

III. Allgemeine Gleichungen für oscillatorische Bewegungen; von J. Stefan in Wien.

Nach dem Vorgange Cauchy's wird die Construction der Undulationstheorie damit begonnen, daß man die zwischen den einzelnen Punkten eines materiellen Systems wirkenden Kräfte als Functionen der gegenseitigen Entfernungen dieser Punkte betrachtet und zugleich voraussetzt, daß diese Functionen im ganzen Systeme ihr Wesen nicht ändern. Man gelangt so zur Aufstellung der Gleichungen des Gleichgewichtes für das in Betracht gezogene System. Sind x, y, z die orthogonalen Coordinaten eines beliebigen Punktes von der Masse m , r der Abstand dieses Punktes von einem anderen mit der Masse m' behafteten, $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ die Projectionen dieses Abstandes auf die Coordinatenachsen und ist $f(r)$ diejenige Function, welche den Quotienten aus der gegenseitigen Action zweier Masseneinheiten in ihre Entfernung ausdrückt, so sind die Gleichgewichtsgleichungen:

$$\begin{aligned} S[mm'f(r)\Delta x] &= 0 \\ S[mm'f(r)\Delta y] &= 0 \\ S[mm'f(r)\Delta z] &= 0. \end{aligned}$$

Kommt nun das gedachte System in Bewegung, so ändern sich die Coordinaten von m um gewisse Größen ξ, ζ, η , ebenso die von m' um $\xi + \Delta\xi, \eta + \Delta\eta, \zeta + \Delta\zeta$. Der Abstand zwischen beiden Punkten geht über in $r + \varrho$ und letzter Zuwachs ist durch die Gleichung:

$$(r + \varrho)^2 = (\Delta x + \Delta\xi)^2 + (\Delta y + \Delta\eta)^2 + (\Delta z + \Delta\zeta)^2$$

bestimmt. Die Anwendung des D'Alembert'schen Principes giebt die Bewegungsgleichungen in folgender Form:

$$\begin{aligned} m \frac{d^2\xi}{dt^2} &= S[mm'f(r + \varrho) \cdot (\Delta x + \Delta\xi)] \\ m \frac{d^2\eta}{dt^2} &= S[mm'f(r + \varrho) \cdot (\Delta y + \Delta\eta)] \\ m \frac{d^2\zeta}{dt^2} &= S[mm'f(r + \varrho) \cdot (\Delta z + \Delta\zeta)]. \end{aligned}$$

Die in diesen Gleichungen vorkommenden Summen werden dadurch transformirt, daß man $f(r + \varrho)$ nach dem Taylor'schen Theoreme in eine Reihe

$$f(r + \varrho) = f(r) + \varrho \cdot f'(r) + \dots$$

entwickelt und dann ϱ durch $r, \Delta x, \Delta y, \Delta z, \Delta \xi, \Delta \eta, \Delta \zeta$ ausdrückt, dabei aber alle Größen, deren Kleinheit die zweite Ordnung überschreitet, vernachlässiget. Die so erhaltenen Gleichungen sind Differenzengleichungen nach ξ, η, ζ und werden gleichfalls unter Anwendung des Taylor'schen Lehrsatzes in Differentialgleichungen verwandelt, indem man:

$$\begin{aligned} \Delta \xi &= \frac{d\xi}{dx} \cdot \Delta x + \frac{d\xi}{dy} \cdot \Delta y + \frac{d\xi}{dz} \cdot \Delta z \\ &+ \frac{1}{2} \left(\frac{d^2\xi}{dx^2} \cdot \Delta x^2 + \frac{d^2\xi}{dy^2} \cdot \Delta y^2 + \frac{d^2\xi}{dz^2} \cdot \Delta z^2 \right) \\ &+ \frac{d^2\xi}{dy \, dz} \cdot \Delta y \cdot \Delta z + \frac{d^2\xi}{dx \, dz} \cdot \Delta x \cdot \Delta z + \frac{d^2\xi}{dx \, dy} \cdot \Delta x \cdot \Delta y \\ &+ \dots \end{aligned}$$

setzt und für $\Delta \eta$ und $\Delta \zeta$ ihre analogen Werthe einführt.

Durch die Annahme, daß in einem homogenen Systeme jedem Punkte ein bezüglich des angenommenen Coordinatensystems entgegengesetzt liegender, ein Gegenpunkt entspreche, wird zu jedem $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ ein $-\Delta x, -\Delta y, -\Delta z$ als correspondirend bedingt, wodurch alle Summen, deren Glieder $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ in ungeraden Potenzen als Factoren enthalten, aus der Rechnung fallen. Da eben solche Summen Factoren der ersten Differentialquotienten von ξ, η, ζ sind, so fallen dadurch auch diese aus der Rechnung und es bleiben Gleichungen übrig, die nur zwei Differentialquotienten enthalten, welche die noch übrig gebliebenen Summen als Factoren bei sich tragen. Diese Summen sind von den Verschiebungen ξ, η, ζ unabhängig, beziehen sich nur auf die innere Constitution des Systems können daher bezüglich der Bewegungen als constante Größen betrachtet werden. Setzt man

$$\frac{1}{2} S[m f(r) \cdot \Delta x^2] = G$$

$$\frac{1}{2} S[m' f(r) \cdot \Delta y^2] = H$$

$$\frac{1}{2} S[m' f(r) \cdot \Delta z^2] = J$$

$$\frac{1}{2} S\left[m' f(r) \cdot \frac{\Delta x^4}{r}\right] = L$$

$$\frac{1}{2} S\left[m' f(r) \cdot \frac{\Delta y^4}{r}\right] = M$$

$$\frac{1}{2} S\left[m' f(r) \cdot \frac{\Delta z^4}{r}\right] = N$$

$$\frac{1}{2} S\left[m' f(r) \cdot \frac{\Delta y^2 \cdot \Delta z^2}{r}\right] = P$$

$$\frac{1}{2} S\left[m' f(r) \cdot \frac{\Delta x^2 \cdot \Delta z^2}{r}\right] = Q$$

$$\frac{1}{2} S\left[m' f(r) \cdot \frac{\Delta x^2 \cdot \Delta y^2}{r}\right] = R$$

so nehmen die gefundenen Bewegungsgleichungen folgende Form an:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \xi}{dt^2} &= (G + L) \frac{d^2 \xi}{dx^2} + (H + R) \frac{d^2 \xi}{dy^2} + (J + Q) \frac{d^2 \xi}{dz^2} \\ &\quad + 2R \frac{d^2 \eta}{dx dy} + 2Q \frac{d^2 \zeta}{dx dz} \\ \frac{d^2 \eta}{dt^2} &= (G + R) \frac{d^2 \eta}{dx^2} + (H + M) \frac{d^2 \eta}{dy^2} + (J + P) \frac{d^2 \eta}{dz^2} \\ &\quad + 2P \frac{d^2 \zeta}{dy dz} + 2R \frac{d^2 \xi}{dx dy} \\ \frac{d^2 \zeta}{dt^2} &= (G + Q) \frac{d^2 \zeta}{dx^2} + (H + P) \frac{d^2 \zeta}{dy^2} + (J + N) \frac{d^2 \zeta}{dz^2} \\ &\quad + 2Q \frac{d^2 \xi}{dx dz} + 2P \frac{d^2 \eta}{dy dz} \end{aligned}$$

Einen von dem eben angegebenen verschiedenen Weg schlug Green ein ¹⁾, um die Gleichungen für kleine oscillatorische Bewegungen zu entwickeln, in seiner Theorie der Reflexion und Berechnung des Lichtes an der Trennungsebene nicht krystallisirter Medien.

