9.

Recherches sur diverses applications de l'Analyse infinitésimale à la Théorie des Nombres.

Seconde partie.

Par Mr. *G. Lejeune Dirichlet.*

(Suite et fin du Mémoire inséré dans le cahier précédent.)

---

§. 9.

La sommation qui nous reste à effectuer, peut être opérée par deux méthodes différentes, en s'aidant des formules remarquables que Mr. *Gaufs* a établies dans le beau mémoire ayant pour titre „*Summatio quarumdam serierum singularium.*" La première de ces méthodes est fondée sur certaines séries connues ordonnées suivant les sinus ou les cosinus des arcs multiples; en l'employant dans la note*), qui a précédé le présent mémoire, nous avons déjà remarqué qu'elle s'applique de la même manière et avec une facilité égale à toutes les séries qui servent à exprimer le nombre des formes pour un déterminant quelconque, c'est-à-dire aux deux séries générales (19) et (23) du §. 6., et nous avons même ajouté que les séries de cette forme sont encore susceptibles d'être sommées par le même moyen, dans plusieurs cas différents de celui où l'exposant s de la puissance $\frac{1}{n^s}$, contenue dans le terme général, est égal à l'unité, ce qui était d'ailleurs évident. En effet, la méthode dont il s'agit, consistant à remplacer le facteur qui multiplie $\frac{1}{n^s}$, au moyen des formules de Mr. *Gaufs* par un nombre limité de termes de l'une des formes $\sin nx$, $\cos nx$, on voit que la série, après cette transformation, se trouve changée en une somme de suites trigonométriques dont chacune a pour terme général une expression telle que $\frac{\sin nx}{n^s}$ ou $\frac{\cos nx}{n^s}$, et peut par conséquent être sommée pour les mêmes valeurs de s, pour lesquelles *D. Bernoulli* a donné les sommes de ces dernières.

La seconde méthode est fondée sur le procédé connu de l'intégration des fractions rationnelles. Les séries déjà citées (19) et (23) §. 6., coïn-

---

*) Voyez le tome XVIII. de ce Journal pag. 259.

cident avec celles qui forment la seconde des trois classes de suites infinies que nous avons eu à distinguer dans le mémoire sur la progression arithmétique et nous avons déjà observé dans le mémoire cité §. 10., que les séries de seconde et troisième classe peuvent être sommées par la méthode qui avait été expliquée en détail dans le §. 4. du même mémoire. Les deux méthodes que nous venons de citer, sont l'une et l'autre d'une grande simplicité. La seconde étant celle qui se présente le plus naturellement, nous allons l'employer d'abord. Mais avant d'entreprendre ce calcul, il faut rappeler les formules de Mr. *Gaufs*. Voici une démonstration de ces expressions, fondée sur les mêmes principes dont j'ai déjà fait usage dans un précédent mémoire, mais plus simple à quelques égards.

Désignant par $f(x)$ une fonction de x, que je suppose continue entre les limites $x=0$ et $x=\pi$, si l'on pose

$$\int_0^\pi f(x)\cos sx\,dx = c_s,$$

on aura, comme l'on sait,

$$c_0 + 2\Sigma c_s \cos sx = \pi f(x),$$

le signe Σ s'étendant à tous les entiers depuis $s=1$, jusqu'à $s=\infty$. Comme ce développement subsiste entre les limites $x=0$ et $x=\pi$ inclusivement, on aura en particulier

$$c_0 + 2\Sigma c_s = \pi f(0).$$

Il est facile de voir comment cette équation doit être modifiée, lorsque les limites de l'intégrale c_s ont des valeurs quelconques. Considérons par exemple les limites 0 et $2h\pi$, h désignant un entier positif et posons

$$1.\quad \int_0^{2h\pi} f(x)\cos sx\,dx = c_s,$$

la fonction étant toujours continue entre ces limites. L'intégrale précédente étant partagée en $2h$ integrales partielles dont les limites sont 0 et π, π et 2π, ..., $(2h-1)\pi$ et $2h\pi$, et toutes ces nouvelles intégrales étant ramenées à avoir pour limites communes 0 et π, il viendra

$$\begin{aligned} c_s = \int_0^\pi [f(x) + f(2\pi-x) + f(2\pi+x) + \ldots\ldots + f(2(h-1)\pi - x) \\ + f(2(h-1)\pi + x) + f(2h\pi - x)]\cos sx\,dx, \end{aligned}$$

Cette expression de c_s ayant la même forme que celle donnée ci-dessus, on aura

$$2.\quad c_0 + 2\sum_{s=1}^{s=\infty} c_s = \pi\Big(f(0) + f(2h\pi) + 2\sum_{s=1}^{s=h-1} f(2s\pi)\Big),$$

le terme général c_s du premier membre étant donné par l'équation (1).

Cela posé, considérons l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cos(x^2)\, dx = a,$$

a étant une quantité numérique. Posons dans cette intégrale $x = \frac{z}{2}\sqrt{\frac{n}{2\pi}}$, z désignant la nouvelle variable et n étant un entier positif divisible par 4. Il viendra ainsi

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cos\left(\frac{n}{8\pi} z^2\right) dz = 2a\sqrt{\frac{2\pi}{n}}.$$

Cette intégrale étant décomposée en une infinité d'autres ayant pour limites deux multiples consécutifs de 2π, tels que $2s\pi$ et $2(s+1)\pi$, et ces nouvelles intégrales étant ramenées à avoir les limites communes 0 et 2π par le changement de z en $2s\pi + z$, on aura

$$\Sigma \int_0^{2\pi} \cos \frac{n}{8\pi}(2s\pi + z)^2\, dz = 2a\sqrt{\frac{2\pi}{n}},$$

le signe Σ s'étendant depuis $s = -\infty$ jusqu'à $s = \infty$.

En développant sous le signe cosinus, omettant le terme $\frac{1}{2}ns^2\pi$, multiple de 2π, et réunissant les termes de la somme qui répondent à des valeurs opposées de s, il viendra

$$\int_0^{2\pi} \cos\left(\frac{n}{8\pi} z^2\right) dz + 2\Sigma \int_0^{2\pi} \cos\left(\frac{n}{8\pi} z^2\right) \cos\left(s\frac{nz}{2}\right) dz = 2a\sqrt{\frac{2\pi}{n}},$$

le signe Σ s'étendant depuis $s = 1$ jusqu'à $s = \infty$. Si maintenant l'on fait $nz = 2x$, on aura

$$\int_0^{n\pi} \cos\left(\frac{x^2}{2n\pi}\right) dx + 2\Sigma \int_0^{n\pi} \cos\left(\frac{x^2}{2n\pi}\right) \cos sx\, dx = a\sqrt{2n\pi}.$$

Comme l'entier n est pair, le premier membre rentre dans la forme de celui de l'équation (2), $f(x)$ étant $\cos\left(\frac{x^2}{2n\pi}\right)$. On aura donc en vertu de cette équation

$$\cos 0 + \cos\left(\frac{n}{2}\right)^2 \frac{2\pi}{n} + 2 \sum_{s=1}^{s=\frac{1}{2}n-1} \cos s^2 \frac{2\pi}{n} = a\sqrt{\frac{2n}{\pi}}.$$

Si l'on observe que l'on a $\cos s^2 \frac{2\pi}{n} = \cos (n-s)^2 \frac{2\pi}{n}$, l'équation précédente pourra prendre cette forme plus simple,

$$\sum_{s=0}^{s=n-1} \cos s^2 \frac{2\pi}{n} = a\sqrt{\frac{2n}{\pi}}.$$

Pour déterminer la quantité a indépendante de n, il suffira de donner à n une valeur particulière. Posant, par exemple, $n = 4$, on trouve $a = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

On a donc définitivement, quel que soit l'entier $n = 4\mu$,

$$\Sigma \cos s^2 \frac{2\pi}{n} = \sqrt{n}.$$

En opérant de la même manière sur l'intégrale $\int_{-\infty}^{\infty} \sin(x^2)\,dx$, on trouve aussi

$$\Sigma \sin s^2 \frac{2\pi}{n} = \sqrt{n},$$

le signe sommatoire s'étendant toujours depuis $s = 0$ jusqu'à $s = n - 1$.

