

IV.

Ein Paar Worte über die bisherige Theorie des Krumm- zapfens,

vom

Commissionsrath Bussé
in Freiberg.

Zwei kleine Schriften: *Theorie des Krummzapfens*, von K. Ch. Langsdorf, Erlangen 1803, — und: *Versuch einer Theorie des Schwungrades und der Kurbel*, von H. Ch. Brodreich, Frankfurt am Main 1805, werden, ob sie gleich vielleicht noch nirgends recensirt sind, dennoch vom Publico beachtet seyn, da der erste Verfasser Langsdorf heisst und ist, der andere aber, (fürstlich solmischer Regierungsrath,) ebenfalls die höhere Mathematik nicht gescheut hat, und dadurch ein gutes Vorurtheil für sich erregt, welches auch in mancher Hinsicht bei genauer Durchlesung des Ganzen sich bestätigt.

Aber bei Behandlung des Krummzapfens geht Herr Brodreich von der Behauptung aus, dass $c = C \cdot \frac{r \cdot \sin. \text{verf. } \alpha}{R \cdot \text{arc. } \alpha}$ die Geschwindigkeit der Last an der Warze sey, in dem Augenblicke, da diese um $= r \cdot \sin. \text{verf. } \alpha$ gehoben ist, und die Kraft am Rade einen Bogen $= R \cdot \text{arc. } \alpha$ durchlaufen hat. Die-

fer offenbar unrichtige Satz scheint dem Herrn Verf. ins Unschickliche nur dann zu fallen, wenn α stumpf, und namentlich, wenn es $= 180$ Grad wird; weshalb er die Schuld der Unschicklichkeit in dem *verneinten Cosinus* zu entdecken, und das Uebel durch folgende Regel gehoben glaubt.

„ „Wird die eine oder die andere GröÙe ver-
 „ „neint gesetzt, so müssen alle übrige zugleich
 „ „verneint genommen werden. Wird dieses nicht
 „ „in Acht genommen, so ist es kein Wunder;
 „ „wenn alles unter sich schlecht zusammen
 „ „hängt, u. f. w. Forschen wir der Ursache
 „ „dieser wenigstens scheinbaren Abweichung des
 „ „Calculus weiter nach, so erhellt, dafs sie von
 „ „der Zweideutigkeit des Zeichens (—) herrührt;
 „ „denn bald druckt dieses Zeichen nur eine entge-
 „ „gen gesetzte Lage der GröÙe aus, bald bezeich-
 „ „net es die, der durch (+) ausgedruckten,
 „ „entgegen gesetzte Rechnungsart, u. f. w.“

Worte, die dem Herrn Staatsrath von Te-
 tens, wie es der Verfasser auch angezeigt hat,
 also einem unrer ehrwürdigsten Mathematiker, zu-
 gehören. Um so merkwürdiger sind sie mir als ein
 abermahliges Beispiel, in welche sonderbare Be-
 hauptungen auch die besten Mathematiker zu ver-
 fallen, durch die gewöhnliche mangelhafte, auch
 hier und da geradezu falsche, sich selbst widerspre-
 chende Theorie des Bejaheten und Verneinten ver-
 anlaßt werden! Dafs solch ein Mathematiker solch

eine Nothhülfe ergreift, *) ist ein neuer Beweis, daß ich in meinen *neuen Erörterungen über Plus und Minus* u. s. w. nicht zu hart geurtheilt habe!

Soll die *mittlere* Geschwindigkeit in Rechnung kommen, fährt in §. 14 der Verfasser fort, so muß ihr Werth durch die Integralrechnung gefunden werden, nämlich der Coefficient von $C \frac{r}{R}$ als = $\frac{\text{Summe aller Werthe von sin. verl. } \alpha : \text{arc. } \alpha}{\text{Anzahl aller Werthe von sin. verl. } \alpha : \text{arc. } \alpha}$.