Er geht von dem allgemeinen Principe der virtuellen Bewegungen aus, welches er in der Form

$$\sum dV \cdot \delta\varphi = 0$$

1) In den *Cambr. Transact. Bd. IX.*

zur Anwendung bringt. Darin bedeutet dV das Volumen eines Elementartheilchens, $\delta\varphi$ hingegen vertritt die Stelle des Ausdruckes

$$P \cdot \delta p$$

unter P eine der im Systeme auf die in der Volumseinheit befindliche Masse wirkenden Kräfte, unter δp die Projection einer sehr kleinen Verschiebung des Angriffspunktes dieser Kraft auf die Richtung der letzteren verstanden. Green leitete daraus nur die Gleichungen für ein einfach brechendes Medium ab. Hier soll die Entwicklung der Bewegungsgleichungen nach demselben Principe geliefert werden für den allgemeinsten Fall eines zweiaxigen Mittels und diese allgemeinen Gleichungen sollen dann auf eine strenge Weise specialisirt werden für den Fall eines einaxigen und endlich eines einfach brechenden Mediums.

Die Natur der Function φ ist näher nicht bestimmt, also sind auch die im System wirkenden Kräfte durch keine andere Bedingungen beschränkt, als durch diejenigen, welche für die Anwendung des Principes der virtuellen Bewegungen bestehen. Diesem zufolge sind daher die inneren Kräfte des Systems ebenfalls nur nach festen Mittelpunkten wirkende, als Functionen der gegenseitigen Distanz der wirkenden Punkte. Es ist also auch stillschweigend in den Calcül die Bedingung gelegt, daß der aus der Mechanik bekannte Ausdruck

$$\Sigma(X \cdot \delta x + Y \cdot \delta y + Z \cdot \delta z) = 0$$

sey, unter X, Y, Z die Componenten von P nach den Coordinatenachsen, und unter $\delta x, \delta y, \delta z$ die Projectionen von δp auf letztere gedacht.

Verbindet man das Princip der virtuellen Bewegungen mit dem D'Alembert'schen, führt statt der Summen Integrale ein und setzt;

$$dV = dx dy dz,$$

so erhält man, die Dichte des Mediums mit ρ , und mit u, x, w die nach den Coordinatenachsen geschätzten Verschiebungen eines Theilchens bezeichnend, die Gleichung:

$$\iiint \rho \, dx \, dy \, dz \left(\frac{d^2 u}{dt^2} \delta u + \frac{d^2 v}{dt^2} \delta v + \frac{d^2 w}{dt^2} \delta w \right) \\ = \iiint dx \, dy \, dz \cdot \delta \varphi.$$

Die Gröſſe φ muſs nun in ſo weit näher beſtimmt werden, daſs ſie activ in die Rechnung eingreifen könne. Dieſs wird durch folgenden Schlufs geleistet. Die reſultirende Bewegung in dem in Betracht gezogenen Systeme muſs nothwendig eine Function der Gröſſe φ ſeyn, da ja φ ein Ausdruck iſt, der die verſchiedenen zwischen den einzelnen Theilchen wirkenden Kräfte repräſentirt. Umgekehrt kann nun auch φ als eine Function der erfolgten Bewegung, als eine Function derjenigen Gröſſen betrachtet werden, welche Reſultate der Bewegung ſind. Das als rechtwinkliches Parallelepipeden gedachte Elementartheilchen, deſſen Seiten dx , dy , dz ſind, ändert in Folge der Bewegung ſeine Geſtalt, die Seiten deſſelben verwandeln ſich in:

$$dx(1 + s_1), \, dy(1 + s_2), \, dz(1 + s_3),$$

worin s_1 , s_2 , s_3 ſehr kleine Gröſſen bedeuten. Die neuen Seiten werden zugleich gewiſſe Neigungen gegen einander haben, ſie werden mit einander Winkel bilden, die jedoch von rechten nur ſehr wenig verſchieden ſeyn werden, und wenn man mit α , β , γ die Coſinuse dieſer Winkel bezeichnet, ſo ſind auch α , β , γ ſehr kleine Gröſſen. Dieſe Gröſſen s_1 , s_2 , s_3 , α , β , γ ſind Reſultate der Bewegung, alſo φ eine gewiſſe Function dieſer Gröſſen. Welche Form nun auch dieſe Function haben mag, ſo kann man ſie immerhin in eine Reihe verwandeln, die nach Potenzen von s_1 , s_2 , s_3 , α , β , γ fortſchreitet, und dieſer Reihe kann man um ſo mehr Convergenz vindiciren, da die angeführten Gröſſen ſehr kleine ſind. Man kann daher

$$\varphi = \varphi_0 + \varphi_1 + \varphi_2 + \dots$$

ſetzen, worin φ_0 die conſtanten Glieder, φ_1 die der erſten, φ_2 die der zweiten Ordnung umfaſst u. ſ. w. In Folge der Kleinheit der Gröſſen, nach denen die Reihe geordnet

ist, kann bei dem Gliede der zweiten Ordnung die Reihe abbrechen.

Der gemachten Bestimmung gemäß ist also

$$\begin{aligned}\varphi_1 &= a_1 s_1 + a_2 s_2 + a_3 s_3 + a_4 \alpha + a_5 \beta + a_6 \gamma \\ \varphi_2 &= b_1 s_1^2 + b_2 s_2^2 + b_3 s_3^2 + b_4 \alpha^2 + b_5 \beta^2 + b_6 \gamma^2 \\ &\quad + b_7 s_1 s_2 + b_8 s_1 s_3 + b_9 s_1 \alpha + b_{10} s_1 \beta + \dots \\ &\quad + \dots\end{aligned}$$

worin die a und die b constante Gröſsen der Materie bedeuten, die Zahl der a ist sechs, die der b einundzwanzig.

Da φ_0 nur constante Glieder enthält, so ist

$$\delta\varphi = \delta\varphi_1 + \delta\varphi_2$$

und $\delta\varphi_1$ enthält nur die Variationen von $s_1, s_2, s_3, \alpha, \beta, \gamma$; $\delta\varphi_2$ hingegen besteht aus Gliedern, deren jedes von der Form $p\delta q$ ist (in manchen ist zugleich $p=q$) und einen constanten Factor bei sich trägt, so wie auch die Variationen in $\delta\varphi_1$; für den Fall des Gleichgewichtes hat man

$$\iiint dx dy dz (\delta\varphi_1 + \delta\varphi_2) = 0.$$

Da für diesen Fall $s_1, s_2, s_3, \alpha, \beta, \gamma$ selbst der Null gleich sind, so verschwindet $\delta\varphi_2$ in Folge dessen, daß jedes seiner Glieder eine dieser Gröſsen als Factor trägt, also bleibt:

$$\iiint dx dy dz \cdot \delta\varphi_1 = 0,$$

folglich muß $\delta\varphi_1$ für sich verschwinden. Nun ist

$$\delta\varphi_1 = a_1 \delta s_1 + a_2 \delta s_2 + a_3 \delta s_3 + a_4 \delta \alpha + a_5 \delta \beta + a_6 \delta \gamma$$

und da die Variationen willkürliche Gröſsen bedeuten, so hat man:

$$a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = a_5 = a_6 = 0,$$

und die der ganzen Entwicklung zu Grunde gelegte Gleichung bleibt uns in der Form:

$$\begin{aligned}\iiint \rho dx dy dz \left(\frac{d^2 u}{dt^2} \delta u + \frac{d^2 v}{dt^2} \delta v + \frac{d^2 w}{dt^2} \delta w \right) \\ = \iiint dx dy dz \delta\varphi_2.\end{aligned}$$