Il seroit facile d'obtenir par une analyse semblable les sommes de la forme des précédentes, pour les cas ou n est de l'une de trois formes $4\mu + 1$, 2, 3; mais il est plus simple encore de ramener ces cas à celui ou n a la forme 4μ.

Pour y parvenir, soient n et m deux entiers quelconques dont le premier est supposé positif, et posons

$$\sum_{s=0}^{s=n-1} e^{s^2 \frac{2m\pi}{n} i} = \Phi(m, n),$$

où i désigne, pour abréger, la quantité imaginaire $\sqrt{-1}$.

La fonction $\Phi(m, n)$ jouit de plusieurs propriétés remarquables. On a d'abord évidemment, si m' désigne un troisième entier tel qu'on ait $m' \equiv m \pmod{n}$

$$3. \quad \Phi(m, n) = \Phi(m', n).$$

On a encore, en supposant c premier à n,

$$4. \quad \Phi(m, n) = \Phi(c^2 m, n).$$

Cela résulte de ce que l'expression cs, en y faisant successivement $s = 0$, 1, ..., $n-1$, donne ces mêmes nombres pour restes lorsqu'on la divise par n.

Une troisième propriété est exprimée par l'équation

$$5. \quad \Phi(n, m)\,\Phi(m, n) = \Phi(1, mn)$$

qui suppose les entiers n et m l'un et l'autre positifs et premiers entre eux. En effet, comme l'on a

$$\sum_{s=0}^{s=n-1} e^{s^2 \frac{2m\pi}{n} i} = \Phi(m, n), \qquad \sum_{t=0}^{t=m-1} e^{t^2 \frac{2n\pi}{m} i} = \Phi(n, m),$$

il viendra en multipliant

$$\Sigma\Sigma\, e^{(m^2 s^2 + n^2 t^2)\frac{2\pi}{mn} i} = \Phi(m, n)\,\Phi(n, m),$$

ou ce qui revient au même, en ajoutant à l'exposant l'expression $2st\pi i$, multiple de $2\pi i$,

$$\Sigma\Sigma\, e^{(ms+nt)^2 \frac{2\pi}{mn} i} = \Phi(m, n)\,\Phi(n, m).$$

Le binome $ms+nt$ peut être remplacé par son reste relatif au diviseur mn. Or, m et n étant premiers entre eux, il est facile de voir que les valeurs que ce reste obtient entre les limites de la double intégration, coïncident, abstraction faite de l'ordre, avec les termes de la suite 0, 1, 2, ..., $mn-1$. Le résultat prend donc la forme d'une somme simple et l'on a

$$\sum_{s=0}^{s=mn-1} e^{s^2 \frac{2\pi}{mn} i} = \varphi(m,n)\,\varphi(n,m),$$

ce qu'il s'agissait de prouver.

Au moyen des équations qui viennent d'être établies, il est facile d'obtenir la valeur de $\varphi(1,n)$, quelle que soit la forme de l'entier n. Si l'on suppose d'abord $n=4\mu$, on aura, en vertu des sommations effectuées plus haut,

$$\varphi(1,n) = (1+i)\sqrt{n}.$$

Soit en second lieu n un entier impair. L'équation (5) donne, en y faisant $m=4$,

$$\varphi(4,n)\,\varphi(n,4) = \varphi(1,4n).$$

Le second membre est en vertu de l'équation précédente, $=2(1+i)\sqrt{n}$. D'un autre côté, les deux expressions $\varphi(4,n)$, $\varphi(n,4)$ peuvent d'après les équations (3) et (4), être remplacées, la première par $\varphi(1,n)$, la seconde par $\varphi(1,4)$ ou par $\varphi(3,4)$, suivant que n est de la forme $4\mu+1$ ou de celle-ci $4\mu+3$. Or il est facile de voir qu'on a

$$\varphi(1,4) = 2(1+i), \quad \varphi(3,4) = 2(1-i).$$

On conclut de là

$$\varphi(1,n) = \sqrt{n}, \quad n = 4\mu+1; \qquad \varphi(1,n) = i\sqrt{n}, \quad n = 4\mu+3.$$

Reste à considérer le cas où n a la forme $4\mu+2$. Comme dans cette supposition, $\frac{n}{2}$ et 2 sont premiers entre eux, l'équation (5) donnera

$$\varphi\left(2, \frac{n}{2}\right), \varphi\left(\frac{n}{2}, 2\right) = \varphi(1,n),$$

et que d'un autre côté, $\varphi\left(\frac{n}{2}, 2\right) = \varphi(1,2) = 0$, il s'ensuivra

$$\varphi(1,n) = 0.$$

Considérons spécialement le cas où n est un nombre premier impair p, et soient a et b respectivement les résidus et les non-résidus quadratiques de p, moindres que ce nombre. On aura alors, en observant que l'expression $i^{\left(\frac{p-1}{2}\right)^2}$ se réduit à 1 ou à i, suivant que p a la forme $4\mu+1$ ou celle-ci $4\mu+3$,

$$\varphi(1,p) = i^{\left(\frac{p-1}{2}\right)^2}\sqrt{p}$$

équation qu'on peut mettre sous cette autre forme, en remplaçant s^2 par son reste:

$$1+2\Sigma e^{a\frac{2\pi}{p}i} = i^{\left(\frac{p-1}{2}\right)^2}\sqrt{p},$$

le signe Σ s'étendant à toutes les valeurs de a. Si m désigne un entier non-divisible par p, on aura pareillement en remplaçant ms^2 par son reste,

$$\varphi(m,p) = 1+2\Sigma e^{a\frac{2\pi}{p}i} \quad \text{ou} \quad = 1+2\Sigma e^{b\frac{2\pi}{p}i},$$

suivant que $\left(\frac{m}{p}\right)=1$ ou $=-1$. Puisque d'un autre côté $\Sigma e^{a\frac{2\pi}{p}i}+\Sigma e^{b\frac{2\pi}{p}i}$ $=-1$, on pourra réunir ces deux résultats dans cette formule,

$$\varphi(m,p) = \left(\frac{m}{p}\right) i^{\left(\frac{p-1}{2}\right)^2}\sqrt{p}.$$

On donnera cette autre forme à l'expression $\varphi(m,p)$, en y mettant au lieu de s^2 son reste,

$$\varphi(m,p) = 1+2\Sigma e^{a\frac{2m\pi}{p}i}$$

et la comparaison de ces deux équations fournira celle-ci

$$1+2\Sigma e^{a\frac{2m\pi}{p}i} = \left(\frac{m}{p}\right) i^{\left(\frac{p-1}{2}\right)^2}\sqrt{p}.$$

Si maintenant l'on observe qu'on a évidemment

$$\Sigma e^{a\frac{2m\pi}{p}i}+\Sigma e^{b\frac{2m\pi}{p}i} = -1,$$

l'équation précédente pourra se changer en celle-ci

$$1+2\Sigma e^{b\frac{2m\pi}{p}i} = -\left(\frac{m}{p}\right) i^{\left(\frac{p-1}{2}\right)^2}\sqrt{p}.$$

En soustraiant cette équation de la précédente et divisant le résultat par 2, on aura définitivement

$$\Sigma e^{a\frac{2m\pi}{p}i}-\Sigma e^{b\frac{2m\pi}{p}i} = \left(\frac{m}{p}\right) i^{\left(\frac{p-1}{2}\right)^2}\sqrt{p}.$$

Cette équation subsiste quel que soit l'entier m, pourvu qu'il ne soit pas divisible par p. Lorsque m est un multiple de p, le premier membre se réduit évidemment à zéro. Nous écrirons l'équation d'une manière plus abrégée, et comme il suit

$$6. \qquad \Sigma\left(\frac{g}{p}\right) e^{g\frac{2m\pi}{p}i} = \left(\frac{m}{p}\right) i^{\left(\frac{p-1}{2}\right)^2}\sqrt{p},$$

où le signe sommatoire s'étend depuis $g=1$, jusqu'à $g=p-1$.

