Über die Verteilung der Nullstellen der Riemannschen Zetafunktion und einer Klasse verwandter Funktionen.

Von

Edmund Landau in Berlin.

Einleitung.

Die Riemannsche Funktion $\zeta(s)$ hat bekanntlich im Punkt $s=1$ einen Pol erster Ordnung, ist sonst überall regulär, hat die Punkte $s=-2, -4, -6, \cdots, -2n, \cdots$ (n positiv-ganz) zu Nullstellen erster Ordnung und außerdem nur noch unendlich viele nicht reelle Nullstellen $\alpha_n (n=1,2,\cdots)$, für welche

$$0<\Re(\alpha_n)<1$$

ist und

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|\alpha_n|^2}$$

konvergiert.*) Wenn also die Nullstellen $-2n$ und α_n promiscue mit $s_1, s_2, \cdots$ bezeichnet werden, ist nach der Weierstraßschen Produktdarstellung einer ganzen transzendenten Funktion

$$(s-1)\,\zeta(s) = e^{g(s)} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1-\frac{s}{s_n}\right) e^{\frac{s}{s_n}},$$

wo $g(s)$ eine ganze transzendente Funktion ist; bekanntlich ist hierin $g(s)$ eine lineare Funktion, also $\left(\text{wegen}^{**)}\ \zeta(0) = -\frac{1}{2}\right)$

(1) $$(s-1)\,\zeta(s) = \frac{1}{2}\, e^{As} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1-\frac{s}{s_n}\right) e^{\frac{s}{s_n}},$$

*) Hierbei sind etwaige mehrfache Nullstellen mehrfach aufgeführt.

**) Auf den Wert von $\zeta(0)$ kommt es übrigens nicht an, da der betreffende Faktor beim Differentiieren fortfallen wird und auf (4) keinen Einfluß mehr hat.

wo A eine Konstante bezeichnet, und bei konstantem B

(2) $$(s-1)\,\zeta(s)=\frac{1}{2}\,e^{Bs}\,\frac{1}{\Gamma\left(\frac{s}{2}+1\right)}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{s}{\alpha_n}\right)e^{\frac{s}{\alpha_n}},$$

kurz geschrieben:

(3) $$\zeta(s)=\frac{e^{Bs}}{2(s-1)}\,\frac{1}{\Gamma\left(\frac{s}{2}+1\right)}\prod_{\alpha}\left(1-\frac{s}{\alpha}\right)e^{\frac{s}{\alpha}},$$

sowie

(4) $$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}=B-\frac{1}{s-1}-\frac{1}{2}\,\frac{\Gamma'\left(\frac{s}{2}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{s}{2}+1\right)}+\sum_{\alpha}\left(\frac{1}{s-\alpha}+\frac{1}{\alpha}\right).$$

Endlich ist bekanntlich

$$\zeta(s)=\frac{\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}\,\pi^{-\frac{1}{2}+s}\,\zeta(1-s).$$

Der Leser, welcher aus der Theorie der Zetafunktion noch nichts kennt, findet möglichst einfache Beweise aller dieser Tatsachen in einer kürzlich erschienenen Arbeit*) von mir zusammengestellt. Man verdankt diese wichtigen Ergebnisse, welche Riemann nur zum kleineren Teil bewiesen hatte, Herrn Hadamard. Aber es war Herrn von Mangoldt vorbehalten, unter Benutzung der Hadamardschen Ergebnisse durch Hinzufügung einer längeren Kette von weiteren scharfsinnigen Schlüssen folgende von Riemann**) ausgesprochene Vermutung zu beweisen:

---

*) „Beiträge zur analytischen Zahlentheorie“ [Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, Bd. 26 (2. Semester 1908), S. 169—302], S. 181—186, 194—208. Die dort auf S. 208, Z. 8 vorkommende Gleichung

$$\zeta(s)=\frac{c}{s-1}\,\frac{1}{\Gamma\left(\frac{s}{2}+1\right)}\,\pi^{\frac{s}{2}}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{s}{\alpha_n}\right),$$

wo die α_n in einer bestimmten Reihenfolge geordnet sind und $c=-\zeta(0)=\frac{1}{2}$ ist, ist mit (2) gleichbedeutend. In (1), (2), (3), (4) ist die Reihenfolge der Wurzeln unerheblich.

**) „Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse“ [Monatsberichte der Königlichen Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, Jahrgang 1859, S. 671—680; Werke, 2. Aufl. (1892), S. 145—155], S. 674 bezw. S. 147—148. Riemanns Ausdruck „bis auf einen Bruchtheil von der Ordnung der Grösse $\frac{1}{T}$“ glaube ich mit $O(\log T)$, was ja $\frac{1}{T}$ der wahren Größenordnung ist, richtig interpretiert zu

Es sei $N(T)$ die Anzahl der Nullstellen von $\zeta(s)$, deren Ordinate zwischen 0 (exkl.) und der positiven Größe T (inkl.) liegt. Dann ist

$$(5) \qquad N(T) = \frac{1}{2\pi} T \log T - \frac{1+\log(2\pi)}{2\pi} T + O(\log T).$$

Herr Hadamard*) hatte ausdrücklich hervorgehoben, daß er nicht einmal die Existenz von

$$\lim_{T=\infty} \frac{N(T)}{T \log T}$$

beweisen konnte; Herr von Mangoldt bewies alsdann zunächst**), daß

$$N(T) = \frac{1}{2\pi} T \log T - \frac{1+\log(2\pi)}{2\pi} T + O(\log^2 T)$$

ist, und mehrere Jahre später***) die Riemannsche Vermutung (5) in vollem Umfange.

Es ist mir nun gelungen, den von Mangoldtschen Beweis der Riemannschen Vermutung (5) an mehreren Stellen zu vereinfachen, so daß er jetzt sehr kurz geworden ist; ich werde die neue Beweisanordnung im § 2 darstellen. Zur Bequemlichkeit des Lesers schicke ich im § 1 direkte Beweise einiger bekannten Ungleichungen über die Gammafunktion voraus; dadurch habe ich nicht nötig, auf die komplizierten und für den vorliegenden Zweck unnötig tiefgehenden Untersuchungen von Stieltjes†) Bezug zu nehmen, was Herr von Mangoldt tut. Im § 2 folgt dann der neue Beweis von (5).

Der Kern des Beweises von (5) liegt in der Feststellung der Tatsache, daß††) bei Fortsetzung längs der (von Wurzeln frei voraussetzbaren) Ordinate T

$$\mathfrak{I} \log \zeta(-1+Ti) = O(\log T),$$

d. h. daß bei gerader Bahn

---

haben; denn $O\left(\frac{1}{T}\right)$ (was manche Autoren aus jenem Passus herauslesen, um einen Irrtum bei Riemann zu konstatieren) kann Riemann nicht gemeint haben. Riemann wußte doch, daß die ganze Zahl $N(T)$ nicht mit einem Fehler $O\left(\frac{1}{T}\right)$ durch eine stetige Funktion dargestellt werden kann.

*) „Étude sur les propriétés des fonctions entières et en particulier d'une fonction considérée par Riemann" [Journal de Mathématiques pures et appliquées, Ser. 4, Bd. 9 (1893), S. 171—215], S. 214—215.

**) „Zu Riemanns Abhandlung „Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse"" [Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 114 (1895), S. 255—305], S. 257—273.

***) „Zur Verteilung der Nullstellen der Riemannschen Funktion $\xi(t)$" [Mathematische Annalen, Bd. 60 (1905), S. 1—19], S. 2—11.

†) „Sur le développement de $\log \Gamma(a)$" [Journal de Mathématiques pures et appliquées, Ser. 4, Bd. 5 (1889), S. 425—444].

††) In $s = u + vi$ (u, v reell) schreibe ich $u = \mathfrak{R}(s)$, $v = \mathfrak{I}(s)$.

$$\Im \int_{2+Ti}^{-1+Ti} \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\, ds = O(\log T) \tag{6}$$

ist. Bis auf diese Hauptschwierigkeit geht alles ganz glatt; aus dem kürzlich veröffentlichten Briefwechsel von Hermite und Stieltjes*) geht sogar hervor, daß Stieltjes schon die Relation

$$N(T) = \frac{1}{2\pi} T \log T - \frac{1+\log(2\pi)}{2\pi} T + O(\log T) + O(|\Im \log \zeta(-1+Ti)|) \tag{7}$$

beweisen konnte. Der fehlende Nachweis von (6) ist zuerst in der zweiten der genannten von Mangoldtschen Arbeiten enthalten und wird nun am Ende des § 2 einfacher geführt. Beide Male wird zunächst bewiesen, daß

$$N(T+1) - N(T) = O(\log T) \tag{8}$$

ist (woraus nur

$$N(T) = O(T \log T),$$

also bei weitem noch nicht (5) folgt), und alsdann wird unter nochmaliger Heranziehung der tiefsten bekannten Eigenschaften der Zetafunktion (6) bewiesen. Ich habe außer dem Wege des § 2 noch einen anderen von (8) zu (6) gefunden, der mir recht merkwürdig erscheint; er benutzt die tieferen Eigenschaften von $\zeta(s)$ nicht nochmals, sondern macht im Gegenteil nicht einmal davon Gebrauch, daß $\zeta(s)$ in der ganzen Ebene existiert. Mit anderen Worten, ich habe gefunden, daß eine viel allgemeinere Funktionenklasse die Eigenschaft (6) besitzt, deren Nachweis bei $\zeta(s)$ bisher nur auf sehr speziellem Wege gelang. Diesen allgemeinen funktionentheoretischen Satz werde ich im § 3 entwickeln.

