

# Die Theorie der Integralgleichungen und die Darstellung willkürlicher Funktionen in der mathematischen Physik.

Von

ADOLF KNESER in Breslau.

Die von Fredholm<sup>\*)</sup> begründete, von Hilbert<sup>\*\*)</sup> in wesentlichen Punkten fortgebildete, von Schmidt<sup>\*\*\*)</sup> weiter vervollkommnete Theorie der Integralgleichungen ist offenbar bestimmt, weite Gebiete der mathematischen Physik in der vorteilhaftesten Weise umzugestalten. Sie bietet aber hinsichtlich der wichtigen Lehre von der Darstellung willkürlicher Funktionen bis jetzt noch Mängel dar, die unmittelbar vor Augen treten, wenn man sich klar macht, was die hierher gehörigen Resultate für die Fouriersche Reihe leisten. Da zeigt sich, daß es weniger ist als schon sehr einfache Anwendungen erfordern; man erhält nämlich z. B. bezüglich der gewöhnlichen Sinusreihe nur den Satz, daß durch sie eine Funktion von  $x$  darstellbar ist, die mit ihren ersten beiden Ableitungen stetig ist und an den Stellen  $x = 0$  und  $x = \pi$  verschwindet; ebenso erhält man eine Entwicklung in die Kosinusreihe nur unter der Voraussetzung, daß die Ableitung der Funktion an den bezeichneten beiden Stellen verschwindet.

Nun kennt man aber nicht nur für die Fouriersche Reihe, sondern auch für die nach den Besselschen und den Sturm-Liouvilleschen Normalfunktionen fortschreitenden Reihen sehr viel allgemeinere Darstellungssätze, bei denen insbesondere nicht verlangt wird, daß die dargestellte Funktion an den Enden des betrachteten Intervalls denselben Bedingungen unterworfen sei, wie die Funktionen, nach denen man entwickelt. †) Diese allgemeinen Sätze mit der Theorie der Integralgleichungen

<sup>\*)</sup> Stockholm Öfversigt 1900. Acta math. Bd. 27.

<sup>\*\*)</sup> Göttinger Nachrichten 1904, 1905.

<sup>\*\*\*)</sup> Entwicklung willkürlicher Funktionen nach Systemen vorgeschriebener, Dissertation Göttingen 1905 und Bd. 63 dieser Annalen.

†) Kneser, Bd. 58 und 60 dieser Annalen.

in Verbindung zu setzen und dadurch die bezeichneten Mängel der bisherigen Theorie zu heben, ist das Ziel der vorliegenden Untersuchung. Wir hoffen die Lehre von der Darstellung willkürlicher Funktionen durch die in der mathematischen Physik vorkommenden Reihen in verschiedenen Punkten zu vertiefen und so einen neuen Beweis für die Fruchtbarkeit der Integralgleichungen zu erbringen.

## § 1.

### Das Problem und ein Lemma.

Das Problem der mathematischen Physik, auf das wir die Integralgleichungen anwenden wollen, ist im wesentlichen das von Sturm und Liouville untersuchte. Eine Differentialgleichung

$$\frac{d}{dx} \left( k \frac{dV}{dx} \right) + (g\lambda - l) V = 0$$

sei vorgelegt, in der die Variable  $x$  auf ein festes endliches Intervall  $J$ , etwa das von  $x = a$  bis  $x = b$  reichende, beschränkt bleibt. Im Innern dieser Strecke seien die Funktionen  $k$ ,  $g$ ,  $l$  mit ihren Ableitungen erster und zweiter Ordnung stetig,  $k$  und  $g$  außerdem positiv;  $\lambda$  sei eine Konstante. Ferner sei  $g$  so beschaffen, daß das Integral

$$u = \int_a^x g dx$$

auf der ganzen Strecke  $J$  mit Einschluß ihrer Endpunkte endlich und stetig bleibt. Dann kann man, ohne die Differentialgleichung wesentlich zu spezialisieren, die Größe  $g$  durch Eins ersetzen, indem man  $u$  als unabhängige Variable einführt, die, wenn  $x$  wachsend die Strecke  $J$  durchläuft, ebenfalls wachsend bis zu einer endlichen Grenze hinaufgeht. Die Differentialgleichung geht nämlich in folgende über:

$$g \frac{d}{du} \left( g k \frac{dV}{du} \right) + (g\lambda - l) V = 0$$

oder in geänderter Bezeichnung

$$\frac{d}{dx} \left( k \frac{dV}{dx} \right) + (\lambda - l) V = 0,$$

wobei  $k$  und  $l$  die soeben geforderten Eigenschaften behalten.

Die Konstante  $\lambda$  wird nun durch Forderungen bestimmt, die an die Größe  $V$  gestellt werden und nicht bei beliebigen Werten von  $\lambda$  zu erfüllen sind. Auf der Strecke  $J$  sollen nämlich  $V$  und  $\frac{dV}{dx}$  endlich und stetig sein und an den Enden von  $J$  sollen Gleichungen von der Form

$$k \frac{dV}{dx} - hV \Big|_a = 0, \quad k \frac{dV}{dx} + HV \Big|_b = 0$$

gelten, in denen  $h$  und  $H$  vorgeschriebene Konstante sind; eine von ihnen oder beide können durch Gleichungen wie

$$V|^\alpha = 0, \quad V|^\beta = 0$$

vertreten werden. Ist ferner eine der Grenzen  $a$  und  $b$ , etwa  $a$  eine singuläre Stelle der Differentialgleichung, so nennen wir sie kurz einen singulären, andernfalls einen regulären Endpunkt der Strecke  $J$ . Für einen singulären Endpunkt wird keine Beziehung von einer der angegebenen Gestalten, sondern nur verlangt,  $V$  bleibe endlich; die Differentialgleichung ist immer so beschaffen, daß die geforderten Integrale  $V$  bis auf einen konstanten Faktor eindeutig bestimmt sind. Man nennt sie Normalfunktionen oder, vom Standpunkte der unten eingeführten Integralgleichungen, Eigenfunktionen eines Kerns, die zugehörigen Werte der Konstanten  $\lambda$  Eigenwerte.

Um besonders über die in singulären Stellen möglichen Verhältnisse bestimmte Anschauungen zu gewinnen, nehmen wir speziell an, was bei den wichtigsten Anwendungen zutrifft,  $k$  und  $l$  seien analytische, im Innern der Strecke  $J$  reguläre Funktionen von  $x$ , und  $x = a$  sei für die Differentialgleichung der Normalfunktionen eine Stelle der Bestimmtheit im Sinne der Fuchsschen Theorie.\*) Da die Differentialgleichung in der Form

$$V'' + \frac{k'}{k} V' + \frac{\lambda - l}{k} = 0$$

geschrieben werden kann, ist es für eine Singularität dieser Art charakteristisch, daß man entwickeln kann

$$\frac{k'}{k} = \frac{c_1}{x-a} + \mathfrak{P}_1(x-a),$$

$$\frac{\lambda - l}{k} = \frac{c_2}{(x-a)^2} + \frac{c_3}{x-a} + \mathfrak{P}_2(x-a),$$

wobei  $c$  Konstante und  $\mathfrak{P}$  Potenzreihen sind. Die determinierende Gleichung ist

$$\gamma(\gamma-1) + c_1\gamma + c_2 = 0;$$

wenn ihre Wurzeln weder gleich sind noch sich um eine ganze Zahl unterscheiden, hat die Differentialgleichung zwei Integrale von der Form

$$(x-a)^\gamma \mathfrak{P}_3(x-a).$$

Hieraus sieht man zunächst, daß die determinierende Gleichung keine komplexen Wurzeln haben kann, wenn die gestellten Forderungen erfüllbar sind und die Größe  $V$  bis auf einen konstanten Faktor eindeutig bestimmen. Da nämlich die Konstanten  $c$  wie die Funktionen  $k$  und  $l$  naturgemäß reell anzunehmen sind, hätte man zwei konjugiert imaginäre Wurzeln, also in dem

---

\*) Schlesinger, Differentialgleichungen (Sammlung Schubert) Nr. 25.

reellen und imaginären Teil des hingeschriebenen Ausdrucks zwei Integrale, die entweder beide an der Stelle  $x = a$  endlich blieben oder beide unendlich würden. Die Wurzeln der determinierenden Gleichung sind also reell und mindestens eine von ihnen nicht negativ, da sonst alle Integrale eine Potenz von  $x - a$  mit negativem Exponenten als Faktor neben  $\mathfrak{P}(x - a)$  und  $\log(x - a)$  enthielten, also keins von ihnen an der Stelle  $x = a$  endlich wäre. Ist nun  $\gamma$  die größte nicht negative Wurzel der determinierenden Gleichung, so ist ein Integral von der Form

$$(x - a)^\gamma \mathfrak{P}(x - a)$$

vorhanden, und dieses ist bei der Annahme  $x = a$  endlich; es ist also bei den geltenden Voraussetzungen bis auf einen konstanten Faktor das einzige an der Stelle  $x = a$  endliche Integral.

Es seien nun  $V$  und  $W$  zwei zu verschiedenen Werten von  $\lambda$  gehörige Integrale unserer Differentialgleichung, die an der Stelle  $x = a$  von der angegebenen Beschaffenheit sind; bei dem zweiten trete etwa  $\gamma_1$  an Stelle von  $\gamma$ . Dann kann man setzen

$$V = (x - a)^\gamma \mathfrak{P}_3(x - a), \quad W = (x - a)^{\gamma_1} \mathfrak{P}_4(x - a), \\ VW' - WV' = (x - a)^{\gamma + \gamma_1 - 1} \mathfrak{P}_5(x - a);$$

auf Grund dieser Formeln untersuchen wir den im weiteren Verlauf der Untersuchung vorkommenden Ausdruck

$$k(VW' - V'W).$$

Zu diesem Zweck gehen wir davon aus, daß die größte Wurzel der determinierenden Gleichung nicht kleiner als  $\frac{1 - c_1}{2}$  ist, daß also die Ungleichung

$$\gamma + \gamma_1 \geq 1 - c_1$$

gilt. Wenn nun zunächst  $\gamma + \gamma_1 + c_1 - 1$  positiv ist, findet man aus der Formel

$$\frac{k'}{k} = \frac{c_1}{x - a} + \mathfrak{P}_1(x - a)$$

und der aus ihr folgenden

$$k = (x - a)^{c_1} \mathfrak{P}_6(x - a)$$

die Gleichung

$$k(VW' - V'W) = (x - a)^{\gamma + \gamma_1 - 1 + c_1} \mathfrak{P}_5(x - a) \mathfrak{P}_6(x - a)$$

und hieraus

$$k(VW' - V'W)|^a = 0.$$

Wäre ferner

$$\gamma + \gamma_1 = 1 - c_1,$$

so erhielte man die Beziehungen

$$\gamma = \gamma_1 = \frac{1 - c_1}{2}, \quad 2\gamma + c_1 = 1.$$

Ferner hätte man Entwicklungen von der Form

$$V = C(x - a)^r + C_1(x - a)^{r+1} + \dots,$$

$$W = D(x - a)^r + D_1(x - a)^{r+1} + \dots,$$

aus denen man schließen könnte

$$VW' - V'W = (x - a)^{2r} \mathfrak{P}_7(x - a),$$

$$k(VW' - V'W) = (x - a)^{2r+c_1} \mathfrak{P}_8(x - a) = (x - a) \mathfrak{P}_8(x - a),$$

so daß die linke Seite dieser Gleichung wiederum bei der Annahme  $x = a$  verschwindet.

Bedenken wir noch, daß für den Endpunkt  $b$  dieselben Erwägungen wie für  $a$  gelten, so sehen wir ein, daß von den Gleichungen

$$k(VW' - WV')|^a = 0, \quad k(VW' - WV')|^b = 0$$

die erste gesichert ist, wenn  $V$  und  $W$  an der Grenze  $a$ , die zweite, wenn sie an der Grenze  $b$  die von den Normalfunktionen geforderten Eigenschaften haben. Diese Gleichungen sind an regulären Endpunkten selbstverständlich erfüllt, da hier entweder beide Größen  $V$  und  $W$  verschwinden, oder die Quotienten  $V':V$  und  $W':W$  denselben endlichen Wert haben.

Offenbar bleiben die letzten Betrachtungen gültig, wenn man unter  $\mathfrak{P}$  nur stetige mit stetiger erster Ableitung versehene Funktionen versteht. Man überträgt so unsre Resultate auf den Fall, daß  $k, g, l$  nicht notwendig analytische Funktionen sind, die Differentialgleichung aber an den Stellen  $a$  und  $b$  nur diejenige Art von Singularitäten aufweist, die Bôcher\*) bei linearen Differentialgleichungen mit nicht analytischen Koeffizienten als Verallgemeinerung der Fuchsschen Stellen der Bestimmtheit definiert und untersucht hat.

Beiläufig bemerken wir noch, daß, wenn man den Normalfunktionen an einem singulären Endpunkte  $a$  die Forderung auferlegen wollte, die Gestalt  $(x - a)^r \varphi(x)$  zu haben, wobei  $r$  ein gegebener Exponent und  $\varphi(a)$  endlich ist, nur scheinbar ein allgemeineres Problem als das oben ausgesprochene vorliegen würde. Man brauchte nämlich nur die Größe  $(x - a)^{-r} V$  an Stelle von  $V$  einzuführen, um auf unser früheres Problem zurückzukommen, da diese Größe einer Differentialgleichung von derselben Form und derselben Art der Singularitäten genügt wie  $V$  selbst. Aus diesem Grunde und weil außerdem in den physikalischen Anwendungen stets zunächst gefordert wird, eine gewisse Größe bleibe endlich, betrachten wir durchweg nur Normalfunktionen, die an einer singulären Stelle endlich bleiben und dadurch bis auf einen konstanten Faktor eindeutig bestimmt sind.

\*) Transactions of the American Mathematical Society Bd. 1, S. 40. Bulletin of A. M. S. (2), Bd. 5, S. 280.

## § 2.

**Differentialgleichung und Integralgleichung.**

Nach diesen Vorbereitungen gehen wir dazu über, die Normalfunktionen als Eigenfunktionen eines Kerns und Lösungen einer Integralgleichung zu betrachten, und leiten einige von Hilbert angegebene Resultate auf eine neue Weise ab, durch die gewisse in der zitierten Abhandlung besonders erörterte Ausnahmefälle\*) der allgemeinen Theorie eingeordnet werden.

Zu diesem Zwecke richten wir zunächst die Differentialgleichung der Normalfunktionen so ein, daß  $\lambda = 0$  nicht zu den Eigenwerten gehört. Es sei  $\mu$  eine beliebige Konstante, die nicht zu den Eigenwerten gehört; eine solche gibt es, da wir annehmen, die für die Normalfunktionen charakteristischen Forderungen seien nicht bei jedem Wert von  $\lambda$  zu erfüllen. Wenn dann  $\lambda = 0$  ein Eigenwert ist, ersetzen wir  $\lambda$  durch  $\lambda + \mu$  und schreiben die Differentialgleichung der Normalfunktionen in der Form

$$\frac{d}{dx} \left( k \frac{dV}{dx} \right) + [\lambda - (l - \mu)] V = 0.$$

Dann ist  $\lambda = 0$  sicher kein Eigenwert mehr, da sonst für die ursprüngliche Gleichung  $\mu$  ein solcher wäre, entgegen der Voraussetzung. Ändern wir auch noch die Bedeutung des Buchstabens  $l$ , so können wir die Gleichung der Normalfunktionen wieder in der Gestalt

$$\frac{d}{dx} \left( k \frac{dV}{dx} \right) + (\lambda - l) V = 0$$

schreiben und annehmen, alle Eigenwerte seien von Null verschieden.

Jetzt bilden wir an jedem Ende des Intervalls  $J$  ein Integral der Gleichung

$$\frac{d}{dx} \left( k \frac{dy}{dx} \right) - ly = 0,$$

das die an diesem Ende für die Normalfunktionen geltenden Forderungen erfüllt. Diese Integrale seien  $\varphi(x)$  und  $\psi(x)$ ; das erste sei zunächst am unteren, das zweite am oberen Ende der Strecke  $J$  definiert. Da nun die Koeffizienten der Differentialgleichung, wenn man den der zweiten Ableitung auf den Wert Eins bringt, im Innern von  $J$  mit ihren ersten Ableitungen stetig sind, so kann man  $\varphi(x)$  und  $\psi(x)$  als stetige, mit stetiger erster Ableitung versehene Funktionen über die ganze Strecke  $J$  fortsetzen, wobei nur für  $\varphi(x)$  der obere, für  $\psi(x)$  der untere Endpunkt, wenn er singulär ist, Singularitäten bringen kann. Die Funktionen  $\varphi(x)$  und  $\psi(x)$  können

\*) Zweite Mitteilung, Göttinger Nachrichten 1904, S. 219.

ferner nicht bis auf einen konstanten Faktor zusammenfallen, da sonst ein Integral der letzten Gleichung vorläge, das an beiden Enden der Strecke  $J$  die für die Eigenfunktionen geltenden Grenzbedingungen erfüllt, was ausgeschlossen ist, da  $\lambda = 0$  kein Eigenwert sein soll. Hieraus folgt, daß die Größe  $k(\varphi\psi' - \varphi'\psi)$ , die den Gleichungen

$$\frac{d(k\varphi')}{dx} - l\varphi = 0, \quad \frac{d(k\psi')}{dx} - l\psi = 0$$

zufolge konstant ist, nicht verschwindet; multipliziert man daher  $\varphi(x)$  mit einer passenden von Null verschiedenen Konstanten, wodurch die geforderten Eigenschaften nicht gestört werden, so erhält man die Gleichung

$$k(\varphi'\psi - \varphi\psi') = 1$$

für die ganze Strecke  $J$  mit Ausschluß singulärer Grenzen.

