# Sur la partition des nombres.

Note de M. M. Faà de Bruno.

---

Depuis les travaux d'Euler et de Paoli*) on savait que le nombre des manières de former le nombre $p$ même avec répétition en prenant $r$ élements parmi les nombres 1, 2, 3 ... $n$ est égal au coefficient de $x^p r^r$ dans le developpement de la fonction:

$$Z = \frac{1}{(1-r)(1-xr)\cdots(1-x^n r)}, \tag{1}$$

et que le nombre des solutions en nombres entiers de l'équation:

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n = p \tag{2}$$

où $a_1, a_2 \ldots a_n$ sont des nombres donnés, est égal au coefficient de $x^p$ dans le developpement de la fonction

$$\frac{1}{(1-x^{a_1})(1-x^{a_2})\cdots(1-x^{a_n})}. \tag{3}$$

La première question revient à la seconde en imposant aux nombres $x_1, x_2, \ldots$ la condition de satisfaire à l'équation

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = r; \tag{4}$$

et en supposant

$$a_1 = 1,\ a_2 = 2, \ldots a_n = n,$$

on demontre facilement**) que le coefficient cherché dans $Z$ est égal à:

$$((x^p))\,\psi(x),\ \psi(x) = \frac{(1-x^{n+1})(1-x^{n+2})\cdots(1-x^{n+r})}{(1-x)\cdots(1-x^r)}. \tag{5}$$

Quant à la seconde question Mr. Sylvester a trouvé (*Annales de Tortolini T.* 8, 1856) qu'en appelant $\varrho$ une racine primitive de $y^q-1=0$ et par $W_q$ le coefficient de $\frac{1}{t}$ dans le développement de:

$$\sum \frac{s^n e^{at}}{(1-\varrho_1^{a_1} e^{-a_1 t})(1-\varrho^{a_2} e^{-a_2 t})\cdots(1-\varrho^{a_r} e^{-a_r t})} \tag{6}$$

---

*) Voir des Notes de Brioschi dans les Annales de Tortolini tome 7 page 303, tome 8 page 5.

**) Voir notre ouvrage „*Theorie des formes binaires*" *Paris, chez Gauthiers Villars.*

le nombre des solutions sera égal à la somme

$$W_1 + W_2 + W_3 + \cdots \tag{7}$$

reglée d'après certaines conditions qu'on peut voir dans la note citée. M. Brioschi en reprenant la première question a trouvé que si l'on pose

$$\psi(x) = \frac{f(x)}{\varphi(x)}, \tag{8}$$

$$s_m = \sum \frac{1}{\beta^m} - \sum \frac{1}{\alpha^m} \tag{9}$$

en appelant $\alpha$, $\beta$ les racines de $f(x) = 0$, $\varphi(x) = 0$, le nombre $C_p$ de manières de former le nombre $p$ avec les nombres 0, 1, 2, 3 ... $n$ pris $r$ à $r$, est fourni par la formule:

$$1.2.3\ldots p.C_p = \begin{vmatrix} s_1 & -1 & 0 & 0 \cdots & 0 \\ s_2 & s_1 & -2 & 0 \cdots & 0 \\ s_3 & s_2 & s_1 & -3 \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ s_{p-1} & s_{p-2} & s_{p-3} & \cdots & -(p-1) \\ s_p & s_{p-1} & s_{p-2} & \cdots & s_1 \end{vmatrix}. \tag{10}$$

La valeur de $s_\lambda$ d'ailleurs est fournie par l'équation:

$$s_m = 1 + \mathrm{E}\left(\frac{m}{2}\right) + \mathrm{E}\left(\frac{m}{3}\right) + \cdots + \mathrm{E}\left(\frac{m}{r}\right) - \mathrm{E}\left(\frac{m}{n+1}\right)$$
$$- \mathrm{E}\left(\frac{m}{n+2}\right) - \cdots - \mathrm{E}\left(\frac{m}{n+r}\right)$$

où par $\left(\frac{m}{l}\right)$ on entend un nombre $= l$, $= 0$ selon que $m$ est ou non multiple de $l$.