Im § 4 werde ich zum ersten Mal den Nachweis führen: Für jede Dirichletsche Reihe

$$L(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s},$$

wo $\chi(n)$ einen vom Hauptcharakter verschiedenen Charakter der Gruppe der zu k teilerfremden Restklassen bezeichnet, ist die Anzahl $N(T)$ der im Konvergenzgebiet $\sigma > 0$ gelegenen Nullstellen mit Ordinate zwischen 0 (exkl.) und T (inkl.) von der Gestalt

$$N(T) = \alpha T \log T + \beta T + O(\log T),$$

*) „Correspondance d' Hermite et de Stieltjes", Bd. 2 (Paris, 1905), Appendice („Lettres de Stieltjes à M. Mittag-Leffler sur la fonction $\zeta(s)$ de Riemann", S. 445—457), vergl. insbesondere S. 452—456. Dort steht sogar rechts $O(1)$ statt des $O(\log T)$ in (7). Diese Genauigkeit ist aber unnötig, da man beim heutigen Stand der Wissenschaft über das letzte Glied in (7) doch nur aussagen kann, daß es $O(\log T)$ ist.

wo α und β Konstanten sind, von denen übrigens α den von k und der speziellen Wahl des Charakters unabhängigen Wert

$$\alpha = \frac{1}{2\pi}$$

hat. Dadurch wird sich ohne weiteres die Anzahl aller Nullstellen der durch die Dirichletsche Reihe definierten ganzen transzendenten Funktion $L(s)$, deren absolute Beträge $\leqq T$ sind, in der Gestalt

$$\mathsf{A}\, T \log T + \mathsf{B}\, T + O(\log T)$$

abschätzen lassen.

In § 5 werde ich einige (nach dem bekannten Vorbild von $\zeta(s)$ näherliegende) Folgerungen aus den bekannten Eigenschaften von $L(s)$ ziehen; ich werde nachweisen: es ist eine positive Konstante a vorhanden, so daß für $t \geqq 2$, $\sigma \geqq 1 - \frac{1}{a \log t}$

$$L(s) \neq 0$$

ist.

§ 1.

Hilfssätze über die Gammafunktion.

Hilfssatz (I): *Für positives ω ist*

$$\Re\left(\frac{\Gamma'(\omega i)}{\Gamma(\omega i)}\right) = \log \omega + O\left(\frac{1}{\omega}\right).$$

Beweis: Es ist

$$\frac{1}{\Gamma(s)} = e^{Cs}\, s \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{s}{n}\right) e^{-\frac{s}{n}},$$

(9)
$$\frac{\Gamma'(s)}{\Gamma(s)} = -C - \frac{1}{s} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{s+n}\right),$$

$$\Re\left(\frac{\Gamma'(\omega i)}{\Gamma(\omega i)}\right) = -C + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{n}{n^2+\omega^2}\right),$$

folglich (wobei ich unter einer nicht ganzzahligen Summationsgrenze u den Wert $[u]$ verstehe)

$$\begin{aligned}
\Re\left(\frac{\Gamma'(\omega i)}{\Gamma(\omega i)}\right) &= -C + \sum_{n=1}^{\omega^2} \left(\frac{1}{n} - \frac{n}{n^2+\omega^2}\right) + \omega^2 \sum_{n=\omega^2+1}^{\infty} \frac{1}{n(n^2+\omega^2)} \\
&= -C + \sum_{n=1}^{\omega^2} \frac{1}{n} - \sum_{n=1}^{\omega^2} \frac{n}{n^2+\omega^2} + O\left(\omega^2 \sum_{n=\omega^2}^{\infty} \frac{1}{n^3}\right) \\
&= -C + \log(\omega^2) + C + O\left(\frac{1}{\omega^2}\right) - \sum_{n=1}^{\omega^2} \frac{n}{n^2+\omega^2} + O\left(\frac{\omega^2}{\omega^4}\right)
\end{aligned}$$

(10)
$$= 2 \log \omega + O\left(\frac{1}{\omega^2}\right) - \sum_{n=1}^{\omega^2} \frac{n}{n^2+\omega^2}.$$

Die Funktion $\frac{u}{u^2+\omega^2}$ hat für $u=\omega$ ihren größten Wert $\frac{1}{2\omega}$; folglich ist

$$\sum_{n=1}^{\omega^2} \frac{n}{n^2+\omega^2} = \int_0^{\omega^2} \frac{u\,du}{u^2+\omega^2} + O\left(\frac{1}{\omega}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\log(\omega^4+\omega^2) - \frac{1}{2}\log(\omega^2) + O\left(\frac{1}{\omega}\right)$$

$$= 2\log\omega + O\left(\frac{1}{\omega^2}\right) - \log\omega + O\left(\frac{1}{\omega}\right)$$

$$= \log\omega + O\left(\frac{1}{\omega}\right),$$

also in Verbindung mit (10)

$$\Re\left(\frac{\Gamma'(\omega i)}{\Gamma(\omega i)}\right) = \log\omega + O\left(\frac{1}{\omega}\right),$$

was zu beweisen war.

Hilfssatz (II): *Wenn zwei reelle Zahlen b_0 und $b_1 > b_0$ gegeben sind, so ist für $b_0 \leqq b \leqq b_1$ gleichmäßig*

$$\frac{\Gamma'(b+\omega i)}{\Gamma(b+\omega i)} = O(\log\omega).$$

Beweis: Es sei β die größere der beiden Zahlen $|b_0|$, $|b_1|$. ω werde $> 2\beta$ angenommen. Aus (9) folgt für $s = b+\omega i$, $b_0 \leqq b \leqq b_1$

$$\left|\frac{\Gamma'(s)}{\Gamma(s)}\right| \leqq C + \frac{1}{|s|} + |s| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n|s+n|}$$

$$\leqq C + \frac{1}{\omega} + (\beta+\omega) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{\omega^2+(n+b)^2}}$$

$$= O(1) + O\left(\omega \sum_{n=1}^{\omega} \frac{1}{n\omega}\right) + O\left(\omega \sum_{n=\omega+1}^{\infty} \frac{1}{n(n-\beta)}\right),$$

also, da in der letzten Summe $n > 2\beta$, d. h. $n-\beta > \frac{n}{2}$ ist,

$$\frac{\Gamma'(s)}{\Gamma(s)} = O(1) + O\left(\omega \frac{\log\omega}{\omega}\right) + O\left(\omega \sum_{n=\omega+1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\right)$$

$$= O(\log\omega) + O\left(\omega \cdot \frac{1}{\omega}\right)$$

$$= O(\log\omega).$$

Hilfssatz (III): *Es ist für jedes feste reelle b*

$$\int_1^{\omega} \Re\left(\frac{\Gamma'(b+ti)}{\Gamma(b+ti)}\right) dt = \omega\log\omega - \omega + O(\log\omega).$$

Beweis: 1) Für $b = 0$ ist nach dem Hilfssatz (I)

$$\Re\left(\frac{\Gamma'(ti)}{\Gamma(ti)}\right) = \log t + O\left(\frac{1}{t}\right),$$

also

$$\int_1^\omega \Re\left(\frac{\Gamma'(b+ti)}{\Gamma(b+ti)}\right) dt = \int_1^\omega \Re\left(\frac{\Gamma'(ti)}{\Gamma(ti)}\right) dt$$

$$= \int_1^\omega \log t\, dt + O\int_1^\omega \frac{dt}{t}$$

$$= \omega \log \omega - \omega + O(\log \omega).$$

2) Für $b \gtrless 0$ werde der Cauchysche Satz auf das Rechteck mit den Ecken $b+i$, $b+\omega i$, ωi, i angewendet. Dies ergibt

$$\int_{b+i}^{b+\omega i} \frac{\Gamma'(s)}{\Gamma(s)} ds = \int_{b+i}^{i} \frac{\Gamma'(s)}{\Gamma(s)} ds + \int_{i}^{\omega i} \frac{\Gamma'(s)}{\Gamma(s)} ds + \int_{\omega i}^{b+\omega i} \frac{\Gamma'(s)}{\Gamma(s)} ds,$$

also, da nach dem Hilfssatz (II) im letzten Integral der Integrand gleichmäßig $= O(\log \omega)$ ist,

$$\int_{b+i}^{b+\omega i} \frac{\Gamma'(s)}{\Gamma(s)} ds = O(1) + \int_{i}^{\omega i} \frac{\Gamma'(s)}{\Gamma(s)} ds + O(\log \omega),$$

$$\Im \int_{b+i}^{b+\omega i} \frac{\Gamma'(s)}{\Gamma(s)} ds = \Im \int_{i}^{\omega i} \frac{\Gamma'(s)}{\Gamma(s)} ds + O(\log \omega),$$

$$\int_1^\omega \Re\left(\frac{\Gamma'(b+ti)}{\Gamma(b+ti)}\right) dt = \int_1^\omega \Re\left(\frac{\Gamma'(ti)}{\Gamma(ti)}\right) dt + O(\log \omega),$$

also nach dem Ergebnis des Falles 1) auch hier

$$= \omega \log \omega - \omega + O(\log \omega).$$

Aus dem Hilfssatz (III) folgt ohne weiteres

$$\int_1^\omega \Re\left(\frac{\Gamma'(b-ti)}{\Gamma(b-ti)}\right) dt = \omega \log \omega - \omega + O(\log \omega).$$

§ 2.

Neue Beweisanordnung für den Riemann- von Mangoldtschen Satz über die Verteilung der Nullstellen der Zetafunktion.

$N(T)$ bedeute die Anzahl der Nullstellen von $\zeta(s)$, deren Ordinaten zwischen 0 (exkl.) und T (inkl.) liegen.