Jetzt sei  $\xi$  ein Wert zwischen  $a$  und  $b$ ; wir setzen, wenn  $x \leq \xi$ ,

$$K(x, \xi) = \psi(\xi) \varphi(x),$$

wenn  $x \geq \xi$ , dagegen

$$K(x, \xi) = \varphi(\xi) \psi(x).$$

Dann ist  $K(x, \xi)$  auf der ganzen Strecke  $J$  als Funktion von  $x$  stetig und bezüglich beider Argumente symmetrisch. Denn ist z. B.  $x \leq \xi$ , so hat man für  $K(\xi, x)$  den zweiten Ausdruck zu nehmen und findet  $\varphi(x) \psi(\xi)$ , also

$$K(x, \xi) = K(\xi, x),$$

und Entsprechendes gilt, wenn  $x > \xi$ .

Setzen wir ferner

$$\frac{\partial K(x, \xi)}{\partial x} = K'(x, \xi),$$

so finden wir

$$K'(\xi - 0, \xi) = \psi(\xi) \varphi'(\xi), \quad K'(\xi + 0, \xi) = \varphi(\xi) \psi'(\xi),$$

also zufolge der  $\varphi$  und  $\psi$  verknüpfenden Identität

$$K'(\xi - 0, \xi) - K'(\xi + 0, \xi) = \varphi'(\xi) \psi(\xi) - \varphi(\xi) \psi'(\xi) = \frac{1}{k(\xi)},$$

woraus die Unstetigkeit der Größe  $K'(x, \xi)$  an der Stelle  $x = \xi$  klar wird. Beiläufig bemerken wir noch, daß die Größen

$$K(x, a) = \psi(x) \varphi(a), \quad K'(x, a) = \psi'(x) \varphi(a)$$

endlich und bestimmt sind, ebenso auch, wenn  $a$  ein regulärer Endpunkt ist, die Größen

$$K(a, a) = \psi(a) \varphi(a),$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} K'(a + \varepsilon + 0, a + \varepsilon) = \psi'(a) \varphi(a),$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} K'(a + \varepsilon - 0, a + \varepsilon) = \varphi'(a) \psi(a),$$

da in diesem Falle  $\psi(a)$  und  $\psi'(a)$  endlich sind; die letzten beiden wollen wir durch  $K'(a+0, a)$  und  $K'(a-0, a)$  bezeichnen.

Jetzt ist es leicht, die Normalfunktionen  $V$  als Eigenfunktionen des symmetrischen Kerns  $K(x, \xi)$  zu erkennen. Aus den Gleichungen

$$\frac{d}{dx} \left( k \frac{dV}{dx} \right) + (\lambda - l) V = 0,$$

$$\frac{d(k K'(x, \xi))}{dx} - l K(x, \xi) = 0,$$

deren letzte gilt, weil  $K$  als Funktion von  $x$  mit  $\varphi(x)$  oder  $\psi(x)$  bis auf einen von  $x$  unabhängigen Faktor übereinstimmt, folgt nämlich

$$\frac{d}{dx} \left[ k \left( K \frac{dV}{dx} - K' V \right) \right] + \lambda V K = 0.$$

Diese Gleichung integrieren wir über die Strecke  $J$  und beachten dabei folgende Tatsache allgemeiner Natur, die wir noch mehrfach zu benutzen haben: Ist  $f(x)$  auf der Strecke  $J$  mit Ausnahme einer Stelle  $x = \xi$  stetig, die Ableitung  $f'(x)$  aber durchweg stetig, so hat man nicht die gewöhnliche Formel

$$\int_a^b f'(x) dx = f(x) \Big|_a^b,$$

sondern die erweiterte

$$\int_a^b f'(x) dx = f(x) \Big|_a^b + f(\xi - 0) - f(\xi + 0).$$

Führen wir nach dieser Regel die bezeichnete Integration durch und beachten noch, daß nach § 1 die Größe

$$k \left( K \frac{dV}{dx} - K' V \right)$$

an den Stellen  $x = a$  und  $x = b$  verschwindet, so erhalten wir

$$k \left( K \frac{dV}{dx} - K' V \right) \Big|_{\xi+0}^{\xi-0} + \lambda \int_a^b K(x, \xi) V dx = 0,$$

oder, da die Gleichungen

$$K(x, \xi) \Big|_{\xi+0}^{\xi-0} = 0, \quad K'(x, \xi) \Big|_{\xi+0}^{\xi-0} = \frac{1}{k(\xi)}$$

gelten,

$$V(\xi) = \lambda \int_a^b K(x, \xi) V dx,$$

oder in der Bezeichnung, die wir festhalten wollen,

$$V = V(x) = \lambda \int_a^b K(\alpha, x) V(\alpha) d\alpha.$$



Damit ist die Sturm-Liouvillesche Aufgabe auf eine Integralgleichung mit bestimmtem symmetrischem Kern zurückgeführt.

Die Umkehrung dieses Resultats ergibt sich, im wesentlichen nach Hilbert, in folgender Weise. Es sei  $f(x)$  eine beliebige, im Intervalle  $J$  stetige Funktion von  $x$ ; setzt man

$$F(x) = \int_a^b K(x, \alpha) f(\alpha) d\alpha,$$

so findet man:

$$F'(x) = \int_a^b K'(x, \alpha) f(\alpha) d\alpha = \int_a^x K'(x, \alpha) f(\alpha) d\alpha + \int_x^b K'(x, \alpha) f(\alpha) d\alpha,$$

$$\frac{d(k F'(x))}{dx} = \int_a^b \frac{d(k K'(x, \alpha))}{dx} f(\alpha) d\alpha + k K'(x, \alpha) f(\alpha) \Big|_{x+0}^{x-0}.$$

Nun gilt die eine oder andere der Gleichungen

$$K'(x, \alpha) = \psi(\alpha) \varphi'(x), \quad K'(x, \alpha) = \varphi(\alpha) \psi'(x),$$

je nachdem  $x < \alpha$  oder  $x > \alpha$ ; man findet daher

$$K'(x, x+0) = \psi(x) \varphi'(x), \quad K'(x, x-0) = \varphi(x) \psi'(x),$$

$$K'(x, x-0) - K'(x, x+0) = K'(x+0, x) - K'(x-0, x) = -\frac{1}{k};$$

der obige Ausdruck der Größe  $(k F')'$  kann also geschrieben werden

$$\frac{d(k F'(x))}{dx} = \int_a^b \frac{d(k K'(x, \alpha))}{dx} f(\alpha) d\alpha - f(x).$$

Hieraus ergibt sich mit Rücksicht auf die Differentialgleichung, der die Größe  $K$  unterworfen ist,

$$\frac{d(k F'(x))}{dx} = \int_a^b l K(x, \alpha) f(\alpha) d\alpha - f(x),$$

oder

$$\frac{d(k F'(x))}{dx} - l F(x) = -f(x).$$

Speziell werde

$$f(x) = \lambda U$$

gesetzt und  $U$  sei irgend eine Lösung der Integralgleichung

$$U = \lambda \int_a^b K(x, \alpha) U(\alpha) d\alpha;$$

dann erfüllt  $U$  an den Stellen  $a$  und  $b$  die an die Normalfunktionen ge-

stellten Forderungen, da dies von  $K(x, \alpha)$  gilt, und man erhält die Gleichung,

$$F(x) = U, \quad \frac{d}{dx} \left( k \frac{dU}{dx} \right) - lU = -\lambda U,$$

d. h. die Sturm-Liouvillesche Differentialgleichung als Folge der Integralgleichung.

Endlich erschließen wir noch als Korollar einen weiteren von Hilbert\*) herrührenden Satz, von dem wir Gebrauch machen werden. Es sei  $\Phi(x)$  eine mit ihren ersten beiden Ableitungen auf der Strecke  $J$  stetige Funktion, die an den Enden  $a$  und  $b$  denselben Bedingungen wie die Eigenfunktionen unterworfen ist. Setzen wir dann

$$-\frac{d(k\Phi'(x))}{dx} + l\Phi(x) = f(x)$$

und bilden mit dieser offenbar stetigen Funktion  $f(x)$  den Ausdruck  $F(x)$ , so ist nach dem Obigen

$$\frac{d(kF'(x))}{dx} - lF(x) = -f(x),$$

die Differenz  $F - \Phi$  ist also eine Lösung der Gleichung

$$\frac{d(ky')}{dx} - ly = 0,$$

die mit ihrer Ableitung stetig ist und an den Stellen  $x = a$  und  $x = b$  ebenfalls die an die Eigenfunktionen gestellten Forderungen erfüllt. Danach wäre  $y$  eine Eigenfunktion, und  $\lambda = 0$  der zugehörige Eigenwert, was nach unseren Festsetzungen ausgeschlossen ist;  $y$  muß also identisch verschwinden und es ergibt sich

$$\Phi(x) = F(x), \quad \Phi(x) = \int_a^b K(\alpha, x) f(\alpha) d\alpha.$$

In dieser Form ist also jede Funktion von den für  $\Phi(x)$  geforderten Eigenschaften darstellbar.

### § 3.

## Hilfsmittel aus der allgemeinen Theorie der homogenen Integralgleichungen.

Aus der Dissertation von Schmidt\*\*) entnehmen wir folgenden Satz. Es seien  $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots$  die sämtlichen normierten Eigenfunktionen des

\*) Zweite Mitteilung, Sätze 11 und 16, Göttinger Nachrichten 1904, S. 221 und 230.

\*\*) Entwicklung willkürlicher Funktionen nach Systemen vorgeschriebener, § 8

symmetrischen Kerns  $K(x, \xi)$ , und  $\lambda_1, \lambda_2, \dots$  die zugehörigen Eigenwerte; d. h. es sollen die Gleichungen

$$\varphi_\nu(x) = \lambda_\nu \int_a^b K(x, \alpha) \varphi_\nu(\alpha) d\alpha,$$

$$\int_a^b (\varphi_\nu(\alpha))^2 d\alpha = 1$$

gelten, deren zweite einen in  $\varphi_\nu(x)$  verfügbaren konstanten Faktor festlegt. Wenn dann in dem Gebiet  $a \leq x \leq b, a \leq y \leq b$  die Reihe

$$\sum_{\nu}^{1, \infty} \frac{\varphi_\nu(x) \varphi_\nu(y)}{\lambda_\nu}$$

gleichmäßig konvergiert und der Kern  $K(x, y)$  überall endlich und stetig ist, so gilt die Formel

$$(A) \quad K(x, y) = \sum_{\nu}^{1, \infty} \frac{\varphi_\nu(x) \varphi_\nu(y)}{\lambda_\nu},$$

die eine Entwicklung des Kerns nach den Eigenfunktionen ergibt.

Die Voraussetzungen, an die diese Formel gebunden erscheint, sind bei den unten behandelten Kernen nicht ganz erfüllt; wohl aber sind gewisse von Schmidt\*) an einer andern Stelle geforderte Eigenschaften immer vorhanden, daß nämlich, wenn  $f(\alpha)$  eine auf der Strecke  $J$  mit Einschluß der Endpunkte stetige Funktion bedeutet, auch die Größe

$$\int_a^b f(\alpha) K(x, \alpha) d\alpha$$

eine auf der ganzen Strecke  $J$  stetige Funktion von  $x$  ist, und daß die von Hilbert als iterierter Kern bezeichnete Größe

$$K^2(x, y) = \int_a^b K(x, \alpha) K(\alpha, y) d\alpha$$

bezüglich beider Variablen  $x, y$  auf der ganzen Strecke  $J$  stetig ist, ohne identisch zu verschwinden.

Diese Eigenschaften, die nur, wenn singuläre Endpunkte auftreten, des Beweises bedürfen, beruhen darauf, daß in den unten behandelten Einzelfällen, wenn z. B.  $a$  ein singulärer Endpunkt ist,  $\psi(x)$  in ihm logarithmisch unendlich wird, und daß  $\varphi(x)$  dieselbe Eigenschaft an der Stelle  $b$  besitzt, wenn diese singulär ist. Wenn nun  $x$  und  $y$  dem Innern

---

\*) Dissertation § 11, Schlußbemerkung.

der Strecke  $J$  angehören und  $x \leq y$  ist, findet man sofort aus den in § 2 gegebenen Formen des Kerns die Gleichungen

$$\int_a^b f(\alpha) K(x, \alpha) d\alpha = \psi(x) \int_a^x f(\alpha) \varphi(\alpha) d\alpha + \varphi(x) \int_x^b f(\alpha) \psi(\alpha) d\alpha,$$

$$K^2(x, y) = \psi(x) \psi(y) \int_a^x \varphi(\alpha)^2 d\alpha + \varphi(x) \psi(y) \int_x^y \varphi(\alpha) \psi(\alpha) d\alpha + \varphi(x) \varphi(y) \int_y^b \psi(\alpha)^2 d\alpha,$$

deren rechte Seiten bei der angegebenen Beschaffenheit der Größen  $\varphi(x)$  und  $\psi(x)$  stetig bleiben, auch wenn  $x$  oder  $x$  und  $y$  in einen singulären Endpunkt hineintrücken, womit die von Schmidt geforderten Stetigkeitseigenschaften gesichert sind.

Ebenso sieht man leicht, daß die Größe  $K^2$  nicht identisch verschwindet; setzt man nämlich

$$f(\alpha) = K(\alpha, y),$$

so kann man  $K^2(x, y)$  mit der Größe  $F(x)$  des § 2 identifizieren und erhält damit die Differentialbeziehung

$$-K(x, y) = \frac{d}{dx} \left( k \frac{dK^2(x, y)}{dx} \right) - l K^2(x, y),$$

aus der das Behauptete folgt, da  $K(x, y)$  nicht identisch verschwindet.

Nun sind nach § 6 der Dissertation von Schmidt  $\varphi_1(x)$ ,  $\varphi_2(x)$ , ... auch die sämtlichen normierten Eigenfunktionen des Kerns  $K^2$ , sofern dieser nicht identisch verschwindet, und die zugehörigen Eigenwerte sind  $\lambda_1^2$ ,  $\lambda_2^2$ , ... Entwickelt man daher den Kern  $K^2$  nach seinen Eigenfunktionen, wofür die nötigen Voraussetzungen erfüllt sind, so erhält man die Gleichung

$$K^2(x, y) = \sum_v^{1, \infty} \frac{\varphi_v(x) \varphi_v(y)}{\lambda_v^2},$$

sobald ihre rechte Seite gleichmäßig bezüglich beider Variablen, die die ganze Strecke  $J$  durchlaufen, konvergiert. Diese Voraussetzung wollen wir in allen Einzelfällen als erfüllt nachweisen.

Jetzt erinnern wir uns der allgemeinen Bedingung, unter der eine unendliche Reihe gliedweise differenziert werden kann: Ist auf irgend einer Strecke des Konvergenzbereiches die aus den Ableitungen der einzelnen Glieder gebildete Reihe gleichmäßig konvergent, so ist sie auf dieser Strecke der Ableitung der ursprünglichen Reihe gleich, da sie gliedweise integriert werden kann und dann eine Reihe ergibt, die sich von der ur-

sprünglichen nur um einen konstanten Summanden unterscheidet. Wenn daher jetzt die neue Voraussetzung eingeführt wird, daß die Reihen

$$\sum_v^{1, \infty} \frac{\varphi'_v(x) \varphi_v(y)}{\lambda_v^2}, \quad \sum_v^{1, \infty} \frac{\varphi_v(x) \varphi_v(y)}{\lambda_v}$$

gleichmäßig konvergieren, wenn  $x$  und  $y$  beliebige Teilstrecken des Intervalls  $J$  durchlaufen, die keinen singulären Endpunkt enthalten, so findet man für dieses Gebiet die Gleichung

$$\frac{dK^2(x, y)}{dx} = \sum_v^{1, \infty} \frac{\varphi'_v(x) \varphi_v(y)}{\lambda_v^2},$$

die somit bezüglich beider Variablen für die ganze Strecke  $J$  mit Ausschluß singulärer Enden bewiesen ist.

Multipliziert man diese Gleichung mit  $k$  und berücksichtigt die Differentialgleichung

$$\frac{d(k\varphi'_v)}{dx} + (\lambda_v - l)\varphi_v = 0,$$

so sieht man, daß die rechte Seite gliedweise differenziert die Reihe

$$\sum_v^{1, \infty} \frac{(-\lambda_v + l) \varphi_v(x) \varphi_v(y)}{\lambda_v^2}$$

ergibt, die bei den für  $x$  und  $y$  geltenden Voraussetzungen gleichmäßig konvergiert, also nach dem erwähnten Satze über das Differenzieren der Reihen die Ableitung der Größe

$$k \frac{dK^2(x, y)}{dx}$$

nach  $x$  darstellt. Diese ist aber zufolge der oben aus § 2 abgeleiteten Differentialbeziehung zwischen  $K$  und  $K^2$

$$\frac{d}{dx} \left( k \frac{dK^2(x, y)}{dx} \right) = -K(x, y) + lK^2(x, y);$$

man erhält daher die Gleichungen

$$-K(x, y) + lK^2(x, y) = \sum_v^{1, \infty} \frac{(-\lambda_v + l) \varphi_v(x) \varphi_v(y)}{\lambda_v^2},$$

$$K(x, y) = \sum_v^{1, \infty} \frac{\varphi_v(x) \varphi_v(y)}{\lambda_v},$$

sobald  $x$  und  $y$  Intervalle der bezeichneten Art durchlaufen.