Mais les longs calculs qu'exigent ces formules rendent presque inutiles ces efforts néanmoins si admirables des Géomètres qui les ont données. C'est pourquoi je me suis proposé de simplifier la solution de ces questions, et je crois y avoir réussi par les nouvelles formules qui suivent, et qui d'ailleurs auront l'avantage d'être utiles dans d'autres recherches. Je reprendrais d'abord les équations qui servent à trouver le determinant (10), à savoir,

$$\begin{aligned} C_1 &= s_1, \\ 2C_2 &= C_1 s_1 + s_2, \\ 3C_3 &= C_2 s_1 + C_1 s_2 + s_3, \\ &\cdots\cdots \\ pC_p &= C_{p-1}s_1 + C_{p-2}s_2 + C_{p-3}s_3 + \cdots + C_1 s_{p-1} + s_p. \end{aligned} \tag{11}$$

En les comparant avec les équations connues qui relient ensemble les coefficients avec les sommes $s$ des puissances semblables des racines:

$$
(12)\qquad
\begin{aligned}
&s_1 + a_1 = 0,\\
&s_2 + a_1 s_1 + 2a_2 = 0,\\
&s_3 + a_1 s_2 + a_2 s_1 + 3a_3 = 0,\\
&\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\\
&s_p + a_1 s_{p-1} + \cdots + p\,a_p = 0,
\end{aligned}
$$

on voit que le système (11) d'où l'on deduit la valeur de $C_p$ se reduit au système (12), en supposant que $a_i = C_i$ et que les nombres $+ l$ se changent en $- l$. Or si l'on exprimait le coefficient $a_p$ en fonction des $s$ à l'aide de la formule connue (1)

$$
(13)\qquad a_p = \sum \frac{(-1)^{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3}}{(\lambda_1)(\lambda_2)\cdots(\lambda_p)} \left(\frac{s_1}{1}\right)^{\lambda_1} \left(\frac{s_2}{2}\right)^{\lambda_2} \cdots \left(\frac{s_p}{p}\right)^{\lambda_p}
$$

sous la condition:

$$
(14)\qquad \lambda_1 + 2\lambda_2 + \cdots + p\lambda_p = p;
$$

il n'y aurait qu' à y changer $+ l$ en $- l$, ce qui fournirait:

$$
(15)\qquad C_p = \sum \frac{1}{(\lambda_1)(\lambda_2)\cdots(\lambda_p)} \left(\frac{s_1}{1}\right)^{\lambda_1} \left(\frac{s_2}{2}\right)^{\lambda_2} \cdots \left(\frac{s_p}{p}\right)^{\lambda_p}
$$

comme nous avons déjà annoncé dans notre *Théorie des formes binaires* page 157. La formule (15) est déjà un pas important de fait dans la question. Mais on peut pousser bien plus loin la simplification.

A cet effet observons que toute expression de la forme:

$$
(16)\qquad \mathsf{P} = \sum \frac{1}{(\lambda_1)(\lambda_2)\cdots(\lambda_p)} \alpha_1^{\lambda_1} \alpha_2^{\lambda_2} \cdots \alpha_p^{\lambda_p}
$$

sous la condition (14) peut se transformer ainsi:

$$
(17)\qquad \mathsf{P} = \frac{1}{\pi(p)} \,((x^p)) \Big[\delta + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \cdots + \alpha_p x^p\Big]^p,
$$

en supposant que $\pi(p)$ désigne la factorielle $1.2.3\ldots p$, que $((x^p))$ désigne le coefficient de $x^p$ dans ce qui suit, et qu' après le developpement de la puissance $p$ on change $\delta^i$ en $1.2.3\ldots i$. Si en effet on cherchait ce coefficient selon les voies ordinaires et en se rappelant la règle du developpement des puissances polynomiales, on trouverait pour ce coefficient l'expression suivante:

$$
(18)\qquad \sum \frac{\pi(p)}{(\lambda_0)(\lambda_1)(\lambda_2)\cdots(\lambda_p)} \,\delta^{\lambda_0} \alpha_1^{\lambda_1} \alpha_2^{\lambda_2} \cdots \alpha_p^{\lambda_p}
$$

sous la condition (14). Si donc on adopte de changer $\delta^{\lambda_0}$ en $1.2.3\ldots\lambda_0$, on verra qu'en divisant par $\Pi(p)$ cette expression on retombe sur la valeur énoncée de $\mathsf{P}$.