§. 10.

D'après les résultats obtenus dans le §. 8., où nous avons fait voir que la détermination du nombre h des formes quadratiques qui répondent à un déterminant quelconque, se réduit toujours à une question du même genre et relative au cas où le déterminant n'a pas de diviseur carré et où les formes dont il s'agit d'obtenir le nombre, appartiennent à la première espèce, nous n'aurons plus à nous occuper que des 4 déterminants

$$P, \quad 2P, \quad -P, \quad -2P,$$

$P = pp'p'' \ldots .,$ désignant un entier impair et positif dont les diviseurs simples $p, p', p'', \ldots .$ sont tous différents les uns des autres.

Il importe de remarquer que la lettre P telle qu'on vient de la définir, a la même signification que dans les §§. 5. et 6., lorsque le déterminant que nous désignerons toujours par D, est positif, mais que dans le cas de D négatif, cette lettre telle qu'elle a été employée dans les §§. cités, répond à ce que nous désignons maintenant par $-P$. Cela ne change rien à l'expression $\left(\frac{n}{P}\right)$, contenue dans l'équation (19) du §. 6., et à la valeur de ε fixée par les équations (9) du même §., cette valeur devant être $+1$ ou -1, suivant que le déterminant, delivré de tout diviseur carré, est impair ou pair. Mais il n'en est pas de même de δ, cette valeur dépendant du reste qui donne P, pris avec son signe, relativement au diviseur 4. Il résulte de là qu'en posant pour abréger

$$V = \Sigma \delta^{\frac{n-1}{2}} \varepsilon^{\frac{n^2-1}{8}} \left(\frac{n}{P}\right) \frac{1}{n},$$

le signe s'étendant à tous les entiers n positifs, impairs et premiers à P, les expressions $\delta = \pm 1$, $\varepsilon = \pm 1$, qui doivent entrer dans la série V contenue dans l'équation (19) ou (23), suivant qu'il s'agit d'un déterminant négatif ou positif, seront déterminées comme il suit

$$\left.\begin{array}{ll} D = P, & P = 4\mu+1 \\ D = -P, & P = 4\mu+3 \end{array}\right\} \delta = 1, \qquad \varepsilon = 1;$$

$$\left.\begin{array}{ll} D = P, & P = 4\mu+3 \\ D = -P, & P = 4\mu+1 \end{array}\right\} \delta = -1, \quad \varepsilon = 1;$$

$$\left.\begin{array}{ll} D = 2P, & P = 4\mu+1 \\ D = -2P, & P = 4\mu+3 \end{array}\right\} \delta = 1, \qquad \varepsilon = -1;$$

$$\left.\begin{array}{ll} D = 2P, & P = 4\mu+3 \\ D = -2P, & P = 4\mu+1 \end{array}\right\} \delta = -1, \quad \varepsilon = -1.$$

Cela posé, nous avons successivement à considérer les quatres combinaisons que présentent les équations simultanées $\delta = \pm 1$, $\varepsilon = \pm 1$.

I. Supposons d'abord $\delta = 1$, $\varepsilon = 1$. La série V étant divisée par $\left(1 - \left(\frac{2}{P}\right)\frac{1}{2}\right)$, il viendra

$$\frac{V}{1 - \left(\frac{2}{P}\right)\frac{1}{2}} = \Sigma \left(\frac{n}{P}\right)\frac{1}{n},$$

le signe Σ s'étendant à tous les entiers positifs n, premiers à P, pairs ou impairs.

En exprimant la série par une intégrale comme au §. 1., on aura

$$\frac{V}{1 - \left(\frac{2}{P}\right)\frac{1}{2}} = -\int_0^1 \frac{\frac{1}{x} f(x)\, dx}{x^P - 1},$$

où l'on a fait pour abréger, $f(x) = \Sigma \left(\frac{n}{P}\right) x^n$, le signe Σ s'étendant aux entiers précédemment définis moindres que P. En appliquant à cette intégrale, la méthode ordinaire de décomposition, on trouve

$$\frac{V}{1 - \left(\frac{2}{P}\right)\frac{1}{2}} = -\frac{1}{P} \Sigma f\left(e^{\frac{2m\pi}{P} i}\right) \int_0^1 \frac{dx}{x - e^{\frac{2m\pi}{P} i}},$$

le signe Σ s'étendant à tous les entiers m depuis $m = 0$ jusqu'à $m = P - 1$. Tout se réduit donc à obtenir la fonction $f\left(e^{\frac{2m\pi}{P} i}\right) = \Sigma \left(\frac{n}{P}\right) e^{\frac{n}{P} 2m\pi i}$.

Pour y parvenir, mettons la fraction $\frac{n}{P}$, contenue dans l'exposant, sous la forme

$$\frac{n}{P} = \mu + \frac{g}{p} + \frac{g'}{p'} + \dots.$$

μ étant un entier positif ou négatif, et g, g' .... désignant des entiers positifs respectivement inférieurs à p, p', ... On sait que cela ne peut se faire que d'une seule manière *(Disq. arith. 311)*, et il est manifeste, n étant premier à P, qu'aucun des entiers g, g', ... ne saurait être zéro. Il est encore facile de voir qu'en donnant à n toutes les valeurs qu'il doit recevoir dans la sommation, g, g', ... présenteront toutes les combinaisons que l'on peut former avec les entiers depuis $g = 1$ jusqu'à $g = p - 1$, depuis $g' = 1$ jusqu'à $g' = p' - 1$, etc. Quant à l'entier μ, on pourra le négliger à cause qu'il est multiplié par $2m\pi i$ dans l'exposant. Si maintenant nous faisons pour un instant $\frac{P}{p} = r$, $\frac{P}{p'} = r'$, ..., l'équation précédente donne

$$n \equiv gr + g'r' + \dots \pmod{P},$$

d'où l'on conclut ces équations

$$\left(\frac{n}{p}\right) = \left(\frac{g}{p}\right)\left(\frac{r}{p}\right), \quad \left(\frac{n}{p'}\right) = \left(\frac{g'}{p'}\right)\left(\frac{r'}{p'}\right), \quad \dots$$

au moyen desquelles la fonction $f\left(e^{\frac{2m\pi}{P}i}\right)$ se changera dans le produit de $\left(\frac{r}{p}\right)\left(\frac{r'}{p'}\right) \dots$ par les sommes

$$\Sigma\left(\frac{g}{p}\right)e^{g\frac{2m\pi}{p}i}, \qquad \Sigma\left(\frac{g'}{p'}\right)e^{g'\frac{2m\pi}{p'}i}, \quad \dots$$

Remplaçant ces dernières par leurs valeurs fournies par l'équation (6) du §. précédent, on aura

$$f\left(e^{\frac{2m\pi}{P}i}\right) = \left(\frac{r}{p}\right)\left(\frac{r'}{p'}\right) \dots i^{\left(\frac{p-1}{2}\right)^2 + \left(\frac{p'-1}{2}\right)^2 + \dots}\left(\frac{m}{P}\right)\sqrt{P}$$

en supposant m premier à P. Dans le cas contraire $f\left(e^{\frac{2m\pi}{P}i}\right)$ s'évanouira par ce qu'une au moins des sommes précédentes se réduira à zéro. Quant au produit $\left(\frac{r}{p}\right)\left(\frac{r'}{p'}\right) \dots$, on remarquera qu'il se compose d'autant de produits partiels de la forme $\left(\frac{p}{p'}\right)\left(\frac{p'}{p}\right)$, que les nombres p, p', ... peuvent être combinés deux à deux. Or, comme l'on a $\left(\frac{p}{p'}\right)\left(\frac{p'}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}\frac{p'-1}{2}}$ $= i^{2\frac{p-1}{2}\frac{p'-1}{2}}$, on voit que l'expression qui multiplie $\left(\frac{m}{P}\right)\sqrt{P}$ dans l'équation obtenue plus haut, peut prendre la forme

$$i^{\left(\frac{p-1}{2} + \frac{p'-1}{2} + \dots\right)^2} = i^{\left(\frac{P-1}{2}\right)^2}.$$