Wendet man auf die letzte Formel nochmals den Satz über das Differenzieren der Reihen an, und setzt man ferner voraus, daß von den Reihen

$$\sum_v^{1,\infty} \frac{\varphi'_v(x) \varphi_v(y)}{\lambda_v}, \quad \sum_v^{1,\infty} \frac{\varphi'_v(x) \varphi_v(x)}{\lambda_v}$$

die erste gleichmäßig konvergiert, wenn  $x$  und  $y$  sich in der angegebenen Weise bewegen, außerdem aber  $|x - y|$  über einer festen Grenze bleibt, die zweite aber gleichmäßig konvergiert, wenn  $x$  eine Strecke im Innern des Intervalls  $J$  durchläuft, so erhält man folgende Resultate.

(I) Wenn  $x$  und  $y$  beliebige Teilstrecken des Intervalls  $J$  durchlaufen, die keinen singulären Endpunkt enthalten, so gilt die gleichmäßig konvergente Entwicklung

$$(A) \quad K(x, y) = \sum_v^{1,\infty} \frac{\varphi_v(x) \varphi_v(y)}{\lambda_v}.$$

(II) Unter denselben Voraussetzungen und wenn außerdem  $|x - y|$  über einer festen Grenze liegt, gilt die gleichmäßig konvergente Entwicklung

$$(B) \quad K'(x, y) = \sum_v^{1,\infty} \frac{\varphi'_v(x) \varphi_v(y)}{\lambda_v};$$

ferner gilt die gleichmäßig konvergente Entwicklung

$$(C) \quad \frac{dK(x, x)}{dx} = 2 \sum_v^{1,\infty} \frac{\varphi'_v(x) \varphi_v(x)}{\lambda_v},$$

wenn  $x$  eine Strecke im Inneren des Intervalls  $J$  durchläuft.

Wir werden ferner in den Einzelfällen folgende Eigenschaften der Größen  $\varphi_v$  ableiten.

(III) Gelten dieselben Voraussetzungen wie unter (II) für  $x$  und  $y$ , und enthalten die durchlaufenen Strecken keinen Endpunkt, so liegt die Größe

$$\sum_v^{1,n} \frac{\varphi'_v(x) \varphi_v(y)}{\lambda_v}$$

zwischen endlichen, von  $n$ ,  $x$  und  $y$  unabhängigen Grenzen.

(IV) Ist  $a$  ein singulärer Endpunkt und gelten die Ungleichungen

$$a \leq x \leq a + c, \quad c_1 > c > 0, \quad a + c_1 \leq \xi < b,$$

so liegt die Größe

$$\int_a^x \sum_v^{1,n} \varphi_v(\alpha) \varphi_v(\xi) d\alpha$$

zwischen endlichen, von  $x$ ,  $\xi$  und  $n$  unabhängigen Grenzen.

Die Formel (C) ist im allgemeinen auch an regulären Endpunkten unrichtig. Wenn aber  $x$  von  $a$  und  $b$  verschieden ist, kann man nach § 2 setzen

$$K(x, x) = \varphi(x) \psi(x), \quad K'(x-0, x) = \varphi'(x) \psi(x), \quad K'(x+0, x) = \varphi(x) \psi'(x),$$

also

$$(C) \quad \frac{1}{2} \frac{dK(x, x)}{dx} = \sum_v^{1, \infty} \frac{\varphi_v(x) \varphi'_v(x)}{\lambda_v} = \frac{1}{2} [K'(x+0, x) + K'(x-0, x)].$$

Eine andere Formel summiert die Reihe (C), wenn  $x = a$  gesetzt wird und  $a$  ein regulärer Endpunkt ist. Die zugehörige Grenzbedingung sei

$$\varphi'(a) - h\varphi(a) = 0,$$

und die Konstante  $h$  endlich; dann findet man

$$\sum \frac{\varphi_v(a) \varphi'_v(a)}{\lambda_v} = h \sum \frac{(\varphi_v(a))^2}{\lambda_v},$$

also nach (I)

$$\sum_v^{1, \infty} \frac{\varphi_v(a) \varphi'_v(a)}{\lambda_v} = h K(a, a).$$

Da nun nach § 2 zu setzen ist

$$K(x, x) = \varphi(x) \psi(x), \quad K'(x-0, x) = \varphi'(x) \psi(x),$$

und diese Größen auch in dem regulären Endpunkte  $a$  endlich bleiben, so findet man als Korollar der Eigenschaft (I) die Gleichung

$$(D) \quad \sum_v^{1, \infty} \frac{\varphi_v(a) \varphi'_v(a)}{\lambda_v} = \varphi'(a) \psi(a) = K'(a-0, a) \\ = \lim_{\varepsilon=0} K'(a+\varepsilon-0, a+\varepsilon),$$

und eine analoge Formel gilt natürlich, wenn  $b$  ein regulärer Endpunkt der Strecke  $J$  und die Konstante  $H$  endlich ist.

#### § 4.

#### Grundformeln für die Darstellung willkürlicher Funktionen.

Mittels der Formeln (A), (B), (C), (D) können wir nun die wichtigsten die Darstellung willkürlicher Funktionen betreffenden Fragen in der gewünschten genaueren Weise beantworten. Unsere Schlußreihe kann in folgender Weise charakterisiert werden. Der für die Darstellungsformeln maßgebende Ausdruck

$$M_v = \varphi_v(x) \int_{\xi}^{\eta} f(\alpha) \varphi_v(\alpha) d\alpha$$

wird mit Hilfe der Differentialgleichung der Eigenfunktionen umgeformt, indem wir unter dem Integralzeichen

$$\varphi_v(\alpha) = \frac{1}{\lambda_v} \left\{ - \frac{d(k(\alpha) \varphi'_v(\alpha))}{d\alpha} + l(\alpha) \varphi_v(\alpha) \right\}$$

setzen. Dann wird durch partielle Integration bewirkt, daß unter dem Integralzeichen  $\varphi'_v(\alpha)$  und  $\varphi''_v(\alpha)$  nicht mehr vorkommen. Nach dieser Umgestaltung wird die Summe aller  $M_v$  gebildet und werden die auftretenden Reihen

$$\sum_v \frac{\varphi_v(\alpha) \varphi_v(x)}{\lambda_v}, \quad \sum_v \frac{\varphi'_v(\alpha) \varphi_v(x)}{\lambda_v}$$

nach den Formeln des § 3 durch  $K$  und  $K'$  ausgedrückt. So erhält man einen Ausdruck, in dem die mit Integralzeichen behafteten Glieder ähnliche Form haben, wie in dem umgestalteten Ausdruck  $M_v$ , und nun wird die vorher durchgeführte partielle Integration gewissermaßen rückgängig gemacht, indem man bewirkt, daß unter dem Integralzeichen nicht  $K$ , sondern die zweite Ableitung dieser Größe steht. Endlich erhält man aus der Differentialgleichung

$$\frac{d(k(\alpha) K'(\alpha, x))}{d\alpha} - l(\alpha) K(\alpha, x) = 0$$

eine von Integralzeichen freie, unmittelbar diskutierbare Gestalt der Summe aller  $M_v$ .

Um diese Rechnung im einzelnen durchzuführen, beginnen wir mit den unmittelbar ersichtlichen Gleichungen

$$\begin{aligned} M_v &= \frac{\varphi_v(x)}{\lambda_v} \int_{\xi}^{\eta} f(\alpha) \left[ l(\alpha) \varphi_v(\alpha) + \frac{d(k(\alpha) \varphi'_v(\alpha))}{d\alpha} \right] d\alpha \\ &= \int_{\xi}^{\eta} f(\alpha) l(\alpha) \frac{\varphi_v(\alpha) \varphi_v(x)}{\lambda_v} d\alpha - f(\alpha) k(\alpha) \frac{\varphi'_v(\alpha) \varphi_v(x)}{\lambda_v} \Big|_{\xi}^{\eta} \\ &\quad + \frac{\varphi_v(x)}{\lambda_v} \int_{\xi}^{\eta} f'(\alpha) k(\alpha) \varphi_v(\alpha) d\alpha \\ &= \int_{\xi}^{\eta} f(\alpha) l(\alpha) \frac{\varphi_v(\alpha) \varphi_v(x)}{\lambda_v} d\alpha - f(\alpha) k(\alpha) \frac{\varphi'_v(\alpha) \varphi_v(x)}{\lambda_v} \Big|_{\xi}^{\eta} \\ &\quad + f'(\alpha) k(\alpha) \frac{\varphi_v(\alpha) \varphi_v(x)}{\lambda_v} \Big|_{\xi}^{\eta} - \int_{\xi}^{\eta} \frac{d(f'(\alpha) k(\alpha))}{d\alpha} \frac{\varphi_v(\alpha) \varphi_v(x)}{\lambda_v} d\alpha. \end{aligned}$$



In diesen Gleichungen ist schon benutzt, was wir später, auch wenn  $\xi$  und  $\eta$  veränderlich sind, immer festhalten wollen, daß die Funktion  $f(\alpha)$  mit ihren ersten beiden Ableitungen auf der Strecke von  $\alpha = \xi$  bis  $\alpha = \eta$  stetig sei. Für die Größen  $x$ ,  $\xi$  und  $\eta$  aber machen wir solche Voraussetzungen, daß die Summe aller  $M_v$  gleichmäßig konvergiert, und zwar setzen wir fest, daß jede dieser Größen eine Teilstrecke des Intervalls  $J$  durchlaufe, die keinen singulären Endpunkt enthält. Die von der Größe  $\xi$  durchlaufene Strecke liege entweder im Inneren von  $J$ , oder ziehe sich in den Endpunkt  $a$  zusammen, wenn dieser regulär ist, so daß dann zugelassen wird, daß  $\xi$  den festen Wert  $a$  hat. Ferner seien  $c$  und  $c_1$  beliebig kleine positive Konstante, und gelte die Ungleichung

$$\eta - \xi > c.$$

Bezüglich der Größe  $x$  verfolgen wir zwei Annahmen:

1. Es bestehe eine der Beziehungen

$$x - \eta > c_1, \quad \xi - x > c_1.$$

2. Es sei  $x = \xi$ .

Unter diesen Voraussetzungen sind zunächst in der Reihe

$$R(x)^{\xi, \eta} = \sum_v^{1, \infty} M_v,$$

wenn wir für  $M_v$  den letzten der erhaltenen Ausdrücke setzen, die von Integralzeichen freien Summen

$$- \sum_v^{1, \infty} f(\alpha) k(\alpha) \frac{\varphi'_v(\alpha) \varphi_v(x)}{\lambda_v} \Big|_{\xi}^{\eta} + \sum_v^{1, \infty} f'(\alpha) k(\alpha) \frac{\varphi_v(\alpha) \varphi_v(x)}{\lambda_v} \Big|_{\xi}^{\eta}$$

gleichmäßig konvergent. Für die Summen

$$\sum_v^{1, \infty} \frac{\varphi_v(\xi) \varphi_v(x)}{\lambda_v}, \quad \sum_v^{1, \infty} \frac{\varphi_v(\eta) \varphi_v(x)}{\lambda_v}$$

ist dies aus der Eigenschaft (I) des § 3 unmittelbar ersichtlich, da die von  $x$ ,  $\xi$  und  $\eta$  durchlaufenen Strecken keinen singulären Endpunkt enthalten. Dasselbe gilt aber auch nach § 3 (II) von der Summe

$$\sum_v^{1, \infty} \frac{\varphi'_v(\eta) \varphi_v(x)}{\lambda_v},$$

da die Differenz  $|\eta - x|$  bei beiden Voraussetzungen 1. und 2. über einer positiven Grenze bleibt, und von der Summe

$$\sum_v^{1, \infty} \frac{\varphi'_v(\xi) \varphi_v(x)}{\lambda_v}$$

bei der Annahme 1., die auch die Größe  $|\xi - x|$  der Null nicht beliebig nahe kommen läßt. Bei der Annahme 2. ist letztere Summe

$$\sum_{\nu}^{1, \infty} \frac{\varphi'_{\nu}(\xi) \varphi_{\nu}(\xi)}{\lambda_{\nu}},$$

und diese konvergiert wiederum nach § 3 (II) gleichmäßig, da  $\xi$  entweder ein im Inneren der Strecke  $J$  liegendes Intervall durchläuft oder den konstanten Wert  $\alpha$  behält. Die Werte aller dieser Summen ergeben sich aus den Formeln (B), (C) und (D) des § 3.

Da ferner die Summe

$$\sum_{\nu}^{1, \infty} \frac{\varphi_{\nu}(\alpha) \varphi_{\nu}(x)}{\lambda_{\nu}}$$

gleichmäßig konvergiert, wenn  $\alpha$  das Intervall von  $\xi$  bis  $\eta$  durchläuft, so konvergiert die ganze Reihe  $R(x)^{\xi, \eta}$  bei unseren Voraussetzungen gleichmäßig, und man kann bei den im letzten Ausdruck von  $M_{\nu}$  auftretenden Integralen die Zeichen der Summation und Integration vertauschen. So erhält man den Ausdruck

$$\begin{aligned} R(x)^{\xi, \eta} = & \int_{\xi}^{\eta} f(\alpha) l(\alpha) K(\alpha, x) d\alpha - f(\eta) k(\eta) K'(\eta, x) + f'(\alpha) k(\alpha) K(\alpha, x) \Big|_{\xi}^{\eta} \\ & + f(\xi) k(\xi) \sum_{\nu}^{1, \infty} \frac{\varphi'_{\nu}(\xi) \varphi_{\nu}(x)}{\lambda_{\nu}} - \int_{\xi}^{\eta} K(\alpha, x) \frac{d(f'(\alpha) k(\alpha))}{d\alpha} d\alpha. \end{aligned}$$

Das letzte Integral ergibt, wenn man partiell integriert,

$$\begin{aligned} - \int_{\xi}^{\eta} K(\alpha, x) \frac{d(f'(\alpha) k(\alpha))}{d\alpha} d\alpha &= - f'(\alpha) k(\alpha) K(\alpha, x) \Big|_{\xi}^{\eta} + \int_{\xi}^{\eta} f'(\alpha) k(\alpha) K'(\alpha, x) d\alpha \\ &= - f'(\alpha) k(\alpha) K(\alpha, x) \Big|_{\xi}^{\eta} + f(\alpha) k(\alpha) K'(\alpha, x) \Big|_{\xi}^{\eta} - \int_{\xi}^{\eta} f(\alpha) \frac{d(k(\alpha) K'(\alpha, x))}{d\alpha} d\alpha; \end{aligned}$$

setzt man diesen Wert in die vorige Gleichung und berücksichtigt die oben angeführte Differentialgleichung, die die Größe  $K(\alpha, x)$  erfüllt, so erhält man den einfachen Ausdruck

$$R(x)^{\xi, \eta} = f(\xi) k(\xi) \sum_{\nu}^{1, \infty} \frac{\varphi'_{\nu}(\xi) \varphi_{\nu}(x)}{\lambda_{\nu}} - f(\xi) k(\xi) K'(\xi, x),$$

dessen Wert in jedem Falle bestimmt werden kann.

Gilt nämlich die Voraussetzung 1., so bleibt  $|x - \xi|$  über einer positiven Grenze, und ist daher nach § 3 (II) zu setzen

$$\sum_{\nu}^{1, \infty} \frac{\varphi'_{\nu}(\xi) \varphi_{\nu}(x)}{\lambda_{\nu}} = K'(\xi, x),$$

also

$$R(x)^{\xi, \eta} = 0.$$

Macht man zweitens die Annahme 2., so ist in dem Ausdruck  $R(x)^{\xi, \eta}$  für die zunächst zweideutige Größe  $K'(\xi, x)$  der Wert  $K'(\xi + 0, \xi)$  zu nehmen, da das letzte Glied von der unteren Grenze des Integrals

$$\int_a^{\eta} d[f(\alpha)k(\alpha)K'(\alpha, x)]$$

herrührt. Ist nun  $\xi$  zunächst von  $a$  verschieden, so ergibt die Formel (C) des § 3

$$\sum_{\nu}^{1, \infty} \frac{\varphi'_{\nu}(\xi) \varphi_{\nu}(\xi)}{\lambda_{\nu}} = \frac{1}{2} [K'(\xi + 0, \xi) + K'(\xi - 0, \xi)]$$

und man erhält aus dem für  $R(x)^{\xi, \eta}$  aufgestellten Ausdrucke

$$R(\xi)^{\xi, \eta} = \frac{1}{2} f(\xi)k(\xi) [K'(\xi - 0, \xi) - K'(\xi + 0, \xi)],$$

also zufolge der Unstetigkeit der Funktion  $K'$

$$R(\xi)^{\xi, \eta} = \frac{1}{2} f(\xi).$$

Setzt man dagegen  $\xi = a$  und ist die Konstante  $h$  endlich, so ergibt sich nach § 3 (D) und mittels der in § 2 angegebenen Werte von  $K'(a \pm 0, a)$  die Gleichung

$$R(a)^{a, \eta} = -f(a)k(a)K'(a + 0, a) + f(a)k(a)K'(a - 0, a) = f(a).$$

Alle drei Reihen, deren Werte hiermit bestimmt sind, konvergieren gleichmäßig bei den zugelassenen Werten von  $x$ ,  $\xi$  und  $\eta$ , da dies im allgemeinen von der Reihe  $R(x)^{\xi, \eta}$  bewiesen ist.