Zur weiteren Determinirung von $\delta\varphi_1$ ist eine nähere Bestimmung der Größen $s_1, s_2, s_3, \alpha, \beta, \gamma$ nöthig. Diefs geschieht dadurch, dafs man die Aenderung des Volumens eines Elementartheilchens bei dem Uebergange aus seiner ursprünglichen Position in die neue beachtet. Betrachtet man eine von den Seiten des elementaren Parallelepipedchens, etwa dx , so sind die Coordinaten ihres Anfangspunktes, heifse er A :

$$x, y, z$$

die ihres Endpunktes, der B heifsen möge

$$x + dx, y, z.$$

In Folge der Bewegung ändert das Parallelepipedchen seine Lage und Gestalt; die der dx homologe Seite fällt zwischen zwei andere Punkte A' und B' . Die Coordinaten von A' sind:

$$x + u, y + v, z + w,$$

die von B' :

$$x + u + \frac{d(x+u)}{dx} dx, y + v + \frac{dv}{dx} dx, z + w + \frac{dw}{dx} dx$$

Aehnlich verwandeln sich die Coordinaten der Endpunkte der beiden anderen Seiten. Man hat somit:

$$(A'B')^2 = \left(\frac{d(x+u)}{dx} dx\right)^2 + \left(\frac{dv}{dx} dx\right)^2 + \left(\frac{dw}{dx} dx\right)^2$$

oder

$$A'B' = dx \sqrt{\left(1 + \frac{du}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dv}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dw}{dx}\right)^2}$$

Da die Verschiebungen als sehr kleine betrachtet werden, so kann man die zweiten Potenzen ihrer nach den Coordinaten genommenen Differentialquotienten vernachlässigen, und hat

$$A'B' = dx \sqrt{1 + 2\frac{du}{dx}} = dx \left(1 + \frac{du}{dx}\right).$$

Nun ist aber

$$A'B' = dx(1 + s_1),$$

also ist

$$s_1 = \frac{du}{dx}.$$

Auf dieselbe Weise findet man

$$s_2 = \frac{dv}{dy}; s_3 = \frac{dw}{dz}.$$

Um die Cosinuse der Winkel, die die neuen Seiten mit einander bilden, zu berechnen, bestimmt man zuerst die Cosinuse der Winkel, welche die einzelnen Seiten mit den Coordinatenaxen bilden, indem man ihre Projectionen auf die betreffende Axe durch ihre Längen dividirt. Bezeichnen wir abkürzend die neuen Seiten mit dx' , dy' , dz' , den Winkel den dx' mit der Axe der x bildet mit (X, dx') und auf analoge Weise auch die übrigen Winkel, so ist

$$\cos(X, dx') = \frac{\frac{d(x+u)}{dx} dx}{dx'},$$

$$\cos(Y, dx') = \frac{\frac{dv}{dx} dx}{dx'}, \quad \cos(Z, dx') = \frac{\frac{dw}{dx} dx}{dx'}$$

ähnlich ist

$$\cos(X, dy') = \frac{\frac{du}{dy} dy}{dy'},$$

$$\cos(Y, dy') = \frac{\frac{d(y+v)}{dy} dy}{dy'}, \quad \cos(Z, dy') = \frac{\frac{dw}{dy} dy}{dy'}.$$

Nach einem bekannten Satze der Geometrie ist:

$$\cos(dx', dy') = \cos(X, dx') \cos(X, dy') \\ + \cos(Y, dx') \cos(Y, dy') + \cos(Z, dx') \cos(Z, dy'),$$

Setzt man hierin obige Werthe, nimmt annäherungsweise $dx dy = dx' dy'$ und vernachlässigt die Producte je zweier Differentialquotienten, so erhält man:

$$\cos(dx', dy') = \gamma = \frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx}.$$

Auf dieselbe Weise erhält man:

$$\alpha = \frac{dv}{dz} + \frac{dw}{dy} \\ \beta = \frac{dw}{dx} + \frac{du}{dz}.$$

Betrachtet man das Medium, in dem die Bewegung vor sich geht, als ein symmetrisches bezüglich der drei Coordinatenebenen, so entspricht für diesen Fall jedem α , β , γ an irgend einem Punkte ein $-\alpha$, $-\beta$, $-\gamma$ seines Gegenpunktes; es fallen daher alle Glieder, die α , β , γ enthalten, mit Ausnahme derjenigen, in denen es in der zweiten Potenz vorkommt, bei der Summirung weg, so daß man φ_2 nur in der Form:

$$\varphi_2 = b_1 s_1^2 + b_2 s_2^2 + b_3 s_3^2 + b_4 \alpha^2 + b_5 \beta^2 + b_6 \gamma^2 \\ + b_7 s_2 s_3 + b_8 s_1 s_3 + b_9 s_1 s_2$$

zu betrachten hat. Der Gleichförmigkeit mit der Cauchy'schen Rechnung und größserer Bequemlichkeit wegen, setzen wir:

$$b_1 = -\frac{1}{2}G; \quad b_2 = -\frac{1}{2}H; \quad b_3 = -\frac{1}{2}J \\ b_4 = -\frac{1}{2}L; \quad b_5 = -\frac{1}{2}M; \quad b_6 = -\frac{1}{2}N \\ b_7 = -P; \quad b_8 = -Q; \quad b_9 = -R,$$

dann ist

$$-2\varphi_2 = Gs_1^2 + Hs_2^2 + Js_3^2 + L\alpha^2 + M\beta^2 + N\gamma^2 \\ + 2Ps_2s_3 + 2Qs_1s_3 + 2Rs_1s_2$$

und

$$-\delta\varphi_2 = Gs_1\delta s_1 + Hs_2\delta s_2 + Js_3\delta s_3 + L\alpha\delta\alpha + M\beta\delta\beta \\ + N\gamma\delta\gamma + P(s_2\delta s_3 + s_3\delta s_2) + Q(s_3\delta s_1 + s_1\delta s_3) \\ + R(s_2\delta s_1 + s_1\delta s_2).$$