Nous avons donc définitivement

$$1. \quad f\left(e^{\frac{2m\pi}{P}i}\right) = 0 \quad \text{ou} \quad = i^{\left(\frac{P-1}{2}\right)^2}\left(\frac{m}{P}\right)\sqrt{P},$$

suivant que m a ou n'a pas de diviseur commun avec P. Substituant cette valeur et observant que tant que $m < P$, on a

$$\int_0^1 \frac{dx}{x - e^{\frac{2m\pi}{P}i}} = \log\left(2\sin\frac{m\pi}{P}\right) + \frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{2m}{P}\right)i,$$

il viendra

$$\frac{1}{\left(1 - \left(\frac{2}{P}\right)\frac{1}{2}\right)} V = -\frac{i^{\left(\frac{P-1}{2}\right)^2}}{\sqrt{P}}\Sigma\left(\frac{m}{P}\right)\left(\log\left(2\sin\frac{m\pi}{P}\right) + \frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{2m}{P}\right)i\right),$$

le signe sommatoire s'étendant à tous les entiers m inférieurs et premiers à P. L'équation précédente se simplifie en remarquant qu'on a $\Sigma\left(\frac{m}{P}\right) = 0$; elle devient ainsi

$$\frac{1}{\left(1-\left(\frac{2}{P}\right)\frac{1}{2}\right)} V = -\frac{i^{\left(\frac{P-1}{2}\right)^2}}{\sqrt{P}} \Sigma\left(\frac{m}{P}\right)\left(\log\sin\frac{m\pi}{P} - \frac{m\pi}{P} i\right).$$

Comme le premier membre est réel, les imaginaires doivent se détruire dans le second, comme il est d'ailleurs facile de le vérifier.

Distinguons maintenant les deux formes que P peut présenter, en supposant successivement $P = 4\mu + 1$ et $P = 4\mu + 3$. Nous obtenons ainsi

$$(a) \quad \begin{cases} P = 4\mu + 1, & V = -\frac{1}{\sqrt{P}}\left(1-\left(\frac{2}{P}\right)\frac{1}{2}\right)\Sigma\left(\frac{m}{P}\right)\log\sin\frac{m\pi}{P}, \\ P = 4\mu + 3, & V = -\frac{\pi}{P\sqrt{P}}\left(1-\left(\frac{2}{P}\right)\frac{1}{2}\right)\Sigma\left(\frac{m}{P}\right)m, \end{cases}$$

le signe Σ s'étendant toujours aux entiers m inférieurs et premiers à P.

II. Soit en second lieu $\delta = -1$, $\varepsilon = 1$. Comme le facteur qui multiplie $\frac{1}{n}$ dans la série V, est le même pour des valeurs de n, qui diffèrent d'un multiple de $4P$, on aura d'après ce qui a été dit dans le §. 1.,

$$V = -\int_0^1 \frac{\frac{1}{x}F(x)}{x^{4P}-1},$$

en posant pour abréger

$$F(x) = \Sigma(-1)^{\frac{n-1}{2}}\left(\frac{n}{P}\right)x^n,$$

le signe Σ s'étendant à tous les entiers n, inférieurs et premiers à $4P$.

La méthode connue pour la décomposition des fractions rationelles donne

$$V = -\frac{1}{4P}\Sigma F\left(e^{\frac{2m\pi}{4P}i}\right)\int_0^1 \frac{dx}{x - e^{\frac{2m\pi}{4P}i}},$$

où le signe Σ s'étend à tous les entiers depuis $m = 0$ jusqu'à $m = 4P-1$.

Tout se réduit donc à déterminer l'expression $F\left(e^{\frac{2m\pi}{4P}i}\right)$. On peut y parvenir par des considérations analogues à celles que nous avons employées dans le numéro précédent pour trouver $f\left(e^{\frac{2m\pi}{P}i}\right)$, mais il est plus simple encore de ramener ce cas à celui que nous avons déjà examiné. Pour cela on décomposera la fraction $\frac{n}{4P}$ contenue dans l'exposant, comme il suit

$$\frac{n}{4P} = \mu + \frac{\gamma}{4} + \frac{n'}{P},$$

où il est facile de voir qu'en supposant γ et n' positifs et respectivement inférieurs à 4 et à P, les valeurs de γ et de n' présenteront dans la sommation qu'il s'agit d'effectuer relativement à n, toutes les combinaisons des nombres γ inférieurs et premiers à 4, avec tous les nombres n' inférieurs et premiers à P. De l'équation précédente mise sous la forme

$$n \equiv P\gamma + 4n' \pmod{4P},$$

on conclut facilement

$$(-1)^{\frac{n-1}{2}} = (-1)^{\frac{P-1}{2}}(-1)^{\frac{\gamma-1}{2}}, \quad \left(\frac{n}{P}\right) = \left(\frac{n'}{P}\right).$$

La fonction $F\left(e^{\frac{2m\pi}{4P}i}\right)$ deviendra par la substitution de ces valeurs

$$F\left(e^{\frac{2m\pi}{4P}i}\right) = (-1)^{\frac{P-1}{2}} \Sigma(-1)^{\frac{\gamma-1}{2}} e^{\gamma\frac{2m\pi}{4}i} . \Sigma\left(\frac{n'}{P}\right) e^{n'\frac{2m\pi}{P}i}.$$

Quant à la seconde des deux sommes contenues dans le second membre, elle est évidemment identique à la fonction $f\left(e^{\frac{2m\pi}{P}i}\right)$, n' ayant ici la même signification que n dans le n°. précédent. La première somme pourrait se déduire des formules données dans le §. 9., mais comme elle n'a que deux termes répondant à $\gamma = 1, 3$, on voit sans peine et indépendamment de ces formules, que pour une valeur impaire de m, elle se réduit à $2i(-1)^{\frac{m-1}{2}}$, et qu'elle s'évanouit dans le cas contraire. Substituant les valeurs des deux sommes et remplaçant en même temps $(-1)^{\frac{P-1}{2}}$ par $i^{2\frac{P-1}{2}}$, on aura

$$\textbf{2.}\quad F\left(e^{\frac{2m\pi}{4P}i}\right) = i^{\left(\frac{P+1}{2}\right)^2}(-1)^{\frac{m-1}{2}}\left(\frac{m}{P}\right)\sqrt{4P}$$

en supposant m premier à $4P$. Dans le cas contraire le premier membre s'évanouit par ce qu'une au moins des sommes que nous venons de considérer, se réduit à zéro. Au moyen de ce résultat, on conclura

$$V = -\frac{i^{\left(\frac{P+1}{2}\right)^2}}{\sqrt{4P}} \Sigma(-1)^{\frac{m-1}{2}}\left(\frac{m}{P}\right)\left(\log 2\sin\frac{m\pi}{4P} + i\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{m}{2P}\right)\right),$$

le signe s'étendant aux entiers m inférieurs et premiers à $4P$. Si l'on observe que pour ces valeurs on a

$$\Sigma(-1)^{\frac{m-1}{2}}\left(\frac{m}{P}\right) = 0,$$

l'équation précédente prendra cette forme plus simple

$$V = -\frac{i^{\left(\frac{P+1}{2}\right)^2}}{\sqrt{4P}} \Sigma(-1)^{\frac{m-1}{2}}\left(\frac{m}{P}\right)\left(\log\sin\frac{m\pi}{4P} - i\pi\frac{m}{4P}\right).$$

En distinguant maintenant les deux formes que le nombre P peut présenter lorsqu'on le divise par 4, on aura

$$(b)\quad \begin{cases} P = 4\mu + 3, & V = -\frac{1}{\sqrt{4P}}\Sigma(-1)^{\frac{m-1}{2}}\left(\frac{m}{P}\right)\log\sin\frac{m\pi}{4P}, \\ P = 4\mu + 1, & V = -\frac{\pi}{(\sqrt{4P})^3}\Sigma(-1)^{\frac{m-1}{2}}\left(\frac{m}{P}\right)m, \end{cases}$$

le signe sommatoire se rapportant aux entiers m inférieurs et premiers à $4\,P$.