Analog den letzten beiden Ausdrücken  $R(\xi)^{\xi, \eta}$  und  $R(a)^{a, \eta}$  erhält man offenbar, wenn man die Rollen der Endpunkte  $a$  und  $b$  vertauscht und die Integrationsrichtung überall umkehrt, die Formeln

$$R(\eta)^{\xi, \eta} = \frac{1}{2} f(\eta), \quad R(b)^{\xi, b} = f(b);$$

in der ersten Gleichung wird vorausgesetzt, daß das Intervall der Größe  $\eta$  den Endpunkt  $b$  nicht enthalte oder daß beständig  $\eta = b$  sei, während  $\xi$  auch in den Endpunkt  $a$ , wenn dieser regulär ist, hineinrücken darf; in der zweiten muß  $b$  ein regulärer Endpunkt sein.

Läßt man endlich  $x$  zwischen  $\xi$  und  $\eta$  liegen, und die Differenzen  $x - \xi$  und  $\eta - x$  über festen Grenzen bleiben, während  $\xi$  und  $\eta$  beliebige Teilintervalle der Strecke  $J$  durchlaufen, denen keine singulären Endpunkte angehören, so erhält man die gleichmäßig konvergente Reihe

$$R(x)^{\xi, \eta} = R(x)^{\xi, x} + R(x)^{x, \eta} = f(x);$$

dies ergibt sich offenbar, indem man die für  $R(\xi)^{\xi, \eta}$  und  $R(\eta)^{\xi, \eta}$  abgeleiteten Werte kombiniert.

Die erhaltenen Resultate können in folgender Weise zusammengefaßt werden.

Es seien  $\varphi_\nu(x)$  die normierten Eigenfunktionen eines Kernes  $K(x, y)$ , für den die Eigenschaften (I) und (II) des § 3 gesichert sind, und werde allgemein gesetzt

$$R(x)^{\xi, \eta} = \sum_{\nu}^{1, \infty} \varphi_\nu(x) \int_{\xi}^{\eta} f(\alpha) \varphi_\nu(\alpha) d\alpha.$$

Jede der Größen  $x, \xi, \eta$  durchlaufe eine Strecke, die einen Teil des Intervalls  $J$  bildet, ohne einen singulären Endpunkt zu enthalten; die Funktion  $f(\alpha)$  bleibe mit ihren ersten beiden Ableitungen auf der Strecke von  $\xi$  bis  $\eta$  stetig. Die Größen  $|x - \xi|$ ,  $|y - \eta|$  und  $\eta - \xi$  mögen über positiven Grenzen bleiben;  $c, c_1$  seien beliebig kleine positive Größen. Dann gelten folgende Gleichungen unter den neben ihnen stehenden besonderen Bedingungen.

$$\xi - a > c, \quad R(\xi)^{\xi, \eta} = \frac{1}{2} f(\xi),$$

$$b - \eta > c_1, \quad R(\eta)^{\xi, \eta} = \frac{1}{2} f(\eta),$$

$$\xi < x < \eta, \quad R(x)^{\xi, \eta} = f(x),$$

$$(x - \xi)(x - \eta) > 0, \quad R(x)^{\xi, \eta} = 0.$$

Ist  $a$  ein regulärer Endpunkt und die zugehörige Konstante  $h$  endlich, so gilt die Gleichung

$$R(a)^{a, \eta} = f(a),$$

ebenso, wenn  $b$  ein regulärer Endpunkt und die Konstante  $H$  endlich ist,

$$R(b)^{\xi, b} = f(b).$$

In allen diesen Gleichungen konvergieren die Reihen  $R$  gleichmäßig.

## § 5.

### Ergänzungen und Ergebnisse.

Die erhaltenen Resultate zeigen auch, unter welchen Bedingungen eine Funktion  $f(x)$  durch die in den Anwendungen hauptsächlich vorkommende Reihe

$$R(x) = R(x)^{a,b} = \sum_{\nu}^{1,\infty} \varphi_{\nu}(x) \int_a^b f(\alpha) \varphi_{\nu}(\alpha) d\alpha$$

dargestellt werden kann.

Zunächst seien beide Endpunkte  $a$  und  $b$  regulär und die Strecke  $J$  werde durch die Stellen

$$a = \xi_0, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-1}, \xi_n = b$$

in solche Teilstrecken zerlegt, daß innerhalb jeder von ihnen  $f(x)$  mit den ersten beiden Ableitungen stetig sei. Setzt man dann allgemein  $\xi_{\nu} = \eta_{\nu-1}$ , so ist offenbar

$$R(x) = R(x)^{\xi_0, \eta_0} + R(x)^{\xi_1, \eta_1} + \dots + R(x)^{\xi_{n-1}, \eta_{n-1}}$$

und die Summanden rechts sind nach § 4 zu bestimmen. Fällt  $x$  mit keiner Stelle  $\xi$  zusammen, so ist nur ein Summand, etwa der  $(p+1)^{\text{te}}$ , von Null verschieden, derjenige nämlich, dessen Integrationsintervall den Wert  $x$  umfaßt, und dieser hat den Wert

$$R(x)^{\xi_p, \eta_p} = R(x)^{\xi_p, x} + R(x)^{x, \eta_p} = f(x),$$

so daß man erhält

$$R(x) = f(x).$$

Fällt  $x$  dagegen mit einem Werte  $\xi_{\nu} = \eta_{\nu-1}$  zusammen, so hat man nur zwei von Null verschiedene Summanden

$$R(\xi_{\nu})^{\xi_{\nu}, \eta_{\nu}} = \frac{1}{2} f(x_{\nu}), \quad R(\eta_{\nu-1})^{\xi_{\nu-1}, \eta_{\nu-1}} = \frac{1}{2} f(\eta_{\nu-1});$$

genauer hat man, wenn  $f(x)$  an der Stelle  $\xi_{\nu}$  unstetig ist, zu setzen

$$f(\xi_{\nu}) = f(\xi_{\nu} + 0), \quad f(\eta_{\nu-1}) = f(\eta_{\nu-1} - 0) = f(\xi_{\nu} - 0),$$

und daraus ergibt sich für das ganze Innere der Strecke  $J$  die Gleichung

$$R(x) = \frac{1}{2} [f(x+0) + f(x-0)].$$

Endlich erhält man, wenn  $x$  einer der Grenzen  $a$  und  $b$  gleich gesetzt wird, wieder jedesmal nur einen von Null verschiedenen Summanden, der nach § 4 die folgenden Werte hat:

$$R(a)^{\xi_0, \eta_0} = f(a), \quad R(b)^{\xi_{n-1}, \eta_{n-1}} = R(b)^{\xi_n - 1, b} = f(b),$$

so daß sich für die Endpunkte bezüglich der Reihe  $R(x)$  ergibt

$$R(a) = f(a), \quad R(b) = f(b).$$

Um die analogen Resultate für den Fall, daß mindestens eine der Grenzen, etwa  $a$ , singular ist, abzuleiten, bedarf es einer ergänzenden Untersuchung; denn da jetzt der Summand  $R^{a, \eta_0}$  nach § 4 nicht zu bestimmen ist, würde man aus den durchgeführten Betrachtungen zunächst nur eine Gleichung

$$R(x)^{\eta_0, \eta_{n-2}} = \frac{1}{2} [f(x+0) + f(x-0)]$$

erhalten, in der  $x$  ein beliebiger Wert im Inneren von  $J$  sein könnte; wäre  $b$  regulär, so könnte  $\eta_{n-2}$  durch  $b$  ersetzt werden.

Wir definieren nun eine Hilfsfunktion  $g(\alpha)$  in folgender Weise. Auf der Strecke von  $\alpha = a$  bis  $\alpha = \eta_0$ , auf der  $f(\alpha)$ ,  $f'(\alpha)$  und  $f''(\alpha)$  stetige Funktionen sind, sei  $g(\alpha) = f(\alpha)$ ; ferner sei  $g(\alpha)$  auf der ganzen Strecke  $J$  mit ihren ersten beiden Ableitungen stetig und es sei  $g(x) = f(x)$ ; endlich sei  $g(\alpha) = 0$  auf der Strecke von  $\eta_{n-2}$  bis  $b$ , der  $x$  nicht angehört. Dann genügt  $g(\alpha)$  an beiden Enden der Strecke  $J$  den an die Eigenfunktionen gestellten Forderungen, ist also nach § 2 in der Form

$$g(x) = \int_a^b K(x, \alpha) h(\alpha) d\alpha$$

darstellbar, wobei  $h(\alpha)$  eine auf der Strecke  $J$  stetige Funktion bedeutet. Eine solche Funktion ist aber, wie wir aus der allgemeinen Theorie der Integralgleichungen\*) entnehmen, nach den Eigenfunktionen in eine auf der ganzen Strecke  $J$  gleichmäßig konvergierende Reihe zu entwickeln, deren Koeffizienten ähnlich wie in der Fourierschen Reihe bestimmt werden:

$$g(x) = \sum_v^{1, \infty} \varphi_v(x) \int_a^b g(\alpha) \varphi_v(\alpha) d\alpha;$$

denn die Bedingungen dieses Satzes sind nach § 3 bei unsern Kernen erfüllt.

Anderseits ergeben die Sätze des § 4

$$\sum_v^{1, \infty} \varphi_v(x) \int_{\eta_0}^{\eta_{n-2}} g(\alpha) \varphi_v(\alpha) d\alpha = f(x) = g(x),$$

da die Reihe links als die für die Funktion  $g(\alpha)$  gebildete Reihe  $R^{\eta_0, \eta_{n-2}}$  anzusehen ist; sie konvergiert nach § 4 gleichmäßig, solange  $\eta_0 - a$ ,  $b - \eta_{n-2}$ ,  $x - \eta_0$  und  $\eta_{n-2} - x$  über festen positiven Grenzen bleiben. Kombiniert man diese Gleichung mit der vorhergehenden für  $g(x)$  aufgestellten, so findet man das gewünschte Resultat:

$$\sum_v^{1, \infty} \varphi_v(x) \int_a^{\eta_0} g(\alpha) \varphi_v(\alpha) d\alpha = \sum_v^{1, \infty} \varphi_v(x) \int_a^{\eta_0} f(\alpha) \varphi_v(\alpha) d\alpha = 0,$$

und diese Reihe konvergiert unter derselben Bedingung wie  $R^{\eta_0, \eta_{n-2}}$  gleichmäßig.

\*) Schmidt, Dissertation § 9; § 11, Schlußbemerkung.

Ähnlich würde sich ergeben

$$\sum_v^{1,\infty} \varphi_v(x) \int_{\eta_n-2}^b f(\alpha) \varphi_v(\alpha) d\alpha = 0,$$

und damit ist die Gleichung

$$R(x) = \frac{1}{2} [f(x+0) + f(x-0)]$$

für das Innere der Strecke  $J$  auch in dem Fall erwiesen, daß singuläre Endpunkte zugelassen werden. Jede Funktion also, die ebenso wie ihre erste und zweite Ableitung auf der Strecke  $J$  nur eine endliche Anzahl endlicher Sprünge macht, sonst aber stetig ist, kann bei den Voraussetzungen § 3 (I), (II) nach den Eigenfunktionen  $\varphi_v(x)$  so entwickelt werden, wie es die letzte Gleichung zeigt.

Um noch allgemeinere Klassen von Funktionen entwickeln zu können, setzen wir zunächst auf der ganzen Strecke

$$f(\alpha) = 1$$

und führen die Bezeichnung

$$\Phi(\alpha, n) = \sum_v^{1,n} \varphi_v(\xi) \varphi_v(\alpha)$$

ein. Dann ergibt sich aus der Differentialgleichung der Eigenfunktionen als spezieller Fall einer in § 4 benutzten Gleichung

$$\begin{aligned} \int_{\xi}^{\eta} \Phi(\alpha, n) d\alpha &= \sum_v^{1,n} \varphi_v(\xi) \int_{\xi}^{\eta} \varphi_v(\alpha) d\alpha = k(\alpha) \sum_v^{1,n} \frac{\varphi_v(\xi) \varphi_v'(\alpha)}{\lambda_v} \Big|_{\xi}^{\eta} \\ &+ \int_{\xi}^{\eta} l(\alpha) \sum_v^{1,n} \frac{\varphi_v(\xi) \varphi_v(\alpha)}{\lambda_v}; \end{aligned}$$

wenn daher  $\xi$  und  $\eta$  um beliebig kleine endliche Strecken voneinander und von  $a$  und  $b$  entfernt bleiben, so liegt dieser Ausdruck zwischen festen von  $n$ ,  $\xi$  und  $\eta$  unabhängigen Grenzen, da dies vom ersten Teil der rechten Seite nach § 3 (III) gilt, vom zweiten Teil aber aus der gleichmäßigen Konvergenz der Reihe

$$\sum_v^{1,\infty} \frac{\varphi_v(\xi) \varphi_v(\alpha)}{\lambda_v} = K(\xi, \alpha)$$

folgt. Ferner ergibt sich aus § 4 der Satz

$$\sum_v^{1,\infty} \varphi_v(\xi) \int_{\xi}^{\eta} \varphi_v(\alpha) d\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\xi}^{\eta} \Phi(\alpha, n) d\alpha = \frac{1}{2}$$

und dieser Grenzwert wird unter der Voraussetzung

$$a + c_0 < \xi < \eta < b - c_2, \quad \eta - \xi > c_1,$$

in der durch  $c$  beliebig kleine positive Konstante bezeichnet sind, gleichmäßig angestrebt. Für die Funktion  $\Phi(\alpha, n)$  sind daher die Voraussetzungen erfüllt, unter denen man aus der letzten Gleichung nach einer von du Bois-Reymond herrührenden Methode mittels des zweiten Mittelwertsatzes schließen kann

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\xi}^{\eta} f(\alpha) \Phi(\alpha, n) d\alpha = \sum_v^{1, \infty} \varphi_v(\xi) \int_{\xi}^{\eta} f(\alpha) \varphi_v(\alpha) d\alpha = \frac{1}{2} f(\xi + 0),$$

wobei  $f(\alpha)$  eine beliebige Funktion bedeutet, die auf der Strecke von  $\alpha = \xi$  bis  $\alpha = \eta$  von beschränkter Schwankung ist. Man kontrolliert diese Behauptung leicht auf Grund der Darstellung von Jordan\*), der wir uns mit der Bezeichnung  $\Phi(\alpha, n)$  angeschlossen haben.

Analog der letzten Gleichung findet man offenbar, indem man die Rollen der Größen  $\xi$  und  $\eta$  vertauscht,

$$\sum_v^{1, \infty} \varphi_v(\eta) \int_{\xi}^{\eta} f(\alpha) \varphi_v(\alpha) d\alpha = \frac{1}{2} f(\eta - 0)$$

und hieraus, wenn  $f(\alpha)$  auf der ganzen Strecke  $J$  von beschränkter Schwankung ist, und  $x$  zwischen  $a + c_0$  und  $b - c_2$  liegt,

$$R(x)^{a+c_0, b-c_2} = \sum_v^{1, \infty} \varphi_v(x) \int_{a+c_0}^{b-c_2} f(\alpha) \varphi_v(\alpha) d\alpha = \frac{1}{2} [f(x+0) + f(x-0)].$$

Um in diese Formel die erwünschten Integrationsgrenzen  $a$  und  $b$  einführen zu können, gehen wir davon aus, daß nach den an die Funktion  $g(\alpha)$  geknüpften Erwägungen, wenn

$$x > a + c_0 \geq \eta > a$$

angenommen wird, die Gleichung

$$\sum_v^{1, \infty} \varphi_v(x) \int_a^{\eta} \varphi_v(\alpha) d\alpha = 0$$

gilt; die Reihe konvergiert bezüglich der Variablen  $x$  und  $\eta$  gleichmäßig, wenn  $x - (a + c_0)$  und  $\eta - a$  über beliebig kleinen festen Grenzen bleiben. Ziehen wir jetzt, was bisher noch nicht geschehen ist, die Eigenschaft § 3 (IV) heran und setzen, abweichend von der bisherigen Bezeichnung,

$$\Phi(\alpha, n) = \sum_v^{1, n} \varphi_v(x) \varphi_v(\alpha),$$

\*) Cours d'analyse Bd. 2, Nr. 221.



so sehen wir, daß das Integral

$$\int_a^\eta \Phi(\alpha, n) d\alpha$$

zwischen endlichen von  $n$  und  $\eta$  unabhängigen Grenzen liegt, und zwar auch wenn  $\eta - a$  beliebig klein wird. Außerdem gibt die soeben aufgestellte Gleichung

$$\lim_{n=\infty} \int_a^\eta \Phi(\alpha, n) d\alpha = 0,$$

und der Grenzwert wird gleichmäßig angestrebt, wenn  $\eta$  die Strecke von  $a + c_0$  bis zu einer  $a$  beliebig wenig übertreffenden Grenze herab durchläuft. Der Ausdruck  $\Phi(\alpha, n)$  hat daher wiederum die an der zitierten Stelle von Jordan geforderten Eigenschaften, aus denen man, wenn  $f(x)$  eine Funktion von beschränkter Schwankung ist, schließen kann

$$\lim_{n=\infty} \int_a^\eta f(\alpha) \Phi(\alpha, n) d\alpha = 0,$$

oder, indem man speziell  $\eta = a + c_0$  setzt

$$R(x)^{a, a+c_0} = \sum_v^{1, \infty} \varphi_v(x) \int_a^{a+c_0} f(\alpha) \varphi_v(\alpha) d\alpha = 0.$$

Kombiniert man dies Resultat mit dem für  $R^{a+c_0, b-c_2}$  gefundenen Ausdruck und stellt eine analoge Formel für das Intervall von  $b - c_2$  bis  $b$  auf, so ergibt sich schließlich die erwünschte Gleichung

$$\begin{aligned} R^{a, b} &= R^{a, a+c_0} + R^{a+c_0, b-c_2} + R^{b-c_2, b} \\ &= \sum_v^{1, \infty} \varphi_v(x) \int_a^b f(\alpha) \varphi_v(\alpha) d\alpha = \frac{1}{2} [f(x+0) + f(x-0)], \end{aligned}$$

die somit unter den Voraussetzungen § 3, (I) bis (IV) für eine beliebige Funktion von beschränkter Schwankung und für das Innere der Strecke  $J$  bewiesen ist.