En appliquant ce procédé à la formule $C_p$ (15) on trouvera:

$$
(19)\qquad C_p = \frac{1}{\pi(p)} \,((x^p)) \left[\delta + \frac{s_1}{1} x + \frac{s_2}{2} x^2 + \frac{s_3}{3} x^3 + \cdots + \frac{s_p}{p} x^p\right]^p.
$$

Mais il y a plus. On sait qu'en appelant $\sigma_1, \sigma_2 \ldots \sigma_n$ les sommes des puissances semblables des racines de l'équation:

$$(20) \qquad x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_n = 0,$$

on a généralement en posant $y = \frac{1}{x}$ *)

$$(21) \quad \sigma_1 y + \frac{\sigma_2}{2} y^2 + \frac{\sigma_3}{3} y^3 + \cdots + \frac{\sigma_p}{p} y^p = -\log(1 + a_1 y + a_2 y^2 + \cdots).$$

Si l'on observe donc qu'en vertu de la relation (9) la somme indiquée dans le second membre (19):

$$\sum \frac{x^m}{\beta^m} - \sum \frac{x^m}{\alpha^m} = -\log \varphi(x) + \log f(x),$$

en remarquant que dans notre cas les $\sigma$ appartiendraient aux fonctions $f\left(\frac{1}{x}\right)$, $\varphi\left(\frac{1}{x}\right)$, on aura:

$$(22) \qquad \frac{\sigma_1}{1} x + \frac{\sigma_2}{2} x^2 + \cdots + \frac{\sigma_p}{p} x^p = \log \frac{f(x)}{\psi(x)},$$

ce qui d'ailleurs se voit directement, car puisque:

$$\frac{f(x)}{\psi(x)} = \frac{\Pi(x-\alpha)}{\Pi(x-\beta)} = \frac{a_n \Pi\left(1 - \frac{x}{\alpha}\right)}{a_{n'} \Pi\left(1 - \frac{x}{\beta}\right)},$$

en désignant par $n$, $n'$ les degrés de $f$ et de $\psi$, on aura:

$$\log \frac{f(x)}{\psi(x)} = \log \frac{a_n}{a_{n'}} + \sum \log\left(1 - \frac{x}{\alpha}\right) - \sum \log\left(1 - \frac{x}{\beta}\right)$$

$$= \log \frac{a_n}{a_{n'}} + \sum \frac{s_m(\beta) x^m}{m} - \sum \frac{s_m(\alpha) x^m}{m},$$

ou

$$(23) \qquad \log \frac{f(x)}{\psi(x)} = \log \frac{a_n}{a_{n'}} + \sum \frac{s_m}{m} x^m.$$

Ainsi si l'on suppose que les derniers termes soient $= 1$, comme cela a lieu dans notre cas, il viendra:

$$\log \frac{f(x)}{\psi(x)} = \sum \frac{s_m}{m} x^m.$$

Mais la formule (19) deviendra:

$$(24) \quad C_p = \frac{1}{\pi(p)} ((x^p)) \left[\delta + \log \frac{f(x)}{\psi(x)}\right]^p, \text{ ou encore}$$

$$(25) \quad C_p = \frac{1}{\pi(p)} ((x^p)) \left[\delta + \log \frac{(1-x^{n+1})(1-x^{n+2}) \cdots (1-x^{n+r})}{(1-x)(1-x^2) \cdots (1-x^r)}\right]^p.$$

---

*) Il est sousentendu que l'on arrêtera le developpement du second membre à $y^p$.

S'il s'agissait de trouver le nombre des invariants indépendants de degré $r$ appartenants à une même forme de degré $n$, en posant $V_p = C_p - C_{p-1}$ ce nombre serait:

$$(26)\qquad V_p = \frac{1}{\pi(p)}((x^p))\left[\delta + \log\frac{(1-x^{n+1})(1-x^{n+2})\cdots(1-x^{n+r})}{(1-x^2)(1-x^3)\cdots(1-x^r)}\right]^p.$$

En procédant de la même façon on trouverait que le nombre $W_p$ des solutions entières et positives de l'équation:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = p$$

est fourni par la formule très-simple:

$$(27)\qquad W_p = \frac{1}{\pi(p)}f((x^p))\left[\delta + \log\frac{1}{(1-x^{a_1})(1-x^{a_2})\cdots(1-x^{a_n})}\right]^p,$$

resultat extrèmement plus simple que celui (6) du à Sylvester, quoique extrèmement remarquable par la profondeur des vues qu'il revèle.