Substituiert man die Werthe:

$$\delta s_1 = \frac{d}{dx}\delta u, \quad \delta s_2 = \frac{d}{dy}\delta v, \quad \delta s_3 = \frac{d}{dz}\delta w \\ \delta\alpha = \frac{d}{dz}\delta v + \frac{d}{dy}\delta w \\ \delta\beta = \frac{d}{dx}\delta w + \frac{d}{dz}\delta u \\ \delta\gamma = \frac{d}{dy}\delta u + \frac{d}{dx}\delta v$$

in $\delta\varphi_2$ und setzt das: transformirte $\delta\varphi_2$ in die Ungleichung, so folgt:

$$\begin{aligned}
& \iiint \rho \, dx \, dy \, dz \left(\frac{d^2 u}{dt^2} \delta u + \frac{d^2 v}{dt^2} \delta v + \frac{d^2 w}{dt^2} \delta w \right) \\
&= - \iiint dx \, dy \, dz \left[G s_1 \frac{d}{dx} \delta u + H s_2 \frac{d}{dy} \delta v + J s_3 \frac{d}{dz} \delta w \right. \\
&\quad + L \alpha \left(\frac{d}{dz} \delta v + \frac{d}{dy} \delta w \right) + M \beta \left(\frac{d}{dx} \delta w + \frac{d}{dz} \delta u \right) \\
&\quad + N \gamma \left(\frac{d}{dy} \delta u + \frac{d}{dx} \delta v \right) + P \left(s_2 \frac{d}{dz} \delta w + s_3 \frac{d}{dy} \delta v \right) \\
&\quad + Q \left(s_3 \frac{d}{dx} \delta u + s_1 \frac{d}{dz} \delta w \right) + R \left(s_1 \frac{d}{dy} \delta v \right. \\
&\quad \left. \left. + s_2 \frac{d}{dx} \delta u \right) \right].
\end{aligned}$$

Löst man letzteres Integral in eine Summe von Integralen auf, so befindet sich in jedem Integraalausdrucke ein Differential einer Variation. Um dieses aus der Rechnung zu entfernen, kann man die *Integratio per partes* zu Hülfe nehmen. Wird das Medium als unbegrenztes angenommen, so ist die Integration sowohl bezüglich x , als auch y und z zwischen den Gränzen $-\infty$ und $+\infty$ auszuführen. Nimmt man hingegen eine der Coordinatenebenen z. B. die der yz als Gränzebene des Mediums, so sind dann die Integrationsgränzen bezüglich x nur 0 und $+\infty$, wenn sich das Medium nach der Seite der positiven x ausdehnt, während sie für ein neben dem ersteren liegendes Medium, welches sich also nach der Seite der negativen x ausbreitet $-\infty$ und 0 wären. Bezüglich y und z bleiben die früheren Gränzen $-\infty$ und $+\infty$. Für ein von der Ebene der yz begrenztes und nach der Seite der positiven Abscissen sich ausdehnendes Medium hat man daher

$$\begin{aligned}
- \iiint G \, dx \, dy \, dz \cdot s_1 \frac{d}{dx} \delta u &= - \int \int G \, dy \, dz \cdot s_1 \delta u \Big|_0^{+\infty} \\
&\quad + \int \int \int G \, dx \, dy \, dz \cdot \frac{ds_1}{dx} \delta u \\
- \iiint H \, dx \, dy \, dz \cdot s_2 \frac{d}{dy} \delta v &= - \int \int H \, dx \, dz \cdot s_2 \delta v \Big|_{-\infty}^{+\infty} \\
&\quad + \int \int \int H \, dx \, dy \, dz \cdot \frac{ds_2}{dy} \delta v
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\iiint J dx dy dz \cdot s_3 \frac{d}{dz} \delta w = -\left[\iint J dx dy \cdot s_3 \delta w \right]_{-\infty}^{+\infty} \\
& \quad + \iiint J dx dy dz \frac{ds_3}{dz} \delta w \\
& -\iiint L dx dy dz \cdot \alpha \frac{d}{dz} \delta v = -\left[\iint L dx dy \alpha \cdot \delta v \right]_{-\infty}^{+\infty} \\
& \quad + \iiint L dx dy dz \frac{d\alpha}{dz} \delta v
\end{aligned}$$

u. s. w.

So wie diese vier werden auch die folgenden als Integrale leicht gebildet, wenn man zugleich immer auf die Integrationsgränzen der Doppelintegrale gehörige Rücksicht nimmt. Die zwischen $-\infty$ und $+\infty$ genommenen Integrale fallen weg, indem sie sich nur auf die eben bezeichneten Gränzen des Mediums beziehen, also auf die Bewegung im Innern des Mediums selbst keinen Einfluss üben. Die von 0 bis $+\infty$ genommenen Integrale beziehen sich auf die eine Gränze des Mediums, die Ebene der yz ; gelten also für $x=0$; die obere Gränze braucht ebenfalls nicht berücksichtigt zu werden.

Substituirt man diese Integrale in die gegebene Gleichung, so hat man dieselben der Kürze wegen wieder zusammenziehend

$$\begin{aligned}
& \iiint \rho dx dy dz \left(\frac{d^2 u}{dt^2} \delta u + \frac{d^2 v}{dt^2} \delta v + \frac{d^2 w}{dt^2} \delta w \right) \\
& = \iiint dx dy dz \left[G \frac{ds_1}{dx} \delta u + H \frac{ds_2}{dy} \delta v + J \frac{ds_3}{dz} \delta w \right. \\
& \quad + L \left(\frac{d\alpha}{dz} \delta v + \frac{d\alpha}{dy} \delta w \right) + M \left(\frac{d\beta}{dx} \delta w + \frac{d\beta}{dz} \delta u \right) \\
& \quad + N \left(\frac{d\gamma}{dy} \delta u + \frac{d\gamma}{dx} \delta v \right) + P \left(\frac{ds_2}{dz} \delta w + \frac{ds_3}{dy} \delta v \right) \\
& \quad + Q \left(\frac{ds_3}{dx} \delta u + \frac{ds_1}{dz} \delta w \right) + R \left(\frac{ds_1}{dy} \delta v + \frac{ds_2}{dx} \delta u \right) \Big] \\
& \quad - \iint dy dz \left[G s_1 \delta u + M \beta \delta w + N \gamma \delta v \right. \\
& \quad \left. + Q s_3 \delta u + R s_2 \delta u \right]
\end{aligned}$$

worin das letzte Doppelintegral nur für die Gränze $x=0$ gilt.

Betrachtet man noch ein zweites Medium, das neben dem ersteren liegt, dessen Dichte mit ϱ' und dessen Verschiebungen mit u' , v' , w' bezeichnet werden mögen, und für welches die Coëfficienten G , H , J , L , M , N , P , Q , R in die bestrichelten G' , H' , J' , L' , M' , N' , P' , Q' , R' übergehen, so erhält man für dasselbe auf die ganz gleiche Weise eine analoge Gleichung. Bei den vorhin vorgenommenen Integrationen sind die Gränzen bezüglich y und z ebenfalls $-\infty$ und $+\infty$, bezüglich x aber $-\infty$ und 0 . Da der durch Substitution der unteren Gränze zu erhaltende Ausdruck unberücksichtigt zu lassen ist, so haben die sich ergebenden Doppelintegrale nur für $x=0$ ihre Geltung. Da hier 0 die obere Gränze bildet, während sie für das frühere Medium die untere war, so werden die Zeichen für die den beiden Medien angehörenden Doppelintegrale die entgegengesetzten seyn. Für dieses zweite Medium hat man daher

$$\begin{aligned} & \iiint \varrho' dx dy dz \left(\frac{d^2 u'}{dt^2} \delta u' + \frac{d^2 v'}{dt^2} \delta v' + \frac{d^2 w'}{dt^2} \delta w' \right) \\ & - \iiint dx dy dz \left[G' \frac{ds_1'}{dx} \delta u' + H' \frac{ds_2'}{dy} \delta v' + J' \frac{ds_3'}{dz} \delta w' \right. \\ & \quad + L' \left(\frac{d\alpha'}{dz} \delta v' + \frac{d\alpha'}{dy} \delta w' \right) + M' \left(\frac{d\beta'}{dx} \delta w' + \frac{d\beta'}{dz} \delta u' \right) \\ & \quad + N' \left(\frac{d\gamma'}{dy} \delta u' + \frac{d\gamma'}{dx} \delta v' \right) + P' \left(\frac{ds_2'}{dz} \delta w' + \frac{ds_3'}{dy} \delta v' \right) \\ & \quad + Q' \left(\frac{ds_3'}{dx} \delta u' + \frac{ds_1'}{dz} \delta w' \right) + R' \left(\frac{ds_1'}{dy} \delta v' + \frac{ds_2'}{dx} \delta u' \right) \Big] \\ & + \iint dy dz \left[G' s_1' \delta u' + M' \beta' \delta w' + N' \gamma' \delta v' \right. \\ & \quad \left. + Q' s_3' \delta u' + R' s_2' \delta u' \right] \end{aligned}$$

worin das letzte Doppelintegral nur für die Gränze $x=0$ gilt.