Will man von der Eigenschaft (IV), die im allgemeinen schwer zu beweisen ist, keinen Gebrauch machen, so braucht man nur vorauszusetzen, daß die Funktion  $f(\alpha)$  von einem singulären Endpunkte an eine beliebig kleine Strecke weit stetig sei und stetige Ableitungen erster und zweiter Ordnung besitze, im übrigen aber von beschränkter Schwankung sei.

Endlich kann mittels der jetzt vorliegenden Ergebnisse auch gezeigt werden, daß die Reihe  $R(x)$  gleichmäßig konvergiert, wenn die Variable  $x$

eine Strecke durchläuft, die in einer größeren enthalten ist, auf der die Funktion  $f(x)$  stetig bleibt. Wir können uns betreffs dieses Nachweises auf eine Abhandlung berufen\*), in der dieser Satz zwar nur für die Sturm-Liouvilleschen Normalfunktionen, aber doch im wesentlichen nach einer allgemeinen Methode abgeleitet ist. Das Integral

$$\int_{\xi}^{\eta} \Phi(\alpha, n) d\alpha$$

konvergiert nämlich nach den oben erhaltenen Resultaten genau in dem Sinne gleichmäßig gegen seine Grenze  $\frac{1}{2}$ , wie es a. a. O.\*\*\*) vorausgesetzt ist. Allerdings ist dort mittels der asymptotischen Darstellung der Normalfunktionen bewiesen, daß die Reihe

$$\sum_{\nu}^{1, \infty} \varphi_{\nu}(x) \int_{\alpha}^{\eta} \varphi_{\nu}(\alpha) f(\alpha) d\alpha = \lim_{n=\infty} \int_{\alpha}^{\eta} f(\alpha) \Phi(\alpha, n) d\alpha$$

bei den Voraussetzungen

$$x > \eta + c, \quad c > 0,$$

und wenn  $f(\alpha)$  von beschränkter Schwankung ist, gleichmäßig gegen den Wert Null konvergiert; das haben wir aber soeben aus der Eigenschaft (IV) erschlossen, was nötig war, da die asymptotische Darstellung im allgemeinen an den singulären Stellen ungültig wird. Für die zitierte Argumentation sind also die Grundlagen auch hier gesichert, und der ausgesprochene Satz über die gleichmäßige Konvergenz der Reihe  $R(x)$  ist so gut wie bewiesen.

## § 6.

### Anwendungen: die Sturm-Liouvilleschen Reihen.

Von Sturm und Liouville sind eingehend diejenigen Normalfunktionen untersucht, bei denen auf der Strecke  $J$  die Größe  $k$  von Null verschieden und  $l$  endlich, beide Endpunkte  $a$  und  $b$  also regulär sind, und der Kern  $K(x, \xi)$  endlich und stetig bleibt, wenn jedes seiner Argumente die ganze Strecke  $J$  durchläuft. Unter dieser Voraussetzung kann man die Gleichung

$$\frac{d(ky')}{dx} + (\lambda - l)y = 0$$

durch die Substitutionen

$$z = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{k}}, \quad U = y \sqrt[4]{k}$$

\*) Math. Annalen Bd. 60, S. 411 ff.

\*\*) a. a. O. S. 408.

in die Gleichung

$$\frac{d^2 U}{dz^2} + (\lambda - l_1) U = 0$$

überführen. Wird hier als unabhängige Variable das Produkt aus  $z$  und einem passenden konstanten Faktor eingeführt, und die Bedeutung der Buchstaben  $x, l, \lambda$  in leicht zu übersehender Weise geändert, so bewirkt man, daß das Intervall  $J$  sich von 0 bis  $\pi$  erstreckt, und die Differentialgleichung der Normalfunktionen ist

$$\frac{d^2 U}{dz^2} + (\lambda - l) U = 0,$$

wobei  $l$  auf der Strecke  $J$  endlich ist und nach § 2 so eingerichtet gedacht werden kann, daß keiner der Eigenwerte verschwindet. Die Grenzbedingungen sind

$$\frac{dU}{dx} - hU \Big|_0 = 0, \quad \frac{dU}{dx} + HU \Big|_\pi = 0,$$

wobei auch unendliche Werte von  $h$  und  $H$ , d. h. Bedingungen von der Form

$$U|_0 = 0, \quad U|_\pi = 0$$

nicht ausgeschlossen sind. Wir bleiben bei der Annahme endlicher Werte von  $h$  und  $H$ , da andernfalls nur leichte Modifikationen nötig werden.

Unter diesen Voraussetzungen gelten nun nach Liouville\*), wenn  $\varrho$  den positiven Wert von  $\sqrt{\lambda}$  bedeutet, die Formeln

$$U = \cos \varrho x + \frac{\Psi}{\varrho}, \quad \frac{U'}{\varrho} = -\sin \varrho x + \frac{\Psi}{\varrho},$$

$$\varrho = \sqrt{\lambda} = \nu + \frac{\Psi}{\nu},$$

wobei  $\nu = 1, 2, \dots$  zu setzen ist und durch  $\Psi$ , wie auch fernerhin, Größen bezeichnet sind, die zwischen endlichen, von  $\nu$  und  $x$  unabhängigen Grenzen verbleiben.

Um die normierten Eigenfunktionen herzustellen, benutzen wir die für die eingeführte Größe  $U$  von Liouville abgeleitete Formel\*\*)

$$\int_0^\pi U(\alpha)^2 d\alpha = \frac{\pi}{2} + \frac{\Psi}{\nu};$$

da nun der angegebene Wert von  $\varrho$  ergibt

\*) Liouville, Journal de Math. (1) Bd. 2. Kneser, Math. Annalen Bd. 58, S. 116.

\*\*) Math. Annalen Bd. 58, S. 122.

$$\cos \varrho x = \cos \nu x \cos \frac{\Psi}{\nu} - \sin \nu x \sin \frac{\Psi}{\nu} = \cos \nu x + \frac{\Psi}{\nu},$$

$$\sin \varrho x = \sin \nu x + \frac{\Psi}{\nu},$$

so findet man als Ausdruck der normierten Eigenfunktionen

$$U \left[ \int_0^\pi U(\alpha)^2 d\alpha \right]^{-\frac{1}{2}} = \varphi_\nu(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos \nu x + \frac{\Psi}{\nu},$$

$$\frac{\varphi'_\nu(x)}{\nu} = -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin \nu x + \frac{\Psi}{\nu},$$

und die zugehörigen Eigenwerte sind

$$\lambda_\nu = \varrho^2 = \nu^2 + \frac{\Psi}{\nu}.$$

Hieraus folgt

$$\frac{1}{\lambda_\nu} = \frac{1}{\nu^2} \left( 1 + \frac{\Psi}{\nu} \right), \quad \frac{\varphi_\nu(x) \varphi_\nu(y)}{\lambda_\nu} = \frac{2}{\pi} \frac{\cos \nu x \cos \nu y}{\nu^2} + \frac{\Psi}{\nu^3}.$$

Die Reihe

$$\sum_{\nu}^{1,\infty} \frac{\varphi_\nu(x) \varphi_\nu(y)}{\lambda_\nu}$$

konvergiert daher gleichmäßig, wenn  $x$  und  $y$  das ganze Intervall  $J$  mit Einschluß der Grenzen durchlaufen, und damit ist nach dem in § 3 zitierten Satze von Schmidt die Gleichung (A) erwiesen.

Um auch die Formeln (B) und (C) zu erhalten, gehen wir davon aus, daß die aufgestellten Formen der normierten Eigenfunktionen ergeben

$$\frac{\varphi'_\nu(x) \varphi_\nu(y)}{\lambda_\nu} = \frac{\varphi'_\nu(x)}{\nu} \varphi_\nu(y) \left( \frac{1}{\nu} + \frac{\Psi}{\nu^2} \right) = -\frac{2 \sin \nu x \cos \nu y}{\pi \nu} + \frac{\Psi}{\nu^2},$$

$$\sum_{\nu} \frac{\varphi'_\nu(x) \varphi_\nu(y)}{\lambda_\nu} = -\frac{1}{\pi} \sum_{\nu} \frac{\sin \nu(x+y)}{\nu} - \frac{1}{\pi} \sum_{\nu} \frac{\sin \nu(x-y)}{\nu} + \sum_{\nu} \frac{\Psi}{\nu^2}.$$

Hier ist das letzte Glied der rechten Seite gleichmäßig konvergent, wie immer  $x$  und  $y$  im Intervall  $J$  sich bewegen mögen. Nehmen wir aber an,  $x$  durchlaufe ein Intervall, das einen Teil von  $J$  bildet, den Punkt  $y$  aber nicht enthält, so bleiben  $x-y$  und  $x+y$  oberhalb einer positiven Grenze und unterhalb eines Wertes von der Form  $2\pi - c$ , wobei  $c$  positiv ist. Daraus folgt die gleichmäßige Konvergenz auch des ersten und zweiten Gliedes auf der rechten Seite unserer Gleichung; denn es ist bekannt\*), daß die Reihe

$$S = \sum_{\nu}^{1,\infty} \frac{\sin \nu u}{\nu}$$

\*) Weber-Wellstein, Enc. d. Elementarmathematik Bd. 1, § 135.

auf jeder Strecke, die durch die Beziehungen

$$0 < c_0 < u < 2\pi - c, \quad c > 0$$

definiert ist, gleichmäßig konvergiert. Ferner bleibt die Summe der ersten  $n$  Glieder dieser Reihe, wie immer  $u$  und  $n$  gewählt werden mögen, zwischen endlichen, von  $u$  und  $n$  unabhängigen Grenzen, auch wenn  $u$  der Null beliebig nahe kommt; dieselbe Eigenschaft kommt daher auch der Reihe

$$\sum_{\nu}^{1,\infty} \frac{\varphi'_{\nu}(x) \varphi_{\nu}(y)}{\lambda_{\nu}}$$

zu, wenn  $x$  und  $y$  Strecken des Intervalls  $J$  durchlaufen, die den Endpunkt  $\pi$  nicht enthalten.

Die Formel (C) macht keine neuen Schwierigkeiten; denn unsere Ausdrücke für  $\varphi_{\nu}(x)$  und  $\varphi'_{\nu}(x)$  ergeben

$$\sum_{\nu}^{1,\infty} \frac{\varphi_{\nu}(x) \varphi'_{\nu}(x)}{\lambda_{\nu}} = -\frac{1}{\pi} \sum_{\nu}^{1,\infty} \frac{\sin 2\nu x}{\nu} + \sum_{\nu}^{1,\infty} \frac{\psi}{\nu^2},$$

und aus den angeführten Eigenschaften der Reihe  $S$  schließt man sofort, daß die hingeschriebene Reihe gleichmäßig konvergiert, wenn  $x$  eine zwischen 0 und  $\pi$  liegende Strecke durchläuft. Damit sind die Eigenschaften (I), (II), (III) und die Formeln (A), (B), (C) in dem vollen Umfange gesichert, wie sie in § 4 gebraucht werden; die Eigenschaft (IV) kommt nicht in Frage, da beide Endpunkte regulär sind. Die Resultate der §§ 4 und 5 gelten also für die Sturm-Liouvilleschen Reihen, wie wir übrigens auf andere Weise schon früher nachgewiesen haben.\*)

## § 7.

### Die Darstellung willkürlicher Funktionen durch Besselsche.

Die einfachsten von der mathematischen Physik gestellten Aufgaben, die denen des vorigen Paragraphen analog sind und auf Besselsche Funktionen führen, können in folgender Form ausgesprochen werden. Es sollen die Integrale der Besselschen Gleichung

$$-\frac{d}{dx} \left( x \frac{dy}{dx} \right) + \lambda xy = 0$$

gefunden werden, die an der singulären Stelle  $a = 0$  endlich sind, und an der Stelle  $b = 1$  einer der Forderungen

$$y|_1 = 0, \quad y' + Hy|_1 = 0,$$

\*) Math. Annalen Bd. 60.

in denen  $H$  eine Konstante ist, unterworfen und auf der Strecke von 0 bis 1 mit ihren Ableitungen stetig sind; man findet leicht

$$y = J(x\sqrt{\lambda}), \quad J(x) = 1 - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^2 \cdot 4^2} - \frac{x^6}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} + \cdots,$$

und erhält für  $\lambda$  eine der Gleichungen

$$J(\sqrt{\lambda}) = 0, \quad \sqrt{\lambda} J'(\sqrt{\lambda}) + HJ(\sqrt{\lambda}) = 0.$$

Um die Besselsche Differentialgleichung auf die Gestalt zu bringen, die wir in unserer Theorie voraussetzen, substituieren wir

$$du = 2x dx, \quad x = \sqrt{u},$$

und ersetzen  $u$  durch  $x$ ; dann ergibt sich

$$\frac{d}{dx} \left( 4x \frac{dy}{dx} \right) + \lambda y = 0.$$

Die Werte  $a$  und  $b$  und die Form der Grenzbedingungen ändern sich nicht; für  $y$  aber haben wir jetzt die Funktion  $J(\sqrt{\lambda}x)$  zu nehmen. Um den Eigenwert  $\lambda = 0$  zu vermeiden, ersetzen wir  $\lambda$  in der letzten Gleichung durch  $\lambda - \mu$ , so daß sie die folgende Gestalt annimmt:

$$\frac{d}{dx} \left( 4x \frac{dy}{dx} \right) + (\lambda - \mu) y = 0.$$

Ihre an der Stelle  $x = 0$  endliche Lösung ist jetzt

$$J(\varrho \sqrt{x}) = J(\sqrt{(\lambda - \mu)x}),$$

wobei die Quadratwurzeln positiv zu nehmen sind und

$$\lambda = \mu + \varrho^2$$

gesetzt ist, für  $\varrho$  aber eine der Gleichungen

$$J(\varrho) = 0, \quad \varrho J'(\varrho) + HJ(\varrho) = 0$$

gilt.

Die normierten Eigenfunktionen sind

$$\begin{aligned} & J(\varrho \sqrt{x}) \left[ \int_0^1 J^2(\varrho \sqrt{u}) du \right]^{-\frac{1}{2}} \\ &= J(\varrho \sqrt{x}) \left[ 2 \int_0^1 \alpha J^2(\varrho \alpha) d\alpha \right]^{-\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Um sie hinsichtlich ihrer Größenverhältnisse genauer zu untersuchen,

gehen wir von folgenden bekannten Formeln\*) aus, die gelten, sobald  $x$  oberhalb einer beliebig kleinen positiven Grenze  $\varepsilon$  verbleibt:

$$J(x) = \frac{\cos x + \sin x}{\sqrt{\pi x}} + \frac{\Psi}{x^{\frac{3}{2}}},$$

$$J'(x) = \frac{\cos x - \sin x}{\sqrt{\pi x}} + \frac{\Psi}{x^{\frac{3}{2}}};$$

in ihnen, wie auch weiter unten, ist das Symbol  $\Psi$  vieldeutig und bezeichnet Größen, die zwischen endlichen, von  $x$  unabhängigen Grenzen liegen. Aus diesen Gleichungen folgt sofort:

$$J^2(x) + J'^2(x) = \frac{2}{\pi x} + \frac{\Psi}{x^3}.$$

Andererseits ergibt die Besselsche Differentialgleichung leicht\*\*)

$$\int_0^x \alpha J^2(\alpha) d\alpha = \frac{x^2}{2} [J^2(x) + J'^2(x)],$$

speziell also

$$\int_0^1 \alpha J^2(\varrho \alpha) d\alpha = \frac{1}{2} [J^2(\varrho) + J'^2(\varrho)],$$

und hieraus folgt auf Grund der angegebenen asymptotischen Darstellung von  $J(x)$  und  $J'(x)$  die Formel

$$\int_0^1 \alpha J^2(\varrho \alpha) d\alpha = \frac{1}{\pi \varrho} + \frac{\Psi_0}{\varrho^{\frac{3}{2}}},$$

$$\left[ \int_0^1 \alpha J^2(\varrho \alpha) d\alpha \right]^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{\pi \varrho} \left( 1 + \frac{\Psi_0}{\varrho^{\frac{3}{2}}} \right),$$

und die Größen  $\Psi_0$  liegen zwischen endlichen, von  $\varrho$  unabhängigen Grenzen. Nur wenn der Wert  $\varrho = 0$  vorkommt, verliert diese Formel ihren Sinn; da wir sie aber nur bei Konvergenzuntersuchungen benutzen, ist das kein wesentlicher Mangel. Abgesehen von diesem Falle erhalten wir somit für die normierten Eigenfunktionen und ihre Ableitungen die Ausdrücke

$$\varphi_\nu(x) = \sqrt{\frac{\pi \varrho}{2}} J(\varrho \sqrt{x}) \left( 1 + \frac{\Psi_0}{\varrho^{\frac{3}{2}}} \right),$$

$$\varphi'_\nu(x) = \frac{\varrho}{2} \sqrt{\frac{\pi \varrho}{2x}} J'(\varrho \sqrt{x}) \left( 1 + \frac{\Psi_0}{\varrho^{\frac{3}{2}}} \right).$$

Lassen wir jetzt  $x$  über einer beliebig kleinen positiven Grenze

\*) Lipschitz, Crelles Journal Bd. 56. Jordan, Cours d'analyse Bd. 3, Nr. 215, 216.