Hilfssatz (IV): *Es ist*

$$N(T+1) - N(T) = O(\log T)$$

Beweis: Aus (4) folgt

$$\sum_\alpha \left(\frac{1}{s-\alpha} + \frac{1}{\alpha}\right) = \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} - B + \frac{1}{s-1} + \frac{1}{2}\frac{\Gamma'\left(\frac{s}{2}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{s}{2}+1\right)}$$

Für $s = 2 + Ti$ ist daher, weil dort

$$\begin{aligned}\left|\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right| &= \left|\sum_p \log p \left(\frac{1}{p^s} + \frac{1}{p^{2s}} + \cdots\right)\right| \\ &\leqq \sum_p \log p \left(\frac{1}{p^2} + \frac{1}{p^4} + \cdots\right) \\ &= O(1)\end{aligned}$$

ist, unter Anwendung des zweiten Hilfssatzes $\left(\frac{s}{2} + 1 = 2 + \frac{T}{2}i\right)$

$$\begin{aligned}\sum_\alpha \left(\frac{1}{2+Ti-\alpha} + \frac{1}{\alpha}\right) &= O(1) + O(1) + O\left(\frac{1}{T}\right) + \frac{1}{2}O\left(\log\frac{T}{2}\right) \\ &= O(\log T),\end{aligned}$$

also a fortiori

$$\sum_\alpha \Re\left(\frac{1}{2+Ti-\alpha} + \frac{1}{\alpha}\right) = O(\log T).$$

Wird

$$\alpha = \beta + \gamma i$$

gesetzt, wo also stets*) $0 \leqq \beta \leqq 1$ ist, so ist demnach

$$\sum_\alpha \left(\frac{2-\beta}{(2-\beta)^2 + (T-\gamma)^2} + \frac{\beta}{\beta^2+\gamma^2}\right) = O(\log T),$$

folglich, wegen

$$\frac{1}{4}\frac{1}{1+(T-\gamma)^2} \leqq \frac{1}{4+(T-\gamma)^2} < \frac{2-\beta}{(2-\beta)^2 + (T-\gamma)^2} \leqq \frac{2-\beta}{(2-\beta)^2+(T-\gamma)^2} + \frac{\beta}{\beta^2+\gamma^2},$$

(11) $$\sum_\alpha \frac{1}{1+(T-\gamma)^2} = O(\log T).$$

Wenn in $\sum_\alpha'$ nur diejenigen — etwa vorhandenen — Nullstellen α berücksichtigt werden, deren Ordinate γ zwischen T (exkl.) und $T+1$ (inkl.) liegt, so ist

$$\sum_\alpha \frac{1}{1+(T-\gamma)^2} > \sum_\alpha{}' \frac{1}{1+(T-\gamma)^2} \geqq \sum_\alpha{}' \frac{1}{2} = \frac{N(T+1)-N(T)}{2},$$

*) Die Kenntnis der Tatsache, daß $0 < \beta < 1$ ist, gebrauche ich nicht einmal.

also nach (11)

$$N(T+1) - N(T) = O(\log T),$$

womit der Hilfssatz (IV) bewiesen ist.

Derselbe liefert offenbar

$$\begin{aligned} N(T) &= \sum_{n=1}^{T} (N(n) - N(n-1)) + (N(T) - N[T]) \\ &= O \sum_{n=1}^{T} \log n + O(\log T) \\ &= O(T \log T). \end{aligned}$$

Hilfssatz (V): *α durchlaufe in $\sum\limits_{\alpha}''$ nur die Nullstellen, für welche $\gamma \leqq T-1$ oder $\gamma \geqq T+1$, d. h. $|T-\gamma| \geqq 1$ ist. Dann ist*

$$\sum_{\alpha}'' \frac{1}{(T-\gamma)^2} = O(\log T).$$

Beweis: Aus (11) ergibt sich wegen

$$\sum_{\alpha} \frac{1}{1+(T-\gamma)^2} \geqq \sum_{\alpha}'' \frac{1}{1+(T-\gamma)^2} \geqq \sum_{\alpha}'' \frac{1}{2(T-\gamma)^2}$$

unmittelbar die Behauptung.

Jetzt komme ich zur eigentlichen Sache. $\varepsilon > 0$ sei so gewählt, daß für $-1 \leqq \sigma \leqq 2$, $0 < t \leqq \varepsilon$ die Zetafunktion nicht verschwindet*). $T > \varepsilon$ sei so gewählt (was keine Beschränkung der Allgemeinheit ist**)), daß keine Nullstelle von $\zeta(s)$ die Ordinate T hat. Das Integral

---

*) Daß sogar der Wert $\varepsilon = 14$ dies leistet, braucht man nicht zu wissen. Die Existenz eines $\varepsilon > 0$ ist klar.

**) Überhaupt würde es genügen, (5) für eine abzählbare, ins Unendliche monoton wachsende Folge von Werten $T = T_1, T_2, T_3, \cdots$ zu beweisen, für welche

$$T_{n+1} = T_n + O(1)$$

ist, um schließen zu können, daß (5) überhaupt für positives T gilt. Denn für $T_n \leqq T \leqq T_{n+1}$ liegt $N(T)$ zwischen $N(T_n)$ und $N(T_{n+1})$, und aus

$$N(T_n) = \alpha T_n \log T_n + \beta T_n + O(\log T_n),$$
$$N(T_{n+1}) = \alpha T_{n+1} \log T_{n+1} + \beta T_{n+1} + O(\log T_{n+1})$$

folgt, wegen

$$\log T_{n+1} = \log T_n + O\left(\frac{1}{T_n}\right),$$

$$\begin{aligned} N(T_{n+1}) &= \alpha(T_n + O(1)) \left(\log T_n + O\left(\frac{1}{T_n}\right)\right) + \beta(T_n + O(1)) + O(\log T_n) \\ &= \alpha T_n \log T_n + \beta T_n + O(\log T_n), \end{aligned}$$

daß

$$\begin{aligned} N(T) &= \alpha T_n \log T_n + \beta T_n + O(\log T_n) \\ &= \alpha T \log T + \beta T + O(\log T) \end{aligned}$$

ist.

$$\int \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\,ds$$

werde im positiven Sinne über das Rechteck mit den Ecken $-1+\varepsilon i$, $2+\varepsilon i$, $2+Ti$, $-1+Ti$ erstreckt, auf dessen Rand keine Nullstelle von $\zeta(s)$ liegt. Dann hat das Integral den Wert $2\pi i N(T)$. Also ist

$$(12)\qquad 2\pi i N(T) = \int\limits_{-1+\varepsilon i}^{2+\varepsilon i} \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\,ds + \int\limits_{2+\varepsilon i}^{2+Ti} \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\,ds + \int\limits_{2+Ti}^{-1+Ti} \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\,ds + \int\limits_{-1+Ti}^{-1+\varepsilon i} \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\,ds.$$

Hierin ist, da das erste Integral von T unabhängig ist,

$$(13)\qquad \int\limits_{-1+\varepsilon i}^{2+\varepsilon i} \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\,ds = O(1);$$

ferner ist, wenn p alle Primzahlen, m alle positiven ganzen Zahlen durchläuft,

$$\left|\int\limits_{2+\varepsilon i}^{2+Ti} \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\,ds\right| = \left|\sum_{p,m} \frac{1}{mp^{m(2+Ti)}} - \sum_{p,m} \frac{1}{mp^{m(2+\varepsilon i)}}\right| \leqq 2\sum_{p,m} \frac{1}{mp^{2m}}$$

$$(14)\qquad = O(1).$$

Aus (12), (13) und (14) ergibt sich bei geraden Bahnen

$$(15)\qquad 2\pi N(T) = \Im \int\limits_{2+Ti}^{-1+Ti} \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\,ds + \Im \int\limits_{-1+Ti}^{-1} \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\,ds + O(1).$$

Zur Abschätzung des letzten Integrals in (15) werde die Funktionalgleichung

$$\zeta(s) = \frac{\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}\,\pi^{-\frac{1}{2}+s}\,\zeta(1-s)$$

benutzt. Aus ihr folgt

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = -\frac{1}{2}\,\frac{\Gamma'\left(\frac{1-s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)} - \frac{1}{2}\,\frac{\Gamma'\left(\frac{s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)} + \log\pi - \frac{\zeta'(1-s)}{\zeta(1-s)},$$

also

$$\Im \int\limits_{-1+Ti}^{-1} \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\,ds = -\int\limits_0^T \Re\left(\frac{\zeta'(-1+ti)}{\zeta(-1+ti)}\right) dt$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^T \Re\left(\frac{\Gamma'\left(1-\frac{t}{2}i\right)}{\Gamma\left(1-\frac{t}{2}i\right)}\right) dt + \frac{1}{2}\int\limits_0^T \Re\left(\frac{\Gamma'\left(-\frac{1}{2}+\frac{t}{2}i\right)}{\Gamma\left(-\frac{1}{2}+\frac{t}{2}i\right)}\right) dt - T\log\pi$$

$$- \Im \int\limits_{-1+Ti}^{-1} \frac{\zeta'(1-s)}{\zeta(1-s)}\,ds;$$

nach dem Hilfssatz (III) und mit Rücksicht auf

$$\int_{-1+Ti}^{-1}\frac{\zeta'(1-s)}{\zeta(1-s)}\,ds = \int_{2}^{2-Ti}\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\,ds = \sum_{p,m}\frac{1}{mp^{m(2-Ti)}} - \sum_{p,m}\frac{1}{mp^{2m}} = O(1)$$

erhält man also

$$\begin{aligned}\Im\int_{-1+Ti}^{-1}\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\,ds &= \frac{T}{2}\log\frac{T}{2} - \frac{T}{2} + O(\log T) + \frac{1}{2}\log\frac{T}{2} - \frac{T}{2}\\ &\quad + O(\log T) - T\log\pi + O(1)\\ &= T\log T - (1+\log(2\pi))\,T + O(\log T),\end{aligned}$$

folglich nach (15)

$$N(T) = \frac{T}{2\pi}\log T - \frac{1+\log(2\pi)}{2\pi}T + O(\log T) + \frac{1}{2\pi}\Im\int_{2+Ti}^{-1+Ti}\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\,ds. \tag{16}$$

Für den Nachweis von (5) fehlt also nur noch der Beweis, daß

$$\Im\int_{2+Ti}^{-1+Ti}\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\,ds = O(\log T) \tag{6}$$

ist; dies ist eben die Hauptschwierigkeit.