Betrachtet man die Bewegung in den Medien zugleich, so hat man nur diese Gleichung zur vorigen zu addiren.

Ordnet man die Ausdrücke unter den Integralzeichen nach δu , δv , δw und $\delta u'$, $\delta v'$, $\delta w'$ setzt, um abzukürzen,

$$G \frac{ds_1}{dx} + M \frac{d\beta}{dz} + N \frac{d\gamma}{dy} + Q \frac{ds_3}{dx} + R \frac{ds_2}{dx} = \mathfrak{X}$$

$$H \frac{ds_2}{dy} + L \frac{d\alpha}{dz} + N \frac{d\gamma}{dx} + P \frac{ds_3}{dy} + R \frac{ds_1}{dx} = \mathfrak{Y}$$

$$J \frac{ds_3}{dz} + L \frac{d\alpha}{dy} + M \frac{d\beta}{dx} + P \frac{ds_2}{dz} + Q \frac{ds_1}{dz} = \mathfrak{Z}$$

und bezeichnet mit \mathfrak{X}' , \mathfrak{Y}' , \mathfrak{Z}' die analogen aus den bestrichelten Größen gebildeten Ausdrücke, so hat man nach der Addition obiger zwei Gleichungen:

$$\begin{aligned} & \iiint dx dy dz \left[\rho \left(\frac{d^2 u}{dt^2} \delta u + \frac{d^2 v}{dt^2} \delta v + \frac{d^2 w}{dt^2} \delta w \right) \right. \\ & \quad \left. + \rho' \left(\frac{d^2 u'}{dt^2} \delta u' + \frac{d^2 v'}{dt^2} \delta v' + \frac{d^2 w'}{dt^2} \delta w' \right) \right] \\ &= \iiint dx dy dz \left[(\mathfrak{X} \delta u + \mathfrak{Y} \delta v + \mathfrak{Z} \delta w) \right. \\ & \quad \left. + (\mathfrak{X}' \delta u' + \mathfrak{Y}' \delta v' + \mathfrak{Z}' \delta w') \right] \\ & - \iint dy dz \left[(G s_1 + R s_2 + Q s_3) \delta u + N \gamma \delta v + M \beta w \right. \\ & \quad \left. - (G' s_1' + R' s_2' + Q' s_3') \delta u' - N' \gamma' \delta v' - M' \beta' \delta w' \right] \end{aligned}$$

Die dreifachen Integrale beziehen sich auf die Bewegung in beiden Medien nach ihrer ganzen Ausdehnung; das Doppelintegral bezieht sich, wie schon gesagt wurde, nur auf die Vorgänge an der Trennungsebene yz , es gilt nur für $x=0$. Die dreifachen Integrale müssen daher für sich einander gleich seyn und da δu , δv , δw , $\delta u'$, $\delta v'$, $\delta w'$ beliebige Größen sind, so muß

$$\rho \frac{d^2 u}{dt^2} = \mathfrak{X}, \quad \rho \frac{d^2 v}{dt^2} = \mathfrak{Y}, \quad \rho \frac{d^2 w}{dt^2} = \mathfrak{Z}$$

$$\rho' \frac{d^2 u'}{dt^2} = \mathfrak{X}', \quad \rho' \frac{d^2 v'}{dt^2} = \mathfrak{Y}', \quad \rho' \frac{d^2 w'}{dt^2} = \mathfrak{Z}'$$

seyn, und für die Trennungsebene der beiden Medien gilt noch die Gleichung:

$$\begin{aligned} & (G s_1 + R s_2 + Q s_3) \delta u + N \gamma \delta v + M \beta \delta w \\ & = (G' s_1' + R' s_2' + Q' s_3') \delta u' + N' \gamma' \delta v' + M' \beta' \delta w'. \end{aligned}$$

Nimmt man die von Cauchy mit dem Namen des Princip der correspondirenden Bewegungen bezeichnete Hypothese an, daß die Verschiebungen an der Trennungsebene für beide Medien dieselben sind, daß also für $x=0$

$$u = u'; \quad v = v'; \quad w = w'$$

und

$$\delta u = \delta u'; \quad \delta v = \delta v'; \quad \delta w = \delta w'$$

ist. Diefß berücksichtigend hat man für die Trennungsebene der beiden Medien die Bedingungsgleichungen

$$Gs_1 + Rs_2 + Qs_3 = G's_1' + R's_2' + Q's_3'$$

$$N\gamma = N'\gamma'$$

$$M\beta = M'\beta'$$

Die nun abgeleiteten Gleichungen sind nun in der Form von Differentialgleichungen darzustellen, \mathfrak{X} , \mathfrak{Y} , \mathfrak{Z} und \mathfrak{X}' , \mathfrak{Y}' , \mathfrak{Z}' näher zu bestimmen. Zu diesem Zwecke bemerken wir, daß

$$\begin{aligned} \frac{ds_1}{dx} &= \frac{d^2 u}{dx^2}, \quad \frac{ds_1}{dy} = \frac{d^2 u}{dx dy}, \quad \frac{ds_1}{dz} = \frac{d^2 u}{dx dz} \\ \frac{ds_2}{dx} &= \frac{d^2 v}{dx dy}, \quad \frac{ds_2}{dy} = \frac{d^2 v}{dy^2}, \quad \frac{ds_2}{dz} = \frac{d^2 v}{dy dz} \\ \frac{ds_3}{dx} &= \frac{d^2 w}{dx dz}, \quad \frac{ds_3}{dy} = \frac{d^2 w}{dy dz}, \quad \frac{ds_3}{dz} = \frac{d^2 w}{dz^2} \end{aligned}$$

ferner

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha}{dy} &= \frac{d^2 v}{dy dz} + \frac{d^2 w}{dy^2} \\ \frac{d\alpha}{dz} &= \frac{d^2 v}{dz^2} + \frac{d^2 w}{dy dz} \\ \frac{d\beta}{dx} &= \frac{d^2 w}{dx^2} + \frac{d^2 u}{dx dz} \\ \frac{d\beta}{dz} &= \frac{d^2 w}{dx dz} + \frac{d^2 u}{dz^2} \\ \frac{d\gamma}{dx} &= \frac{d^2 u}{dx dy} + \frac{d^2 v}{dx^2} \\ \frac{d\gamma}{dy} &= \frac{d^2 u}{dy^2} + \frac{d^2 v}{dx dy} \end{aligned}$$

