

$$\begin{aligned} \|v\|_1 &= \|\overrightarrow{P(P+v)}\|_1 && \text{(definició d'espai afí)} \\ &= d_1(P, P+v) && \text{(definició de distància)} \\ &= d_2(f(P), f(P+v)) && \text{(hipòtesi)} \\ &= \|\overrightarrow{f(P)f(P+v)}\|_2 && \text{(definició de distància)} \\ &= \|\overrightarrow{f(P)(f(P) + \bar{f}(v))}\|_2 && (f \text{ és afinitat}) \\ &= \|\bar{f}(v)\|_2. && \text{(definició d'espai afí)} \end{aligned}$$

Per la [caracterització de les isometries per les normes](#), concloem que $\bar{f}$ és una isometria. Llavors, per la Definició 11.10, tenim que f és una isometria afí. $\square$

Exemple 11.3. En l'espai afí euclidià estàndard $\mathbb{R}^2$, l'aplicació identitat $\text{id}_{\mathbb{R}^2}: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, així com el gir d'angle $\frac{\pi}{4}$ i centre $(2, 1)$, $G_{(2,1), \frac{\pi}{4}}: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, són moviments. En canvi, l'homotècia de centre $(1, -1)$ i raó 3, $h_{(1,-1),3}: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, no és un moviment.

Exemple 11.4. Considerem els espais afins euclidians estàndard $\mathbb{R}^2$ i $\mathbb{R}^3$. La immersió d' $\mathbb{R}^2$ al pla $z = 2$ donada per

$$\begin{aligned} f: \quad \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y) &\longmapsto (x, y, 2) \end{aligned}$$

és un exemple d'isometria afí que no és un moviment.

Proposició 11.5. Siguen $(E_1, V_1, +)$ i $(E_2, V_2, +)$ dos espais afins euclidians sobre $\mathbb{R}$ i $f: E_1 \longrightarrow E_2$ una afinitat.

- i. Si f és una isometria afí, aleshores f és injectiva.
- ii. Si f és un moviment, aleshores f és bijectiva.

Demostració. Considerem el primer ítem. Com, per hipòtesi, f és una isometria afí, per la Definició 11.10, la seua aplicació lineal subjacent $\bar{f}: V_1 \rightarrow V_2$ és una isometria. Per la [proposició sobre la injectivitat de les isometries](#) tenim que $\bar{f}$ és injectiva. Finalment, per la [caracterització de la injectivitat de les afinitats](#), concloem que f és injectiva.

Per al segon ítem, com f és un moviment, tenim, per la Definició 11.10, que $(E_1, V_1, +) = (E_2, V_2, +)$ i que f és, en particular, una isometria afí. D'acord a l'ítem (i), f és injectiva. Notem que, per la [caracterització de la injectivitat de les afinitats](#), l'aplicació lineal subjacent $\bar{f}: V_1 \rightarrow V_1$ és injectiva. Per la [proposició sobre imatges de bases](#) i la [caracterització de les bases per la dimensió](#) concloem que $\bar{f}$ és un isomorfisme. Aleshores, per la [caracterització de la bijectivitat de les afinitats](#), f és bijectiva. $\square$

Proposició 11.6. *Siguen $(E_1, V_1, +)$, $(E_2, V_2, +)$ i $(E_3, V_3, +)$ tres espais afins euclidians sobre $\mathbb{R}$ i $f: E_1 \rightarrow E_2$ i $g: E_2 \rightarrow E_3$ isometries afins, aleshores la seua composició*

$$g \circ f: E_1 \rightarrow E_3$$

és una isometria afí. En particular, la composició de moviments és moviment. A més, si $(E, V, +)$ és un espai afí euclidià sobre $\mathbb{R}$ i $f: E \rightarrow E$ és un moviment, aleshores la seua aplicació inversa

$$f^{-1}: E \rightarrow E$$

torna a ser un moviment.

Demostració. Per la [proposició sobre la composició d'afinitats](#), la composició d'afinitats torna a ser una afinitat. A més, si $\bar{f}: V_1 \rightarrow V_2$ és l'aplicació lineal subjacent a f i $\bar{g}: V_2 \rightarrow V_3$ és l'aplicació lineal subjacent a g , trobem que $g \circ f$ és afinitat amb aplicació lineal subjacent

$$\bar{g} \circ \bar{f}: V_1 \rightarrow V_3.$$

Com f i g són isometries afins trobem, per la Definició 11.10, que $\bar{f}$ i $\bar{g}$ són isometries. Pel [corol·lari sobre la composició d'isometries](#), tenim que la composició $\bar{g} \circ \bar{f}$ torna a ser isometria. Concloem, d'acord a la Definició 11.10, que $g \circ f$ és una isometria afí.