III. Les cas qui nous restent à considérer et qui répondent à $\delta = 1$, $\varepsilon = -1$; $\delta = -1$, $\varepsilon = -1$, étant entièrement semblables à ceux qui viennent d'être traités, nous indiquerons rapidement le calcul qui s'y applique. En conservant d'abord la valeur ambigue $\delta = \pm 1$, on aura

$$V = -\int_0^1 \frac{\frac{1}{x}\Sigma\delta^{\frac{n-1}{2}}(-1)^{\frac{n^2-1}{8}}\left(\frac{n}{P}\right)x^n}{x^{8P}-1}\,dx,$$

le signe Σ s'étendant aux entiers n inférieurs et premiers à $8P$. On conclut de là

$$V = -\frac{1}{8P}\Sigma A_m \int_0^1 \frac{dx}{x - e^{\frac{2m\pi}{8P}i}},$$

le signe Σ se rapportant aux entiers compris entre $m = 0$ et $m = 8P-1$, et A_m désignant pour abréger la somme

$$\Sigma\delta^{\frac{n-1}{2}}(-1)^{\frac{n^2-1}{8}}\left(\frac{n}{P}\right)e^{\frac{n}{8P}2m\pi i},$$

étendue aux entiers n définis plus haut. En faisant

$$\frac{n}{8P} = \mu + \frac{\gamma}{8} + \frac{n'}{P},$$

il est facile de voir que n recevra toutes les valeurs auxquelles la sommation doit s'étendre, en combinant les entiers γ inférieurs et premiers à 8, avec les n' inférieurs et premiers à P. Si l'on remarque en outre qu'en vertu du §. 2., la congruence $n \equiv P\gamma + 8n'$ (mod. $8P$) entraîne ces équations

$$\delta^{\frac{n-1}{2}} = \delta^{\frac{P-1}{2}}\delta^{\frac{\gamma-1}{2}}, \qquad (-1)^{\frac{n^2-1}{8}} = (-1)^{\frac{P^2-1}{8}}(-1)^{\frac{\gamma^2-1}{8}},$$

$$\left(\frac{n}{P}\right) = \left(\frac{2}{P}\right)\left(\frac{n'}{P}\right) = (-1)^{\frac{P^2-1}{8}}\left(\frac{n'}{P}\right),$$

l'expression A_m prendra la forme

$$A_m = \delta^{\frac{P-1}{2}} f\left(e^{\frac{2m\pi}{P}i}\right)\Sigma\delta^{\frac{\gamma-1}{2}}(-1)^{\frac{\gamma^2-1}{8}}e^{\gamma\frac{2m\pi}{8}i}.$$

Tout se réduit donc à avoir la somme relative à γ. On pourrait la déduire du §. précédent; mais comme elle ne se compose que d'un nombre limité de termes qui répondent à $\gamma = 1, 3, 5, 7$, on voit de suite que l'orsqu'on a $\delta = 1$, la somme est zéro ou $(-1)^{\frac{m^2-1}{8}}\sqrt{8}$, et que lorsqu'on a $\delta = -1$, elle est zéro ou $(-1)^{\frac{m-1}{2}+\frac{m^2-1}{8}} i\sqrt{8}$, suivant que m est pair ou impair. On conclut de là ces deux équations

$$3.\quad \Sigma(-1)^{\frac{n^2-1}{8}}\left(\frac{n}{P}\right)e^{n\frac{2m\pi}{8P}i} = (-1)^{\frac{m^2-1}{8}}\left(\frac{m}{P}\right)i^{\left(\frac{P-1}{2}\right)^2}\sqrt{8P},$$

$$4.\quad \Sigma(-1)^{\frac{n-1}{2}+\frac{n^2-1}{8}}\left(\frac{n}{P}\right)e^{n\frac{2m\pi}{8P}i} = (-1)^{\frac{m-1}{2}+\frac{m^2-1}{8}}\left(\frac{m}{P}\right)i^{\left(\frac{P+1}{2}\right)^2}\sqrt{8P},$$

qui supposent m premier à $8P$, et dont les seconds membres dans le cas contraire, doivent être remplacés par zéro. Au moyen de ces expressions le calcul s'achève comme dans les cas déjà examinés, et l'on trouve

$$(c)\begin{cases} \delta = 1,\quad \varepsilon = -1 \begin{cases} P = 4\mu+1, & V = -\frac{1}{\sqrt{8P}}\ \Sigma(-1)^{\frac{m^2-1}{8}}\left(\frac{m}{P}\right)\log\sin\frac{m\pi}{8P}, \\ P = 4\mu+3, & V = -\frac{\pi}{(\sqrt{8P})^3}\ \Sigma(-1)^{\frac{m^2-1}{8}}\left(\frac{m}{P}\right)m, \end{cases} \\ \delta = -1,\ \varepsilon = -1 \begin{cases} P = 4\mu+3, & V = -\frac{1}{\sqrt{8P}}\ \Sigma(-1)^{\frac{m-1}{2}+\frac{m^2-1}{8}}\left(\frac{m}{P}\right)\log\sin\frac{m\pi}{8P}, \\ P = 4\mu+1, & V = -\frac{\pi}{(\sqrt{8P})^3}\ \Sigma(-1)^{\frac{m-1}{2}+\frac{m^2-1}{8}}\left(\frac{m}{P}\right)m, \end{cases} \end{cases}$$

les sommations s'étendant aux entiers m inférieurs et premiers à $8P$.

IV. Nous allons maintenant résoudre la question dont nous venons de nous occuper, par la première des deux méthodes indiquées plus haut, qui est celle des séries trigonométriques, en nous bornant toutefois, pour abréger, aux séries V qui se rapportent aux déterminants négatifs. Soit en premier lieu $\delta = 1$, $\varepsilon = 1$, $P = 4\mu+3$; on a alors

$$V = \Sigma\left(\frac{n}{P}\right)\frac{1}{n},$$

le signe Σ se rapportant aux entiers n impairs et premiers à P. D'après l'équation (1), on a pour un nombre P de la forme $4\mu+3$,

$$\frac{1}{\sqrt{P}}\Sigma\left(\frac{m}{P}\right)\sin n\frac{2m\pi}{P} = \left(\frac{n}{P}\right) \text{ ou } = 0,$$

suivant que n est ou n'est pas premier à P, et le signe s'étendant aux entiers m inférieurs et premiers à P. Si l'on introduit cette expression dans la série V à la place de $\left(\frac{n}{P}\right)$, on pourra étendre la sommation relative à n, à tous les entiers impairs, l'expression précédente s'évanouissant pour des valeurs de n qui ne sont pas premières à P. Il viendra ainsi, en intervertissant l'ordre des deux intégrations

$$V = \frac{1}{\sqrt{P}} \Sigma \left(\frac{m}{P}\right) \Sigma \frac{1}{n} \sin n \frac{2m\pi}{P}.$$

La première intégration peut s'effectuer au moyen du résultat connu d'après lequel la série

$$5. \quad \frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \text{etc.}$$

a la valeur $\frac{\pi}{4}$ ou $-\frac{\pi}{4}$, suivant que x est compris entre 0 et π, ou entre π et 2π. En distinguant donc les valeurs de m, inférieures à $\frac{1}{2}P$ de celles qui surpassent $\frac{1}{2}P$, et désignant ces valeurs respectivement par m' et m'', il viendra

$$V = \frac{\pi}{4\sqrt{P}} \left(\Sigma \left(\frac{m'}{P}\right) - \Sigma \left(\frac{m''}{P}\right)\right).$$

Comme dans la seconde somme on peut évidemment remplacer m'' par $P - m'$, et qu'on a d'ailleurs, P étant de la forme $4\mu + 3$,

$$\left(\frac{P-m'}{P}\right) = \left(\frac{-1}{P}\right)\left(\frac{m'}{P}\right) = -\left(\frac{m'}{P}\right),$$

on aura

$$V = \frac{\pi}{2\sqrt{P}} \Sigma \left(\frac{m'}{P}\right),$$

expression d'une forme différente de celle que nous avons trouvée plus haut. Si avant de sommer on avait divisé par $\left(1 - \left(\frac{2}{P}\right)\frac{1}{2}\right)$, on serait tombé sur le même résultat que nous avons obtenu par l'autre méthode.