Substituirt man diese Gleichungen in \mathfrak{X} , \mathfrak{Y} , \mathfrak{Z} , so folgt:

$$\mathfrak{X} = G \frac{d^2 u}{dx^2} + M \left(\frac{d^2 w}{dx dy} + \frac{d^2 u}{dz^2} \right) + N \left(\frac{d^2 u}{dy^2} + \frac{d^2 v}{dx dy} \right) \\ + Q \frac{d^2 w}{dx dz} + R \frac{d^2 v}{dx dy}$$

$$\mathfrak{Y} = H \frac{d^2 v}{dy^2} + L \left(\frac{d^2 v}{dz^2} + \frac{d^2 w}{dy dz} \right) + N \left(\frac{d^2 u}{dx dy} + \frac{d^2 v}{dx^2} \right) \\ + P \frac{d^2 w}{dy dz} + R \frac{d^2 u}{dx dy}$$

$$\mathfrak{Z} = J \frac{d^2 w}{dz^2} + L \left(\frac{d^2 v}{dy dz} + \frac{d^2 w}{dy^2} \right) + M \left(\frac{d^2 w}{dx^2} + \frac{d^2 u}{dx dz} \right) \\ + P \frac{d^2 v}{dy dz} + Q \frac{d^2 u}{dx dz}$$

und auf ganz ähnliche Weise gestalten sich die Ausdrücke für \mathfrak{X}' , \mathfrak{Y}' , \mathfrak{Z}' , wenn man nur die u , v , w und die constanten Coëfficienten in diesen Relationen mit Strichen versieht.

Ordnet man diese Ausdrücke nach den Differentialquotienten, so nehmen die Bewegungsgleichungen folgende Gestalt an:

$$\varrho \frac{d^2 u}{dt^2} = G \frac{d^2 u}{dx^2} + N \frac{d^2 u}{dy^2} + M \frac{d^2 u}{dz^2} + (N + R) \frac{d^2 v}{dx dy} \\ + (M + Q) \frac{d^2 w}{dx dz}$$

$$\varrho \frac{d^2 v}{dt^2} = N \frac{d^2 v}{dx^2} + H \frac{d^2 v}{dy^2} + L \frac{d^2 v}{dz^2} + (N + R) \frac{d^2 u}{dx dy} \\ + (L + P) \frac{d^2 w}{dy dz}$$

$$\varrho \frac{d^2 w}{dt^2} = M \frac{d^2 w}{dx^2} + L \frac{d^2 w}{dy^2} + J \frac{d^2 w}{dz^2} + (M + Q) \frac{d^2 u}{dx dz} \\ + (L + P) \frac{d^2 v}{dy dz}$$

Ähnlich diesen sind die Gleichungen für das zweite Medium.

Man sieht, daß sich diese Gleichungen von den eingangs aufgestellten wesentlich nicht unterscheiden; dessenungeachtet giebt es keinerlei Relation der Coëfficienten dieser zu jenen in den obigen Gleichungen, mittelst welcher diese in jene verwandelt werden könnten.

Substituirt man in die für $x=0$ geltenden Gleichungen

die Werthe von s_1, s_2, s_3 und s'_1, s'_2, s'_3 , ferner von β, γ und β', γ' , so erhalten sie folgende Form:

$$G \frac{du}{dx} + R \frac{dv}{dy} + Q \frac{dw}{dz} = G' \frac{du'}{dx} + R' \frac{dv'}{dy} + Q' \frac{dw'}{dz}$$

$$N \left(\frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx} \right) = N' \left(\frac{du'}{dy} + \frac{dv'}{dx} \right)$$

$$M \left(\frac{dw}{dx} + \frac{du}{dz} \right) = M' \left(\frac{dw'}{dx} + \frac{du'}{dz} \right)$$

Diese Gleichungen in Verbindung mit den drei folgenden

$$u = u', \quad v = v', \quad w = w'$$

sind die an der Trennungsebene geltenden Bedingungsgleichungen und liefern die Gesetze für die Erscheinungen, welche beim Uebergange der Bewegung aus einem Medium in das andere an der Uebergangsstelle statt finden. Die eingangs aufgeführte Deduction der Bewegungsgleichungen liefert keinerlei Bedingungen für die Trennungsebene zweier Medien. Diese Gleichungen bilden daher einen Vorzug der hier exponirten Entwicklungsweise, indem man dadurch aller weiteren Annahmen, die man sonst machen muß, um solche Gleichungen zu erhalten, entoben ist.

Um die allgemeinen Bewegungsgleichungen als auch die Bedingungsgleichungen für die Trennungsebene der beiden Medien zu specialisiren für den Fall eines einaxigen und dann eines einfach brechenden Mediums, hat man den Begriff oder das Wesen eines solchen Mediums, das in der symmetrischen Lagerung der einzelnen Punkte des betrachteten Systems um eine oder um alle drei Coordinatenachsen besteht, in die Rechnung einzuführen; findet diese Symmetrie in der Lage der einzelnen Punkte rings um die Axe der z statt, so ist es ganz gleichgültig, welche Lage die beiden anderen Axen der x und y haben, wenn nur die Orthogonalität des Coordinatensystems nicht gestört wird; immer muß die Function φ_2 als der mathematische Ausdruck der Natur und Wesenheit des Systems denselben Werth haben. Dreht man daher das rechtwink-

lige Axenpaar der x und y um einen beliebigen Winkel um die Axe der z , berechnet sich das φ_2 für dieses neue Coordinatensystem, so muß das so erhaltene φ_2 , welches aber unter einer andern Form erscheint und mit ψ_2 bezeichnet werden möge, es muß also ψ_2 identisch seyn mit φ_2 . Dieß wird nur unter gewissen Bedingungen, die von Seite der constanten Coëfficienten, die in φ_2 auftreten, werden erfüllt seyn müssen, möglich seyn und diese Relationen zwischen den Coëfficienten sind es, die ein einaxiges Medium charakterisiren, und zwar ist in dem angenommenen Falle die Axe der z parallel zur Axe des Systems. Führt man diese Relationen in die allgemeinen Gleichungen ein, so verwandeln sich diese in die speciellen für ein axiges Medium.

Gewöhnlich pflegt man derlei Bestimmungen nur für unendlich kleine Drehungen zu machen, indem man bereits die zweite Potenz des Drehungswinkels vernachlässigt. Es gewinnt so den Anschein, als ob die verlangte Symmetrie und die daraus folgende Identität von φ_2 und ψ_2 nur für ungemein kleine Drehungen Bestand hätte. Es ist wohl richtig, das alles, was für willkürlich große und kleine Größen gilt, auch für unendlich kleine gelten muß, die Umkehrung des Schlusses hingegen ist nicht erlaubt. Deshalb soll hier die Rechnung für einen ganz beliebigen Winkel θ vorgenommen werden, zu dem diese Deduction der Bedingungen sie auf eine viel klarere Weise zur Kenntniß bringt, als die andere weniger strenge Methode, ohne dabei länger zu seyn, als diese.

Werden die Axen der x und y um einen Winkel θ gedreht, so verwandelt sich

$$x \text{ in } x \cos \theta + y \sin \theta$$

$$y \text{ in } y \cos \theta - x \sin \theta$$

$$u \text{ in } u \cos \theta + v \sin \theta$$

$$v \text{ in } v \cos \theta - u \sin \theta$$

z und w bleiben ungeändert.