Ich gehe zu diesem Zwecke von (4) aus und zerlege die Summe in zwei Partialsummen $\sum\limits_{\alpha}'$ und $\sum\limits_{\alpha}''$, indem ich in $\sum\limits_{\alpha}'$ alle diejenigen (etwa vorhandenen) α aufnehme, für welche $|T-\gamma|<1$ ist, in $\sum\limits_{\alpha}''$ die übrigen, für welche also $|T-\gamma|\geqq 1$ ist*):

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = B - \frac{1}{s-1} - \frac{1}{2}\frac{\Gamma'\left(\frac{s}{2}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{s}{2}+1\right)} + \sum_{\alpha}{}'\left(\frac{1}{s-\alpha}+\frac{1}{\alpha}\right) + \sum_{\alpha}{}''\left(\frac{1}{s-\alpha}+\frac{1}{\alpha}\right),$$

$$\begin{aligned}\Im\int_{2+Ti}^{-1+Ti}\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\,ds &= O(1) + O(1) + O\left|\int_{2+Ti}^{-1+Ti}\frac{\Gamma'\left(\frac{s}{2}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{s}{2}+1\right)}\,ds\right|\\ &\quad + \sum_{\alpha}{}'\,\Im\int_{2+Ti}^{-1+Ti}\left(\frac{1}{s-\alpha}+\frac{1}{\alpha}\right)ds + \Im\int_{2+Ti}^{-1+Ti}\sum_{\alpha}{}''\left(\frac{1}{s-\alpha}+\frac{1}{\alpha}\right)ds.\end{aligned} \tag{17}$$

*) Letzteres sind gerade die beim Hilfssatz (V) in $\sum\limits_{\alpha}''$ aufgenommenen Werte. $\sum\limits_{\alpha}'$ ist nicht mit dem $\sum\limits_{\alpha}'$ des Hilfssatzes (IV) zu verwechseln; das gegenwärtige $\sum\limits_{\alpha}'$ hat aber nach dem Hilfssatz (IV) auch nur $O(\log T)$ Glieder.

Auf der rechten Seite von (17) ist das dritte Glied nach dem Hilfssatz (II) gleich $O(\log T)$. Das vierte Glied ist $= O(\log T)$, da $\sum'$ höchstens $N(T+1)-N(T-1)$, also nach dem Hilfssatz (IV) nur $\cdot\, O(\log T)$ Summanden hat und jeder Summand gleichmäßig $= O(1)$ ist (da die Amplitude von $s-\alpha$ sich um weniger als π verändert). Alles ist also bewiesen, wenn ich zeigen kann, daß das fünfte Glied $= O(\log T)$ ist, also a fortiori, wenn dargetan werden kann, daß auf dem geraden Wege von $2+Ti$ bis $-1+Ti$ gleichmäßig

$$\sum_\alpha{}''\left(\frac{1}{s-\alpha}+\frac{1}{\alpha}\right)=O(\log T) \tag{18}$$

ist.

Nun ist*) auf diesem Wege

$$\begin{aligned}\sum_\alpha\left(\frac{1}{s+3-\alpha}+\frac{1}{\alpha}\right)&=\frac{\zeta'(s+3)}{\zeta(s+3)}-B+\frac{1}{s+2}+\frac{1}{2}\,\frac{\Gamma'\left(\frac{s}{2}+\frac{5}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{s}{2}+\frac{5}{2}\right)}\\&=O(1)+O(1)+O\left(\frac{1}{T}\right)+O(\log T)\\&=O(\log T),\end{aligned}$$

also, da

$$\sum_\alpha{}'\left(\frac{1}{s+3-\alpha}+\frac{1}{\alpha}\right)$$

nur $O(\log T)$ Glieder hat, deren jedes gleichmäßig $O(1)$ ist,

$$\sum_\alpha{}''\left(\frac{1}{s+3-\alpha}+\frac{1}{\alpha}\right)=O(\log T). \tag{19}$$

Nach dem Hilfssatz (V) ist

$$\begin{aligned}\left|\sum_\alpha{}''\left(\frac{1}{s-\alpha}+\frac{1}{\alpha}\right)-\sum_\alpha{}''\left(\frac{1}{s+3-\alpha}+\frac{1}{\alpha}\right)\right|&=\left|\sum_\alpha{}''\frac{3}{(s-\alpha)(s+3-\alpha)}\right|\\&\leqq 3\sum_\alpha{}''\frac{1}{|\Im(s-\alpha)|\,|\Im(s+3-\alpha)|}\\&=3\sum_\alpha{}''\frac{1}{(T-\gamma)^2}\\&=O(\log T),\end{aligned}$$

und dies liefert in Verbindung mit (19) die Relation (18) und damit nach dem Obigen (6), also nach (16) den Riemann-von Mangoldtschen Satz (5).

---

*) Das jetzt Folgende ist der Hauptkunstgriff. Vorbildlich war mir dabei der verwandte Schluß Herrn von Mangoldts (vergl. die auf S. 421, Anm. ***) zitierte Abhandlung, S. 5 ff.). Herr von Mangoldt gelangte erst in dieser Arbeit durch ihn zum Ziele $O(\log T)$. Ohne ihn käme man mit der Methode des Textes nur bis $O(\log^2 T)$; dies war gerade das in Herrn von Mangoldts erster Arbeit (vergl. S. 421, Anm.**)) erreichte Ziel.

Aus Symmetriegründen folgt aus (5) für die Anzahl der Nullstellen von $\zeta(s)$ mit Ordinaten zwischen 0 (exkl.) und $-T$ (inkl.) auch der Wert $N(T)$; also ist offenbar*) die Anzahl der nicht reellen Nullstellen, deren absoluter Betrag $\leqq T$ ist,

$$= \frac{1}{\pi} T \log T - \frac{1+\log(2\pi)}{\pi} T + O(\log T).$$

Folglich ist, wenn die reellen Nullstellen $-2, -4, -6, \cdots$ mitberücksichtigt werden, die Anzahl aller Nullstellen von $\zeta(s)$, welche dem Kreise $|s| \leqq T$ angehören,

$$= \frac{1}{\pi} T \log T + \left(\frac{1}{2} - \frac{1+\log(2\pi)}{\pi}\right) T + O(\log T).$$

§ 3.

Ein allgemeiner Satz über die Änderung der Amplitude einer analytischen Funktion.

Ich beabsichtige nun zu zeigen, daß man von (8) zu (6) gelangen kann, ohne nochmals die tieferen Eigenschaften von $\zeta(s)$ anzuwenden. Ich benutze nur noch die Tatsache, daß für $\sigma \geqq -\frac{3}{2}$ gleichmäßig

$$\zeta(s) = O(t^a) \quad (a \text{ konstant})$$

ist; diese Tatsache folgt unmittelbar aus der durch partielle Integration leicht beweisbaren**), für $\sigma > -2$ gültigen Gleichung

$$\zeta(s) - 1 = \frac{1}{s-1} - \frac{s}{2}(\zeta(s+1)-1) - \frac{s(s+1)}{6}(\zeta(s+2)-1)$$
$$- \frac{s(s+1)(s+2)}{6} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 \frac{u^3\,du}{(n+u)^{s+3}}$$

zunächst für $\sigma \geqq \frac{1}{2}$, alsdann für $\sigma \geqq -\frac{1}{2}$ und schließlich für $\sigma \geqq -\frac{3}{2}$.

*) Denn der Kreis $|s| = T$ schneidet für $T > 1$ die Geraden $\sigma = 0$ und $\sigma = 1$ in den Punkten $\pm Ti$ und $1 \pm \sqrt{T^2-1}\cdot i$, so daß die gesuchte Anzahl zwischen $2N(T)$ und

$$2N(\sqrt{T^2-1}) = 2N\left(T + O\left(\frac{1}{T}\right)\right) = 2N(T + O(1)) = 2N(T) + O(\log T)$$

(vergl. S. 427, Anm. **)) liegt.

**) Es ist nur für $\sigma > 1$

$$\frac{1}{s-1}\left(\frac{1}{(n+1)^{s-1}} - \frac{1}{n^{s-1}}\right) + \frac{1}{(n+1)^s}$$
$$= -\frac{s}{2}\,\frac{1}{(n+1)^{s+1}} - \frac{s(s+1)}{6}\,\frac{1}{(n+1)^{s+2}} - \frac{s(s+1)(s+2)}{6}\int_0^1 \frac{u^3\,du}{(n+u)^{s+3}}$$

über $n = 1, 2, 3, \cdots$ zu summieren.

Ich behaupte also allgemein folgenden*)

Satz: *Die analytische Funktion* $f(s)$ *sei für* $\sigma \geqq -\frac{3}{2}$, $t \geqq 1$ *regulär. Dort sei gleichmäßig*

$$f(s) = O(t^a) \quad (a \text{ konstant}). \tag{20}$$

Alle jenem Gebiet angehörigen Wurzeln mögen ihre Abszisse zwischen 0 (*inkl.*) *und* 1 (*inkl.*) *haben.* $N(T)$ *sei die Anzahl jener Wurzeln, deren Ordinate zwischen* 1 (*inkl.*) *und* T (*inkl.*) *liegt. Es sei*

$$N(T+1) - N(T) = O(\log T). \tag{21}$$

Es sei ferner, wenn $\log f(s)$ *irgend einen bestimmten für* $\sigma > 1$, $t \geqq 1$ *eindeutigen Zweig bezeichnet,*

$$\log f(2+Ti) = O(\log T),$$

*d. h. es sei***) *bei einem Wege in jenem Gebiete*

$$\int_{2+i}^{2+Ti} \frac{f'(s)}{f(s)}\, ds = O(\log T).$$

Alsdann ist bei gerader, wurzelfrei vorausgesetzter Bahn

$$\Im \int_{2+Ti}^{-1+Ti} \frac{f'(s)}{f(s)}\, ds = O(\log T),$$

mit anderen Worten, wenn längs der Ordinate T *fortgesetzt wird,*

$$\Im \log f(-1+Ti) = O(\log T),$$

d. h.

$$\textit{Amplitude von } f(-1+Ti) = O(\log T).$$

Beweis: Tschebyschef***) hat den merkwürdigen Satz bewiesen: „Die ganze rationale Funktion vom Grade $n \geqq 1$

---

*) Die Zahlenwerte $-\frac{3}{2}$, 1 usw. sind natürlich nicht wesentlich; der Deutlichkeit wegen habe ich an den betreffenden Stellen bestimmte Konstanten eingesetzt.