1⁰ Exemple, Formule (25). — Soit $n=3$, $r=3$, $p=6$, on aura:

$$C_6 = \frac{1}{\pi(6)}((x^6))\left[\delta + \log\frac{(1-x)^6(1-x^7)(1-x^8)}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)}\right]^6,$$

$$C_6 = \frac{1}{\pi(6)}((x^6))\left[\delta + x + \frac{3}{2}x^2 + \frac{4}{3}x^3 + \frac{3}{4}x^4 + \frac{1}{5}x^5\right]^6$$

$$= 15.24\left[\frac{2}{5} + \frac{9}{4} + \frac{16}{9}\right] + 20.6\left[\frac{27}{8} + \frac{9}{4} + 12\right] + 15.2\left[\frac{16}{3} + \frac{29}{2}\right]$$

$$+ 6.\left[\frac{15}{2} + 1\right] = 6. \qquad \text{C. Q. F. T.}$$

2⁰ Exemple, Formule (26). 1⁰; Soit $n=4$, $r=2$, $p=\frac{rn}{2}=4$

$$V_4 = \frac{1}{\pi(6)}((x^4))\left[\delta + \log\frac{1}{1-x^2}\right]^4 = \frac{1}{24}((x^6))\left[\delta + x^2 + \frac{x^4}{2}\right]^4$$

$$= \frac{1}{24}\left[12 + 12\right] = 1 \text{ C. Q. F. T.}$$

3⁰; Soit $n=4$, $r=3$, $p=\frac{rn}{2}=6$;

$$V_6 = \frac{1}{\pi(6)}((x^6))\left[\delta + \log\frac{(1-x^5)(1-x^6)}{(1-x^2)(1-x^3)}\right]^p$$

$$= \frac{1}{\pi(6)}((x^6))\left[\delta + x^2 + x^3 + \frac{1}{2}x^4 - x^5 - \frac{x^6}{6}\right]^6$$

$$= \frac{-120 + 720 + 120}{720} = 1. \qquad \text{C. Q. F. T.}$$

Nous savons en effet que les quartiques n'ont qu'un invariant de second degré, et un seul invariant de 3ᵉ degré.

4⁰ Exemple. Soit l'équation:

$$2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 8$$

traitée déjà par Brioschi d'après Sylvester après de longs calculs; on aura:

$$W_8 = \frac{1}{\pi(8)}((x^8))\left[\delta + \log\frac{1}{(1-x^2)(1-x^3)(1-x^5)}\right]$$
$$= \frac{1}{\pi(8)}((x^8))\left[\delta + x^2 + x^3 + \frac{x^6}{2} + x^5 + \frac{5x^6}{6} + \frac{x^8}{4}\right]^8$$
$$= \frac{1}{\pi(8)}\left\{8\pi(7)\frac{1}{4} + 28\pi(6)\left(\frac{10}{6} + \frac{1}{4} + 2\right) + 56\pi(5)\left(\frac{3}{2} + 3\right) + 70\pi(4)\right\} = 3.$$

En géñéral si l'on avait:

$$2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = p$$

on aurait:

$$W_p = \frac{1}{\pi(p)}((x^p))\left[\delta + \log\frac{1}{(1-x^2)(1-x^3)(1-x^5)}\right]^p.$$