In Folge dessen geht s_1 über in

$$\frac{d(u \cos \theta + v \sin \theta)}{dx} \cos \theta + \frac{d(u \cos \theta + v \sin \theta)}{dy} \sin \theta \\ = s_1 \cos^2 \theta + \gamma \sin \theta \cos \theta + s_2 \sin^2 \theta.$$

s_2 geht über in

$$\frac{d(v \cos \theta - u \sin \theta)}{dy} \cos \theta - \frac{d(v \cos \theta - u \sin \theta)}{dx} \sin \theta \\ = s_1 \sin^2 \theta - \gamma \sin \theta \cos \theta + s_2 \cos^2 \theta.$$

s_3 bleibt unverändert. Dann geht α über in

$$\frac{d(v \cos \theta - u \sin \theta)}{dx} + \frac{dw}{dy} \cos \theta - \frac{dw}{dx} \sin \theta = \alpha \cos \theta - \beta \sin \theta$$

β verwandelt sich in

$$\frac{dw}{dx} \cos \theta + \frac{dw}{dy} \sin \theta + \frac{d(u \cos \theta + v \sin \theta)}{dx} = \beta \cos \theta + \alpha \sin \theta$$

und γ in

$$\frac{d(u \cos \theta + v \sin \theta)}{dy} \cos \theta - \frac{d(u \cos \theta + v \sin \theta)}{dx} \sin \theta \\ + \frac{d(v \cos \theta - u \sin \theta)}{dx} \cos \theta + \frac{d(v \cos \theta - u \sin \theta)}{dy} \sin \theta \\ = \gamma \cos^2 \theta + 2(s_2 - s_1) \sin \theta \cos \theta - \gamma \sin^2 \theta.$$

In Folge dessen wird $-2\varphi_2$ übergehen in

$$-2\psi_2 = G(s_1 \cos^2 \theta + \gamma \sin \theta \cos \theta + s_2 \sin^2 \theta)^2 + H(s_1 \sin^2 \theta \\ - \gamma \sin \theta \cos \theta + s_2 \cos^2 \theta) + Js_3^2 + L(\alpha \cos \theta - \beta \sin \theta)^2 \\ + M(\beta \cos \theta + \alpha \sin \theta)^2 + N[\gamma \cos^2 \theta + 2(s_2 - s_1) \sin \theta \cos \theta \\ - \gamma \sin^2 \theta]^2 + 2P(s_1 \sin^2 \theta - \gamma \sin \theta \cos \theta + s_2 \cos^2 \theta)s_3 \\ + 2Q(s_1 \cos^2 \theta + \gamma \sin \theta \cos \theta + s_2 \sin^2 \theta)s_3 + 2R(s_1 \cos^2 \theta \\ + \gamma \sin \theta \cos \theta + s_2 \sin^2 \theta)(s_1 \sin^2 \theta - \gamma \sin \theta \cos \theta + s_2 \cos^2 \theta).$$

Führt man die hierin angezeigten Operationen durch und ordnet die Ausdrücke nach s_1 , s_2 , s_3 und α , β , γ , so erhält man

$$-2\psi_2 = s_1^2 [G \cos^4 \theta + H \sin^4 \theta + (4N + 2R) \sin^2 \theta \cos^2 \theta] \\ + s_2^2 [G \sin^4 \theta + H \cos^4 \theta + (4N + 2R) \sin^2 \theta \cos^2 \theta] \\ + s_3^2 \cdot J \\ + \alpha^2 [L \cos^2 \theta + M \sin^2 \theta] \\ + \beta^2 [L \sin^2 \theta + M \cos^2 \theta]$$

$$\begin{aligned}
& + \gamma^2 [N(\cos^4 \theta + \sin^4 \theta - 2 \sin^2 \theta \cos^2 \theta) \\
& \quad + (G + H - 2R) \sin^2 \theta \cos^2 \theta] \\
& + 2 s_2 s_3 [P \cos^2 \theta + Q \sin^2 \theta] \\
& + 2 s_1 s_3 [P \sin^2 \theta + Q \cos^2 \theta] \\
& + 2 s_1 s_2 [(G + H - 2N) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + R \cos^4 \theta + R \sin^4 \theta] \\
& + 2 s_1 \gamma [G - 2N - R] \sin \theta \cos^3 \theta \\
& - 2 s_1 \gamma [H - 2N - R] \sin^3 \theta \cos \theta \\
& + 2 s_2 \gamma [G - 2N - R] \sin^3 \theta \cos \theta \\
& - 2 s_2 \gamma [H - 2N - R] \sin \theta \cos^3 \theta \\
& + 2 s_3 \gamma [Q - P] \sin \theta \cos \theta \\
& + 2 \alpha \beta [M - L] \sin \theta \cos \theta
\end{aligned}$$

Soll nun ψ_2 äquivalent seyn mit φ_2 , so ist klar, daß dieß nur möglich ist, wenn erstens die letzten Glieder in dem Werthe von $-2\psi_2$ verschwinden, und wenn zweitens die Coefficienten der ersten neun Glieder sich der Reihe nach auf $G, H, J, L, M, N, P, Q, R$ reduciren. Beiden Forderungen muß genügt werden für jeden beliebigen Werth von θ , unabhängig von den Größen s_1, s_2, s_3 und α, β, γ . Die Erfüllung dieser Forderungen muß daher von Seite der constanten Coefficienten geleistet werden. Die erste der zwei Forderungen wird offenbar nur befriedigt, wenn

$$G = H = 2N + R$$

$$L = M$$

$$P = Q$$

ist. Substituirt man diese nothwendigen Relationen in die Coefficienten von s_1^2, s_2^2 u. s. w., so gehen diese Coefficienten der Reihe nach in $G, H, J, L, M, N, P, Q, R$ über. Die für die erste Forderung nothwendigen Bedingungen genügen daher ebenfalls zur Erfüllung der zweiten und es ist nicht nöthig, zu denselben neue noch hinzuzufügen.

Führt man diese für ein einaxiges Medium gefundenen Relationen in die allgemeinen Bewegungsgleichungen ein, so gehen letztere über in die folgenden:

$$\begin{aligned}
\rho \frac{d^2 u}{dt^2} &= G \frac{d^2 u}{dx^2} + N \frac{d^2 u}{dy^2} + L \frac{d^2 u}{dz^2} + (G - N) \frac{d^2 v}{dx dy} \\
&\quad + (L + P) \frac{d^2 w}{dx dz} \\
\rho \frac{d^2 v}{dt^2} &= N \frac{d^2 v}{dx^2} + G \frac{d^2 v}{dy^2} + L \frac{d^2 v}{dz^2} + (G - N) \frac{d^2 u}{dx dy} \\
&\quad + (L + P) \frac{d^2 w}{dy dz} \\
\rho \frac{d^2 w}{dt^2} &= L \frac{d^2 w}{dx^2} + L \frac{d^2 w}{dy^2} + J \frac{d^2 w}{dz^2} + (L + P) \frac{d^2 u}{dx dz} \\
&\quad + (L + P) \frac{d^2 v}{dy dz}.
\end{aligned}$$

Ganz ähnlich gestalten sich die Gleichungen für das zweite Medium.