Was nun durch diese Integrirung von dem Verfasser gefunden wird, wie soll man das nennen? Einige neuere Naturphilosophen dürften Rath dazu wissen. Sie würden es etwa eine neue *Potenz* der mittlern Geschwindigkeit, oder einen neuen *Pol* derselben heißen. Eben so treffend wäre auch *polarisirte Potenz*, oder *potenziirter Polarstern*. Es ist gewiß sehr gleichgültig, welchen von solchen Ausdrücken man wählen will: denn alle solche Ausdrücke sind bereits in dem Besitze einer äußerst viel umfassenden Bedeutung, namentlich auch in dem Besitze der Kraft, um so etwas zu fassen, als es hier zu fassen giebt, ein Etwas, das sich selbst widerspricht. Mein Scherz soll und kann den Herrn Verf. nicht treffen, der, bei manchen schätzbaren Talen-

*) Wenn die Schwierigkeit der Aufgabe in Kraft's Mechanik, welche diese Nothhülfe veranlaßt hat, wirklich vom \mp herrührt, so verspreche ich, sie gründlich zu heben, so bald ich ihr \mp ernstlich ansehe, welches nächstens geschehen soll. P.

ten, welche aus seiner Schrift dem Kenner eines leichten Ideenganges einleuchten werden, doch keinen Hang zu solcher neuen Naturphilosophie geäußert hat. Im Ernste also:

Das obige c ist selbst schon die mittlere Geschwindigkeit der Luft an der Warze. Alles, was über die seyn sollende Unrichtigkeit in der bisher gewöhnlichen Bestimmung derselben hier geäußert, und ganz besonders auch dasjenige, was Seite 79 mitgetheilt ist, wird dem Verfasser selbst durchaus mißfallen müssen, wenn er durch fortgesetztes Studium der höhern Mathematik die dahin gehörigen Begriffe schärfer und richtiger gefaßt hat, und nicht mehr in Gefahr ist, von einem *Differential* des *Schwerpunktes* zu reden, oder $\frac{fx dx}{dx}$ und $\frac{fx dx}{dx}$ in irgend einer Hinsicht für einerlei zu halten, und dergl. mehr. Dann aber, dieses darf man von dem Verfasser erwarten, wird es ihm auch lieb seyn, daß ich alle weitere Folgerungen seines jetzigen Versuches auf jenen ihren Gründen beruhen lasse. Auch ist es ein Beweis, daß man dem Schriftsteller eine gehörige Consequenz im Denken zugestehen will, wenn man von seiner Theorie zu sprechen aufhört, so bald man ihren Hauptsatz umgestoßen hat.

Aus des Herrn Hofraths Langsdorf Theorie werden hier mehrere Sätze als unrichtig getadelt, die es nicht sind; zugleich werden freilich auch einige unrichtige Behauptungen jenes berühmt-

ten Mathematikers für solche erklärt, aber irgend eine völlig treffende Darstellung seiner Uebereilung wird man doch hier nicht vorfinden.

Langsdorf, — der verdienstvolle Mann vergönne mir, hier in aller Kürze meine Meinung zu äußern, — hat einen zu einseitigen Blick auf die Bewegung des Krummzapfens geworfen, und diesem Blicke gemäß einen Satz aufgestellt, den ich ohne Figur so ausdrücken kann:

Soll die Umlaufszeit beharrlich, (man kann hier auch geradezu sagen, constant,) seyn, so muß die Warze von dem Punkte an, wo sie zu heben anfängt, durch einen Bogen von 45 Grad *beschleunigt*, durch die nächstfolgenden 90 Grad *verzögert*, und durch die dann noch übrigen 45 Grad des *anhebenden* Halbkreises, (ich schränke mich mit ihm *auf diesen ein*,) *wiederum beschleunigt* werden.

Auf diesen Satz ist seine Theorie gegründet; und er ist unrichtig! Es läßt sich geradezu erweisen, daß unter Herrn Langsdorf's Voraussetzungen die Warze in dem Endpunkte ihres anzuhenden Halbkreises eine *größere* Geschwindigkeit haben würde, als sie im Anfangspunkte desselben hatte. Aber die folgende indirecte Widerlegung jenes Satzes wird dem größten Theile des Publicums erwünschter seyn.