**) Übrigens ist bei $f(s) = \zeta(s)$ sogar

$$\log \zeta(2+Ti) = O(1),$$

was aber nichts weiter vereinfacht.

***) Vergl. z. B. seine große Abhandlung „Sur les questions de minima qui se rattachent à la représentation approximative des fonctions“ [Mémoires de l'Académie Impériale des Sciences de Saint-Pétersbourg, Sciences mathématiques et physiques, Ser. 6, Bd. 7 (1859), S. 199—291; Œuvres, Bd. 1 (1899), S. 273—378], S. 225 bezw. S. 302. Das Merkwürdige dieses Satzes liegt darin, daß die in der Behauptung auftretenden Konstanten von n unabhängig sind. Auf die Analogie dieser Klasse Tschebyschefscher (elementar beweisbarer) algebraischer Sätze mit gewissen (bisher nicht elementar bewiesenen) algebraischen Sätzen von mir habe ich schon bei anderer Gelegenheit hingewiesen, auf S. 191 (Fußnote) der Arbeit: „Sur quelques généralisations du théorème de M. Picard“ [Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure, Ser. 3, Bd. 24 (1907), S. 179—201]. Ein sehr kurzer, von Herrn Markoff

$$G(x) = x^n + p_1 x^{n-1} + \cdots + p_n$$

mit reellen Koeffizienten kann für $-2 \leqq x \leqq 2$ nicht beständig zwischen -2 (exkl.) und 2 (exkl.) gelegen sein." Für jedes x_0 hat also die Ungleichung

$$|G(x)| \geqq 2$$

mindestens eine Lösung im Intervall $x_0 \leqq x \leqq x_0 + 4$.

Es seien nun $s_1, \cdots, s_n$ die etwa vorhandenen Nullstellen von $f(s)$ (mehrfache natürlich mehrfach gezählt), deren Ordinaten zwischen $T-8$ (inkl.) und $T+8$ (inkl.) liegen; $t_1, \cdots, t_n$ seien diese Ordinaten. Es ist nach der Voraussetzung (21)

$$n = n(T) \leqq N(T+8) - N(T-9) = O(\log T).$$

Nach dem Tschebyschefschen Satz kann ich für jedes $T \geqq 9$ ein $T_1 = T_1(T)$ zwischen $T-8$ (inkl.) und $T-4$ (inkl.) so wählen, daß

$$|(T_1 - t_1) \cdots (T_1 - t_n)| \geqq 2 > 1$$

ist. A fortiori ist dann für $s = \sigma + T_1 i$, $-\frac{3}{2} \leqq \sigma \leqq \frac{11}{2}$

$$(22) \qquad |(s - s_1) \cdots (s - s_n)| \geqq 1.$$

Ebenso wähle ich ein T_2 zwischen $T+4$ (inkl.) und $T+8$ (inkl.) so, daß

$$|(T_2 - t_1) \cdots (T_2 - t_n)| \geqq 2 > 1$$

ist, also für $s = \sigma + T_2 i$, $-\frac{3}{2} \leqq \sigma \leqq \frac{11}{2}$ auch die Relation (22) gilt.

Ich betrachte nun die Funktion*)

$$g(s) = \frac{f(s)}{(s - s_1) \cdots (s - s_n)}.$$

Sie ist für $\sigma > 1$, $t \geqq 1$ und in dem Rechteck mit den Ecken $-\frac{3}{2} + (T \pm 8)i$, $1 + (T \pm 8)i$ einschließlich seines Randes regulär und von 0 verschieden. Es bezeichne

$$h(s) = \log g(s) = \log f(s) - \sum_{\nu=1}^{n} \log (s - s_\nu)$$

einen in dem ganzen genannten Gebiet regulären Zweig. Auf den Geraden $\sigma = -\frac{3}{2}$ und $\sigma = \frac{11}{2}$ ist, da nach Voraussetzung die Abszisse jeder Nullstelle $s_1, \cdots, s_n$ dem Intervall $(0 \cdots 1)$ angehört,

$$(23) \qquad |s - s_1| > 1, \cdots, |s - s_n| > 1;$$

es ist daher nach (22) und (23) auf dem Rande des Rechtecks mit den Ecken $-\frac{3}{2} + T_1 i$, $-\frac{3}{2} + T_2 i$, $\frac{11}{2} + T_1 i$, $\frac{11}{2} + T_2 i$

---

herrührender Beweis des Tschebyschefschen Satzes steht bei Herrn Seliwanoff, „Lehrbuch der Differenzenrechnung", Leipzig (1904), S. 76—77.

*) Im Falle $n = 0$ ist natürlich $g(s) = f(s)$ zu setzen, und T_1, T_2 können irgend welche Zahlen in den betreffenden Intervallen bedeuten.

$$|g(s)| \leqq |f(s)|,$$

also wegen (20)

$$g(s) = O(T^a),$$

folglich für alle $T \geqq 9$ bei passender Wahl einer Konstanten*) A_1

$$\Re h(s) = \log |g(s)| < A_1 \log T.$$

Da der reelle Teil einer regulären analytischen Funktion in einem Punkte des Inneren eines Rechtecks nicht größer sein kann als in allen Randpunkten, ist auf dem Kreise $|s - 2 - Ti| = \frac{7}{2}$, welcher ganz jenem Rechteck angehört, auch

(24) $$\Re h(s) < A_1 \log T.$$

Im Mittelpunkt dieses Kreises ist nach Voraussetzung

$$\log f(2 + Ti) = O(\log T),$$

also

$$|h(2+Ti)| = |\log f(2+Ti) - \sum_{\nu=1}^{n} \log(2+Ti-s_\nu)|$$

$$\leqq O(\log T) + \sum_{\nu=1}^{n} |\log(2+Ti-s_\nu)|$$

(25) $$= O(\log T),$$

da $n = O(\log T)$ und für jedes ν wegen

$$\sqrt{8^2+2^2} \geqq |2+Ti-s_\nu| \geqq 1$$

gleichmäßig

$$\log(2+Ti-s_\nu) = O(1)$$

ist.

Nun besteht der Satz von Herrn Carathéodory**): „Wenn eine analytische Funktion $h(s)$ für $|s - s_0| \leqq r$ regulär ist und M das Maximum von $\Re h(s)$ für $|s - s_0| = r$ bezeichnet, so ist für $|s - s_0| \leqq \varrho$, wo $0 < \varrho < r$ ist,

$$|h(s)| \leqq |\Im h(s_0)| + |\Re h(s_0)| \frac{r+\varrho}{r-\varrho} + M \frac{2\varrho}{r-\varrho},$$

also a fortiori

$$|h(s)| \leqq |h(s_0)| \frac{2r}{r-\varrho} + M \frac{2\varrho}{r-\varrho}."$$

Im vorliegenden Fall sei $s_0 = 2 + Ti$, $r = \frac{7}{2}$, $\varrho = 3$. Nach (24) ist

$$M < A_1 \log T,$$

---

*) Ebenso bezeichnen $A_2, A_3, \cdots$ im folgenden Konstanten in bezug auf die Variablen der betreffenden Relationen.

**) Vergl. S. 191—192 meiner auf S. 420, Anm. *) zitierten Abhandlung.

nach (25)

$$|h(s_0)| < A_2 \log T.$$

Also ergibt sich für $|s-2-Ti| \leqq 3$

$$\begin{aligned}|h(s)| &< A_2 \log T \cdot 14 + A_1 \log T \cdot 12 \\ &= A_3 \log T,\end{aligned}$$

insbesondere also für $s = -1 + Ti$

$$|\Im h(-1+Ti)| < A_3 \log T,$$

$$|\Im \log f(-1+Ti) - \Im \log(-1+Ti-s_1) - \cdots - \Im \log(-1+Ti-s_n)| < A_3 \log T,$$

folglich, wegen

$$|\Im \log(-1+Ti-s_1) + \cdots + \Im \log(-1+Ti-s_n)| < A_4 \log T,$$

$$|\Im \log f(-1+Ti)| < A_5 \log T,$$

$$\Im \int_{2+Ti}^{-1+Ti} \frac{f'(s)}{f(s)}\, ds = O(\log T),$$

was zu beweisen war.

§ 4.

Über die Verteilung der komplexen Nullstellen der Dirichletschen Reihen $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s}$.

Es sei k eine positive ganze Zahl, $\chi(n)$ ein vom Hauptcharakter verschiedener*) Charakter der Gruppe der zu k teilerfremden Restklassen und $L(s)$ die für $\sigma > 0$ durch die Dirichletsche Reihe

$$L(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s}$$

definierte analytische Funktion. Bekanntlich**) ist $L(s)$ eine ganze trans-

*) Der Fall des Hauptcharakters, bei welchem die Dirichletsche Reihe nur für $\sigma > 1$ konvergiert, liefert nichts Neues, da

$$L(s) = \prod_{p/k} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right) \zeta(s)$$

ist.