Die Bedingungsgleichungen für die Trennungsebene der beiden Medien nehmen nach Substitution obiger Relationen folgende Form an:

$$\begin{aligned}
u &= u'; \quad v = v'; \quad w = w' \\
G \frac{du}{dx} + (G - 2N) \frac{dv}{dy} + P \frac{dw}{dz} &= G' \frac{du'}{dx} + (G' - 2N') \frac{dv'}{dy} + P' \frac{dw'}{dz} \\
N \left(\frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx} \right) &= N' \left(\frac{du'}{dy} + \frac{dv'}{dx} \right) \\
L \left(\frac{dw}{dx} + \frac{du}{dz} \right) &= L' \left(\frac{dw'}{dx} + \frac{du'}{dz} \right).
\end{aligned}$$

Diese Gleichungen würden die Gesetze der Reflexion und Brechung beim Uebergange der Bewegung aus einem einaxigen Medium in ein anderes liefern.

Um die für ein einfach brechendes Medium geltenden Gleichungen zu erhalten, hat man zu bemerken, daß für ein solches die symmetrische Lagerung der Theilchen auch um die Axen der x und y statt hat. Die Einführung dieser Eigenschaft des Mediums geschieht auf die nämliche Weise, wie die Einführung der Symmetrie um die Axe der z . Soll Symmetrie rings um die Axe der y stattfinden, so müssen zwischen den constanten Coëfficienten die Beziehungen

$$\begin{aligned}
G &= J = 2M + Q \\
L &= N \\
P &= R
\end{aligned}$$

bestehen, und für den Fall der Symmetrie rings um die Axe der x erhält man

$$H = J = 2L + P$$

$$M = N$$

$$Q = R$$

Wenn Symmetrie bereits um zwei der Axen z. B. um die der z und y vorausgesetzt ist, so liefert die Annahme der gleichzeitigen Symmetrie um die Axe der x keine neuen Bedingungen. Ein System von Punkten, welches um zwei der Coordinatenaxen symmetrisch gelagert ist, ist es daher zugleich auch um die dritte.

Für ein einfach brechendes Medium, für welches alle Relationen zugleich statt finden, bestehen also die Bedingungen:

$$G = H = J = 2N + R = 2M + Q = 2L + P$$

$$L = M = N$$

$$P = Q = R$$

und es bleiben nur mehr zwei der Constanten, etwa G und L , unbestimmt übrig. Führt man diese Bedingungen in die allgemeinen Bewegungsgleichungen ein, so gehen sie in die speciellen für ein einfach brechendes Medium geltenden über:

$$\varrho \frac{d^2 u}{dt^2} = G \frac{d^2 u}{dx^2} + L \frac{d^2 u}{dy^2} + L \frac{d^2 u}{dz^2} + (G - L) \frac{d^2 v}{dx dy} \\ + (G - L) \frac{d^2 w}{dx dz}$$

$$\varrho \frac{d^2 v}{dt^2} = L \frac{d^2 v}{dx^2} + G \frac{d^2 v}{dy^2} + L \frac{d^2 v}{dz^2} + (G - L) \frac{d^2 w}{dy dz} \\ + (G - L) \frac{d^2 u}{dx dy}$$

$$\varrho \frac{d^2 w}{dt^2} = L \frac{d^2 w}{dx^2} + L \frac{d^2 w}{dy^2} + G \frac{d^2 w}{dz^2} + (G - L) \frac{d^2 u}{dx dz} \\ + (G - L) \frac{d^2 v}{dy dz}$$

Diese Gleichungen können auch in folgender Form geschrieben werden:

$$\begin{aligned}
\rho \frac{d^2 u}{dt^2} &= G \frac{d}{dx} \left(\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} \right) \\
&\quad + L \left(\frac{d^2 u}{dy^2} + \frac{d^2 u}{dz^2} - \frac{d}{dx} \left[\frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} \right] \right) \\
\rho \frac{d^2 v}{dt^2} &= G \frac{d}{dy} \left(\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} \right) \\
&\quad + L \left[\frac{d^2 v}{dx^2} + \frac{d^2 v}{dz^2} - \frac{d}{dy} \left(\frac{du}{dx} + \frac{dw}{dz} \right) \right] \\
\rho \frac{d^2 w}{dt^2} &= G \frac{d}{dz} \left(\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} \right) \\
&\quad + L \left[\frac{d^2 w}{dx^2} + \frac{d^2 w}{dy^2} - \frac{d}{dz} \left(\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} \right) \right]
\end{aligned}$$

Dieselbe Gestalt haben die Gleichungen für das zweite Medium. Man kann alle drei Gleichungen in eine zusammenziehen, wenn man die erste nach x , die zweite nach y , die dritte nach z differenziert. Setzt man darin:

$$\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} = \theta,$$

wonach dann θ die Aenderung der Einheit des Volumens, welche durch die Verschiebung u , v , w hervorgerufen wurde, bedeutet, so ziehen sich die drei Gleichungen in die einzige:

$$\rho \frac{d^2 \theta}{dt^2} = G \left(\frac{d^2 \theta}{dx^2} + \frac{d^2 \theta}{dy^2} + \frac{d^2 \theta}{dz^2} \right)$$

Die Bedingungsgleichungen für die Trennungsebene zweier einfach brechenden Medien sind nun:

$$\begin{aligned}
G \left(\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} \right) - 2L \left(\frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} \right) \\
= G' \left(\frac{du'}{dx} + \frac{dv'}{dy} + \frac{dw'}{dz} \right) - 2L' \left(\frac{dv'}{dy} + \frac{dw'}{dz} \right) \\
L \left(\frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx} \right) = L' \left(\frac{du'}{dy} + \frac{dv'}{dx} \right) \\
L \left(\frac{du}{dz} + \frac{dw}{dx} \right) = L' \left(\frac{du'}{dz} + \frac{dw'}{dx} \right)
\end{aligned}$$

wozu noch die Annahme, dass an der Trennungsebene selbst

$$u = u', \quad v = v', \quad w = w'$$

ist.

Diese Gleichungen sind dieselben, welche Green in seiner Theorie angewendet hat, um die Gesetze für die Erscheinungen der Reflexion und Brechung an der zweien einfach brechenden Medien gemeinschaftlichen Fläche abzuleiten. Diese Gesetze zeigen, in ihrer von Haugton verbesserten Form, mit der Erfahrung dieselbe Uebereinstimmung, wie die Cauchy'schen Intensitätsformeln, obwohl ihr Bau ein verschiedener ist.

IV. *Versuch die Dichtigkeit chemischer Verbindungen theoretisch zu berechnen;* *von A. E. Nordenskiöld.*

I. Einleitung.

Bei jedem Molecül müssen wenigstens zwei Kräfte wirksam seyn, nämlich die anziehende und die abstossende. Die erste folgt denselben Gesetzen, die überhaupt für die Attraction der Körper gelten, und stimmt damit insofern überein, daß die Attraction eines Körpers nur die Summe der Attractionen seiner Molecüle ausmacht. Da nun diese Kraft in unendlich großem Abstände wirkt, so muß sie eine Grundeigenschaft der Molecüle ausmachen und nicht von fremden, sie umgebenden Stoffen abhängig seyn. Ferner muß sie, da die Attraction eines Stoffes durch veränderte Wärmeverhältnisse keine Veränderung erleidet, von freier oder gebundener Wärme u. s. w. ebenfalls unabhängig seyn. Dahingegen ist es klar, daß die Attraction eines jeden Molecüls direct proportional ist dem Moleculargewicht oder der Masse und, sowie die Attraction der Körper überhaupt, umgekehrt proportional dem quadrirten Abstände vom Schwerpunkt des Molecüls. Bezeichnet man daher die Molecularmasse (Moleculargewicht, Aequivalentgewicht)