\*\*) Riemann-Weber, Partielle Differentialgleichungen Bd. 1, § 79.

bleiben, so können wir wiederum die asymptotischen Ausdrücke von  $J(x)$  und  $J'(x)$  benutzen und erhalten folgende Gleichungen:

$$\varphi_\nu(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{2x}} \left( \sin \varrho \sqrt{x} + \cos \varrho \sqrt{x} + \frac{\Psi}{\varrho \sqrt{x}} \right) \left( 1 + \frac{\Psi_0}{\varrho^{\frac{3}{2}}} \right),$$

$$\varphi'_\nu(x) = \frac{\varrho}{2\sqrt[4]{2x^3}} \left( \cos \varrho \sqrt{x} - \sin \varrho \sqrt{x} + \frac{\Psi}{\varrho \sqrt{x}} \right) \left( 1 + \frac{\Psi_0}{\varrho^{\frac{3}{2}}} \right).$$

Hieraus ergibt sich, daß die Gleichungen, deren Wurzeln die Größen  $\varrho$  sind, sobald diese eine gewisse Grenze überschreiten, durch eine der Formen

$$\cos \varrho + \sin \varrho = 0, \quad \varrho(\cos \varrho - \sin \varrho) + H(\sin \varrho + \cos \varrho) = 0$$

annähernd dargestellt werden. Wenn daher  $r$  von  $\nu$  unabhängig ist und das vieldeutige Symbol  $\Psi$  Größen bezeichnet, die zwischen endlichen von  $\nu$  unabhängigen Grenzen liegen, so kann man setzen

$$\varrho = r + \nu\pi + \frac{\Psi}{\nu},$$

und hieraus ergibt sich für die Eigenwerte

$$\frac{1}{\lambda_\nu} = \frac{1}{\mu + \varrho^2} = \frac{1}{\pi^2 \nu^2} \left( 1 + \frac{\Psi}{\nu} \right), \quad \frac{1}{\lambda_\nu^2} = \frac{1}{\pi^4 \nu^4} \left( 1 + \frac{\Psi}{\nu} \right).$$

Man findet ferner leicht, wenn  $u$  eine beliebige GröÙe bedeutet, die Gleichungen

$$\cos \varrho u = \cos(r + \nu\pi)u + \frac{\Psi}{\nu}, \quad \sin \varrho u = \sin(r + \nu\pi)u + \frac{\Psi}{\nu};$$

benutzt man diese Werte in den für  $\varphi_\nu(x)$  und  $\varphi'_\nu(x)$  gegebenen Ausdrücken, so findet man

$$\varphi_\nu(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{2x}} \left\{ \sin(r + \nu\pi) \sqrt{x} + \cos(r + \nu\pi) \sqrt{x} + \frac{\Psi}{\nu} \right\},$$

$$\varphi'_\nu(x) = \frac{\varrho}{2\sqrt[4]{2x^3}} \left\{ \cos(r + \nu\pi) \sqrt{x} - \sin(r + \nu\pi) \sqrt{x} + \frac{\Psi}{\nu} \right\},$$

und wenn  $y$  ebenso wie  $x$  über einer beliebig kleinen positiven Grenze bleibt,

$$\varphi_\nu(x) \varphi_\nu(y) = \frac{1}{2\sqrt[4]{xy}} \left\{ \sin(r + \nu\pi)(\sqrt{x} + \sqrt{y}) + \cos(r + \nu\pi)(\sqrt{x} - \sqrt{y}) + \frac{\Psi}{\nu} \right\},$$

$$\varphi_\nu(x) \varphi'_\nu(x) = \frac{\varrho}{4x} \left\{ \cos 2(r + \nu\pi) \sqrt{x} + \frac{\Psi}{\nu} \right\},$$

$$\varphi'_\nu(x) \varphi_\nu(y) = \frac{\varrho}{4\sqrt[4]{x^3 y}} \left\{ \cos(r + \nu\pi)(\sqrt{x} + \sqrt{y}) + \sin(r + \nu\pi)(\sqrt{y} - \sqrt{x}) + \frac{\Psi}{\nu} \right\}.$$



Da nun die Reihen

$$\sum_v^{1,\infty} \frac{\cos v u}{v}, \quad \sum_v^{1,\infty} \frac{\sin v u}{v}$$

gleichmäßig konvergieren, wenn mit beliebig kleinen positiven Konstanten  $c, c_1$  die Ungleichung

$$c \leq u \leq 2\pi - c_1$$

festgesetzt wird; da ferner unter dieser Bedingung auch die Summe

$$\sum_v^{1,n} \frac{\cos v u}{v},$$

und unter der weiteren Voraussetzung

$$0 < u \leq 2\pi - c_1$$

die Summe

$$\sum_v^{1,n} \frac{\sin v u}{v}$$

zwischen endlichen von  $v$  und  $u$  unabhängigen Grenzen liegt, so ist ersichtlich, daß die Reihen

$$R = \sum_v^{1,\infty} \frac{\varphi_v(x) \varphi_v(y)}{\lambda_v}, \quad S = \sum_v^{1,\infty} \frac{\varphi'_v(x) \varphi_v(y)}{\lambda_v^2}$$

gleichmäßig konvergieren, wenn  $x$  und  $y$  beliebige, die Stelle 0 nicht enthaltende Teilstrecken des von 0 bis 1 reichenden Intervalls  $J$  durchlaufen; daß unter derselben Voraussetzung und wenn außerdem  $|x - y|$  über einer beliebig kleinen Grenze bleibt, auch die Reihe

$$T = \sum_v^{1,\infty} \frac{\varphi'_v(x) \varphi_v(y)}{\lambda_v}$$

gleichmäßig konvergiert; daß die Reihe

$$U = \sum_v^{1,\infty} \frac{\varphi_v(x) \varphi'_v(x)}{\lambda_v}$$

gleichmäßig konvergiert, wenn  $x$  eine zwischen 0 und 1 liegende Strecke durchläuft; daß endlich, wenn  $x, y, 1 - x$  und  $1 - y$  über endlichen Grenzen bleiben, die Summe

$$\sum_v^{1,n} \frac{\varphi'_v(x) \varphi_v(y)}{\lambda_v}$$

zwischen endlichen von  $n$  unabhängigen Grenzen liegt.

Das letzte dieser Resultate gibt die Eigenschaft (III) des § 3; um die Formeln (A), (B), ... zu gewinnen, überzeugen wir uns zunächst davon, daß der Kern  $K(x, y)$  die in § 3 geforderten Eigenschaften besitzt. Das wird daraus klar, daß  $\varphi(x)$  und  $\psi(x)$  Integrale der Differentialgleichung sind, die auch für die Größe  $J\sqrt{-\mu x}$  gilt. Diese hat an der singulären Stelle  $x=0$  ein logarithmisch unendliches Integral; eben diese Singularität weist daher die Funktion  $\psi(x)$  auf, wie auch der in § 6 gegebene explizite Ausdruck zeigt.

Ferner konvergiert die Reihe

$$\sum_v^{1,\infty} \frac{\varphi_v(x) \varphi_v(y)}{\lambda_v^2} = \sum_q \frac{2\pi q J(q\sqrt{x}) J(q\sqrt{y})}{(\mu + q^2)^2} \left(1 + \frac{\psi_0}{q^{\frac{3}{2}}}\right),$$

da die Funktion  $J(u)$  bei beliebigen reellen Werten von  $u$  zwischen festen endlichen Grenzen bleibt, gleichmäßig, wenn jede der Größen  $x$  und  $y$  das ganze Intervall  $J$  mit Einschluß der Stelle 0 durchläuft. Hieraus und aus dem, was über die Konvergenz der Reihen  $R$ ,  $S$ ,  $T$  und  $U$  bewiesen ist, kann man nach § 3 die Eigenschaften (I) und (II) erschließen.

Unsere allgemeinen Sätze ergeben somit, daß eine Funktion von  $x$  zwischen den Stellen  $x=0$  und  $x=1$  auf die Fouriersche Art nach den Normalfunktionen  $\varphi_v(x)$  entwickelt werden kann, wenn sie auf einer beliebig kleinen an der Stelle 0 beginnenden Strecke mit ihren ersten beiden Ableitungen stetig, im übrigen aber auf der betrachteten Strecke nur von beschränkter Schwankung ist. Entwickelt man irgend eine zulässige Funktion  $f(\sqrt{x})$  und ersetzt dann  $x$  durch  $x^2$ , so erhält man die gewöhnlich benutzte Formel

$$f(x) = \sum_q J(qx) \frac{\int_0^1 \alpha f(\alpha) J(q\alpha) d\alpha}{\int_0^1 \alpha J^2(q\alpha) d\alpha}.$$

Den durchgeführten ähnliche Entwicklungen gelten übrigens für die Besselschen Funktionen  $J_n(x)$ ; man ersieht das leicht daraus, daß  $J_n(\sqrt{x})$  ein Integral der Gleichung

$$4 \frac{d}{dx} \left( x \frac{dy}{dx} \right) + \left( 1 - \frac{n^2}{x} \right) y = 0$$

ist und daß  $J_n(x)$  in folgender Weise asymptotisch dargestellt werden kann\*):

---

\*) Jordan, Cours d'analyse Bd. 3, Nr. 216. Gray and Mathews, Bessel Functions Kap. 4, Nr. 91.

$$J_n(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos \left[ \frac{(2n+1)\pi}{4} - x \right];$$

damit sind die im vorhergehenden fundamentalen Eigenschaften der Funktion  $J(x)$  auf  $J_n(x)$  im wesentlichen übertragen.

### § 8.

#### Die Entwicklung beliebiger Funktionen von beschränkter Schwankung nach Besselschen.

Das Resultat des vorigen Paragraphen dürfte für alle Anwendungen ausreichen, da es wohl immer genügt, Funktionen zu betrachten, die selbst ebenso wie ihre ersten beiden Ableitungen nur eine endliche Anzahl von endlichen Sprüngen machen, im übrigen aber stetig sind. Immerhin dürfte es theoretisch wichtig erscheinen, die Entwicklungssätze möglichst auszudehnen; nach § 5 wissen wir, daß eine beliebige Funktion von beschränkter Schwankung nach den Normalfunktionen entwickelt werden kann, wenn für diese die Eigenschaft (IV) des § 3 gesichert ist. Das wollen wir für die Besselschen Funktionen bezüglich des singulären Endpunktes  $a = 0$  durchführen, indem wir uns auf den Fall  $H = \infty$  beschränken, d. h. den Fall, daß die Eigenfunktionen den Gleichungen  $\varphi_r(1) = 0$ ,  $J(\varphi) = 0$  unterworfen sind. Zu diesem Zweck muß der Kern  $K(x, y)$  wirklich gebildet werden. Setzen wir  $\mu = -\beta^2$ , so daß die Differentialgleichung der Eigenfunktionen in der Form

$$\frac{d}{dx} \left( 4x \frac{dy}{dx} \right) + (\lambda + \beta^2) y = 0$$

erscheint, so ist die Gleichung, deren Integrale  $\varphi(x)$  und  $\psi(x)$  in der Bezeichnung des § 3 sind, die folgende

$$\frac{d}{dx} \left( 4x \frac{dy}{dx} \right) + \beta^2 y = 0.$$

Sie hat die linear unabhängigen Integrale  $J(\beta \sqrt{x})$  und  $K(\beta \sqrt{x})$ , letzteres im Sinne von Riemann-Weber\*) verstanden, und man kann daher setzen

$$\varphi(x) = C J(\beta \sqrt{x}), \quad \psi(x) = J(\beta \sqrt{x}) K(\beta) - J(\beta) K(\beta \sqrt{x}),$$

wobei  $C$  eine Konstante bedeutet, die durch die Forderung

$$k(\varphi'(x) \psi(x) - \varphi(x) \psi'(x)) = 1$$

bestimmt wird; dann erfüllt  $\varphi(x)$  an der unteren,  $\psi(x)$  an der oberen

---

\*) Partielle Differentialgleichungen der mathematischen Physik Bd. 1, § 73.

Grenze der Strecke  $J$  die an die Normalfunktionen gestellten Forderungen. Da nun die Identität

$$JK' - J'K = -\frac{2}{\pi x}$$

gilt, findet man durch leichte Rechnung

$$C = -\frac{\pi}{2J(\beta)},$$

und demnach bei der Annahme  $x < \xi$  den Kern

$$K(x, \xi) = \frac{\pi J(\beta\sqrt{x}) [J(\beta\sqrt{\xi}) K(\beta) - J(\beta) K(\beta\sqrt{\xi})]}{2J(\beta)}.$$

Die Formel (A) ergibt also, da die Eigenwerte die Gestalt

$$\lambda = \varrho^2 + \mu = \varrho^2 - \beta^2$$

haben, die Gleichung

$$K(x, \xi) = \sum_{\nu}^{1, \infty} \frac{\varphi_{\nu}(x) \varphi_{\nu}(\xi)}{\varrho^2 - \beta^2}$$

und  $\varrho$  durchläuft, wir wiederholen es, die positiven Wurzeln der Gleichung  $J(\varrho) = 0$ .

Da nun die Reihe

$$\sum \frac{1}{\varrho^2}$$

konvergiert, so konvergiert die rechte Seite der erhaltenen Gleichung auch bei beliebig festgelegten positiven Werten  $x, \xi$  und bei komplexen Werten von  $\beta$ , und zwar gleichmäßig in jedem abgeschlossenen Gebiet, das die Stellen  $\pm \varrho$  nicht enthält. Wir haben eine Partialbruchzerlegung der Größe  $K(x, \xi)$  vor uns, die als Funktion der komplexen Größe  $\beta$  meromorph ist und die Pole  $\beta = \pm \varrho$  besitzt. Multiplizieren wir die Gleichung mit  $2\beta$  und setzen

$$-2\beta K(x, \xi) = \Phi(\beta) = \frac{\pi \beta J(\beta\sqrt{x}) [J(\beta) K(\beta\sqrt{\xi}) - J(\beta\sqrt{\xi}) K(\beta)]}{J(\beta)},$$

so ergibt sich

$$\Phi(\beta) = \sum_{\nu}^{1, \infty} \varphi_{\nu}(x) \varphi_{\nu}(\xi) \left\{ \frac{1}{\beta - \varrho} + \frac{1}{\beta + \varrho} \right\},$$

und es ist ersichtlich, daß zu den Polen  $\beta = \varrho$  und  $\beta = -\varrho$  das Residuum  $\varphi_{\nu}(x) \varphi_{\nu}(\xi)$  gehört. Integriert man daher in der Ebene der komplexen Größen  $\beta$  längs einer geschlossenen Kurve, die die ersten  $n$  positiven

Werte  $\varrho$  und die ihnen entgegengesetzten  $-\varrho$ , sonst aber keine Pole der Funktion  $\Phi(\beta)$  umschließt, so findet man

$$\frac{1}{2\pi i} \int \Phi(\beta) d\beta = 2 \sum_v^{1,n} \varphi_v(x) \varphi_v(\xi).$$

Entsprechend würde man in der Ebene der komplexen Größe  $\mu$  um die ersten  $n$  Werte  $-\varrho^2$  herum integrierend eine Gleichung

$$\frac{1}{2\pi i} \int K(x, \xi) d\mu = \sum_v^{1,n} \varphi_v(x) \varphi_v(\xi)$$

erhalten.

