Il teorema d'Abel sulle superficie algebriche (*).

(*Di* Francesco Severi, *a Parma.*)

È noto che il concetto d'*integrale abeliano*, che ha un ufficio così importante nella teoria delle funzioni algebriche di una variabile, è stato trasportato in due modi nel campo delle funzioni algebriche di due variabili: da un lato, con Clebsch e Nöther, si sono considerati gl'integrali doppi di prima specie, e con Picard (molto più recentemente) gl'integrali doppi di seconda specie; da un altro lato, si sono considerati, collo stesso sig. Picard, gl'integrali di differenziali totali o integrali semplici (delle tre specie), che ormai, giustamente, a ricordo delle belle ricerche dell'eminente geometra francese, si chiamano *integrali di* Picard.

Ma mentre pochi sono per ora i legami tra gl'integrali doppi e la geometria sulla superficie algebrica, immagine della funzione (**), numerosi si sono fatti, specialmente in questi ultimi mesi, i legami tra le proprietà trascendenti degl'integrali di Picard, e le proprietà geometriche dei sistemi lineari di curve, tracciati sopra la superficie.

Questi risultati, di cui discorrerò diffusamente più tardi, hanno posto in luce che, prendendo come analoghi degl'integrali abeliani, gl'integrali di Picard, il genere dell'ente algebrico ∞^1 viene ad avere per analogo l'irregolarità $p_g - p_a$ (cioè la differenza tra il *genere geometrico* ed il *genere aritmetico*) dell'ente ∞^2. Cosicchè, da questo punto di vista, le *superficie regolari*

(*) Un riassunto dei principali risultati di questa Memoria, è già apparso nei *Comptes rendus*, sotto lo stesso titolo: *Le théorème d'Abel sur les surfaces algébriques* (3 avril 1905).

(**) È noto che il numero degli integrali doppi di 1.ª specie, tra loro indipendenti, uguaglia il genere geometrico della superficie. Soltanto da poco il sig. Picard ha trovato un legame tra il numero degl'integrali doppi distinti di 2.ª specie e i caratteri geometrici della superficie: questo numero si esprime mediante l'*invariante di* Zeuthen-Segre, l'irregolarità $p_g - p_a$ della superficie, e il numero dei sistemi continui che costituiscono la *base*. Questo risultato dovrà condurre ad altre importanti proprietà delle superficie algebriche!

($p_g = p_a$) vengono ad essere analoghe alle *curve razionali;* e come queste ultime son *caratterizzate* dal fatto di non contenere sistemi continui completi, non lineari, di gruppi di punti; così le prime son *caratterizzate* dalla mancanza di sistemi continui completi, non lineari, di curve algebriche.

Si presenta allora naturale l'estensione del teorema d'ABEL, che esprime la più importante proprietà degl'integrali abeliani.

Sopra una curva di genere $p > 0$, il teorema d'ABEL dà la condizione necessaria e sufficiente, affinchè un sistema continuo di gruppi di punti appartenga ad una serie lineare (cioè sia costituito da gruppi di livello costante di una data funzione razionale dell'ente). Dunque, dal punto di vista da cui ci poniamo, la questione analoga sulle superficie può presentarsi così: « Assegnare una condizione necessaria e sufficiente affinchè un sistema continuo di curve algebriche, sopra una superficie d'irregolarità $p_g - p_a > 0$, sia contenuto totalmente in un sistema lineare (*). »

Orbene, in questo lavoro io dimostro che *la condizione richiesta è che rimangano costanti, per una variazione continua di due curve del sistema, le somme degl'integrali di* PICARD *della 1.ª specie, appartenenti alla superficie, nei punti comuni alle due curve variabili.*

È questa proposizione ch'io chiamo *il primo teorema d'*ABEL *sulle superficie* (**).

Successivamente trasformo il teorema, rendendolo più espressivo e più utile nelle applicazioni.

Nel n.° 8 di questo lavoro deduco, dal 1.° teorema d'ABEL, che *una superficie algebrica di generi, geometrico e aritmetico, p_g, p_a, possiede $p_g - p_a$ integrali semplici di 1.ª specie, e $2(p_g - p_a)$ integrali di 2.ª specie.*

Questo teorema, che trovasi enunciato con un'esposizione sommaria della dimostrazione (diversa da quella che si legge al n.° 8 della presente Memoria), in una Nota del sig. CASTELNUOVO (*Comptes rendus*, 23 janvier 1905),

---

(*) Veramente il teorema d'ABEL dà di più la condizione perchè *due* gruppi di un ugual numero di punti (cioè appartenenti ad un medesimo sistema continuo), sieno tra loro *equivalenti*. Sicchè, sulle superficie, converrebbe proporsi di ricercare la condizione affinchè sieno equivalenti *due* curve di un medesimo sistema continuo; ma di questa maggiore determinazione della questione, mi occuperò in un altro lavoro.

(**) Non mancano estensioni del teorema d'ABEL in altre direzioni; così in HUMBERT (*Sur le théorème d'Abel et quelques unes de ses applications à la Géométrie*, Journal de Math. 1889), trovasi un'estensione del teorema agl'integrali doppi, ed anche agl'integrali di differenziali totali (ma in una direzione diversa dalla nostra).

è il risultato complessivo di varie ricerche, che si sono succedute rapidamente in questi ultimi tempi.

In una Nota inserita nel settembre del 1904 tra i *Rendiconti dei Lincei*, io ho dimostrato che « ogni superficie la quale possegga integrali (trascendenti) « della 2.ª specie (in particolare di 1.ª), cioè che abbia l'ordine di connes- « sione lineare $p_1 > 1$, è irregolare $(p_g > p_a)$ » (*).

Questo teorema ha stabilito un primo legame qualitativo tra l'esistenza d'integrali di PICARD della 2.ª specie e l'irregolarità della superficie.

Ma nella stessa Nota io ho dato la disuguaglianza

$$r - q \leqq p_g - p_a, \tag{1}$$

ove r, q denotano i numeri degl'integrali indipendenti della 2.ª e della 1.ª specie appartenenti alla superficie di generi p_g, p_a.

Questa disuguaglianza, combinata coll'altra

$$r \geqq 2\,q, \tag{2}$$

che si ottiene con facilità (**), e che del resto è stata da tempo rilevata esplicitamente, p. es. dal sig. PICARD (***), dà già:

$$q \leqq p_g - p_a \quad (3), \qquad\qquad r \leqq 2\,(p_g - p_a) \quad (4).$$

Il sig. ENRIQUES, dimostrando poco dopo (*Rend. della R. Acc. di Bologna*, decembre 1904) l'importante teorema che « sopra una superficie ogni « sistema algebrico completo di curve (algebriche), ha la serie caratteri- « stica (****) completa », ne deduceva la caratterizzazione geometrica delle superficie irregolari; stabiliva cioè che ogni tal superficie è caratterizzata dalla presenza di sistemi continui non lineari.

Da ciò, in base al teorema che « sopra una superficie priva d'integrali « finiti di PICARD, ogni sistema algebrico completo è lineare », teorema dimo-

(*) Un lavoro più ampio attorno a questo teorema, ha già preso da varî mesi il suo turno di stampa pei *Mathematische Annalen.* — Il caso di una superficie dotata di p integrali semplici a $2\,p$ periodi, era stato trattato dal sig. ENRIQUES (Annales de Toulouse, 1901). — Vedi pure la mia Nota, *Osservazioni sui sistemi continui*... (Atti della R. Acc. di Torino, 1904).

(**) Vedi ad es. il n.° 3 della mia Nota, *Sulla differenza tra i numeri degl'integrali di* PICARD... (Atti della R. Acc. di Torino, 22 gennaio 1905).

(***) Journal de Math., 1885, pag. 335.

(****) Per la definizione di serie caratteristica vedi il n.° 5 della presente Memoria.

strato dal sig. HUMBERT in una bella Memoria del 1894 (*Journal de Math.*) (nella quale trovansi considerazioni che ricorrono frequentemente in lavori più recenti), il sig. ENRIQUES poteva dedurre l'inversione del teorema da me dato in settembre. Restava così stabilito che ogni superficie irregolare possiede integrali di PICARD della 1.ª e della 2.ª specie, e quindi la disuguaglianza (1), e le (3), (4), che ne derivano, venivano ad acquistare validità per *tutte* le superficie irregolari.