Soit en second lieu $\delta = -1$, $\varepsilon = 1$, $P = 4\mu + 1$. On a alors

$$V = \Sigma (-1)^{\frac{n-1}{2}} \left(\frac{n}{P}\right) \frac{1}{n},$$

où n ne doit recevoir que des valeurs premières à $4P$. L'équation (2) donne pour ce cas

$$\frac{1}{\sqrt{4P}} \Sigma (-1)^{\frac{m-1}{2}} \left(\frac{m}{P}\right) \sin n \frac{2m\pi}{4P} = (-1)^{\frac{n-1}{2}} \left(\frac{n}{P}\right) \text{ ou } = 0,$$

suivant que n est ou n'est pas premier à $4P$, et le signe s'étendant aux entiers m inférieurs et premiers à $4P$. Introduisant cette expression dans la série V, il viendra

$$V = \frac{1}{\sqrt{4P}} \Sigma (-1)^{\frac{m-1}{2}} \left(\frac{m}{P}\right) \Sigma \frac{1}{n} \sin n \frac{2m\pi}{4P}.$$

Comme l'expression qu'on a substituée, s'évanouit lorsque n n'est pas premier à $4P$, on voit que l'on peut dans la somme $\Sigma \frac{1}{n} \sin n \frac{2m\pi}{4P}$, supposer à volonté que n obtient toutes les valeurs entières ou seulement celles qui sont impaires. Dans la première supposition on aura en vertu de l'équation

$$\tfrac{1}{2}(\pi - x) = \frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} + \text{etc.}$$

qui subsiste dépuis $x = 0$ jusqu'à $x = 2\pi$,

$$\Sigma \frac{1}{n} \sin n \frac{2m\pi}{4P} = \tfrac{1}{2}\left(\pi - \frac{m\pi}{2P}\right),$$

et par suite

$$V = \frac{\pi}{2\sqrt{4P}} \Sigma (-1)^{\frac{m-1}{2}} \left(\frac{m}{P}\right) - \frac{\pi}{(\sqrt{4P})^3} \Sigma (-1)^{\frac{m-1}{2}} \left(\frac{m}{P}\right) m,$$

ou ce qui revient au même, la première somme étant évidemment nulle,

$$V = -\frac{\pi}{(\sqrt{4P})^3} \Sigma (-1)^{\frac{m-1}{2}} \left(\frac{m}{P}\right) m,$$

ce qui coïncide avec la valeur obtenue par l'autre méthode. Si en second lieu on suppose que n ne reçoit que des valeurs impaires, on trouvera, au moyen de l'équation (5), et en désignant par m' ou m'' les valeurs de m, suivant qu'elles sont inférieures ou supérieures à $2P$

$$V = \frac{\pi}{4\sqrt{4P}} \left(\Sigma (-1)^{\frac{m'-1}{2}} \left(\frac{m'}{P}\right) - \Sigma (-1)^{\frac{m''-1}{2}} \left(\frac{m''}{P}\right)\right),$$

ou, en mettant $4P - m'$ à la place de m'', et observant qu'on a

$$(-1)^{\frac{4P-m'-1}{2}} \left(\frac{4P-m'}{P}\right) = -(-1)^{\frac{m'-1}{2}} \left(\frac{m'}{P}\right),$$

$$V = \frac{\pi}{2\sqrt{4P}} \Sigma (-1)^{\frac{m'-1}{2}} \left(\frac{m'}{P}\right),$$

ce qui est une nouvelle expression de V.

Les deux autres cas étant traités de la même manière, on trouvera outre les résultats déjà obtenus par l'autre méthode, deux nouveaux résultats que nous allons réunir avec les deux précédents,

$$(d)\begin{cases} \delta = 1, & \varepsilon = 1, \quad P = 4\mu + 3, \quad V = \frac{\pi}{2\sqrt{P}} \Sigma \left(\frac{m'}{P}\right), \\ \delta = -1, & \varepsilon = 1, \quad P = 4\mu + 1, \quad V = \frac{\pi}{2\sqrt{4P}} \Sigma (-1)^{\frac{m'-1}{2}} \left(\frac{m'}{P}\right), \\ \delta = 1, & \varepsilon = -1, \quad P = 4\mu + 3, \quad V = \frac{\pi}{2\sqrt{8P}} \Sigma (-1)^{\frac{m'^2-1}{8}} \left(\frac{m'}{P}\right), \\ \delta = -1, & \varepsilon = -1, \quad P = 4\mu + 1, \quad V = \frac{\pi}{2\sqrt{8P}} \Sigma (-1)^{\frac{m'-1}{2} + \frac{m'^2-1}{8}} \left(\frac{m'}{P}\right). \end{cases}$$

Les valeurs m' sont premières à P, et en outre impaires dans les trois dernières équations. Quant aux limites des intégrations, on doit ajouter que les valeurs de m' doivent être respectivement inférieures à $\frac{1}{2}P$, $2P$, $4P$, $4P$.

Les expressions de V peuvent prendre beaucoup d'autres formes encore. On obtient, par exemple, des expressions différentes des précédentes et plus simples, si dans le cas où le terme général renferme l'un des facteurs $(-1)^{\frac{n-1}{2}}$, $(-1)^{\frac{n^2-1}{8}}$, ou l'un et l'autre de ces facteurs, on conserve ces facteurs dans la série, en n'introduisant les formules de Mr. *Gaufs* que pour remplacer l'expressions $\left(\frac{n}{P}\right)$. C'est ce que nous allons faire pour les trois derniers cas du tableau précédent (d). Dans le premier de ces trois cas, on a

$$V = \Sigma(-1)^{\frac{n-1}{2}}\left(\frac{n}{P}\right)\frac{1}{n},\quad P = 4\mu + 1.$$

L'équation (1) donne dans ce cas,

$$\Sigma\left(\frac{m}{P}\right)\cos n\frac{2m\pi}{P} = \left(\frac{n}{P}\right)\sqrt{P} \quad \text{ou} \quad = 0,$$

suivant que n est ou n'est pas premier à P, et m devant recevoir toutes les valeurs inférieures et premières à P. En substituant cette expression de $\left(\frac{n}{P}\right)$, on aura

$$V = \frac{1}{\sqrt{P}}\Sigma\left(\frac{m}{P}\right)\Sigma(-1)^{\frac{n-1}{2}}\frac{1}{n}\cos n\frac{2m\pi}{P},$$

où la sommation relative à n, peut maintenant s'étendre à tous les entiers impairs. Or, l'on sait que la série

$$\frac{\cos x}{1} - \frac{\cos 3x}{3} + \frac{\cos 5x}{5} - \text{etc.}$$

a la valeur $\frac{\pi}{4}$, $-\frac{\pi}{4}$ ou $\frac{\pi}{4}$, suivant que x est compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$, entre $\frac{\pi}{2}$ et $\frac{3\pi}{2}$, ou enfin entre $\frac{3\pi}{2}$ et 2π. Si donc l'on désigne par m', m'', m''' respectivement les valeurs de m comprises dans les trois intervalles, 0 et $\frac{1}{4}P$, $\frac{1}{4}P$ et $\frac{3}{4}P$, $\frac{3}{4}P$ et P, on aura

$$V = \frac{\pi}{4\sqrt{P}}\left[\Sigma\left(\frac{m'}{P}\right) + \Sigma\left(\frac{m'''}{P}\right) - \Sigma\left(\frac{m''}{P}\right)\right].$$

On a d'ailleurs évidemment

$$\Sigma\left(\frac{m'}{P}\right) = \Sigma\left(\frac{m'''}{P}\right) \text{ et } \Sigma\left(\frac{m'}{P}\right) + \Sigma\left(\frac{m''}{P}\right) + \Sigma\left(\frac{m'''}{P}\right) = 0,$$

d'ou l'on conclut

$$(e) \qquad V = \frac{\pi}{\sqrt{P}} \Sigma\left(\frac{m'}{P}\right),$$

m' désignant les valeurs premières à P, comprises entre 0 et $\frac{1}{4}P$.