Wir nehmen nun als Integrationslinie in der  $\beta$ -Ebene den Umfang des Rechtecks, dessen Ecken die Punkte  $\pm s \pm ti$  sind, und dessen Inneres genau  $n$  positive Werte  $\varrho$  enthalte. Da  $\Phi(\beta)$ , wie die Partialbruchzerlegung zeigt, eine ungerade Funktion ist, so liefern die Hälften, in die das Rechteck durch die imaginäre Achse zerlegt wird, denselben Beitrag zum Integral, und da  $\Phi(\beta)$  bei reellen Werten von  $\beta$  reell ist, liefern die oberhalb und unterhalb der reellen Achse liegenden symmetrischen Viertel des Rechteckumfangs konjugiert imaginäre Beiträge, so daß man, wenn  $s$  und  $t$  positiv sind, setzen kann

$$\sum_v^{1,n} \varphi_v(x) \varphi_v(\xi) = 2\Re \left\{ \int_s^{s+ti} \Phi(\beta) d\beta + \int_{s+ti}^{ti} \Phi(\beta) d\beta \right\},$$

wobei die Integrale geradlinig zu nehmen sind. Um die Größe dieser Integrale abzuschätzen, schreiben wir

$$\begin{aligned} x_1 &= \sqrt{x}, & \xi_1 &= \sqrt{\xi}, & \beta &= \sigma + \tau i, \\ P &= \sqrt{2\pi\beta x_1} J(\beta x_1), & N &= 2\sqrt{2\pi\beta} J(\beta), \\ Q &= \sqrt{2\pi\beta} \sqrt{2\pi\beta} \xi_1 [J(\beta) K(\beta \xi_1) - J(\beta \xi_1) K(\beta)], \\ & \sqrt{x_1 \xi_1} \Phi(\beta) = \frac{PQ}{N}, \end{aligned}$$

und benutzen die Weberschen Formeln\*)

$$\begin{aligned} \sqrt{2\pi u} J(u) &= e^{-i\left(u - \frac{\pi}{4}\right)} S(2iu) + e^{i\left(u - \frac{\pi}{4}\right)} S(-2iu), \\ \sqrt{2\pi u} K(u) &= e^{-i\left(u - \frac{\pi}{4}\right)} S(2iu) - e^{i\left(u - \frac{\pi}{4}\right)} S(-2iu), \end{aligned}$$

in denen der reelle Teil von  $u$  und  $\sqrt{2\pi u}$  positiv vorauszusetzen ist, und  $S(z)$  eine Funktion bedeutet, die in der ganzen Ebene der komplexen

\*) Riemann-Weber Bd. 1, § 73.

Größen  $z$  mit Ausnahme der negativen reellen Achse eindeutig bestimmt ist; konvergiert der reelle Teil von  $u$  von der positiven Seite her gegen den Wert Null, während der imaginäre Teil nicht verschwindet, so konvergieren die Größen  $S(2iu)$  und  $S(-2iu)$  gegen endliche Grenzen und die Gleichungen bleiben richtig. Da nun in den Ausdrücken  $P$ ,  $Q$ ,  $N$  die Argumente der Funktionszeichen  $J$  und  $K$  nicht negative reelle Teile haben und auf der Integrationslinie nicht den Wert Null erreichen, so kann  $\Phi(\beta)$  durch die Funktion  $S$  ausgedrückt werden, wenn man noch festsetzt, daß auch die in  $P$ ,  $Q$ ,  $N$  auftretenden Quadratwurzeln positive reelle Teile haben sollen. Bei dieser Annahme erhält man aus den Weberschen Formeln

$$P = e^{-i\left(\beta x_1 - \frac{\pi}{4}\right)} S(2\beta i x_1) + e^{i\left(\beta x_1 - \frac{\pi}{4}\right)} S(-2\beta i x_1),$$

$$Q = e^{i\beta(1-\xi_1)} S(2\beta i \xi_1) S(-2\beta i) - e^{-i\beta(1-\xi_1)} S(-2\beta i \xi_1) S(2\beta i).$$

Nun hat die Funktion  $S(z)$  erstens die Eigenschaft, für alle Werte von  $z$  dem absoluten Betrage nach unter einer festen Grenze zu bleiben\*), z. B. unter 3,5; daraus ergibt sich sofort

$$|P| < 3,5 (e^{\tau x_1} + e^{-\tau x_1})$$

und, da  $\tau$  nicht negativ ist,

$$|P| < 7 e^{\tau x_1}.$$

Sodann nähert sich  $S(z)$  der Grenze 1, wenn  $z$  über alle Grenzen wächst; wenn daher  $\xi$  über einer festen positiven Grenze liegt, also etwa

$$\xi > c > 0$$

vorausgesetzt wird, so liegen die Größen

$$|S(\pm 2\beta \xi_1 i)|, \quad |S(\pm 2\beta i)|$$

der Eins beliebig nahe, sind z. B. kleiner als 2, sobald

$$|\beta| > g$$

genommen wird, wobei  $g$  eine von  $\xi$  unabhängige positive Größe ist. Unter dieser Annahme findet man aus dem angegebenen Ausdruck von  $Q$  durch die Funktionen  $S$  sofort

$$|Q| < 4e^{\tau(1-\xi_1)} + 4e^{-\tau(1-\xi_1)} < 8e^{\tau(1-\xi_1)},$$

und hieraus

$$|PQ| < 56 e^{\tau(1-\xi_1+x_1)}.$$

Dieses Resultat wollen wir mit einer unteren Grenze der Größe  $|N|$  kombinieren. Zu einer solchen führen wiederum die Weberschen Formeln, deren erste ergibt

---

\*) Riemann-Weber Bd. 1, §§ 75, 76.

$$\begin{aligned}
 N &= 2\sqrt{2\pi\beta} J(\beta) = 2\cos\left(\beta - \frac{\pi}{4}\right) [S(2\beta i) + S(-2\beta i)] \\
 &\quad + 2i\sin\left(\beta - \frac{\pi}{4}\right) [-S(2\beta i) + S(-2\beta i)] \\
 &= 4\cos\left(\beta - \frac{\pi}{4}\right) (1+p) + 4qi\sin\left(\beta - \frac{\pi}{4}\right);
 \end{aligned}$$

da nun  $S(z)$  bei wachsenden Werten von  $|z|$  gegen die Grenze Eins konvergiert, so ist klar, daß  $|p|$  und  $|q|$  unter einer vorgeschriebenen Grenze, etwa unter  $\frac{1}{4}$  liegen, sobald  $|\beta|$  eine gewisse positive Konstante  $g_1$  überschritten hat, die ebenso wie  $g$  von  $x$  und  $\xi$  durchaus unabhängig ist. Somit gelten zugleich die Beziehungen

$$|p| < \frac{1}{4}, \quad |q| < \frac{1}{4}, \quad |\beta| > g_1.$$

Da nun der letzte für  $N$  erhaltene Ausdruck, wenn  $e_1, e_2, \dots$  Größen vom absoluten Betrage Eins sind, in der Form

$$\begin{aligned}
 N &= 2(e^\tau e_1 + e^{-\tau} e_2) (1+p) + 2q(e^\tau e_3 + e^{-\tau} e_4) \\
 &= 2e^\tau \{e_1(1+p) + qe_3\} + 2e^{-\tau} \{e_2(1+p) + qe_4\} \\
 &= re^\tau + r_1 e^{-\tau}
 \end{aligned}$$

geschrieben werden kann, und die für  $|p|$  und  $|q|$  geltenden Schranken die Ungleichungen

$$|r| > 1, \quad |r_1| < 3$$

ergeben, so folgt

$$|N| > e^\tau - 3e^{-\tau}.$$

Wenn wir daher zunächst  $\tau = t$  setzen, also  $\beta$  auf der Strecke von  $ti$  bis  $s + ti$  annehmen und  $t$  so groß nehmen, daß

$$e^{2t} > 6, \quad t > \frac{1}{2} \lg 6,$$

so ergibt die für  $N$  gefundene Beziehung

$$|N| > \frac{1}{2} e^t,$$

und die oben gefundene obere Schranke der Größe  $|PQ|$  ergibt

$$\sqrt{x_1 \xi_1} |\Phi(\beta)| = \left| \frac{PQ}{N} \right| < 112 e^{t(x_1 - \xi_1)}.$$

Da nun die Differenz  $\xi - x$  mit Rücksicht auf den Zweck der ganzen Entwicklung über einer positiven Grenze bleibt, so daß etwa eine Ungleichung

$$\sqrt{\xi} - \sqrt{x} = \xi_1 - x_1 > c_1, \quad c_1 > 0$$

vorausgesetzt wird, so ist klar, daß das Integral

$$\int_{ti+s}^{ti} \sqrt{x_1 \xi_1} \Phi(\beta) d\beta$$

dem absoluten Werte nach beliebig klein gemacht werden kann, indem man einen beliebigen Wert von  $s$  festhält,  $t$  aber über eine von  $s$ ,  $c_1$  und  $g_1$ , nicht aber von  $x$  und  $\xi$  abhängige Grenze hinauswachsen läßt.

Eine andere Erwägung fordert die Strecke von  $s$  bis  $s+ti$ , da hier auch der Wert  $\tau=0$  zugelassen ist, für den  $N$  verschwinden könnte.

Um dies zu verhindern, wählen wir  $s$  so, daß  $s - \frac{\pi}{4}$  ein Vielfaches von  $\pi$  ist; dann gelten auf der Geraden  $\sigma = s$  offenbar die Gleichungen

$$\cos\left(\beta - \frac{\pi}{4}\right) = \pm \cos \tau i, \quad \sin\left(\beta - \frac{\pi}{4}\right) = \pm \sin \tau i,$$

$$\begin{aligned} N &= \pm 4(1+p) \cos \tau i \pm 4q \sin \tau i = 2e^\tau \{ \pm (1+p)(1+e^{-2\tau}) \pm iq(1-e^{-2\tau}) \} \\ &= 2e^\tau \{ \pm (1+e^{-2\tau}) + m \}, \quad m = \pm p(1+e^{-2\tau}) \pm qi(1-e^{-2\tau}). \end{aligned}$$

Wegen der für  $|p|$  und  $|q|$  erwirkten Ungleichungen ist nun

$$\begin{aligned} |m| &< \frac{3}{4}, \quad |m \pm (1+e^{-2\tau})| \geq 1+e^{-2\tau} - |m| > \frac{1}{4}, \\ |N| &> \frac{1}{2} e^\tau. \end{aligned}$$

Die für das Produkt  $|PQ|$  gefundene Schranke ergibt somit

$$\sqrt{x_1 \xi_1} |\Phi(\beta)| = \left| \frac{PQ}{N} \right| < 112 e^{-\tau(\xi_1 - x_1)},$$

und hieraus folgt, wenn man geradlinig von  $s$  bis  $s+ti$  integriert,

$$\left| \int_s^{s+ti} \Phi(\beta) d\beta \right| < \frac{112(1 - e^{-t(\xi_1 - x_1)})}{(\xi_1 - x_1)}.$$

Die rechte Seite dieser Ungleichung bleibt offenbar, da  $\xi_1 - x_1$  über einer positiven Grenze  $c_1$  liegt, stets unter einer festen von  $t$ ,  $x$  und  $\xi$  unabhängigen Grenze. Erinnern wir uns nun daran, daß das Integral

$$\sqrt{x_1 \xi_1} \int_{ti}^{s+ti} \Phi(\beta) d\beta$$

bei jedem festen Wert von  $s$  der Null beliebig angenähert werden konnte, indem man für  $t$  einen von  $\xi$  und  $x$  unabhängigen, hinreichend großen Wert nahm; daß ferner längs der Integrationswege nur die Ungleichungen

$$|\beta| > g, \quad |\beta| > g_1$$



vorausgesetzt werden, so ergibt die oben abgeleitete Gleichung

$$\sum_{\nu}^{1,n} \varphi_{\nu}(x) \varphi_{\nu}(\xi) = 2 \Re \left\{ \int_{ti}^{ti+s} \Phi(\beta) d\beta + \int_{ti+s}^s \Phi(\beta) d\beta \right\},$$

in der  $n$  die Anzahl der Werte von  $\varrho$  bedeutet, die zwischen 0 und  $s$  liegen, folgendes Resultat. Sobald  $n$  eine gewisse von  $\xi$  und  $x$  unabhängige Grenze  $n_1$  überschritten hat, liegt die Summe

$$\sqrt[4]{x\xi} \sum_{\nu}^{1,n} \varphi_{\nu}(x) \varphi_{\nu}(\xi),$$

in der mit beliebig kleinen positiven Werten  $c_0$  und  $c$  die Beziehungen

$$\xi - x > c_0 > 0, \quad \xi > c > 0$$

vorausgesetzt werden, zwischen endlichen, von  $x$  und  $\xi$  unabhängigen Grenzen. Da nun die für  $n = 1, 2, \dots, n_1$  gebildeten Summen stetige Funktionen von  $x$  und  $\xi$  sind, kann die Beschränkung der Zahl  $n$  wieder aufgehoben werden, und da das Integral

$$\int_0^x \frac{d\alpha}{\sqrt[4]{\alpha}}$$

endlich ist, ergibt sich weiter, daß alle Integrale

$$\int_0^x \sum_{\nu}^{1,n} \varphi_{\nu}(\alpha) \varphi_{\nu}(\xi) d\alpha$$

zwischen endlichen von  $n$ ,  $x$  und  $\xi$  unabhängigen Grenzen liegen. Dadurch ist die Eigenschaft (IV) des § 3 in vollem Umfange erwiesen.

## § 9.

### Entwicklung nach Legendreschen Polynomen.

Die Funktionen  $P_n(x)$ , die durch die Gaußsche Reihe in der Form

$$P_n(x) = F\left(-n, n+1, 1, \frac{1-x}{2}\right)$$

ausgedrückt werden, sind diejenigen Integrale der Gleichung

$$\frac{d}{dx} \left[ (1-x^2) \frac{dy}{dx} \right] + \lambda y = 0,$$

die an den beiden singulären Stellen  $x = -1$  und  $x = +1$  endlich bleiben; solche Integrale hat diese Gleichung, wie aus der Theorie der hypergeometrischen Reihe entnommen werden kann, nur wenn

$$\lambda = n(n+1)$$

gesetzt werden kann, wobei  $n$  eine positive ganze Zahl oder Null bedeutet. Um den Kern der zugehörigen Integralgleichung nach der in § 2 gegebenen Regel zu finden, ersetzen wir  $\lambda$  durch  $\lambda + \mu$ , wobei

$$\mu = \alpha(1 + \alpha)$$

gesetzt wird und  $\alpha$  keine ganze Zahl ist. Die Funktionen  $\varphi(x)$  und  $\psi(x)$  des § 2 sind dann Integrale der Gleichung

$$\frac{d}{dx} \left[ (1 - x^2) \frac{dy}{dx} \right] + \alpha(1 + \alpha)y = 0,$$

von denen das erste bei  $x = -1$ , das zweite bei  $x = +1$  endlich ist, und beide zwischen  $-1$  und  $+1$  endlich und stetig bleiben. Man erfüllt diese Anforderungen, indem man setzt

$$\varphi(x) = F\left(-\alpha, 1 + \alpha, 1, \frac{1+x}{2}\right), \quad \psi(x) = CF\left(-\alpha, 1 + \alpha, 1, \frac{1-x}{2}\right);$$

die Konstante  $C$  bestimmt sich durch die Beziehung

$$\varphi'(x)\psi(x) - \varphi(x)\psi'(x) = \frac{1}{1-x^2}.$$

Wir finden den genauen Wert  $C$ , indem wir

$$\frac{1-x}{2} = \varepsilon, \quad \frac{1+x}{2} = 1 - \varepsilon$$

setzen und  $\varepsilon$  unendlich abnehmen lassen. Dann gelten die Näherungsformeln\*)

$$\varphi(x) = F(-\alpha, 1 + \alpha, 1, 1 - \varepsilon) = \frac{-\lg \varepsilon}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)}$$

$$= + \frac{\sin \pi \alpha}{\pi} \lg \varepsilon,$$

$$\varphi'(x) = - \frac{\sin \pi \alpha}{\pi} \cdot \frac{1}{\varepsilon}, \quad \psi(x) = 1, \quad \psi'(x) = -\alpha(1 + \alpha),$$

$$\frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{4\varepsilon},$$

und die angegebene Beziehung zwischen  $\varphi(x)$  und  $\psi(x)$  ergibt

$$- \frac{C \sin \pi \alpha}{\pi} \left\{ \alpha(1 + \alpha) \lg \varepsilon - \frac{1}{\varepsilon} \right\} = \frac{1}{4\varepsilon},$$

also

$$C = \frac{\pi}{4 \sin \alpha \pi}.$$

Hieraus sieht man zugleich, daß  $\varphi(x)$  an der singulären Endstelle  $x = +1$  logarithmisch unendlich wird. Dasselbe gilt offenbar von  $\psi(x)$

---

\*) Goursat, Sur l'équation différentielle linéaire qui admet pour intégrale la série hypergéométrique, Thèse, Paris 1881, S. 37. Annales de l'Ecole Normale (2) Bd. 10.

an der Stelle  $x = -1$ ; der mit  $\varphi(x)$  und  $\psi(x)$  gebildete Kern hat also die in § 3 geforderte Beschaffenheit und ist explizit

$$K(x, \xi) = \frac{\pi F\left(-\alpha, 1+\alpha, 1, \frac{1+x}{2}\right) F\left(-\alpha, 1+\alpha, 1, \frac{1-\xi}{2}\right)}{4 \sin \alpha \pi}$$

oder

$$K(x, \xi) = \frac{\pi F\left(-\alpha, 1+\alpha, 1, \frac{1-x}{2}\right) F\left(-\alpha, 1+\alpha, 1, \frac{1+\xi}{2}\right)}{4 \sin \alpha \pi},$$

je nachdem  $x < \xi$  oder  $x > \xi$ .