Nel gennaio decorso il sig. PICARD ed io siamo giunti, per vie diverse, all'uguaglianza

$$r - q = p_g - p_a \text{ (*)}; \tag{5}$$

ma per ottenere il risultato definitivo mancava una disuguaglianza in senso contrario, la quale permettesse di trasformare in uguaglianze le (3), (4). Il sig. CASTELNUOVO potè fare quest'ultimo passo importante, e tutt'altro che agevole, mercè l'introduzione e l'uso ingegnoso del gruppo permutabile di trasformazioni birazionali, che mutano tra loro i sistemi lineari di un sistema continuo completo, di curve algebriche (**).

Nel n.° 8 di questa Memoria il lettore vedrà come la disuguaglianza del sig. CASTELNUOVO, possa stabilirsi pure coll'aiuto del primo teorema d'ABEL.

Ho citato poc'anzi il sig. PICARD, a proposito della relazione (5): debbo aggiungere che in una Nota inserita nello stesso numero dei *Comptes rendus*, in cui trovasi un riassunto del presente lavoro (3 aprile 1905), egli, continuando nello stesso ordine di idee svolto nella Nota citata del 16 gennaio, accenna ad un'altra via per arrivare alle uguaglianze

$$q = p_g - p_a, \quad r = 2\,(p_g - p_a).$$

Il metodo del sig. PICARD ha un indirizzo completamente diverso da quello del sig. CASTELNUOVO e dal mio: assunta come immagine proiettiva dell'ente ∞^2, una superficie F d'ordine m, le cui sezioni piane appartengano ad un sistema lineare regolare, l'irregolarità della F entra negli sviluppi del sig. PICARD, mediante la deficienza della serie staccata sopra una sezione piana generica, dalle superficie aggiunte d'ordine $m - 3$; dopo ciò tutto procede

(*) Vedi le Note dei sigg. PICARD ed ENRIQUES inserite nei *Comptes rendus* del 16 gennaio; nonchè la mia Nota citata di Torino, *Sulla differenza tra i numeri degl'integrali*...

(**) [Il sig. CASTELNUOVO ha sviluppato diffusamente la sua dimostrazione nella Nota, *Sugli integrali semplici appartenenti ad una superficie irregolare* (Rendiconti dei Lincei, maggio-giugno 1905)] (9 agosto 1905).

coll'uso sistematico dell'equazione differenziale lineare E, di cui il sig. PICARD profittò costantemente e in un modo così mirabile, nella sua teoria delle funzioni algebriche di due variabili, fin da quando stabilì il teorema fondamentale che « il numero degli integrali distinti di 2.ª specie, uguaglia il numero « dei loro periodi. »

Sinora ho parlato del *primo* teorema d'ABEL sulle superficie. Ciò perchè, considerando il teorema d'ABEL sulle curve di genere > 0 come esprimente una condizione affinchè un'*involuzione* di gruppi di punti, sia lineare, si presenta, sopra le superficie irregolari, la questione di « ricercare quand'è che « una data involuzione di gruppi di punti, è regolare. »

Il *secondo teorema* d'ABEL, di cui tratto nella 2.ª parte di questo lavoro, afferma appunto che *la condizione necessaria e sufficiente perchè un'involuzione di gruppi di punti, data sopra una superficie, sia regolare, è che le somme degl'integrali finiti di* PICARD, *appartenenti alla superficie, nei punti di un gruppo dell'involuzione, rimangano costanti al variare continuo di questo gruppo.*

Si deduce, dal 2.º teorema d'ABEL, che *sopra una superficie, priva di fasci irrazionali, ogni involuzione di una serie continua è regolare.*

Ma tuttavia la portata del 2.º teorema d'ABEL è inferiore alla portata del 1.º: basta a provarlo il fatto che, sopra una superficie irregolare, è eccezionale l'esistenza di involuzioni irregolari; mentre vi esistono sempre sistemi completi non lineari, di curve algebriche.

§ 1. IL PRIMO TEOREMA D'ABEL E ALCUNE SUE APPLICAZIONI.

1. *Un lemma sopra le serie ∞^1 di gruppi di punti appartenenti ad una curva algebrica.* Per ragioni di chiarezza giova staccare dalla dimostrazione del 1.º teorema d'ABEL alcune questioni accessorie, che, del resto, sono già interessanti di per sè. Di tali questioni intendiamo appunto occuparci in questo numero e nel successivo.

TEOREMA I. *Sopra una curva algebrica (irriducibile) Γ, si abbia una serie algebrica ∞^1 (irriducibile) Σ di gruppi di ν punti, tale che l'insieme degli n gruppi di Σ che passano per un punto x variabile su Γ (inclusovi il punto x contato n volte), si muova entro una serie lineare (d'ordine $n\nu$): allora tutti i gruppi di Σ appartengono ad una medesima serie lineare (d'ordine ν).*

Fissiamo infatti l'attenzione sopra un gruppo $G \equiv (x_1 x_2 \dots x_\nu)$ del sistema Σ, e, detto u un integrale abeliano di 1.^{a} specie, appartenente a Γ, formiamo la somma $u(x_1) + u(x_2) + \cdots + u(x_\nu)$.

Se entro alla superficie di Riemann Γ, il punto x_1 di G descrive il ciclo lineare σ, partendo dalla posizione iniziale fissata e ritornandovi, tra gli n gruppi di Σ che passano per x_1 si produrrà una certa permutazione, sì che, in generale, a circolazione avvenuta, il gruppo G si sarà mutato in un altro di tali gruppi. Ma è certo che se x_1 descrive $n!$ volte il ciclo σ, dopo un certo numero m di circolazioni σ (m essendo un divisore di $n!$) s'incontra la sostituzione identica, sicchè anche la circolazione $n!\,\sigma$ non produrrà alcuna permutazione tra i gruppi suddetti.

Ne deriva che, dopo tale circolazione, la somma $u(x_1) + \cdots + u(x_\nu)$ sarà aumentata di una combinazione lineare a coefficienti *interi* dei periodi, perchè si è prodotta — al più — una permutazione tra i punti $x_1 x_2 \dots x_\nu$. Se ora il ciclo σ si deforma con continuità, assumendo una qualunque delle forme ad esso *equivalenti*, l'incremento della somma $u(x_1) + \cdots + u(x_\nu)$ per la circolazione $n!\,\sigma$, dovrà variare con continuità; e poichè i coefficienti dei periodi, che sono le sole quantità variabili durante questa deformazione, debbono mantenersi interi, si conclude che l'incremento stesso dovrà rimanere costante.

In tal modo ad ogni ciclo σ, che abbia l'origine e il termine in un punto x_i del gruppo G, viene *associato* un incremento della somma $u(x_1) + \cdots + u(x_\nu)$, il quale può bensì dipendere dalla posizione del punto x_i entro a G, ma non muta se si sostituisce a σ un ciclo equivalente.

Si può ora far variare con continuità il gruppo G, a partire dalla posizione iniziale fissata e ritornandovi, di guisa che il punto x_1, p. es., vada nel posto di uno qualunque dei punti rimanenti $x_2 \dots x_\nu$. Considerando sopra la superficie di Riemann Γ una famiglia di cicli equivalenti σ, definiti in modo ben determinato, p. es. rispetto ai tagli normali, se ne rileva che l'incremento della somma $u(x_1) + \cdots + u(x_\nu)$, associato ad un ciclo σ che passi per x_1, è uguale all' incremento associato ad un ciclo σ che passi per x_i $(i = 2, \dots, \nu)$, perchè, nella variazione continua di G, quell'incremento non può variare, sempre a causa del suo particolar legame coi periodi.

Dunque, allorquando un punto del gruppo $(x_1 x_2 \dots x_\nu)$ traversa $n!$ volte, col medesimo cammino, un determinato taglio normale, ritornando alla posizione di partenza, la somma $u(x_1) + \cdots + u(x_\nu)$ subisce un incremento *in-*

dipendente dalla posizione iniziale del gruppo e dalla scelta entro al gruppo stesso, del punto che si fa circolare.

Vediamo ora a quale conclusione più precisa conduca l'ipotesi che l'insieme dei gruppi di Σ uscenti dal punto variabile su Γ, si muova entro una serie lineare d'ordine $n\nu$.