**) Vergl. die zusammenhängende Darstellung mit Beweisen bei Herrn de la Vallée Poussin, „Recherches analytiques sur la théorie des nombres premiers“ [Annales de la Société Scientifique de Bruxelles, Bd. 20, Teil 2 (1896), S. 183—256 und S. 281—397], S. 281—348.

zendente Funktion vom Geschlecht 1 mit folgenden Eigenschaften: $L(s)$ ist entweder von der Gestalt*)

$$L(s) = e^{bs} \prod_{\nu=1}^{\lambda} \left(1 - \frac{\varepsilon_\nu}{p_\nu^s}\right) \frac{1}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)} \xi(s)$$

oder von der Gestalt

$$L(s) = e^{b(s+1)} \prod_{\nu=1}^{\lambda} \left(1 - \frac{\varepsilon_\nu}{p_\nu^s}\right) \frac{1}{\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)} \xi(s),$$

wo b konstant $\left(\text{und zwar } = \frac{1}{2}\log\frac{\pi}{k'}, \text{ wo } k' \text{ in } k \text{ aufgeht}\right)$ ist, $p_1, \cdots, p_\lambda$ gewisse Primzahlen, $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_\lambda$ gewisse Einheitswurzeln sind und $\xi(s)$ eine ganze transzendente Funktion vom Geschlecht 1 ist, deren Nullstellen sämtlich dem Streifen $0 \leqq \sigma \leqq 1$ (sogar $0 < \sigma < 1$) angehören und welche die Funktionalgleichung erfüllt:

$$\xi(s) = \varepsilon\, \bar{\xi}(1-s), \tag{26}$$

wo $\bar{\xi}(s)$ die aus dem konjugierten Charakter $\bar{\chi}(n)$, d. h. aus der konjugierten Funktion $\bar{L}(s)$, entspringende Funktion ist und ε eine Konstante vom absoluten Betrage 1 ist. Zusammenfassend ergibt sich also, wenn c einen der Werte 0 oder 1 bezeichnet, in jedem Fall

$$L(s) = \prod_{\nu=1}^{\lambda} \left(1 - \frac{\varepsilon_\nu}{p_\nu^s}\right) \frac{1}{\Gamma\left(\frac{s+c}{2}\right)} A e^{Bs} \prod_{\alpha} \left(1 - \frac{s}{\alpha}\right) e^{\frac{s}{\alpha}},$$

wo α die Wurzeln von $\xi(s)$ in beliebiger Reihenfolge durchläuft und A, B zwei Konstanten sind. $L(s)$ hat also zu Wurzeln außer den α die Zahlen: $0, -2, -4, -6, \cdots$ (für $c = 0$) bezw. $-1, -3, -5, \cdots$ (für $c = 1$) und, $\varepsilon_\nu = e^{\varphi_\nu i}$ gesetzt, die Zahlen $\frac{\varphi_\nu + 2u\pi}{\log p_\nu} i$ ($\nu = 1, 2, \cdots, \lambda$; $u = 0, \pm 1, \cdots$).

Es ist

$$\frac{L'(s)}{L(s)} = B - \frac{1}{2} \frac{\Gamma'\left(\frac{s+c}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{s+c}{2}\right)} + \sum_{\nu=1}^{\lambda} \frac{\varepsilon_\nu \log p_\nu}{p_\nu^s - \varepsilon_\nu} + \sum_{\alpha} \left(\frac{1}{s-\alpha} + \frac{1}{\alpha}\right), \tag{27}$$

$$\sum_{\alpha} \left(\frac{1}{s-\alpha} + \frac{1}{\alpha}\right) = \frac{L'(s)}{L(s)} - B + \frac{1}{2} \frac{\Gamma'\left(\frac{s+c}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{s+c}{2}\right)} - \sum_{\nu=1}^{\lambda} \frac{\varepsilon_\nu \log p_\nu}{p_\nu^s - \varepsilon_\nu}.$$

*) Eventuell ist $\lambda = 0$, so daß das Produkt $\prod_{\nu=1}^{\lambda}$ die Zahl 1 bedeutet.

Für $s = 2 + Ti$ ist also mit Rücksicht auf die für $\sigma > 1$ gültige Identität

$$\frac{L'(s)}{L(s)} = -\sum_{p,m} \frac{\chi(p^m)\log p}{p^{ms}}$$

und den Hilfssatz (II)

$$\begin{aligned}\sum_{\alpha}\left(\frac{1}{2+Ti-\alpha}+\frac{1}{\alpha}\right) &= O(1)+O(1)+O(\log T)+O(1)\\ &= O(\log T).\end{aligned}$$

Wenn $N(T)$ die Anzahl der Wurzeln $\alpha = \beta + \gamma i$ von $\xi(s)$ (d. h. der nicht trivialen Wurzeln von $L(s)$) mit Ordinate zwischen 0 (exkl.) und T (inkl.) bedeutet, ergibt sich also wie beim Beweise des Hilfssatzes (IV) auch hier, daß

$$N(T+1) - N(T) = O(\log T)$$

und wie bei (V), daß

$$\sum_{\alpha}{}'' \frac{1}{(T-\gamma)^2} = O(\log T)$$

ist, wo $\sum''$ sich auf alle α bezieht, für die $|T-\gamma| \geqq 1$ ist.

Nun ist bei passend kleiner Wahl von ε für alle $T > \varepsilon$, wo die Ordinate T von Nullstellen frei angenommen werden darf,

$$(28)\quad 2\pi N(T) = \Im\int_{-1+\varepsilon i}^{2+\varepsilon i}\frac{\xi'(s)}{\xi(s)}\,ds + \Im\int_{2+\varepsilon i}^{2+Ti}\frac{\xi'(s)}{\xi(s)}\,ds + \Im\int_{2+Ti}^{-1+Ti}\frac{\xi'(s)}{\xi(s)}\,ds + \Im\int_{-1+Ti}^{-1+\varepsilon i}\frac{\xi'(s)}{\xi(s)}\,ds.$$

Hierin ist das erste Integral von T unabhängig, also das erste Glied rechts $= O(1)$.

Wegen

$$\frac{\xi'(s)}{\xi(s)} = \frac{L'(s)}{L(s)} - b - \sum_{\nu=1}^{\lambda}\frac{\varepsilon_\nu \log p_\nu}{p_\nu^s - \varepsilon_\nu} + \frac{1}{2}\,\frac{\Gamma'\left(\frac{s+c}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{s+c}{2}\right)}$$

ist, mit Rücksicht auf den Hilfssatz (III) und die Relationen

$$\int_{2+\varepsilon i}^{2+Ti}\frac{L'(s)}{L(s)}\,ds = \sum_{p,m}\frac{\chi(p^m)}{mp^{m(2+Ti)}} - \sum_{p,m}\frac{\chi(p^m)}{mp^{m(2+\varepsilon i)}} = O(1),$$

$$\begin{aligned}\int_{2+\varepsilon i}^{2+Ti}\sum_{\nu=1}^{\lambda}\frac{\varepsilon_\nu\log p_\nu}{p_\nu^s-\varepsilon_\nu}\,ds &= \int_{2+\varepsilon i}^{2+Ti}\sum_{\nu=1}^{\lambda}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\varepsilon_\nu^m\log p_\nu}{p_\nu^{ms}}\,ds\\ &= \sum_{\nu=1}^{\lambda}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\varepsilon_\nu^m}{m}\left(-\frac{1}{p_\nu^{m(2+Ti)}}+\frac{1}{p_\nu^{m(2+\varepsilon i)}}\right) = O(1),\end{aligned}$$

das zweite Glied auf der rechten Seite von (28)

$$\Im \int\limits_{2+\varepsilon i}^{2+Ti} \frac{\xi'(s)}{\xi(s)}\, ds = O(1) - bT + O(1) + \frac{T}{2}\log\frac{T}{2} - \frac{T}{2} + O(\log T)$$

$$= \frac{T}{2}\log\frac{T}{2} - \frac{T}{2} - bT + O(\log T).$$

Für das vierte Glied auf der rechten Seite von (28) ergibt sich nach (26), da

$$\frac{\xi'(s)}{\xi(s)} = -\frac{\bar{\xi}'(1-s)}{\bar{\xi}(1-s)}$$

ist,

$$\Im \int\limits_{-1+Ti}^{-1+\varepsilon i} \frac{\xi'(s)}{\xi(s)}\, ds = -\Im \int\limits_{-1+Ti}^{-1+\varepsilon i} \frac{\bar{\xi}'(1-s)}{\bar{\xi}(1-s)}\, ds$$

$$= -\Im \int\limits_{2-\varepsilon i}^{2-Ti} \frac{\bar{\xi}'(s)}{\bar{\xi}(s)}\, ds,$$

was, da bekanntlich dem Charakter $\bar{\chi}(n)$ dieselben Konstanten b, c entsprechen wie dem Charakter $\chi(n)$, nach der obigen Diskussion des zweiten Gliedes

$$= O(1) - bT - \frac{1}{2}\Im \int\limits_{2-\varepsilon i}^{2-Ti} \frac{\Gamma'\left(\frac{s+c}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{s+c}{2}\right)}\, ds$$

$$= \frac{T}{2}\log\frac{T}{2} - \frac{T}{2} - bT + O(\log T)$$

ist.

Es ist daher zunächst festgestellt, daß

$$(29)\qquad 2\pi N(T) = T\log T - (1 + 2b + \log 2)T + O(\log T) + \Im \int\limits_{2+Ti}^{-1+Ti} \frac{\xi'(s)}{\xi(s)}\, ds$$

ist.