Dans le second cas on a

$$V = \Sigma(-1)^{\frac{n^2-1}{8}}\left(\frac{n}{P}\right)\frac{1}{n}, \quad P = 4\mu + 3.$$

En substituant la valeur de $\left(\frac{n}{P}\right)$ donnée par l'équation (1), il viendra

$$V = \left(\frac{1}{\sqrt{P}}\right)\Sigma\left(\frac{m}{P}\right)\Sigma(-1)^{\frac{n^2-1}{8}}\frac{1}{n}\sin n\frac{2m\pi}{P},$$

n pouvant maintenant recevoir toutes les valeurs impaires premières à P ou non. Or la série

$$\frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 3x}{3} - \frac{\sin 5x}{5} + \frac{\sin 7x}{7} + \text{etc.}$$

étant sommée par les moyens connus, on trouve que sa valeur est respectivement

$$0, \quad \frac{\pi}{2\sqrt{2}}, \quad 0, \quad -\frac{\pi}{2\sqrt{2}}, \quad 0,$$

suivant celui des cinq intervalles

$$0 \text{ et } \frac{\pi}{4}, \quad \frac{\pi}{4} \text{ et } \frac{3\pi}{4}, \quad \frac{3\pi}{4} \text{ et } \frac{5\pi}{4}, \quad \frac{5\pi}{4} \text{ et } \frac{7\pi}{4}, \quad \frac{7\pi}{4} \text{ et } 2\pi,$$

dans lequel x est compris. En désignant donc par m' les valeurs de m comprises entre $\frac{1}{8}P$ et $\frac{3}{8}P$, et par m'' celles qui tombent entre $\frac{5}{8}P$ et $\frac{7}{8}P$, on aura

$$V = \frac{\pi}{2\sqrt{2P}}\left[\Sigma\left(\frac{m'}{P}\right) - \Sigma\left(\frac{m''}{P}\right)\right],$$

ou plus simplement en observant qu'on peut remplacer m'' par $P - m'$, et qu'on a $\left(\frac{P-m'}{P}\right) = -\left(\frac{m'}{P}\right)$:

$$(f) \qquad V = \frac{\pi}{\sqrt{2P}} \Sigma\left(\frac{m'}{P}\right).$$

On trouve d'une manière toute semblable, P étant de la forme $4\mu + 1$,

$$(g) \qquad V = \Sigma(-1)^{\frac{n-1}{2}+\frac{n^2-1}{8}}\left(\frac{n}{P}\right)\frac{1}{n} = \frac{\pi}{\sqrt{2P}}\left(\Sigma\left(\frac{m'}{P}\right) - \Sigma\left(\frac{m''}{P}\right)\right),$$

en désignant par m' et m'' les valeurs premières à P et respectivement comprises dans les deux intervalles 0 et $\frac{1}{8}P$, $\frac{3}{8}P$ et $\frac{1}{2}P$. Il importe de remarquer que les équations (e) et (g) ne s'appliquent pas au cas où $P = 1$.

§. 11.

On pourrait donner beaucoup d'autres formes à l'expression de la série V, soit que cette série réponde à un déterminant négatif, soit qu'elle se rapporte à un déterminant positif. Mais comme ces détails ne présentent aucune difficulté, nous ne nous y arrêterons pas et nous passons à l'énumération des différents théorèmes, qui résultent des équations (19) et (23) du §. 6., lorsqu'on y introduit les expressions qui viennent d'être obtenues.

Déterminants positifs.

I. $D = P, \quad P = 4\mu+1, \quad h = \dfrac{2-\left(\frac{2}{P}\right)}{\log(T+U\sqrt{P})}\log\dfrac{\Pi\sin\frac{l\pi}{P}}{\Pi\sin\frac{a\pi}{P}},$

où les entiers m inférieurs et premiers à P, sont désignés par a ou par b, suivant que l'équation $\left(\frac{m}{P}\right)=\pm 1$ a lieu avec le signe supérieur ou avec le signe inférieur.

II. $D = P, \quad P = 4\mu+3, \quad h = \dfrac{1}{\log(T+U\sqrt{P})}\log\dfrac{\Pi\sin\frac{b\pi}{4P}}{\Pi\sin\frac{a\pi}{4P}},$

où les entiers m inférieurs et premiers à $4P$, sont désignés par a ou par b, suivant que le signe ambigu dans l'équation $(-1)^{\frac{m-1}{2}}\left(\frac{m}{P}\right)=\pm 1$, est le signe supérieur ou inférieur.

III. $D = 2P, \quad P = 4\mu+1, \quad h = \dfrac{1}{\log(T+U\sqrt{2P})}\log\dfrac{\Pi\sin\frac{b\pi}{8P}}{\Pi\sin\frac{a\pi}{8P}},$

où les entiers m inférieurs ou premiers à $8P$, sont désignés par a ou par b suivant que le signe ambigu dans l'équation $(-1)^{\frac{m^2-1}{2}}\left(\frac{m}{P}\right)=\pm 1$, est le signe supérieur ou inférieur.

IV. $D = 2P, \quad P = 4\mu+3, \quad h = \dfrac{1}{\log(T+U\sqrt{2P})}\log\dfrac{\Pi\sin\frac{b\pi}{8P}}{\Pi\sin\frac{a\pi}{8P}},$

où les entiers m inférieurs et premiers à $8P$, sont désignés par a ou par b suivant que l'on a $(-1)^{\frac{m-1}{2}+\frac{m^2-1}{8}}\left(\frac{m}{P}\right)=+1$ ou $=-1$.

Déterminants négatifs.

$$\text{V.}\quad D = -P,\quad P = 4\mu + 3,\quad h = \left(2 - \left(\frac{2}{P}\right)\right)\frac{\Sigma b - \Sigma a}{P} = A - B.$$

Dans cette équation a et b ont la même signification que dans le premier cas, et A et B désignent respectivement combien il existe de valeurs a et b au dessous de $\frac{1}{2}P$:

$$\text{VI.}\quad D = -P,\quad P = 4\mu + 1,\quad h = \frac{\Sigma b - \Sigma a}{4P} = \frac{A - B}{2}.$$

Les lettres a et b ont la même signification que dans le second cas, et A et B désignent respectivement les nombres des valeurs a et b qui sont inférieures à $2P$. On a encore dans ce sixième cas, en désignant par A' et B' les nombres des valeurs a et b au dessous de $\frac{1}{4}P$, a et b ayant le même sens que dans le premier cas:

$$h = 2(A' - B').$$

$$\text{VII.}\quad D = -2P,\quad P = 4\mu + 3,\quad h = \frac{\Sigma b - \Sigma a}{8P} = \frac{A - B}{2}.$$

Les lettres a et b ont la même signification que dans le troisième cas et A et B désignent respectivement les nombres des valeurs a et b moindres que $4P$. On a encore dans ce septième cas, en désignant par A' et B' les nombres des valeurs a et b, comprises entre $\frac{1}{8}P$ et $\frac{3}{8}P$, a et b ayant le même sens que dans le premier cas:

$$h = 2(A' - B').$$

$$\text{VIII.}\quad D = -2P,\quad P = 4\mu + 1,\quad h = \frac{\Sigma b - \Sigma a}{8P} = \frac{A - B}{2},$$

où a et b ont le même sens que dans le quatrième cas, et A et B désignent les nombres des valeurs a et b qui tombent au dessous du $4P$. On a encore, si conservant aux lettres a et b la même signification que dans le premier cas, l'on désigne par A', B'; A'', B'' les nombres des valeurs a et b qui sont contenues dans les deux intervalles compris entre 0 et $\frac{1}{8}P$, $\frac{3}{8}P$ et $\frac{1}{2}P$:

$$h = 2(A' - B' - A'' + B'').$$

Il nous reste à présenter quelques remarques sur les résultats qui viennent d'être énoncés. Pour parler d'abord des quatre premiers cas, nous devons dire que les expressions qui s'y rapportent quoique très simples, ne sont pas sous la forme qui en montre la véritable signification. Pour leur donner cette forme, nous nous occuperons spécialement du premier de ces cas. Les trois autres donnent lieu à des remarques entièrement semblables. Soit x une indéterminée et considérons les deux produits

$$\Pi\left(x-e^{\frac{2a\pi}{P}i}\right),\quad \Pi\left(x-e^{\frac{2b\pi}{P}i}\right).$$

Il est évident qu'en posant

$$X=\Pi\left(x-e^{\frac{2a\pi}{P}i}\right)\Pi\left(x-e^{\frac{2b\pi}{P}i}\right),$$

le polynome X ne sera autre chose que le premier membre de l'équation que l'on obtient en délivrant l'équation binome $x^P-1=0$ de ses racines non-primitives. Il est facile de conclure de là que pour $x=1$, on a

$$X=1 \quad \text{ou} \quad X=P$$

suivant que le nombre des facteurs simples $p, p', p'', \ldots.$ de P est supérieur ou égal à l'unité. (Le cas où l'on aurait $P=1$, est exclu, le déterminant étant un carré dans ce cas.)