Rappresentando i gruppi di Σ coi punti di un'altra curva algebrica C, verremo ad avere tra Γ e C una corrispondenza (ν, n). Quando il punto y che rappresenta il gruppo $(x_1 x_2 \dots x_\nu)$, descrive $\nu!$ volte un ciclo τ, i punti x non si permutano tra loro, così che il punto x_1, ad es., descrive un ciclo σ, ritornando alla posizione di partenza. Se, dunque, a è l'incremento di $u(x_1) + \cdots + u(x_\nu)$ quando x_1 descrive il ciclo $n!\,\sigma$, per la stessa circolazione $n!\,\sigma$ la somma U dei valori di u nei punti di tutti i gruppi di Σ, che escono da x_1, aumenterà di $n\,a$.

Non può quindi essere $a \neq 0$, perchè altrimenti la somma U non resterebbe costante per la circolazione $n!\,\sigma$: contrariamente al teorema di Abel.

Si conclude pertanto che la somma $u(x_1) + \cdots + u(x_\nu)$ è funzione *uniforme*, dovunque finita, del punto y; e quindi che, al variare continuo di y, essa rimane costante. In forza della sufficienza della condizione data dal teorema d'Abel, ciò significa che il gruppo $(x_1 \dots x_\nu)$ varia in una serie lineare, c. d. d.

2. *Lemma sulle corrispondenze a valenza zero tra una curva ed una superficie.* Tra i punti di una curva algebrica Γ ed i punti di una superficie algebrica F, s'immagini una corrispondenza algebrica, che associ ad ogni punto ξ di Γ, tutti i punti di una curva algebrica C di F, in guisa che, al variare del punto ξ, la C descriva un sistema algebrico ∞^1 (irriducibile) S, di grado n e indice ν.

Ogni curva C proverrà da $k\,(\geqq 1)$ punti di Γ; così che, al variare di C entro ad S, questi k punti descriveranno su Γ un'involuzione di grado k, e le ν curve di S uscenti da un punto di F, saranno rappresentate su Γ da un gruppo di $n' = k\nu$ punti. Il sistema Σ di questi ∞^2 gruppi di n' punti, sarà birazionalmente identico ad F o ad un'involuzione ivi esistente, secondo che le ν curve di S passanti pel punto generico x di F, non passano o passano di conseguenza per altri punti della superficie, variabili con x. Se il sistema S è *composto* con un'involuzione di grado $l\,(\geqq 1)$, per due punti generici di Γ passeranno $\nu' = \frac{n}{l}$ gruppi di Σ; cioè il sistema Σ avrà l'indice ν'.

Come naturale estensione delle corrispondenze a valenza zero tra due curve (*), possiamo definire le *corrispondenze a valenza zero tra una curva ed una superficie.*

Data una corrispondenza, che faccia passare dai punti di Γ ai punti di F, diremo che essa è a valenza zero, quando le curve C omologhe dei punti di Γ, appartengono ad un medesimo sistema lineare; e diremo che è a valenza zero la corrispondenza (inversa della precedente), che fa passare dai punti di F a quelli di Γ, allorquando appartengono ad una medesima serie lineare, i gruppi di Σ, omologhi dei punti di F.

Premesse queste definizioni, passiamo a dimostrare il

Teorema II. *Tra una curva Γ ed una superficie F una corrispondenza che sia a valenza zero in un senso, lo è pure nel senso opposto.*

Supposto infatti che le C, di cui sopra, appartengano ad un medesimo sistema lineare $|C|$, prendiamo come immagine di F una superficie F' (semplice o multipla), le cui sezioni iperpiane sieno immagini del sistema $|C|$; e diciamo S' il sistema degli ∞^1 iperpiani corrispondenti proiettivamente alle C del sistema S.

Per un punto di F' passano ν iperpiani di S': e poichè la F' non fa parte dell'inviluppo del sistema S' (chè altrimenti ogni iperpiano di S' toccherebbe la F' in infiniti punti), si conclude che per ogni punto dello spazio passano ν iperpiani di S' (**), cioè che gli ∞^2 gruppi di ν iperpiani uscenti dai punti di F', appartengono alla serie lineare, d'ordine ν, staccata entro all'ente S' dai punti dello spazio. E siccome il sistema S' è birazionalmente identico alla curva Γ (o ad un'involuzione ivi esistente, se $k > 1$), i gruppi del sistema Σ dovranno appartenere ad una medesima serie lineare.

Suppongasi, viceversa, che i gruppi di Σ appartengano ad una medesima serie lineare $g_{n'}$, e si prenda come immagine della curva Γ, una curva Γ' (semplice o multipla), le cui sezioni iperpiane sieno immagini dei gruppi di $g_{n'}$. Ai gruppi di Σ verranno a corrispondere proiettivamente ∞^2 iperpiani costituenti un sistema Σ', tale che per due punti generici di Γ' passeranno ν' iperpiani del sistema.

(*) Vedi ad es. la mia Memoria, *Sulle corrispondenze tra i punti di una curva algebrica e sopra certe classi di superficie* (Memorie della R. Acc. di Torino, (2), t. 53, 1903); n.° 14.

(**) Questa considerazione che torna utile spesso (sotto forme più o meno differenti), è dovuta al sig. Segre. Vedi la sua *Introduzione alla geometria sopra un ente algebrico semplicemente infinito* (Annali di Matematica, 1891), n.° 23.

Si vede, in primo luogo, che il sistema degli ∞^1 iperpiani di Σ' uscenti da un punto generico di Γ', è di classe ν' (per la solita considerazione di SEGRE); e, in secondo luogo, che è di classe ν' il sistema degli infiniti iperpiani di Σ' che escono da un punto generico dello spazio. Onde, entro all'ente Σ', il sistema delle varietà ∞^1 *staccate* dai singoli punti di Γ', appartiene totalmente al sistema lineare di tutte le varietà ∞^1, *di ugual classe*, staccate dai singoli punti dello spazio. Tenendo conto del fatto che Σ' è birazionalmente identico alla superficie F (o ad un'involuzione ivi esistente, se $l > 1$), si conclude che le curve C appartengono ad un medesimo sistema lineare.

OSSERVAZIONE. Il concetto di valenza nulla e il relativo teorema II, *si estendono subito alle corrispondenze tra una curva ed una varietà algebrica di dimensione qualunque.*

Da tale estensione discende p. e. il

COROLLARIO. *Sopra una varietà algebrica a k dimensioni V, una varietà razionale ∞^1 di M_{k-1} è sempre contenuta totalmente in un sistema lineare* (*).

Basta perciò rappresentare le M_{k-1} coi punti di una curva razionale Γ; osservare che sopra Γ tutti i gruppi di un ugual numero di punti, appartengono ad una medesima serie lineare; ed applicare il teorema II esteso.

3. *Il primo teorema d'Abel sulle superficie.* Passiamo ora a dimostrare quello che io ho chiamato il primo teorema d'ABEL sulle superficie. Eccone l'enunciato:

TEOREMA III. *Sieno $I_1 I_2 \ldots I_q$ gl'integrali semplici di 1.ª specie (tra loro indipendenti), che appartengono ad una superficie algebrica F; e sieno $x_1 x_2 \ldots x_n$ i punti comuni a due curve algebriche, tracciate sulla superficie, e variabili con continuità entro una medesima serie algebrica S: allora, la condizione necessaria e sufficiente affinchè questa serie sia contenuta totalmente in un sistema lineare, è che le somme*

$$I_h(x_1) + \cdots + I_h(x_n), \quad (h = 1, \ldots, q),$$

restino costanti.

La necessità della condizione è un'ovvia conseguenza dell'ordinario teorema d'ABEL. Invero, se il dato sistema S appartiene totalmente ad un sistema lineare, gl'infiniti gruppi segati sopra una curva C di S, dalle altre C

(*) Cfr. ENRIQUES, *Un'osservazione relativa alla rappresentazione parametrica delle curve algebriche* (Rendiconti di Palermo, 1896).

del sistema, appartengono ad una medesima serie lineare; e quindi la somma dei valori di un integrale abeliano di 1.ª specie disteso sulla C, nei punti di uno di questi gruppi, resta costante al variare continuo di tal gruppo. Ciò accade in particolare della somma dei valori di un integrale I_h, perchè quest'integrale dà luogo sulla C fissata, ad un integrale abeliano (riducibile).

Passiamo a stabilire la sufficienza della condizione.