Schließlich läßt sich das in (29) verbleibende Integral genau so behandeln wie das entsprechende Integral im § 2. Es werde $\frac{\xi'(s)}{\xi(s)}$ in

$$\frac{\xi'(s)}{\xi(s)} = B - b + \sum_{\alpha}{}' \left(\frac{1}{s-\alpha} + \frac{1}{\alpha}\right) + \sum_{\alpha}{}'' \left(\frac{1}{s-\alpha} + \frac{1}{\alpha}\right)$$

zerlegt, wo in $\sum\limits_{\alpha}{}'$ die Ordinate γ von dem Werte T um weniger als 1, in $\sum\limits_{\alpha}{}''$ um mindestens 1 entfernt ist. Dann ist

$$\Im\int\limits_{2+Ti}^{-1+Ti}\frac{\xi'(s)}{\xi(s)}ds = O(1)+\sum_{\alpha}{}'\,\Im\int\limits_{2+Ti}^{-1+Ti}\left(\frac{1}{s-\alpha}+\frac{1}{\alpha}\right)ds+\Im\int\limits_{2+Ti}^{-1+Ti}\sum_{\alpha}{}''\left(\frac{1}{s-\alpha}+\frac{1}{\alpha}\right)ds$$

$$(30)\qquad = O(\log T)+O\left|\int\limits_{2+Ti}^{-1+Ti}\sum_{\alpha}{}''\left(\frac{1}{s-\alpha}+\frac{1}{\alpha}\right)ds\right|;$$

nun ist auf dem Integrationsweg

$$\sum_{\alpha}\left(\frac{1}{s+3-\alpha}+\frac{1}{\alpha}\right)=\frac{\xi'(s+3)}{\xi(s+3)}+b-B=O(\log T)$$

und

$$\sum_{\alpha}{}'\left(\frac{1}{s+3-\alpha}+\frac{1}{\alpha}\right)=O(\log T\cdot 1),$$

also

$$\sum_{\alpha}{}''\left(\frac{1}{s+3-\alpha}+\frac{1}{\alpha}\right)=O(\log T),$$

$$\sum_{\alpha}{}''\left(\frac{1}{s-\alpha}+\frac{1}{\alpha}\right)=\sum_{\alpha}{}''\left(\frac{1}{s+3-\alpha}+\frac{1}{\alpha}\right)+\sum_{\alpha}{}''\frac{3}{(s-\alpha)(s+3-\alpha)}$$

$$=O(\log T)+O\sum_{\alpha}{}''\frac{1}{(T-\gamma)^2}$$

$$=O(\log T),$$

also nach (30)

$$\Im\int\limits_{2+Ti}^{-1+Ti}\frac{\xi'(s)}{\xi(s)}ds=O(\log T),$$

folglich nach (29)

$$N(T)=\frac{1}{2\pi}T\log T-\frac{1+2b+\log 2}{2\pi}T+O(\log T).$$

Da nach (26) zugleich mit

$$\xi(\alpha)=0$$

auch

$$\bar{\xi}(1-\alpha)=0$$

ist, ist die Anzahl der α, deren Ordinaten zwischen 0 (exkl.) und $-T$ (inkl.) liegen, auch

$$=\frac{1}{2\pi}T\log T-\frac{1+2b+\log 2}{2\pi}T+O(\log T);$$

denn sie ist mit der Anzahl der Nullstellen des zu $\bar{L}(s)$ gehörigen $\bar{\xi}(s)$ identisch, deren Ordinaten zwischen 0 (exkl.) und T (inkl.) liegen.

Die Anzahl aller α, deren absoluter Betrag $\leqq T$ ist, ist also*)

---

*) Vergl. S. 431, Anm. *); die Anzahl der α mit der Ordinate 0 ist endlich.

$$= \frac{1}{\pi} T \log T - \frac{1 + 2b + \log 2}{\pi} T + O(\log T);$$

folglich ist, wenn die trivialen Nullstellen hinzugenommen werden, die Anzahl aller Nullstellen von $L(s)$, deren absoluter Betrag $\leqq T$ ist,

$$= \frac{1}{\pi} T \log T + \left(\frac{1}{2} + \frac{\sum\limits_{\nu=1}^{\lambda} \log p_\nu}{\pi} - \frac{1 + 2b + \log 2}{\pi}\right) T + O(\log T).$$

Natürlich hätte sich der Beweis auch unter Heranziehung des Satzes aus § 3 führen lassen.

§ 5.

Beweis, daß in einem bestimmten Teile des Streifens $0 \leqq \sigma \leqq 1$ die Funktion $L(s)$ von Null verschieden ist.

Aus der Relation (27) läßt sich in Anlehnung an eine Schlußweise von Herrn de la Vallée Poussin*) (für $\zeta(s)$) folgern: Die $\alpha = \beta + \gamma i$ genügen der Relation:

$$\text{untere Grenze von } (1 - \beta) \log(|\gamma| + 2) > 0,$$

d. h. *es gibt eine positive Konstante a derart, daß für* $t \geqq 2$, $\sigma \geqq 1 - \frac{1}{a \log t}$

$$L(s) \neq 0$$

ist.

Beweis: Da gleichzeitig alle $h = \varphi(k)$ Funktionen $L(s)$ betrachtet werden, so werde ein Index $\varkappa (= 1, \ldots, h)$ eingeführt, wo $\varkappa = 1$ dem Hauptcharakter entspricht; dann ist nach (27) für $\varkappa = 2, \ldots, h$

$$(31) \quad \frac{L_\varkappa'(s)}{L_\varkappa(s)} = B_\varkappa - \frac{1}{2} \frac{\Gamma'\left(\frac{s + c_\varkappa}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{s + c_\varkappa}{2}\right)} + \sum_{\nu=1}^{\lambda_\varkappa} \frac{\varepsilon_{\nu,\varkappa} \log p_{\nu,\varkappa}}{p_{\nu,\varkappa}^s - \varepsilon_{\nu,\varkappa}} + \sum_{\alpha_\varkappa} \left(\frac{1}{s - \alpha_\varkappa} + \frac{1}{\alpha_\varkappa}\right)$$

und für $\varkappa = 1$ wegen

$$L_1(s) = \prod_{p/k} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right) \zeta(s)$$

nach (4)

$$(32) \quad \frac{L_1'(s)}{L_1(s)} = B_1 - \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s} - \frac{1}{2} \frac{\Gamma'\left(\frac{s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)} + \sum_{\nu=1}^{\lambda_1} \frac{\log p_{\nu,1}}{p_{\nu,1}^s - 1} + \sum_{\alpha_1} \left(\frac{1}{s - \alpha_1} + \frac{1}{\alpha_1}\right),$$

wo also im Vergleich mit (31) nur $-\frac{1}{s-1} - \frac{1}{s}$ hinzugetreten ist.

---

*) Vergl. seine Abhandlung „Sur la fonction $\zeta(s)$ de Riemann et le nombre des nombres premiers inférieurs à une limite donnée" [Mémoires couronnés et autres Mémoires publiés par l'Académie Royale des Sciences, des Lettres et des Beaux-Arts de Belgique, Bd. 59 (1899—1900), S. 1—74], S. 7—29, oder auch S. 208—212 meiner auf S. 420, Anm. *) zitierten Arbeit.

Es werde

$$\prod_{\varkappa=1}^{h} L_\varkappa(s) = L_1(s)\, L_2(s) \ldots L_h(s) = M(s)$$

gesetzt; wegen

$$L_2(1) \neq 0, \cdots, L_h(1) \neq 0$$

hat bekanntlich $M(s)$ für $s = 1$ einen Pol erster Ordnung und ist sonst überall regulär. Aus (31) und (32) ergibt sich

$$\frac{M'(s)}{M(s)} = \sum_{\varkappa=1}^{h} \frac{L'_\varkappa(s)}{L_\varkappa(s)}$$

$$(33) \qquad = -\frac{1}{s-1} - \frac{1}{s} + \sum_{\varkappa=1}^{h} B_\varkappa - \frac{1}{2}\sum_{\varkappa=1}^{h} \frac{\Gamma'\left(\frac{s+c_\varkappa}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{s+c_\varkappa}{2}\right)} + \sum_{\varkappa=1}^{h}\sum_{\nu=1}^{\lambda_\varkappa} \frac{\varepsilon_{\nu,\varkappa} \log p_{\nu,\varkappa}}{p^s_{\nu,\varkappa} - \varepsilon_{\nu,\varkappa}}$$

$$+ \sum_{\alpha} \left(\frac{1}{s-\alpha} + \frac{1}{\alpha}\right),$$

wo $\alpha = \beta + \gamma i$ jetzt promiscue alle Wurzeln $\alpha_\varkappa$ der h Kategorien durchläuft.

Für $\sigma > 1$ ist nun

$$\frac{L'_\varkappa(s)}{L_\varkappa(s)} = -\sum_{p,m} \frac{\chi_\varkappa(p^m)\log p}{p^{ms}},$$

also

$$\frac{M'(s)}{M(s)} = -h \sum_{p^m \equiv 1} \frac{\log p}{p^{ms}},$$

worin p alle Primzahlen und m alle positiven ganzen Zahlen durchläuft, für welche $p^m \equiv 1 \pmod{k}$ ist. Für $1 < \sigma \leqq 2$, $t \geqq 2$ ist nun die rechte Seite von (33) gleichmäßig

$$= O\left(\frac{1}{t}\right) + O\left(\frac{1}{t}\right) + O(1) + O(\log t) + O(1) + \sum_{\alpha}\left(\frac{1}{s-\alpha} + \frac{1}{\alpha}\right),$$

also

$$h\, \Re \sum_{p^m \equiv 1} \frac{\log p}{p^{ms}} < A_6 \log t - \Re \sum_{\alpha}\left(\frac{1}{s-\alpha} + \frac{1}{\alpha}\right),$$

$$(34) \quad h \sum_{p^m \equiv 1} \frac{\log p \cos(mt\log p)}{p^{m\sigma}} < A_6 \log t - \sum_{\alpha}\left(\frac{\sigma-\beta}{(\sigma-\beta)^2 + (t-\gamma)^2} + \frac{\beta}{\beta^2+\gamma^2}\right).$$