Die Eigenwerte sind jetzt  $n(n+1) - \alpha(\alpha+1)$ , wobei  $n = 0, 1, 2, \dots$ , zu setzen ist; die normierten Eigenfunktionen sind wegen der bekannten Formel

$$\int_{-1}^{+1} P_n^2(\alpha) d\alpha = \frac{2}{2n+1}$$

die Größen

$$\varphi_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \varphi_{n+1}(x) = \sqrt{\frac{2n+1}{2}} P_n(x),$$

und die Entwicklung des Kerns nach den Eigenfunktionen hat, je nachdem  $x$  kleiner oder größer als  $\xi$  ist, die erste oder zweite der folgenden Gestalten:

$$\frac{\pi F\left(-\alpha, 1+\alpha, 1, \frac{1+x}{2}\right) F\left(-\alpha, 1+\alpha, 1, \frac{1-\xi}{2}\right)}{4 \sin \alpha \pi} = \sum_n^{0, \infty} \frac{(2n+1) P_n(x) P_n(\xi)}{2[n(n+1) - \alpha(\alpha+1)]}$$

$$\frac{\pi F\left(-\alpha, 1+\alpha, 1, \frac{1-x}{2}\right) F\left(-\alpha, 1+\alpha, 1, \frac{1+\xi}{2}\right)}{4 \sin \alpha \pi} = \sum_n^{0, \infty} \frac{(2n+1) P_n(x) P_n(\xi)}{2[n(n+1) - \alpha(\alpha+1)]}$$

Diese Formeln sind nach § 2 bewiesen, sobald die dort aufgestellten Voraussetzungen, unter denen die Formel (A) gilt, als erfüllt nachgewiesen sind; hier liegt, wie bei den Besselschen Funktionen, der Fall vor, daß auf den iterierten Kern  $K^2(x, y)$  zurückgegriffen werden muß.

Zunächst ist zu beachten, daß die Legendreschen Polynome auf der Strecke  $J$ , d. h. von  $-1$  bis  $+1$ , zwischen den Grenzen  $-1$  und  $+1$  bleiben; hieraus ersieht man sofort, daß die Reihe

$$\sum_v^{1, \infty} \frac{\varphi_v(x) \varphi_v(y)}{\lambda_v^2} = \sum_n^{0, \infty} \frac{\left(n + \frac{1}{2}\right) P_n(x) P_n(y)}{[n(n+1) - \alpha(\alpha+1)]^2}$$

gleichmäßig konvergiert, wenn  $x$  und  $y$  unabhängig voneinander die Strecke  $J$  mit Einschluß ihrer Endpunkte durchlaufen. Da ferner die Formel

$$P_n'(x) = \frac{nxP_n(x) - nP_{n-1}(x)}{1-x^2}$$

gilt, so folgt, daß die Reihe

$$\sum_v \frac{\varphi_v'(x) \varphi_v(y)}{\lambda_v^2} = \sum_n \frac{n \left(n + \frac{1}{2}\right) (nP_n(x) - P_{n-1}(x)) P_n(y)}{(1-x^2) [n(n+1) - \alpha(\alpha+1)]^2}$$

gleichmäßig konvergiert, wenn  $y$  die Strecke  $J$  durchläuft, für  $x$  aber die Bedingung

$$-1 + \varepsilon < x < 1 - \varepsilon$$

festgesetzt wird, in der  $\varepsilon$  eine beliebig kleine positive Größe ist.

Etwas tiefer liegende Eigenschaften der Legendreschen Polynome sind heranzuziehen, um die Konvergenz der Reihen

$$\sum_v \frac{\varphi_v(x) \varphi_v(y)}{\lambda_v}, \quad \sum_v \frac{\varphi_v'(x) \varphi_v(y)}{\lambda_v}$$

zu untersuchen. Die Ungleichung, der  $x$  unterworfen wurde, kann, wenn man  $x = \cos \theta$  setzt, dahin formuliert werden, daß

$$|\sin \theta| > \varepsilon_1$$

ist, wobei  $\varepsilon_1$  wie  $\varepsilon$  beliebig klein und positiv ist. Dann gilt\*) die asymptotische Darstellung

$$P_n(\cos \theta) = \sqrt{\frac{2}{n\pi \sin \theta}} \left\{ \cos \left[ \left(n + \frac{1}{2}\right) \theta - \frac{\pi}{4} \right] + \frac{\Psi}{n} \right\},$$

und  $\Psi$  liegt zwischen endlichen, von  $n$  unabhängigen Grenzen. Hieraus folgt zunächst, daß die Reihe

$$\begin{aligned} \sum_v \frac{\varphi_v(x) \varphi_v(y)}{\lambda_v} &= \sum_n \frac{\left(n + \frac{1}{2}\right) P_n(y)}{n(n+1) - \alpha(\alpha+1)} \sqrt{\frac{2}{n\pi \sin \theta}} \\ &\quad - \left\{ \cos \left[ \left(n + \frac{1}{2}\right) \theta - \frac{\pi}{4} \right] + \frac{\Psi}{n} \right\} \end{aligned}$$

in dem Gebiete

$$-1 + \varepsilon < x < 1 - \varepsilon, \quad -1 \leq y \leq +1$$

gleichmäßig konvergiert, nämlich mindestens so gut wie die mit einer passenden Konstanten multiplizierte Reihe

$$\sum \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}.$$

\*) Heine, Kugelfunktionen, Bd. 1, § 40.

Stellen wir endlich auch  $P_n(y)$  asymptotisch dar, indem wir

$$y = \cos \eta$$

setzen und die Ungleichung

$$|\sin \eta| > \varepsilon_1$$

festhalten, so ergibt der schon einmal benutzte Ausdruck für  $P'_n(x)$  die Gleichung

$$\begin{aligned} \frac{\varphi'_{n+1}(x) \varphi_{n+1}(y)}{\lambda_{n+1}} &= \frac{n \left(n + \frac{1}{2}\right) x P_n(x) P_n(y)}{[n(n+1) - \alpha(\alpha+1)](x^2 - 1)} - \frac{n \left(n + \frac{1}{2}\right) P_{n-1}(x) P_n(y)}{(x^2 - 1)[n(n+1) - \alpha(\alpha+1)]} \\ &= - \frac{n \left(n + \frac{1}{2}\right) \cos \theta}{[n(n+1) - \alpha(\alpha+1)] \sin^2 \theta} \cdot \frac{2}{n\pi \sqrt{\sin \theta \sin \eta}} \\ &\quad \cdot \left[ \cos \left[ \left(n + \frac{1}{2}\right) \theta - \frac{\pi}{4} \right] + \frac{\Psi}{n} \right] \left[ \cos \left[ \left(n + \frac{1}{2}\right) \eta - \frac{\pi}{4} \right] + \frac{\Psi}{n} \right] \\ &\quad + \frac{n \left(n + \frac{1}{2}\right)}{[n(n+1) - \alpha(\alpha+1)] \sin^2 \theta} \cdot \frac{2}{\pi \sqrt{n(n-1) \sin \theta \sin \eta}} \\ &\quad \cdot \left[ \cos \left[ \left(n - \frac{1}{2}\right) \theta - \frac{\pi}{4} \right] + \frac{\Psi}{n} \right] \left[ \cos \left[ \left(n + \frac{1}{2}\right) \eta - \frac{\pi}{4} \right] + \frac{\Psi}{n} \right], \end{aligned}$$

oder, indem das Symbol  $\Psi$  wie früher vieldeutig, aber immer im Sinne der gegebenen Definition gebraucht und dazu benutzt wird, Größen, die mit wachsenden Werten von  $n$  der Grenze 1 zustreben, in der Form

$$1 + \frac{\Psi}{n}$$

darzustellen,

$$\begin{aligned} &\frac{\varphi'_{n+1}(x) \varphi_{n+1}(y)}{\lambda_{n+1}} \\ &= \frac{-2 \cos \theta}{n\pi \sin^2 \theta \sqrt{\sin \theta \sin \eta}} \left\{ \cos \left[ \left(n + \frac{1}{2}\right) \theta - \frac{\pi}{4} \right] \cos \left[ \left(n + \frac{1}{2}\right) \eta - \frac{\pi}{4} \right] + \frac{\Psi}{n} \right\} \\ &\quad + \frac{2}{n\pi \sin^2 \theta \sqrt{\sin \theta \sin \eta}} \left\{ \cos \left[ \left(n - \frac{1}{2}\right) \theta - \frac{\pi}{4} \right] \cos \left[ \left(n + \frac{1}{2}\right) \eta - \frac{\pi}{4} \right] + \frac{\Psi}{n} \right\} \\ &= \frac{-\cos \theta}{n\pi \sin^2 \theta \sqrt{\sin \theta \sin \eta}} \left\{ \sin \left(n + \frac{1}{2}\right) (\theta + \eta) + \cos \left(n + \frac{1}{2}\right) (\theta - \eta) + \frac{\Psi}{n} \right\} \\ &\quad + \frac{1}{n\pi \sin^2 \theta \sqrt{\sin \theta \sin \eta}} \\ &\quad \cdot \left\{ \sin \left[ n(\theta + \eta) + \frac{1}{2} (\eta - \theta) \right] + \cos \left[ n(\theta - \eta) - \frac{1}{2} (\eta + \theta) \right] + \frac{\Psi}{n} \right\}, \end{aligned}$$

oder endlich, indem man durch  $A, B, C, D$  von  $n$  unabhängige Größen bezeichnet, die bei den für  $x$  und  $y$  geltenden Voraussetzungen zwischen festen endlichen Grenzen liegen,

$$\frac{\varphi'_{n+1}(x) \varphi_{n+1}(y)}{\lambda_{n+1}} = \frac{A}{n} \sin n(\theta + \eta) + \frac{B}{n} \sin n(\theta - \eta) + \frac{C}{n} \cos n(\theta + \eta) \\ + \frac{D}{n} \cos n(\theta - \eta) + \frac{\Psi}{n^2};$$

speziell findet man

$$\pi \sin^2 \theta \sqrt{\sin \theta \sin \eta} D = -\cos \theta \cos \frac{\theta - \eta}{2} + \cos \frac{\eta + \theta}{2} = \sin \theta \sin \frac{\theta - \eta}{2}.$$

Nun konvergieren die Reihen

$$\sum_v^{1, \infty} \frac{\sin \nu u}{\nu}, \quad \sum_v^{1, \infty} \frac{\cos \nu u}{\nu}$$

bekanntlich gleichmäßig unter der Voraussetzung

$$c < u < 2\pi - c_1,$$

wenn  $c$  und  $c_1$  beliebig kleine positive Werte sind; anderseits sind bei unseren Festsetzungen die Winkel  $\theta$  und  $\eta$  in Grenzen von der Form  $c$  und  $\pi - c_1$  eingeschlossen, so daß eine Beziehung von der Form

$$c < \theta + \eta < 2\pi - c_1$$

gilt. Setzen wir daher noch fest, daß  $x - y$  und damit  $\theta - \eta$  über einer beliebig kleinen positiven Grenze bleibt, so hat man auch eine Beziehung von der Form

$$c < \theta - \eta < 2\pi - c_1,$$

und jetzt konvergieren die Reihen

$$\sum_v^{1, \infty} \frac{\cos \nu (\theta + \eta)}{\nu}, \quad \sum_v^{1, \infty} \frac{\sin \nu (\theta + \eta)}{\nu}, \quad \sum_v^{1, \infty} \frac{\cos \nu (\theta - \eta)}{\nu}, \quad \sum_v^{1, \infty} \frac{\sin \nu (\theta - \eta)}{\nu}$$

gleichmäßig, mithin auch die Reihe

$$\sum_v^{1, \infty} \frac{\varphi'_v(x) \varphi_v(y)}{\lambda_v}$$

unter der Annahme

$$-1 + \varepsilon \leq x \leq 1 - \varepsilon, \quad -1 + \varepsilon_1 \leq y \leq 1 - \varepsilon_1, \quad |x - y| > \varepsilon_2,$$

wobei  $\varepsilon, \varepsilon_1, \varepsilon_2$  beliebig kleine positive Größen sind.

Man sieht ferner leicht, daß auch, wenn  $x$  gegen einen festen zwischen  $-1 + \varepsilon_1$  und  $1 - \varepsilon_1$  liegenden Wert von  $y$  heranrückt, die Summe

$$\sum_v^{1, n} \frac{\varphi'_v(x) \varphi_v(y)}{\lambda_v}$$

zwischen endlichen, von  $n$  und  $x$  unabhängigen Grenzen bleibt; denn ersichtlich gilt dies von den Größen

$$\sum_{\nu}^{1,n} \frac{\Psi}{\nu^2}, \quad \sum_{\nu}^{1,n} \frac{\sin \nu (\theta + \eta)}{\nu}, \quad \sum_{\nu}^{1,n} \frac{\cos \nu (\theta + \eta)}{\nu}, \quad \sum_{\nu}^{1,n} \frac{\sin \nu (\theta - \eta)}{\nu},$$

ebenso aber auch von der Summe

$$D \sum_{\nu}^{1,n} \frac{\cos \nu (\theta - \eta)}{\nu}$$

auf Grund des oben angegebenen Ausdrucks für  $D$ ; dieser ergibt nämlich

$$\begin{aligned} & \pi \sin^2 \theta \sqrt{\sin \theta \sin \eta} D \sum_{\nu}^{1,n} \frac{\cos \nu (\theta - \eta)}{\nu} \\ &= \frac{\sin \theta}{4 \cos \frac{\theta - \eta}{2}} \sum_{\nu}^{1,n} \frac{2 \sin (\theta - \eta) \cos \nu (\theta - \eta)}{\nu} \\ &= \frac{-\sin \theta}{4 \cos \frac{\theta - \eta}{2}} \sum_{\nu}^{1,n} \frac{\sin (\nu - 1) (\theta - \eta) \sin (\nu + 1) (\theta - \eta)}{\nu} \\ &= \frac{-\sin \theta}{4 \cos \frac{\theta - \eta}{2}} \left\{ \sin (\theta - \eta) + 2 \sum_{\nu}^{1,n-1} \left( \frac{\sin \nu (\theta - \eta)}{\nu} + \frac{\Psi}{\nu^2} \right) + \frac{\sin (n+1) (\theta - \eta)}{n+1} \right\} \end{aligned}$$

und hieraus folgt das Behauptete, da bei den für  $x$  und  $y$  festgesetzten Schranken die Größen  $\sin \theta$  und  $\sin \eta$  über festen positiven Grenzen bleiben, und die Summe

$$\frac{-\sin \theta}{2 \cos \frac{\theta - \eta}{2}} \sum_{\nu}^{1,n-1} \frac{\sin \nu (\theta - \eta)}{\nu}$$

in dem angegebenen Sinne endlich ist. Die Eigenschaft (III) des § 3 ist also ebenfalls für unsere Normalfunktionen gesichert. Endlich ist die Eigenschaft (IV) in einer Abhandlung von Darboux\*) genau in der für unsere Zwecke brauchbaren Form nachgewiesen.

Damit werden die allgemeinen Resultate des § 4 anwendbar und es gilt für jede Funktion  $f(x)$ , die von  $x = -1$  bis  $x = +1$  beschränkte Schwankung hat, die Gleichung

$$\sum_{\nu}^{0,\infty} \left( \nu + \frac{1}{2} \right) P_{\nu}(x) \int_{-1}^{+1} f(\alpha) P_{\nu}(\alpha) d\alpha = \frac{1}{2} [f(x+0) + f(x-0)],$$

---

\*) Sur l'approximation des fonctions de très grands nombres et sur une classe étendue de développements en série. Journal de math. (3) Bd. 4, S. 389.

die aus der Theorie der Integralgleichungen bisher nur für Funktionen mit stetiger erster und zweiter Ableitung abgeleitet war.

In ganz ähnlicher Weise wie die Legendreschen lassen sich auch die Jacobischen Polynome\*)

$$X_n(u) = F(\alpha + n, -n, \gamma, u)$$

bei der Voraussetzung

$$\gamma > 0, \quad \alpha + 1 - \gamma > 0$$

behandeln. Sie sind nämlich einmal Integrale einer der Legendreschen sehr ähnlichen Differentialgleichung; sodann hat Darboux in der zitierten Abhandlung eine asymptotische Darstellung in der Form

$$X_n(\sin^2 \varphi) = A \sin \varphi^{\frac{1}{2} - \gamma} \cos \varphi^{\gamma - \alpha - \frac{1}{2}} \left\{ \cos ((2n + \alpha)\varphi + h) + \frac{\Psi}{n^{\frac{1}{2} + \gamma}} \right\}$$

gegeben, in der  $A$  und  $h$  Konstante sind,  $\Psi$  aber dieselbe Bedeutung wie oben hat; durch diese Formel wird die oben gebrauchte asymptotische Formel für  $P_n(\cos \theta)$  direkt verallgemeinert, wenn man  $\theta = 2\varphi$  setzt. Übrigens ist die Frage nach der Darstellung willkürlicher Funktionen durch die Jacobischen Polynome von Darboux in der zitierten Abhandlung unter sehr allgemeinen Voraussetzungen erledigt und zwar nach einer Methode, die der von Dirichlet für die Fouriersche Reihe angewandten insofern ähnlich ist, als sie auf der Summation einer endlichen Anzahl von Gliedern der zur Darstellung dienenden Reihe beruht.

---

Die durchgeführten Beispiele zeigen wohl, von welcher Art die Vorteile sind, die man aus der Theorie der Integralgleichungen für die Lehre von der Darstellung willkürlicher Funktionen von einer Variablen ziehen kann. Ähnliche Untersuchungen bezüglich der Funktionen von zwei Variablen hoffen wir in einer folgenden Abhandlung geben zu können.

---

\*) Jordan, Cours d'analyse Bd. 3, Nr. 186.