Senza alcuna restrizione possiamo supporre che il sistema S sia ∞^1 (e irriducibile). Ne indicheremo con ν l'indice; e, per evitare complicazioni di forma, supporremo dapprima che il sistema S sia *semplice*, cioè che le ν curve C di S uscenti da un punto generico x di F, non passino in conseguenza per altri punti di F, variabili con x.

Rappresentati birazionalmente gli elementi (curve) di S coi punti di una curva algebrica piana

$$\Gamma(\xi\,\eta)=0,$$

su Γ verremo ad avere al solito ∞^2 gruppi di ν punti (immagini dei gruppi di curve C uscenti dai punti di F) costituenti un sistema Σ, d'indice n. Tale sistema sarà birazionalmente identico ad F; onde, detto u un integrale abeliano di 1.ª specie, appartenente a Γ, la somma $u(\xi_1)+\cdots+u(\xi_\nu)$, relativa ai ν punti $\xi_1\ldots\xi_\nu$ che corrispondono al punto x di F, si trasformerà in un integrale finito di Picard, J, appartenente ad F (*).

Sicchè, se x assume successivamente le posizioni $x_1, x_2,\ldots, x_n$, in modo che il gruppo $(\xi_1\,\xi_2\ldots\xi_\nu)$ assuma successivamente le posizioni:

$$(\xi'_1\,\xi'_2\ldots\xi'_\nu)\,,\quad(\xi''_1\,\xi''_2\ldots\xi''_\nu)\,,\ldots,\quad(\xi^n_1\,\xi^n_2\ldots\xi^n_\nu)\,,$$

ove sarà ad es. $\xi'_1\equiv\xi''_1\equiv\cdots\equiv\xi^n_1$, $\xi'_2\equiv\xi''_2\equiv\cdots\equiv\xi^n_2$ (ξ'_1, ξ'_2 denotando i punti immagini di due C che s'intersechino secondo il gruppo $x_1\ldots x_n$), la somma

$$\sum_{r=1}^{n}\left[u(\xi^r_1)+u(\xi^r_2)+\cdots+u(\xi^r_\nu)\right],$$

risulterà uguale ad

$$J(x_1)+J(x_2)+\cdots+J(x_n),$$

e quindi (per l'ipotesi da cui partiamo) rimarrà costante, al variare continuo dei punti ξ'_1, ξ'_2.

(*) Questa feconda considerazione è dovuta al sig. Humbert: *Sur quelques points de la théorie des courbes et des surfaces algébriques* (Journal de Math., (4), t. X, 1894).

In virtù dell'ordinario teorema d'Abel, se ne deduce che l'insieme dei gruppi di Σ uscenti da due punti variabili su Γ, varia entro una serie lineare (d'ordine $n \nu$).

Applicando il teorema I, si trae da ciò che gli ∞^1 gruppi di Σ uscenti da un punto fissato di Γ, appartengono ad una medesima serie lineare; e poichè le serie lineari complete che si ottengono a partire da due punti diversi di Γ, contengono entrambe gli n gruppi di Σ che escono da questi punti, esse dovranno coincidere: cioè *tutti i gruppi di* Σ *apparterranno ad una medesima serie lineare.*

La corrispondenza tra F e Γ è perciò a valenza zero, e quindi (teorema II) le curve C apparterranno ad un medesimo sistema lineare.

Si è supposto fin qui che il sistema S sia semplice. Se, al contrario, S è composto con un'involuzione di grado l, rappresentando i gruppi di questa coi punti di una nuova superficie F', avremo tra F, F' una corrispondenza $(l, 1)$, che farà passare dal sistema S ad un sistema semplice S' di curve C'.

Dicasi J' un integrale finito di Picard appartenente ad F': mediante la sostituzione razionale che lega le coordinate del punto x' di F', alle coordinate del punto x di F, l'integrale $J'(x')$ si muta in un integrale di 1.^{a} specie $J(x)$, che appartiene ad F ed assume lo stesso valore, $J'(x')$, in tutti gli l punti x corrispondenti ad x'. Sicchè l'ipotesi che sieno costanti le somme $I_h(x_1) + \cdots + I_h(x_n)$, si traduce in ciò: che, dicendo

$$x'_1\, x'_2 \ldots x'_m \left(m = \frac{n}{l}\right)$$

i punti comuni a due curve C', ed J' un integrale qualunque di 1.^{a} specie appartenente ad F', la somma $l\,U$, ove si è posto

$$U = J'(x'_1) + \cdots + J'(x'_m),$$

rimane costante, al variare continuo delle due C'.

Se ora si fanno variare con continuità le due C', ritornando in fine alle posizioni iniziali, e s'indica con a l'incremento di U dopo questa circolazione, sarà $l\,a$ l'incremento corrispondente di $l\,U$; e poichè $l\,a = 0$, dovrà essere $a = 0$: cioè la somma U sarà funzione *uniforme*, ovunque finita, del gruppo $(x'_1\, x'_2 \ldots x'_m)$.

Si conclude pertanto che $U = \text{cost.}$, e quindi, pel ragionamento precedente, che le curve C' appartengono ad un medesimo sistema lineare $|C'|$.

Ne deriva che le C appartengono al sistema *lineare* trasformato di $|C'|$.

Osservazione. In particolare, quando la F sia priva di integrali finiti di Picard, la condizione richiesta dal teorema III è senz'altro soddisfatta, e si ha il teorema di Humbert (*):

Sopra una superficie priva di integrali finiti di Picard, *ogni sistema algebrico (irriducibile) di curve algebriche, è contenuto totalmente in un sistema lineare.*

4. *Un legame trascendente fra tre curve di un medesimo sistema continuo.* Al teorema d'Abel ora dimostrato, si posson dare altre forme, che lo rendono più espressivo e più utile. Una di queste forme si ottiene mediante l'applicazione del seguente

Teorema IV. *Sieno C, C_1, C_2, tre curve algebriche di un medesimo sistema continuo S, appartenente ad una superficie F. Allora, se le C_1, C_2 restano fisse e la C varia con continuità entro al sistema, la differenza tra le somme dei valori di un integrale di 1.ª specie nei punti dei gruppi $(C\,C_1)$, $(C\,C_2)$* (**), *si mantiene costante.*

Supposto, com'è lecito, che il sistema S sia ∞^1 (irriducibile), di grado n e indice ν, ricorriamo alla solita rappresentazione delle curve di S coi punti della curva piana Γ. Detti $(x_1\,x_2\ldots x_n)$ i punti del gruppo $(C\,C_1)$, $(\bar{x}_1\,\bar{x}_2\ldots\bar{x}_n)$ i punti del gruppo $(C\,C_2)$, ed I un integrale qualunque di 1.ª specie, appartenente ad F, formiamo l'espressione

$$I(x_1)+I(x_2)+\cdots+I(x_n)-I(\bar{x}_1)-I(\bar{x}_2)-\cdots-I(\bar{x}_n).$$

Al variare della sola curva C, questa differenza risulta evidentemente uguale al valore di un certo integrale abeliano (di 1.ª specie) della curva Γ, nel punto ξ che corrisponde a C; onde avremo:

$$\left.\begin{aligned} I(x_1)+I(x_2)+\cdots+I(x_n)-I(\bar{x}_1)-\cdots-I(\bar{x}_n)= \\ =\lambda_1 u_1(\xi)+\cdots+\lambda_\pi u_\pi(\xi)+\lambda, \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

ove $u_1, u_2, \ldots, u_\pi$ sono i π integrali normali di 1.ª specie appartenenti a Γ, e le λ son costanti.

Facendo circolare ξ in modo che traversi il taglio che corrisponde al periodo 1 di u_1, il primo membro aumenta di una combinazione lineare a *coefficienti interi* dei periodi di I; mentre il 2.º membro aumenta di λ_1. Sicchè λ_1

(*) Loc. citato.

(**) Con $(C\,C_1)$ si rappresenta il gruppo dei punti comuni alle curve C, C_1.

risulta uguale ad una combinazione lineare a coefficienti interi dei periodi di I; e analoghe espressioni si hanno per $\lambda_2 \ldots \lambda_\pi$.