(34) liefert zunächst, da wegen $0 \leqq \beta \leqq 1$ in $\sum\limits_{\alpha}$ jedes Glied $\geqq 0$ ist, im vorliegenden Gebiet $1 < \sigma \leqq 2$, $t \geqq 2$

$$h \sum_{p^m \equiv 1} \frac{\log p \cos(mt\log p)}{p^{m\sigma}} < A_6 \log t,$$

$$(35) \qquad -\Re\left(\frac{M'(s)}{M(s)}\right) < A_6 \log t.$$

Nun sei $\alpha = \beta + \gamma i$ eine bestimmte der Nullstellen*) α mit Ordinate $\gamma \geqq 2$. Dann tritt für $t = \gamma$ in der Summe auf der rechten Seite von (34) ein Glied

$$\frac{\sigma - \beta}{(\sigma - \beta)^2} + \frac{\beta}{\beta^2 + \gamma^2} \geqq \frac{1}{\sigma - \beta}$$

auf; daher ist für $1 < \sigma \leqq 2$

$$\frac{1}{\sigma - \beta} < A_6 \log \gamma - h \sum_{p^m \equiv 1} \frac{\log p \cos (m \gamma \log p)}{p^{m\sigma}},$$

also, wegen

$$-\cos \Theta \leqq \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos^2 \Theta = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cos 2\Theta,$$

$$\frac{1}{\sigma - \beta} < A_6 \log \gamma + \frac{3}{4} h \sum_{p^m \equiv 1} \frac{\log p}{p^{m\sigma}} + \frac{1}{4} h \sum_{p^m \equiv 1} \frac{\log p \cos (2 m \gamma \log p)}{p^{m\sigma}}$$

$$= A_6 \log \gamma - \frac{3}{4} \frac{M'(\sigma)}{M(\sigma)} - \frac{1}{4} \Re \left(\frac{M'(\sigma + 2\gamma i)}{M(\sigma + 2\gamma i)} \right),$$

also nach (35)

$$\frac{1}{\sigma - \beta} < A_6 \log \gamma - \frac{3}{4} \frac{M'(\sigma)}{M(\sigma)} + \frac{1}{4} A_6 \log (2\gamma).$$

Nun ist für $1 < \sigma \leqq 2$

$$-\frac{M'(\sigma)}{M(\sigma)} < \frac{1}{\sigma - 1} + A_7$$

(da $M(s)$ für $s = 1$ einen Pol erster Ordnung hat); für $1 < \sigma \leqq 2$ ergibt sich also:

$$\frac{1}{\sigma - \beta} < \frac{3}{4} \frac{1}{\sigma - 1} + A_8 \log \gamma. \tag{36}$$

(36) lehrt zunächst die bekannte Tatsache, daß

$$\beta < 1$$

ist (da sonst (36) für kleine $\sigma - 1$ nicht richtig bleiben könnte); ferner ergibt sich für

$$\sigma = 1 + \frac{g}{\log \gamma},$$

wo die Konstante g so gewählt ist, daß

$$0 < \frac{g}{\log 2} \leqq 1$$

und

$$A_8 g < \frac{1}{4}$$

ist:

*) Aus Symmetriegründen genügt es, die Nullstellen in der oberen Halbebene zu betrachten

$$\frac{1}{1+\frac{g}{\log\gamma}-\beta} < \frac{3}{4g}\log\gamma + A_8\log\gamma,$$

$$1 < (1-\beta)\left(\frac{3}{4g}+A_8\right)\log\gamma + \frac{3}{4} + A_8 g,$$

$$1-\beta > \frac{\frac{1}{4}-A_8 g}{\frac{3}{4g}+A_8}\,\frac{1}{\log\gamma}$$

$$= \frac{1}{a\log\gamma},$$

$$\beta < 1 - \frac{1}{a\log\gamma}.$$

Für $t \geqq 2,\ \sigma \geqq 1 - \frac{1}{a\log t}$ ist daher

$$M(s) \neq 0,$$

also jeder Faktor

$$L_\varkappa(s) \neq 0,$$

womit die am Anfang dieses Paragraphen ausgesprochene Behauptung bewiesen ist.

Da bekanntlich für $t \geqq 2,\ \sigma \geqq 1 - \frac{1}{a\log t}$

$$L_\varkappa(s) = O(\log t)$$

ist, so ist also dort $\log L_\varkappa(s)$ regulär und

$$\Re \log L_\varkappa(s) < A_9 + \log\log t.$$

Hieraus folgt in bekannter Weise*): Es gibt eine Konstante A_{10} derart, daß auf der stetigen Kurve

$$(37)\qquad \begin{cases} \sigma = 1 - \dfrac{1}{A_{10}\log(-t)} & \text{für}\quad t \leqq -2, \\ \sigma = 1 - \dfrac{1}{A_{10}\log 2} & \text{für}\quad -2 \leqq t \leqq 2, \\ \sigma = 1 - \dfrac{1}{A_{10}\log t} & \text{für}\quad t \geqq 2 \end{cases}$$

und rechts davon $\frac{L'_\varkappa(s)}{L_\varkappa(s)}$ für $\varkappa = 2, \cdots, h$ regulär ist, für $\varkappa = 1$ bis auf den Pol erster Ordnung $s = 1$ mit dem Residuum -1 regulär ist und für $|t| \geqq 2,\ \ \sigma \geqq 1 - \frac{1}{A_{10}\log|t|}$ der Ungleichung

$$\left|\frac{L'_\varkappa(s)}{L_\varkappa(s)}\right| < A_{11}\log^3|t|$$

genügt.

*) Vergl. S. 232—236 meiner auf S. 420, Anm. *) zitierten Arbeit.

Nun sei l eine gegebene zu k teilerfremde Zahl. Weil für $\sigma > 1$

$$\sum_{\varkappa=1}^{h} \frac{1}{\chi_\varkappa(l)} \frac{L_\varkappa'(s)}{L_\varkappa(s)} = -\sum_{\varkappa=1}^{h} \frac{1}{\chi_\varkappa(l)} \sum_{p,m} \frac{\chi_\varkappa(p^m) \log p}{p^{ms}} = -h \sum_{p^m \equiv l} \frac{\log p}{p^{ms}}$$

ist und für $\sigma \geqq \frac{3}{4}$

$$\sum_{\substack{p^m \equiv l \\ m=2,3,\cdots}} \frac{\log p}{p^{ms}} = O(1)$$

ist, so ist, da das obige A_{10} größer als $\frac{4}{\log 2}$ angenommen werden kann, bewiesen: Die für $\sigma > 1$ durch die Dirichletsche Reihe

$$\sum_{p \equiv l} \frac{\log p}{p^s}$$

definierte Funktion $f(s)$ ist auf der Kurve (37) und rechts davon bis auf den Pol erster Ordnung $s = 1$ mit dem Residuum $\frac{1}{h}$ regulär und genügt für $|t| \geqq 2$, $\sigma \geqq 1 - \frac{1}{A_{10} \log |t|}$ der Ungleichung

$$|f(s)| < A_{12} \log^3 |t|.$$

Hieraus folgt aber durch die bekannte*) Anwendung des Cauchyschen Integralsatzes für die Anzahl $\varrho(x)$ der Primzahlen $ky + l \leqq x$ die Formel

(38) $$\varrho(x) = \frac{1}{h} Li(x) + O\left(x e^{-\gamma \sqrt{\log x}}\right),$$

wo γ eine (von k abhängige) Konstante ist.

Mit elementaren Mitteln, insbesondere ohne Benutzung der Existenz der Funktionen $L(s)$ in der ganzen Ebene (was für die analogen Probleme der Idealtheorie wesentlich ist) hatte ich**) schon vor mehreren Jahren gezeigt, daß

$$\varrho(x) = \frac{1}{h} Li(x) + O\left(x e^{-\sqrt[\beta]{\log x}}\right)$$

ist, wo β eine (von k abhängige) Konstante ist. Aus (38) folgt nun für alle $\beta > 2$

$$\varrho(x) = \frac{1}{h} Li(x) + O\left(x e^{-\sqrt[\beta]{\log x}}\right),$$

also z. B.

---

*) Vergl. S. 236—239 meiner auf S. 420, Anm. *) zitierten Arbeit.

**) „Über die Primzahlen einer arithmetischen Progression" [Sitzungsberichte der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften in Wien, mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse, Bd. 112, Abt. 2a (1903), S. 493—535], S. 532.

$$\varrho(x) = \frac{1}{h} Li(x) + O\left(x e^{-\sqrt[3]{\log x}}\right), \tag{39}$$

wo die Größenordnung des Fehlers von k unabhängig ist.

Aus (39) folgt z. B. weiter für die Anzahl $\pi(x)$ der Primideale mit Norm $\leqq x$ im Kreisteilungskörper ($\varphi(k)$-ten Grades) der k-ten Einheitswurzeln der Wert*)

$$\pi(x) = Li(x) + O\left(x e^{-\sqrt[3]{\log x}}\right); \tag{40}$$

in der Tat zerfällt bekanntlich in jenem Körper jede Primzahl $ky + 1$ in h Primideale ersten Grades, während sonst nur noch endlich viele Primideale ersten Grades vorhanden sind. Übrigens hatte ich**) einen vom Grade unabhängigen Index der Wurzel, nämlich 13, schon früher für diese Körper und sogar für sämtliche algebraische Zahlkörper erlangt, obgleich ich auch heute noch nicht weiß, ob die zu einem beliebigen Körper gehörige Zetafunktion in der ganzen Ebene existiert oder nicht. Jene gleichmässig gültige Zahl 13 hätte ich damals schon durch jede Zahl > 10 ersetzen können, und ein Passus meiner auf S. 420 zitierten Arbeit***) gestattet, sie durch jede Zahl > 8 zu ersetzen.

Berlin, den 21. Juni 1908.

---

*) Statt 3 kann in (40) auch jede andere Größe > 2 stehen.

**) „Neuer Beweis des Primzahlsatzes und Beweis des Primidealsatzes" [Mathematische Annalen, Bd. 56 (1903), S. 645—670], S. 670.

***) S. 187—188