En particular, la composició de moviments torna a ser moviment.

Suposem ara que $f: E \rightarrow E$ és un moviment. D'acord a la Proposició 11.5, f és bijectiva. Aleshores, si $\bar{f}: V \rightarrow V$ és l'aplicació lineal subjacent a f , per la [caracterització de la bijectivitat de les afinitats](#), $\bar{f}$ també és bijectiva. Podem considerar l'aplicació inversa

$$f^{-1}: E \rightarrow E.$$

Recordem, per la [proposició sobre la inversa d'un isomorfisme afí](#), que f^{-1} és un isomorfisme afí amb aplicació lineal subjacent l'isomorfisme $\bar{f}^{-1}: V \rightarrow V$. Notem que $\bar{f}^{-1}$ és un isomorfisme d'acord a la [proposició sobre la inversa d'un isomorfisme](#) i una isometria pel [corol·lari sobre la composició d'isometries](#). Concloem, d'acord a la Definició 11.10, que f^{-1} és un moviment. $\square$

Definició 11.11 (Grup euclidià). Siga $(E, V, +)$ un espai afí euclidià sobre $\mathbb{R}$, aleshores

$$\text{GE}(E) = \{f: E \longrightarrow E \mid f \text{ és moviment}\}$$

admet una estructura de grup per a la composició habitual d'aplicacions. Aquest grup rep el nom de **grup euclidià** per a E .

Definició 11.12 (Espais afins euclidians isomorfs). Siguen $(E_1, V_1, +)$ i $(E_2, V_2, +)$ dos espais afins euclidians sobre $\mathbb{R}$. Direm que E_1 i E_2 són **isomorfs** si podem trobar una isometria afí bijectiva entre ells.

Proposició 11.7. *Siguen $(E_1, V_1, +)$ i $(E_2, V_2, +)$ dos espais afins euclidians sobre $\mathbb{R}$. Les següents afirmacions són equivalents*

- i. E_1 i E_2 són isomorfs;
- ii. $\dim_{\mathbb{R}}(V_1) = \dim_{\mathbb{R}}(V_2)$.

Demostració. Si E_1 i E_2 són isomorfs, per la Definició 11.12, existeix una isometria afí bijectiva $f: E_1 \longrightarrow E_2$. Siga $\bar{f}: V_1 \longrightarrow V_2$ l'aplicació lineal subjacent a f . Com f és bijectiva, per la [caracterització de la bijectivitat de les afinitats](#), tenim que $\bar{f}$ és bijectiva. Aleshores, d'acord a la [definició d'espais vectorials isomorfs](#), V_1 i V_2 són isomorfs. Així, pel [corol·lari de caracterització dels isomorfismes per la dimensió](#), $\dim_{\mathbb{R}}(V_1) = \dim_{\mathbb{R}}(V_2)$.

Suposem ara que $\dim_{\mathbb{R}}(V_1) = \dim_{\mathbb{R}}(V_2) = n$, per a algun natural $n \in \mathbb{N}$. Siguen $\mathcal{B}_1 = \{e_1, \dots, e_n\}$ i $\mathcal{B}_2 = \{d_1, \dots, d_n\}$ dues bases de V_1 i V_2 , respectivament. Pel [mètode de Gram-Schmidt](#), podem suposar que $\mathcal{B}_1$ i $\mathcal{B}_2$ són bases ortonormals. Considerem l'aplicació

$$\begin{aligned} h: \mathcal{B}_1 &\longrightarrow \mathcal{B}_2 \\ e_i &\longmapsto d_i \end{aligned}$$

Pel [teorema d'extensió](#), podem estendre h a una aplicació lineal $h^\sharp: V_1 \longrightarrow V_2$ que satisfà $h^\sharp \circ \text{in}_{\mathcal{B}_1} = h$. Notem que

$$h^\sharp[\mathcal{B}_1] = \mathcal{B}_2.$$

És a dir, $h^\sharp$ transforma una base ortonormal en una base ortonormal. Per la [caracterització de les isometries sobre una base](#), $h^\sharp$ és una isometria de V_1 a V_2 . Per la [proposició sobre imatges de bases](#), tenim que $h^\sharp$ és bijectiva.