Se ora facciamo variare con continuità una delle C_1, C_2, o entrambe, le λ variano con continuità; e siccome nelle espressioni delle $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\pi$ le sole quantità che a priori risultino dipendenti dalla posizione delle C_1, C_2, sono i coefficienti interi delle combinazioni lineari, si conclude che le λ_1, $\lambda_2, \ldots, \lambda_\pi$ si mantengono costanti (mentre λ può effettivamente variare).

Sicchè l'integrale

$$v(\xi) = \lambda_1 u_1(\xi) + \cdots + \lambda_\pi u_\pi(\xi),$$

risulta indipendente dalla posizione delle C_1, C_2 entro al sistema S.

Facendo tendere con continuità la curva C_2 alla C_1, e tenendo fissa la C_1 il gruppo $(\bar{x}_1 \bar{x}_2 \ldots \bar{x}_n)$ tenderà ad $(x_1 x_2 \ldots x_n)$; sicchè, per un'opportuna scelta del cammino che porta C_2 in C_1, il 1.° membro della relazione (1) tenderà a zero, mentre nel 2.° membro varierà soltanto λ, tendendo ad un certo limite λ_0.

Al limite avremo dunque:

$$\lambda_1 u_1(\xi) + \cdots + \lambda_\pi u_\pi(\xi) + \lambda_0 = 0.$$

E poichè tale relazione vale per qualunque posizione della curva C entro ad S, cioè per qualunque posizione del punto ξ sulla Γ, e d'altra parte gli integrali $u_1 u_2 \ldots u_\pi$ sono linearmente indipendenti, si conclude che le λ son tutte nulle. La (1) riducesi perciò alla

$$I(x_1) + \cdots + I(x_n) - I(\bar{x}_1) - \cdots - I(\bar{x}_n) = \lambda,$$

la quale dimostra il teorema.

5. *Una seconda forma del teorema d'Abel.* Avendosi sopra una superficie F un sistema continuo di curve C, per *serie caratteristica* di una curva generica del sistema, s'intende la serie lineare di gruppi di punti segati sulla curva fissata, dalle C che sono infinitamente prossime ad essa (*).

Chiameremo, per brevità, *somme caratteristiche* relative ad una C del sistema S, le somme dei valori assunti dagli integrali di 1.ª specie $I_1 I_2 \ldots I_q$, appartenenti ad F, nei punti di un gruppo caratteristico di C. Tali somme risultano definite a meno di multipli dei periodi.

(*) Vedi la mia Nota, *Osservazioni sui sistemi continui di curve appartenenti ad una superficie algebrica* (Atti della R. Acc. di Torino, 1904).

Orbene, mediante la proposizione del numero precedente, il teorema di Abel (n.° 3) si trasforma nel modo seguente:

Teorema V. *La condizione necessaria e sufficiente affinchè le curve di un sistema continuo tracciato sopra una superficie algebrica, sieno tra loro equivalenti (cioè appartengano ad un medesimo sistema lineare), è che sieno uguali, a meno di multipli dei periodi, le corrispondenti somme caratteristiche di due curve qualunque del sistema.*

La necessità della condizione essendo evidente, occupiamoci di stabilirne la sufficienza.

Se C_1, C_2 son due curve del sistema, e G_1, G_2 due loro gruppi caratteristici, segando le C_1, C_2, una volta con una curva infinitamente prossima a C_1, e un'altra volta con una curva infinitamente prossima a C_2, avremo (teor. IV):

$$\Sigma\, G_1 - \Sigma\,(C_1\, C_2) \equiv k, \quad \Sigma\,(C_1\, C_2) - \Sigma\, G_2 \equiv k \text{ (modd. periodi)},$$

ove $\Sigma\, G_1$, $\Sigma\,(C_1\, C_2), \ldots$ indicano le somme dei valori assunti da un integrale I di 1.ª specie, nei punti dei gruppi G_1, $(C_1\, C_2), \ldots$ Sommando membro a membro, e ricordando l'ipotesi $\Sigma\, G_1 \equiv \Sigma\, G_2$, si ottiene $2\,k \equiv 0$.

Ora, quando C_2 tende con continuità a C_1, la k, essendo esprimibile mediante una combinazione lineare a coefficienti interi dei semiperiodi di I, non può variare; e poichè quando C_2 coincide con C_1 si ha $k \equiv 0$, dovrà risultare:

$$\Sigma\, G_1 \equiv \Sigma\,(C_1\, C_2) \equiv \Sigma\, G_2.$$

Dunque al variare *continuo* delle curve C_1, C_2, rimane costante la $\Sigma\,(C_1\, C_2)$. Ciò prova che il sistema S appartiene totalmente ad un sistema lineare (teor. III).

6. *Un criterio di equivalenza per due curve tracciate sopra una superficie.* Prima di passare ad esporre una terza forma sotto cui può presentarsi il primo teorema d'Abel, dimostreremo una proposizione che può riescire utile anche in altre circostanze.

Ecco di cosa si tratta:

Teorema VI. *Se due curve C_1, C_2 tracciate sopra una superficie F, segano gruppi equivalenti sopra le curve A di un fascio irriducibile (razionale o irrazionale), esse sono equivalenti o differiscono per curve del fascio.*

Invero i gruppi equivalenti $(A\, C_1)$, $(A\, C_2)$ individuano sopra la curva A una serie lineare g^1_m che li *congiunge*. Al variare della A otteniamo una semplice infinità di queste g^1_m. I loro gruppi si possono perciò rappresentare coi punti di una nuova superficie Φ, la quale verrà a contenere un fascio Σ'

di curve razionali A', immagini delle singole g^1_m. I gruppi segnati sulle C_1, C_2 dalle curve A del fascio dato Σ, verranno rappresentate dai punti di due curve C'_1, C'_2, *unisecanti* le A'.

Si può ora costruire in infiniti modi (p. e. aggiungendo ad una delle unisecanti note, un gruppo conveniente di curve A') una terza unisecante D', che non contenga come parte nè C'_1 nè C'_2.

Mediante la corrispondenza $(1, m)$ che si ha tra Φ ed F, alla D' corrisponde su F una curva D, secante ciascuna A (fuori degli eventuali punti base) in un gruppo della relativa g^1_m; sicchè mediante le terne di gruppi segati dalle tre curve C_1, C_2, D sopra due qualunque A, resta individuata una proiettività tra le relative g^1_m.

Fissato un gruppo di una g^1_m, gl'infiniti gruppi delle altre, omologhi al gruppo fissato nelle suddette proiettività, riempiono una curva L, che, al variare del gruppo entro la propria g^1_m, descrive un fascio lineare $|L|$, le cui curve segnano sulle A (fuori dei punti base) i gruppi delle g^1_m. Al fascio $|L|$ appartengono come curve parziali o totali le C_1, C_2, D; ed è chiaro che la differenza tra $|L|$ ed una di queste curve non può che equivalere ad un insieme di curve A.

Si conclude che le C_1, C_2 sono equivalenti o differiscono per curve del fascio.

Osservazione. *Se il fascio dato è lineare e le curve C_1, C_2 son dello stesso ordine, la seconda alternativa dell'enunciato è evidentemente impossibile.*

7. *La terza forma del teorema d'Abel.* Premesso il teor. VI, consideriamo ancora su F un sistema algebrico ∞^1 S (non composto con un'involuzione) di curve C, e (come al n.° 3) rappresentiamo le C coi punti di una curva piana Γ, conservando le stesse notazioni del n.° 3.

I gruppi di ν curve C uscenti dal punto x variabile sopra una curva irriducibile A della F, son rappresentati su Γ da una ∞^1 irriducibile, T, di gruppi $(\xi_1 \xi_2 \ldots \xi_\nu)$.

Diciamo $(x_1 x_2 \ldots x_m)$ il gruppo dei punti segati sulla A dalla curva C variabile entro ad S.

Poichè la somma dei valori di un integrale abeliano di 1.^{a} specie u della Γ, nei punti del gruppo $(\xi_1 \ldots \xi_\nu)$, corrispondente al punto x di A, è uguale (come abbiamo osservato al n.° 3) al valore assunto in x da un certo integrale J, di 1.^{a} specie, appartenente ad F; se si ammette che la somma dei valori assunti da un integrale finito della F nei punti x_1, $x_2, \ldots, x_m$, si mantenga costante al variare continuo del gruppo (CA) (cioè al variare continuo della C), riprendendo il ragionamento del n.° 3, si perviene alla conclusione che la somma dei valori assunti da u nei punti dei gruppi di T, che passano per un punto di Γ, resta costante al variare continuo di questo punto.