I. Nehme ich mit Herrn L. einen immerfort sich *parallelen* Zug der Last an der Warze, auch mit Ihm eine *constante* Kraft am Rade an; so finde ich dynamisch, daß die beharrliche Umlaufszeit nur *eintre-*

ten kann, wenn 1. die Kraft am Rade gerade groß genug ist, um die Warze vom ersten Punkte ihrer Anhebung an, durch einen Winkel φ zu beschleunigen, dessen Sinus $= \frac{2}{\pi} = \frac{2}{3,14}$ ist, welches ungefähr $\varphi = 39^{\circ}32'$ giebt; aber 2. alle Malh unter der Bedingung, daß die Warze in jenem ersten Punkte schon eine Bogengeschwindigkeit k habe, die *nicht kleiner* als $\sqrt{4gr \cdot \frac{L}{M\gamma} \cdot \left(\frac{2}{\pi} \text{arc. } \varphi - \sin. \text{vers. } \varphi\right)}$ sey, wo L die Last an der Warze und M die auf den Warzenkreis reducirte träge Masse bedeutet, deren mittleres spec. Gewicht ich durch γ bezeichne.

Sei ferner $= V$ das Druckmaafs *) der Kraft am Rade, auf den Warzenkreis reducirt, und $= F$, was sie auf den Widerstand der Friction zu verwenden hat, daß also V und F tangential Drückungen sind; so ergibt sich mir, (nicht, wie Herr L. behauptet, daß $V = F + 0,707 L$ seyn müsse, sondern) daß $V = F + \frac{2}{\pi} L = F + 0,637 L$ seyn muß, beim beharrlichen Umlaufe der Warze, während sie durch den anhebenden Halbkreis steigt. Die am Anfange dieses Halbkreises erforderliche Geschwindigkeit k aber muß, während diese Warze durch den andern, (den bei uns so genannten oder zu nennenden *niedersetzenden*.) Halbkreis geht, für sie erzeugt werden. Ist sie kleiner, als ich vorhin bestimmt habe, so wird die Warze rückgängig, ehe

*) Vergleiche meine *Betrachtungen der Wasserfäulenmaschine*, S. 56, §. 62. B.

sie bis auf ($180^{\circ} - 39^{\circ}32'$) angehoben hat, u. s. w. Es ist sehr angenehm, alles, was hier erfolgen mußte, durch die Methode des Größten und Kleinsten sehr bestimmt und schicklich entschieden zu sehen, *falls man mit dem \mp des Größten und Kleinsten aufs Reine gekommen ist*. Wer das nicht ist, dürfte auch hier seiner Noth durch ein Palliativ, dem oben angeführten ähnlich, abzuhelfen suchen wollen. — — Ich sagte: erfolgen *mußte*! In der Wirklichkeit, falls man die Räder nimmt wie sie sind, würde die Warze selbst bei einem $k = 0$ nicht alle Malh rückgängig werden, oder auch, gegen den obigen Ausspruch des Größten und Kleinsten, wiederum vorgängig werden. Dieses rührt aber lediglich daher, weil die Voraussetzung in I, daß der Tangentialdruck V constant sey, an den gewöhnlichen Rädern nicht Statt finden kann. Ein Rad, welches man dieser Forderung ziemlich gemäß zu bauen suchen wollte, würde nur den eingeschränkten Nutzen haben, daß man die hier unter I gefundene Theorie an ihm auch durch Erfahrung ziemlich genau könnte bestätigt sehen.

Ungleich schwieriger wird die Untersuchung, wenn ich

II. den von der Kraft am Rade herrührenden tangentialen Druck V so veränderlich annehme, als er bei den gewöhnlichen Rädern es wirklich ist. Indessen habe ich für dergleichen oberflächige Räder so eben gefunden, daß

der

der Kraft mechanisches Moment $Vc = \left(F + \frac{2}{\pi} L\right)k$ für den anhebenden Halbkreis seyn muß, wenn die Warze das Ende dieses Halbkreises mit eben der Geschwindigkeit k verlassen soll, mit welcher sie in den Anfang desselben eintritt. Es kann aber dieses k hier weit geringer als unter I seyn, ohne daß die Warze rückgängig wird. Ja, da die oberflägigen Räder, nach einer in mancher Hinsicht freilich etwas fehlerhaften Einrichtung, gewöhnlich so geschaufelt werden, daß sie um ein gar beträchtliches mehr Aufschlagewasser aufnehmen können, als in der regelmäßg ihnen zugedachten Umlaufszeit $= \frac{2\pi r}{c}$ ihnen eigentlich zukommt; so wird k äußerst klein seyn können, und die Warze dennoch bis zu dem letzten Punkte ihres anhebenden Halbkreises getrieben werden.