Siga P un punt en E_1 i Q un punt en E_2 . Per la [proposició de determinació d'una afinitat](#), existeix una única afinitat $f: E_1 \longrightarrow E_2$ tal que $f(P) = Q$ i $\bar{f} = h^\sharp$. Com $h^\sharp$ és una isometria bijectiva tenim, per la Definició 11.10, que f és una isometria afí bijectiva. Finalment, per la Definició 11.12, E_1 i E_2 són isomorfs. $\square$

Corol·lari 11.2. *L'espai afí euclidià estàndard $\mathbb{R}^n$ és l'únic model d'espai afí euclidià de dimensió n tret d'isomorfisme.*

11.5 Moviments en $\mathbb{R}^2$ i $\mathbb{R}^3$

En aquesta secció farem una xicoteta introducció als diferents moviments que podem construir en els espais afins euclidians estàndard $\mathbb{R}^2$ i $\mathbb{R}^3$.

En la següent argumentació recordarem la caracterització dels punts fixos per al cas general $\mathbb{R}^n$. Considerem l'espai afí euclidià estàndard $\mathbb{R}^n$ i siga $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ una afinitat. Considerem un sistema de referència afí $\mathcal{R} = (O, \mathcal{B})$ per a $\mathbb{R}^n$ i anomenem

- A la matriu coordenada d' $\bar{f}$ en $\mathcal{B}$;
- B les coordenades d' $f(O)$ en $\mathcal{R}$ (coordenades d' $\overrightarrow{Of(O)}$ en $\mathcal{B}$).

Aleshores trobem que, si P és un punt en $\mathbb{R}^n$ i anomenem

- X les coordenades de P en $\mathcal{R}$ (coordenades d' $\overrightarrow{OP}$ en $\mathcal{B}$);
- Y les coordenades d' $f(P)$ en $\mathcal{R}$ (coordenades d' $\overrightarrow{Of(P)}$ en $\mathcal{B}$),

trobem l'expressió coordenada d' f en $\mathcal{R}$ donada per

$$Y = B + AX.$$

Recordem, per la [proposició sobre punts fixos](#), que f tindrà un punt fixe si, i només si, el sistema d'equacions

$$(A - I_n)X = -B$$

té solució o, el que és el mateix, pel [teorema de Rouché-Frobenius](#),

$$\text{rang}(A - I_n) = \text{rang}(A - I_n \mid -B).$$

Seguint aquesta caracterització descriurem els possibles moviments d' $\mathbb{R}^2$ d'acord a les opcions per als rangs de la matriu de coeficients $A - I_2$ i la matriu ampliada $[A - I_2 \mid -B]$. Notem que, en el cas d' $\mathbb{R}^2$, les possibilitats per al rang d' $A - I_2$ van des de 0 fins a 2 i que el rang de la matriu ampliada satisfà la desigualtat

$$\text{rang}(A - I_2) \leq \text{rang}(A - I_2 \mid -B) \leq \min(\text{rang}(A - I_2) + 1, 2).$$

Així, els possibles moviments d' $\mathbb{R}^2$ són els següents.

Moviment	$\text{rang}(A - I_2)$	$\text{rang}(A - I_2 \mid -B)$	Punts fixos
Identitat	0	0	Tots
Translació	0	1	Cap
Simetria axial	1	1	Recta
Simetria axial amb lliscament	1	2	Cap
Gir	2	2	Centre de gir

Descriurem ara els possibles moviments d' $\mathbb{R}^3$ d'acord a les opcions per als rangs de la matriu de coeficients $A - I_3$ i la matriu ampliada $[A - I_3 \mid -B]$. Notem que, en el cas d' $\mathbb{R}^3$, les possibilitats per al rang d' $A - I_3$ van des de 0 fins a 3 i que el rang de la matriu ampliada satisfà la desigualtat

$$\text{rang}(A - I_3) \leq \text{rang}(A - I_3 \mid -B) \leq \min(\text{rang}(A - I_3) + 1, 3).$$

Així, els possibles moviments d' $\mathbb{R}^3$ són els següents.

Moviment	$\text{rang}(A - I_3)$	$\text{rang}(A - I_3 \mid -B)$	Punts fixos
Identitat	0	0	Tots
Translació	0	1	Cap
Simetria planar	1	1	Pla
Simetria planar amb lliscament	1	2	Cap
Gir respecte d'un eix	2	2	Recta
Gir i translació (moviment helicoidal)	2	3	Cap
Gir i simetria	3	3	Centre de gir