Ciò significa (in virtù dell'ordinario teorema d'Abel), che l'insieme dei gruppi di T uscenti da un punto ξ variabile su Γ (compresovi il punto ξ contato m volte), varia entro una serie lineare (d'ordine $m.\nu$).

Applicando il teor. I si conclude che i gruppi di T appartengono ad una medesima serie lineare, cioè che la corrispondenza (m, ν) tra i punti di A ed i punti di Γ, è a valenza zero in un senso, e quindi (teor. II) anche nell'altro. Dunque i gruppi segnati su A dalle curve C, appartengono ad una medesima serie lineare.

La stessa conclusione vale quando il sistema S sia composto con un'involuzione di grado l. Rappresentando i gruppi dell'involuzione coi punti di una nuova superficie F', se la A non appartiene, neanche parzialmente, all'involuzione, se cioè gli $l-1$ coniugati di un punto generico di A, sono tutti esterni alla curva stessa, la curva A' di F' corrispondente ad A, sarà segata precisamente in m punti dalle curve C' immagini delle C; e la somma dei valori di un integrale di 1.ª specie J', relativo ad F', nei punti di un gruppo $(C' A')$, risultando uguale alla somma dei valori dell'integrale trasformato J, nei punti del gruppo omologo $(C A)$, resterà costante al variare continuo di C'. Poichè il sistema delle C' è semplice, si conclude che i gruppi $(C' A')$, e quindi i gruppi $(C A)$, appartengono ad una medesima serie lineare.

Se poi A appartiene all'involuzione (parzialmente o totalmente), si applicheranno a questo caso le considerazioni colle quali si chiude il n.° 3, e si concluderà ancora come sopra.

Supponendo ora che la curva A sia variabile entro un fascio lineare $|A|$, si vede in primo luogo, che i gruppi segati da due diverse A sopra una C sono equivalenti, e quindi che un integrale qualunque di 1.ª specie appartenente ad F, dà in quei gruppi le stesse somme (a meno di multipli dei periodi).

Se dunque le somme cui dànno luogo gl'integrali di 1.ª specie della F in un gruppo $(C A)$, rimangono costanti al variare continuo della C, quando la A ha una posizione fissata entro al fascio, lo stesso accadrà per *ogni altra* posizione della A; e quindi le C segheranno gruppi equivalenti sulle curve di $|A|$: donde segue (numero precedente, Oss.) che il sistema S è contenuto totalmente in un sistema lineare.

Viceversa, partendo da quest'ultima ipotesi, si vede subito che le somme degl'integrali di 1.ª specie nei punti di un gruppo $(C A)$, rimangono costanti al variare continuo delle curve C, A. Arriviamo così al

TEOREMA VII. *La condizione necessaria e sufficiente affinchè un sistema continuo di curve algebriche C, appartenente ad una superficie F, sia contenuto totalmente entro un sistema lineare, è che la somma dei valori di ogni integrale semplice di 1.ª specie della F, nei punti comuni ad una C e ad una curva irriducibile A, fissata entro ad un fascio lineare, resti costante al variare continuo della C.*

8. *Determinazione del numero degli integrali di Picard della 1.ª (e della 2.ª) specie appartenenti ad una superficie algebrica.* Come applicazione notevolissima del primo teorema d'ABEL, possiamo determinare i numeri degli integrali di PICARD delle prime due specie, che appartengono ad una superficie F, di generi p_g, p_a.

A tal uopo prendiamo su F un sistema algebrico completo $\{C\}$, di dimensione $p_g - p_a$, la cui curva generica sia isolata. In base al teorema di ENRIQUES, che afferma la completezza della serie caratteristica di un sistema algebrico completo (*), possiamo ottenere un sistema soddisfacente alle condizioni richieste, imponendo d punti base generici ad un sistema algebrico regolare $\infty^{d+p_g-p_a}$, cioè ad un sistema la cui curva generica individui un sistema lineare regolare ∞^d.

Fissiamo su F un fascio lineare irriducibile $|A|$ e consideriamo le somme $c_1, c_2, \ldots, c_q$ (definite a meno di multipli dei periodi), cui dànno luogo gl'integrali di 1.ª specie $I_1, I_2, \ldots, I_q$ appartenenti ad F, nel gruppo (CA), comune ad una A fissata e ad una C variabile entro al dato sistema.

Vogliamo provare anzitutto che non possono esservi infinite C che dieno le stesse somme di una C_0 *generica.* Consideriamo perciò entro a $\{C\}$, un sistema algebrico (irriducibile) ∞^1, S, che contenga C_0; e rappresentiamo al solito le curve di S coi punti di una curva piana Γ; così che il gruppo delle ν curve di S che escono dal punto x variabile su A, venga rappresentato da un gruppo di ν punti $(\xi_1 \xi_2 \ldots \xi_\nu)$ di Γ, variabile entro un sistema ∞^1 T.

Tenendo sempre conto del fatto che la somma dei valori assunti da un integrale qualunque di 1.ª specie della Γ, nei punti del gruppo $(\xi_1 \xi_2 \ldots \xi_\nu)$, è uguale al valore assunto nel punto x, da un integrale di 1.ª specie della superficie F, si vede che, se le curve C_0, C_1 del sistema S, dànno luogo agli

(*) ENRIQUES, *Sulla proprietà caratteristica delle superficie algebriche irregolari* (Rend. della R. Acc. di Bologna, decembre 1904). — Per un'altra dimostrazione del teorema di ENRIQUES, ved. la mia Nota, *Intorno alla costruzione dei sistemi completi non lineari...* (Rendiconti di Palermo, 1905.)

stessi valori per le somme $c_1 c_2 \dots c_q$, l'insieme G_0 dei gruppi di T che escono dal punto ξ^0 di Γ omologo di C_0, dovrà essere equivalente all'insieme G_1 dei gruppi di T che escono dal punto ξ', omologo di C_1.

Ora: o tutti i gruppi G (ciascuno dei quali è costituito dall'insieme dei gruppi di T uscenti da un punto di Γ) sono equivalenti tra loro; oppure vi è soltanto un *numero finito* di gruppi G equivalenti a G_0. Nel 1.° caso tutti i gruppi di T sono equivalenti (teor. I), e quindi lo sono pure tutti i gruppi segati su A dalle curve di S (teor. II), cioè S è contenuto totalmente entro un sistema lineare (teor. VII). Ma ciò deve escludersi, per l'ipotesi che la curva generica C_0 sia isolata.

Resta dunque possibile soltanto il 2.° caso: e quindi entro ad S non potrà aversi che un numero finito di curve C, che dieno per le somme c_1, $c_2, \dots, c_q$ valori rispettivamente uguali a quelli dati da C_0.

Ne deriva che la varietà V di tutte le curve di $|C|$ che dànno le stesse somme di C_0, ha comune un *numero finito* di curve con ogni sistema algebrico ∞^1 contenente C_0: dunque V è *algebrica*.

Ogni *parte* infinita della V, pel teor. VII, dovrebbe esser costituita da curve tra loro equivalenti. Ma ciò è inconciliabile coll'ipotesi che la curva generica di $|C|$ sia isolata. Sicchè la V non potrà contenere infiniti elementi.

Si conclude pertanto che, *al variare della C entro al sistema $|C|$, le somme c_1, $c_2, \dots, c_q$ assumono $\infty^{p_g - p_a}$ gruppi distinti di valori.* Ciò porta di necessità la disuguaglianza

$$q \geqq p_g - p_a . \tag{1}$$

Indicando con r il numero degli integrali distinti di 2.ª specie appartenenti ad F, avremo:

$$r - q \leqq p_g - p_a \text{ (*)}, \tag{2}$$

e inoltre:

$$r \geqq 2\, q, \tag{3}$$

come si vede osservando che i $2\,q$ integrali di 2.ª specie aventi per periodi le parti reali e le parti immaginarie dei periodi di I_1, $I_2, \dots, I_q$, sono tra loro distinti (**). Le disuguaglianze (1), (2), (3) non possono coesistere, se

(*) Cfr. la mia Nota citata, *Sulle superficie algebriche che posseggono integrali di* Picard..., n.° 3 (Rendiconti dei Lincei, 1904).