Die Schlüsse, welche mich auf diese hier mitgetheilten Resultate und mehrere andere gebracht haben, scheinen, so eben wenigstens, mir sehr befriedigend und unterhaltend zu seyn. Gleichwohl würde ich, eben deshalb, weil sie neu und eilig mir entstanden sind; noch davon schweigen, wenn ich nicht vorher sähe, daß wenigstens ein Jahr vergehen wird, ehe ich mit mehrerer Muße sie prüfen und weiter verfolgen kann. Ich wurde gegenwärtig von *St. Excellenz dem Herrn Minister, Grafen von Einsiedel*, dessen tiefe Einsichten so vieles zu umfassen willen, um meine Meinung über die neuen Theorien des Krummzapfens befragt; und es schien mir nützlich und rathsam, selbige hier

öffentlich mitzutheilen, denn es bringt die Mathematiker in gar zu übeln Ruf, wenn die Praktiker solche Theorien ankaufen, und sich dadurch fehl geführt sehen.

Eben deshalb muß ich auch anführen, daß des Herrn R. R. Brodreich Theorie des Schwungrades ebenfalls mich durchaus nicht befriedigt hat. Auch in ihr kommt gar zu vieles vor, was jedem, der an etwas scharfe und treffende Anwendung der höhern Mathematik gewöhnt ist, anstößig seyn muß.

Um der Ueberschrift dieses Aufsatzes Genüge zu thun, muß ich auch der alten Theorie des Krummzapfens noch kurz erwähnen. Alles, was sie, — bei manchem Schriftsteller sehr undeutlich, — zu erweisen suchte, kann durch den Satz ausgedrückt werden, daß $= F + \frac{2}{\pi} L$ die mittlere GröÙe des tangentialen Widerstandes ist, welchem im anhebenden Warzenkreise die Kraft das Gleichgewicht halten muß. Soll dieser Satz bloß für seinen statischen Sinn bewiesen werden, — und mir ist nicht bekannt, daß vor Langsdorf ein Mehreres versucht wäre, — so scheint mir hierzu vollkommen hinreichend, zu bedenken, daß die Warze längs unendlich vielen schiefen Ebenen von einer 1. stetig wachsenden und abnehmenden Neigung steigt, und daß 2. die Kraft, als *Tangentialkraft*, jeder von jenen schiefen Ebenen alle Mahl *parallel* wirkt. Durch 2 ist es gewiß, daß immerfort die Kraft zur Last sich verhält, wie die Höhe der schiefen Ebene zu ihrer Länge. Durch 1 ist es gewiß, daß

durch den Uebergang aus einer schiefen Ebene in die andere kein Geschwindigkeitsverlust entsteht, weshalb man *auch summiren* kann, welches denn so-
gleich $V - F : L = 2r : \pi r$ giebt. Unter solchen sichern und deutlichen Bedingungen, wie hier die 1 und 2 ausmachen, ist mir nämlich die cartesia-
nische Beweisart bei den Anwendungen der Mathe-
matik auf das Maschinenwesen, fast noch lieber als die lediglich statische, die man indessen für den obigen Satz auch leicht und deutlich darlegen kann.

In meinen beiden obigen Formeln kommt jene Gröfse $F + 2L$ ebenfalls vor. Wer aber deshalb behaupten wollte, daß wir nun gerade wieder auf die alte Theorie zurück gekommen wären, der würde eben dadurch beweisen, daß er den großen Unterschied zwischen dynamischer und statischer Ansicht einer Maschine noch nicht gehörig gefaßt habe, und daher solche Zweifel, als unsern Langsdorf zu neuer Untersuchung der Sache veranlaßt haben, nicht gehörig zu würdigen wisse. Um sie recht vollständig zu beantworten, müßte auch die Zeitdauer des Umlaufes noch bestimmt werden.

Die Anwendung meiner Formeln I und II fällt bei gut vorgerichteten Krummzapfen ziemlich in eins zusammen, und wird dadurch sehr leicht, so lange von dem Kraftverluste durch den continuirten Zug der Korbstangen und von einem gewissen Ausfalle des mechanischen Kraftmomentes abstrahirt wird, wie es für hiesige vorläufige Mittheilung schicklich war.