Et pour calculer d'après la methode de Sylvester $l_1 W_p$ on aurait à sommer les valeurs que voici:

$$W_1 = \frac{1}{36}\left[\frac{(n+5)^2}{2} - \frac{19}{12}\right]; \quad W_2 = \frac{1}{2}\,\frac{(-1)^n}{4},$$
$$W_3 = -\frac{1}{9}\left[2\,\mathrm{E}\left(\frac{n+2}{3}\right) - \mathrm{E}\left(\frac{n+1}{3}\right) + \mathrm{E}\,\frac{n}{3}\right],$$
$$W_5 = -\frac{1}{25}\left[4\,\mathrm{E}\left(\frac{n+1}{5}\right) - 10\,\mathrm{E}\left(\frac{n}{5}\right) + 5\,\mathrm{E}\left(\frac{n-1}{5}\right) + \mathrm{E}\left(\frac{n-4}{5}\right)\right],$$

valeurs qui à elles seules exigeraient déjà beaucoup de calculs pour y arriver. Les formules (19) à (23) permettent de developper n'importe quelle fonction rationelle $\frac{\vartheta(x)}{\omega(x)}$, car on peut toujours faire en sorte que le terme $\log\frac{a_n}{a_{n'}}$ de la formule (23) soit $= 0$, en préparant convenablement les fonctions. Ainsi on aura ce theorème général. — *Le coefficient de $x^p$ dans le developpement de la fonction:*

$$\frac{\vartheta(x)}{\omega(x)} = \frac{\vartheta_1(x)\,\vartheta_2(x)\cdots}{\omega_1(x)\,\omega_2(x)\cdots}$$

*est exprimé par l'équation:*

$$\frac{1}{\pi(p)}((x^p))\left[\delta + \log\frac{\vartheta_1(x)\vartheta_2(x)\cdots}{\omega_1(x)\,\omega_2(x)\cdots}\right]^p.$$

Prenons l'exemple le plus simple $\vartheta(x) = 1$, $\omega(x) = a - x$, et cherchons le coefficient de $x^4$, que nous savons $= \frac{1}{a^5}$.

On $\frac{1}{a-x} = \frac{1}{a}\,\frac{1}{1-\frac{x}{a}}$; il suffira de developper $\frac{1}{1-\frac{x}{a}}$, et l'on trouvera:

$$\frac{1}{\pi(4)}((x))\left[\delta + \log\frac{1}{1-\frac{x}{a}}\right]^4 = \frac{1}{24}((x^4))\left[\delta + \frac{x}{a} + \frac{x^2}{2a^2} + \frac{x^3}{3a^3} + \frac{x^4}{4a^4}\right]^4$$
$$= \frac{1}{24}\left[\frac{4\delta^3}{4} + 6\delta^2\left(\frac{1}{4} + \frac{2}{3}\right) + 4\delta\left(\frac{3}{2}\right) + 1\right]\frac{1}{a^4} = \frac{6+3+8+6+1}{24}\,\frac{1}{a^4} = \frac{1}{a^4};$$

donc le coefficient sera $\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{a^4} = \frac{1}{a^5}$.

Comme on peut toujours supposer les fonctions irrationelles décomposées en un nombre infini de facteurs, il s'ensuit qu'on aura généralement pour n'importe quelle fonction (en supposant les facteurs de la forme $(1-\alpha x)$, ce qui est toujours possible),

$$((x^p))\,\varphi(x) = \frac{1}{\pi(p)}\,((x^p))\left[\delta + \log\varphi(x)\right]^p.$$

Soit comme exemple

$$\psi(x) = \frac{\sin x}{x} = \prod_{m=1}^{m=\infty}\left(1-\frac{x^2}{m^2\pi^2}\right)$$

on aura

$$((x^p))\frac{\sin x}{x} = \frac{1}{\pi(p)}\,((x^p))\left[\delta - \frac{\pi^2}{6}x^2 - \frac{\pi^2}{180}x^4 - \cdots\right]^p\,*)$$

Pour $p=4$, il viendra

$$((x^4))\frac{\sin x}{x} = \frac{1}{24}\,((x^4))\left[\delta - \left(\frac{\pi}{6}x^2 + \frac{\pi}{180}x^4\right)\right]^p$$

$$= -\frac{1}{180} + \frac{1}{72} = + \frac{1}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}$$

comme cela doit être.

*) On se rappellera que $\sum\frac{1}{m^2} = \frac{\pi^2}{6}$, $\sum\frac{1}{m^4} = \frac{\pi^2}{180}$, etc.

Turin, 11. Mai 1878.