(**) Vedi ad es. la mia Nota, *Sulla differenza tra i numeri degli integrali di* Picard..., n.° 3.

non essendo

$$q = p_g - p_a\,, \quad r = 2\,(p_g - p_a).$$

Si perviene così al

TEOREMA VIII. *Una superficie algebrica di generi p_g, p_a possiede $p_g - p_a$ integrali di* PICARD *della 1.ª specie, e $2\,(p_p - p_a)$ integrali di* PICARD *della 2.ª specie* (*).

9. *Alcuni corollari geometrici dei teoremi precedenti.*

a) Una conseguenza immediata del teor. VII, che per quanto contenga assai meno di questo teorema, giova tuttavia rilevare per la sua forma geometrica, è la seguente:

Se sopra una superficie F le curve di un sistema continuo S segano gruppi equivalenti sopra UNA *curva irriducibile, la quale individui un sistema lineare almeno ∞^1, il sistema S sarà contenuto totalmente in un sistema lineare.*

Questa proposizione ha una certa analogia col teor. VI; ma mentre nel caso attuale, trattandosi di curve C di un sistema continuo, basta soltanto verificare l'equivalenza dei gruppi segati dalle C sopra *una* curva irriducibile di un sistema lineare infinito; nel caso trattato al n.° 6 occorreva verificare l'equivalenza dei gruppi segati dalle due date curve C_1, C_2, sulle curve di tutto un fascio.

b) Il teor. II può pure enunciarsi sotto la forma seguente:

La condizione necessaria e sufficiente affinchè un sistema algebrico ∞^1, S, di curve C tracciate sopra una superficie F, sia contenuto totalmente in un sistema lineare, è che entro all'ente S, appartengano ad una medesima serie lineare i gruppi di curve C uscenti dai punti di F.

c) Dato sulla superficie F un sistema algebrico ∞^1, S, di curve C, dicansi C_1, $C_2, \ldots$, C_ν le ν curve di S uscenti dal punto x di F, e suppongasi che, variando x, la curva composta $C_1 + C_2 + \cdots + C_\nu$ varii entro un sistema lineare.

Presa su F una curva irriducibile A, si consideri il sistema ∞^1, U, di gruppi di punti, segato su A dalle C. Quando x si muove sulla A, l'insieme dei ν gruppi di U che passano pel punto x, si muove nella serie lineare segata su A dal sistema $|\,C_1 + C_2 + \cdots + C_\nu\,|$; onde (teor. I) i gruppi di U apparterranno ad una medesima serie lineare.

(*) Per le citazioni relative a questo teorema, veggasi l'introduzione al presente lavoro.

Supponendo che A sia una curva di un sistema lineare infinito, mediante l'applicazione del Corollario a), si giunge al teorema:

Se sopra una superficie F si ha un sistema algebrico ∞^1, S, di curve C, tale che la curva composta dalle ν C che escono da un punto variabile su F, si muova entro un sistema lineare, allora il sistema S stesso è contenuto totalmente in un sistema lineare (*).

§ 2. Il secondo teorema d'Abel e la sua applicazione alle serie continue di involuzioni.

1. *Involuzioni sopra una superficie algebrica. — Il secondo teorema d'Abel sulla superficie.* Sopra una superficie algebrica F, una serie algebrica ∞^{2r} di gruppi di n punti, tale che r punti generici di F appartengano ad un sol gruppo, si dirà un'*involuzione di grado n e specie $2r$.* Una tale involuzione si riguarderà come *regolare*, quando la varietà V_{2r} i cui punti rappresentano i gruppi dell'involuzione, è regolare, cioè priva di integrali finiti di differenziali totali.

Un particolare interesse offre lo studio delle involuzioni doppiamente infinite, le quali si chiamano semplicemente *involuzioni*, sottintendendo « di specie 2 ». Una tale involuzione si rappresenta coi punti di una superficie, ed è noto (**) che la regolarità della superficie immagine si può pure esprimere geometricamente coll'uguaglianza dei generi, aritmetico e geometrico, od anche col fatto che la superficie è priva di sistemi completi di curve, non lineari.

In opposizione alle involuzioni regolari delle varie specie, si parlerà di *involuzioni irregolari.*

Ciò premesso, *il secondo teorema d'Abel* si enuncia come appresso:

Teorema IX. *Se $I_1 I_2 \dots I_q$ son gl'integrali semplici di 1.ª specie, tra loro indipendenti, che appartengono ad una superficie F, la condizione necessaria e sufficiente affinchè un'involuzione di grado n (e specie qualsiasi) data sulla F, sia regolare, è che la somma dei valori assunti da ciascuno*

(*) [Di questo teorema ha profittato il sig. Castelnuovo a pag. 656 della sua Nota lincea citata] (9 agosto 1905).

(**) Cfr. coll'introduzione al presente lavoro.

dei suddetti integrali, nei punti di un gruppo dell'involuzione, resti costante al variare continuo di questo gruppo.

La necessità della condizione si stabilisce in modo immediato. Infatti rappresentando i gruppi dell'involuzione coi punti della varietà V, le somme suddette risultano integrali di differenziali totali della V, e poichè, per ipotesi, questa varietà è priva di tali integrali finiti (trascendenti), ne deriva che le somme stesse riduconsi a costanti (*).

Supposto, viceversa, che si abbia:

$$\sum_{l=1}^{n} I_k(x_l) = c_k \quad (k = 1, 2, \ldots, q), \tag{1}$$

ove le c_k non mutano variando con continuità il gruppo $(x_1 x_2 \ldots x_n)$ entro alla data involuzione γ, si rappresentino ancora i gruppi della γ coi punti di una varietà V'_{2r}.

Le $\infty^{2(r-1)}$ involuzioni di 2.ª specie, ciascuna delle quali si ottiene considerando i gruppi della γ dei quali fanno parte $r - 1$ punti fissati su F, hanno per immagini su V le superficie Φ di un sistema algebrico Σ, di dimensione $2(r - 1)$.

Un integrale di differenziale totale J, che resti finito in ogni punto di V, considerato come funzione di un punto ξ scorrente sopra una Φ, dà luogo ivi ad un integrale semplice di 1.ª specie; e poichè il punto ξ è funzione razionale del punto x variabile su F, mediante la corrispondenza $(1, n - r + 1)$, che passa tra Φ ed F, l'integrale J si muta in un integrale I di 1.ª specie, che appartiene ad F e che assume il valore $J(\xi)$ in ciascuno degli $n - r + 1$ punti di F corrispondenti a ξ.

Ma dall'ipotesi (1) segue che la somma dei valori di I in questi $n - r + 1$ punti, si conserva costante al variare continuo del punto di Φ; dunque l'integrale $(n - r + 1) J(\xi)$ si conserva costante al variare continuo di ξ. Ne segue che dovrà esser nullo il valore di J lungo un ciclo lineare *qualsiasi* di Φ, e quindi l'integrale J di V dovrà esser costante sopra ogni superficie di Σ.

Da ciò si trae facilmente che J è costante su tutta la V. Invero, se Φ_1,

(*) Pel caso di un'involuzione *razionale*, costituita dai gruppi comuni alle coppie di curve di un sistema lineare, la necessità della condizione enunciata trovasi in Poincaré (*Sur les intégrales de différentielles totales*, Comptes rendus, déc. 1884). Vedi pure l'altra Nota, *Sur une généralisation du théorème d'Abel* (Comptes rendus, janvier 1885).

Φ_2 son due superficie di Σ passanti pei punti ξ_1, ξ_2 di V, e se inoltre ξ è un punto comune alle due superficie, sarà:

$$J(\xi_1) = J(\xi) = J(\xi_2).$$

Se le due superficie non s'incontrano, come accadrà per posizioni generiche dei punti ξ_1, ξ_2, diciamo $(x'_1\, x'_2 \ldots x'_{r-1})$, $(x''_1\, x''_2 \ldots x''_{r-1})$ i punti fissi rispettivi degli ∞^2 gruppi di γ rappresentati dalle Φ_1, Φ_2, e prendiamo a considerare le superficie Φ', Φ'',..., Φ^{r-2} immagini dei gruppi di γ che passano rispettivamente pei punti fissi:

$$(x''_1\, x'_2 \ldots x'_{r-1}),\ (x''_1\, x''_2\, x'_3 \ldots x'_{r-1}), \ldots,\ (x''_1\, x''_2 \ldots x''_{r-2}\, x'_{r-1}).$$

Le superficie Φ_1, Φ', Φ'',..., Φ^{r-2}, Φ_2 son evidentemente tali che ciascuna incontra la successiva, onde troveremo ancora $J(\xi_1) = J(\xi_2)$.