On a donc suivant les deux cas qui viennent d'être distingués,

$$\Pi\left(1-e^{\frac{2a\pi}{P}i}\right)\Pi\left(1-e^{\frac{2b\pi}{P}i}\right)=1 \ \text{ou} \ =P.$$

On a aussi

$$\Pi\left(1-e^{\frac{2a\pi}{P}i}\right)=\Pi\left(-2i\sin\frac{a\pi}{P}\right).e^{\frac{\pi}{P}i\Sigma a},$$

$$\Pi\left(1-\ {}^{\frac{2b\pi}{P}i}\right)=\Pi\left(-2i\sin\frac{b\pi}{P}\right).e^{\frac{\pi}{P}i\Sigma b},$$

et si l'on observe que les valeurs a et b sont en nombre égal, que la suite des valeurs a renferme toujours avec un nombre a son complément $P-a$, et qu'il en est de même de celle des valeurs b, on en conclura

$$\frac{\Pi\sin\frac{b\pi}{P}}{\Pi\sin\frac{a\pi}{P}}=\frac{\Pi\left(1-e^{\frac{2b\pi}{P}i}\right)}{\Pi\left(1-e^{\frac{2a\pi}{P}i}\right)},$$

et par suite en ayant égard à une équation précédente,

$$\frac{\Pi\sin\frac{b\pi}{P}}{\Pi\sin\frac{a\pi}{P}}=\Pi\left(1-e^{\frac{2b\pi}{P}i}\right)^2 \ \text{ou} \ =\frac{1}{P}\Pi\left(1-e^{\frac{2b\pi}{P}i}\right)^2.$$

suivant les deux cas déjà distingués. La détermination de h dépend donc du produit $\Pi\left(1-e^{\frac{2b\pi}{P}i}\right)$. Or il résulte d'un théorème connu dû à Mr. *Gauſs* et qu'il est facile d'étendre au nombre composé P, que le polynome

$\Pi\left(x-e^{\frac{2b\pi}{P}i}\right)$ est toujours de la forme $\frac{1}{2}(Y+Z\sqrt{P})$, Y et Z étant des polynomes à coëfficients entiers. En désignant donc par Y_1 et Z_1, les valeurs que Y et Z prennent pour $x=1$, et passant des logarithmes aux nombres, l'équation qui détermine h, deviendra

$$(T+U\sqrt{P})^h = \left(\frac{Y_1+Z_1\sqrt{P}}{2}\right)^{4-2\left(\frac{2}{P}\right)}$$

$$\text{ou }\ (T+U\sqrt{P})^h = \left(\frac{Y_1+Z_1\sqrt{P}}{2\sqrt{P}}\right)^{4-2\left(\frac{2}{P}\right)},$$

suivant que le nombre des facteurs simples de P est supérieur ou égal à l'unité. Sous cette forme les résultats qui se rapportent à un déterminant positif, paraîtront bien remarquables, s'il est vrai, comme l'a dit un illustre géomètre, que l'interêt que présentent les recherches arithmétiques ait sa source non-seulement dans la difficulté de la matière, mais surtout dans les rapports intimes que les recherches de ce genre dévoilent entre des théories entre lesquelles on ne soupçonnerait aucune connexion.

Quant au calcul des polynomes Y et Z, il peut se faire, soit par la méthode de Mr. *Gaufs*, soit par un moyen dont *Legendre* a fait usage et qui est fondé sur les relations connues qui existent entre les coëfficients d'une équation et les sommes des puissances semblables de ses racines. Il est facile de voir qu'à l'aide de ces relations on peut obtenir successivement tous les coëfficients d'une équation lorsque les sommes des puissances de ses racines sont connues, comme cela arrive ici, la somme des puissances $m^{\text{ièmes}}$ des racines de l'équation

$$\Pi\left(x-e^{\frac{2b\pi}{P}i}\right)=0,$$

résultant sans difficulté de la formule (1) du §. précédent.

On trouve ainsi, en supposant par exemple $P=3.11$,

$$Y = 2x^{10}-x^9+8x^8+5x^7+2x^6+14x^5+2x^4+5x^3+8x^2-x+2,$$
$$Z = x^9+x^7+2x^6+2x^4+x^3+x,$$

et par suite

$$Y_1 = 46, \qquad Z_1 = 8.$$

Comme l'on a aussi $\left(\frac{2}{P}\right)=1$, l'expression $\left(\frac{Y_1+Z_1\sqrt{P}}{2}\right)^{4-2\left(\frac{2}{P}\right)}$ deviendra $(23+4\sqrt{33})^2$. On a d'un autre côté $T+U\sqrt{P}=23+4\sqrt{33}$, d'où il suit $h=2$, ce qui est exact, les formes qui répondent au déterminant 33, étant x^2-33y^2, $33x^2-y^2$. Pour donner un exemple du cas où P se réduit à un nombre premier, soit $P = 17$; on trouve alors $Y_1 = 34$, $Z_1 = 8$, et l'expression $\left(\frac{Y_1 + Z_1\sqrt{P}}{2\sqrt{P}}\right)^{4-2\left(\frac{2}{P}\right)}$ deviendra $(4+\sqrt{17})^2 = 33 + 8\sqrt{17}$ ce qui est la première puissance de $T + U\sqrt{P} = 33 + 8\sqrt{17}$, comme cela doit être, puisque pour le déterminant 17 il n'existe que la seule forme $x^2 - 17y^2$.

Les expressions de h, relatives aux déterminants négatifs, n'ont besoin d'aucune explication. Nous ajouterons seulement que pour un cas particulier qui se rapporte au n°. V., le résultat avait déjà été indiqué par Mr. *Jacobi*. (Voir ce Journal Tome IX.)

Nous terminerons ce mémoire en indiquant une application que l'on peut faire des expressions de h, dans le cas des déterminants négatifs. On sait que lorsqu'un entier k peut être décomposé en trois carrés, ou en d'autres termes lorsque l'équation $x^2 + y^2 + z^2 = k$ est possible, le nombre de ses solutions dépend du nombre des formes dont le déterminant est $-k$. Les théorèmes qui fixent cette dépendance, ont d'abord été découverts par *Legendre* dans les cas les plus simples et par voie d'induction. Mr. *Gaufs* les a ensuite démontrés d'une manière générale et très ingénieuse dans la 5ième section de son ouvrage. Il est évident qu'il suffit de comparer les théorèmes dont il s'agit, avec les résultats auxquels nous sommes parvenus dans ce §. et dans le §. 8., pour en conclure par la simple élimination du nombre des formes quadratiques, qui entre dans les uns et dans les autres, de nouvelles expressions pour le nombre des solutions de l'équation $x^2 + y^2 + z^2 = k$, expressions qui ne renfermeront plus rien qui soit relatif aux formes quadratiques. Je me bornerai ici à cette seule remarque et je n'entreprendrai pas quant à présent l'énumération de ces nouveaux théorèmes; ces détails seront mieux placés dans un autre mémoire dans lequel je chercherai à établir les résultats dont il s'agit d'une manière directe et sans y faire concourir les deux théories dont je viens de parler.