Si conclude pertanto che ogni integrale finito di differenziale totale, appartenente a V, riducesi ad una costante; cioè che la V è regolare, c. d. d.

Osservazione. In particolare si ha che *è regolare ogni involuzione esistente sopra una superficie regolare*, il che del resto si stabilisce anche con un noto ragionamento geometrico (*).

2. *Sulle serie continue di involuzioni appartenenti ad una superficie algebrica.* Giovandosi del teorema stabilito nel numero precedente, si può dimostrare la proposizione che segue:

Teorema X. *Se sopra una superficie algebrica esiste un'infinità continua di involuzioni irregolari (doppiamente infinite), esse risultano composte con un medesimo fascio irrazionale di curve.*

Prima di esporre la dimostrazione, precisiamo che cosa deve intendersi per *involuzione composta con un fascio.*

Avendosi sopra una superficie un'involuzione $\infty^2 \gamma$, di grado n, ed un fascio Γ di curve algebriche C, privo di parti fisse, si dirà che la γ è composta col fascio, quando ogni curva C appartiene totalmente all'involuzione; cioè quando ogni C che passi per un punto x della superficie, passa in conseguenza per tutto il gruppo di γ, individuato da x.

Se le curve C sono irriducibili, è ben chiaro che la γ si genera come luogo di un'involuzione ∞^1 staccata razionalmente sulla C variabile; se la C

(*) Cfr. Castelnuovo, *Sulla razionalità delle involuzioni piane* (Mathematische Annalen, Bd. 44, 1894); n.° 10.

generica è riducibile, dicendo $D_1 D_2 \dots D_t$ le sue parti irriducibili — necessariamente variabili in un fascio di curve D — sopra le $D_1 D_2 \dots D_t$ la γ subordinerà altrettante involuzioni ∞^1 di grado $\frac{n}{t}$, riferite biunivocamente tra loro: onde anche in tal caso risulta chiara la genesi della γ.

Tornando ora alla nostra superficie F, contenente un'infinità continua di involuzioni irregolari γ, osserviamo anzitutto che, senza alcuna restrizione essenziale, si può supporre che quest'infinità sia semplice e algebrica, in guisa da poterne riferire gli elementi (involuzioni) ai punti di una curva algebrica irriducibile φ.

Detti $I_1 I_2 \dots I_q$ i q integrali indipendenti di 1.ª specie, appartenenti ad F, si consideri la somma $I_k(x_1) + \cdots + I_k(x_n)$, $(k = 1, \dots, q)$, estesa ai punti del gruppo $(x_1 x_2 \dots x_n)$ variabile entro ad una delle involuzioni γ. Questa somma risulta uguale al valore assunto nel punto x_1 da un certo integrale J, di 1.ª specie, appartenente ad F; e poichè, quando x_1 si porta in x_2, la somma non s'altera che di multipli dei periodi, si conclude che $J(x)$ assume lo stesso valore in ciascun punto del gruppo $(x_1 x_2 \dots x_n)$.

Ciò posto, si esprima J come combinazione lineare degl'integrali I, mediante la formola:

$$J = \lambda_1 I_1 + \cdots + \lambda_q I_q + \lambda,$$

ove le $\lambda \lambda_1 \dots \lambda_q$ son $q + 1$ costanti relative all'involuzione; e si osservi che, al variare continuo dell'involuzione, le $\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_q$ (ma non già λ) risultano funzioni razionali del punto ξ scorrente sulla φ, perchè il gruppo $(x_1 x_2 \dots x_n)$ dipende razionalmente da x_1 e da ξ, e quindi i coefficienti dei differenziali delle variabili indipendenti nell'integrale J, risultano funzioni razionali di x_1 e di ξ.

Ma per l'indipendenza lineare di $I_1 \dots I_q$, le $\lambda_1 \dots \lambda_q$ non posson mai divenire infinite (*): dunque esse rimarranno costanti al variare dell'involuzione γ. L'integrale

$$K = \lambda_1 I_1 + \cdots + \lambda_q I_q,$$

(*) Se infatti nell'intorno del punto ξ_0 di φ, lo sviluppo in serie di Laurent della funzione λ_i contenesse il termine $\frac{a_i}{(\xi - \xi_0)^s}$ $(s \geq 1)$, affinchè restasse finita la somma $\lambda_1 I_1 + \cdots + \lambda_q I_q$, dovrebbe risultare $a_1 I_1 + \dots + a_q I_q = 0$; contro l'ipotesi che gl'integrali $I_1 \dots I_q$ sieno indipendenti.

risulta così indipendente dall'involuzione considerata, e, in virtù della relazione che lo lega a J, assume lo stesso valore nei punti di un gruppo appartenente ad una γ *qualsiasi*.

Fissiamo ora l'attenzione sugl'infiniti gruppi delle γ che passano per un punto generico x di F, e diciamo C_x la curva (algebrica) luogo di tali gruppi. Se, al variare di x, le curve C_x che si ottengono, si segano a due a due in un punto almeno, poichè l'integrale K è evidentemente costante sopra ogni C_x, avremo, su tutta la F, $K =$ cost. Onde l'integrale J, relativo ad una γ fissata, si ridurrà pure ad una costante, cioè la γ sarà regolare (teor. IX): contro il supposto.

Bisognerà dunque che due C_x qualunque non si taglino. Ora, se la C_x generica è irriducibile, il sistema di tutte le C_x sarà un fascio Γ (senza punti base) e ognuna delle γ risulterà composta con questo fascio. Di più l'involuzione di grado n subordinata da una γ sopra una C_x, appartenendo ad una infinità continua, per un noto teorema (*), sarà lineare; onde la superficie rappresentativa della γ conterrà un fascio di curve razionali, e sarà perciò riferibile ad una rigata (**), avente i moduli indipendenti dall'involuzione considerata. Inoltre il fascio Γ sarà irrazionale, perchè altrimenti ogni γ risulterebbe razionale e quindi regolare.

In conclusione le γ vengono generate intersecando le curve di un fascio irrazionale, colle curve di un fascio lineare, variabile in un sistema continuo.

Senza difficoltà, si presenta pure la discussione del caso in cui la curva C_x generica si spezza in t curve $D_1, D_2, \ldots, D_t$, variabili certamente in un fascio Δ, senza punti base, perchè due C_x non si tagliano.

La curva D di Δ, uscente da un punto x di F, conterrà $\frac{n}{t}$ punti di ciascuno di quei gruppi delle γ, di cui fa parte il punto x; cosicchè le C_x risulteranno composte mediante i gruppi di un'involuzione di grado t del fascio Δ.

Ora, se $n > t$, le infinite involuzioni subordinate dalle γ sopra una D, dovranno essere lineari, e quindi le γ si potranno generare intersecando le

(*) Cfr. Castelnuovo, *Sulla linearità delle involuzioni più volte infinite appartenenti ad una curva algebrica* (Atti della R. Acc. di Torino, 1893); Humbert (Comptes rendus, 1893) e *Sur quelques propriétés des courbes....* (Journal de Math. 1894).

(**) Enriques, *Sopra le superficie algebriche che contengono un fascio di curve razionali* (Math. Annalen, Bd. 52).

curve composte dai gruppi di un'involuzione (irrazionale) fissata entro al fascio Δ, colle curve di un fascio lineare variabile.

Se invece $n = t$, tra due curve D costituenti una parte di una C_x, si vengono ad avere infinite corrispondenze birazionali, onde ciascuna D sarà razionale o ellittica. Sicchè in tal caso le γ risulteranno composte con un fascio irrazionale, la cui curva generica si spezza in n curve razionali o ellitiche.

Il teorema è così completamente dimostrato.

Osservazione. Il teor. X si può pure enunciare sotto la forma seguente:

Sopra una superficie algebrica, priva di fasci irrazionali, ogni involuzione d'una serie continua è regolare.

Si noti l'analogia tra questa proposizione e quella dei sigg. Humbert e Castelnuovo, che afferma l'impossibilità dell'esistenza di una serie continua di involuzioni (∞^1) irrazionali, sopra una curva algebrica qualunque.

Parma, 30 aprile 1905.