22.

Beweis eines Satzes aus der Theorie der numerischen Gleichungen.

(Von dem Herrn Dr. *C. H. Graeffe* zu Zürich.)

Wenn man aus der Gleichung:

$$x^n + A_1 x^{n-1} + A_2 x^{n-2} \dots A_n = 0$$

den Quotienten:

$$\frac{1}{1 + A_1 x + A_2 x^2 + \dots A_n x^n} = 1 + B_1 x + B_2 x^2 + \dots B_{k-1} x^{k-1} + B_{k+1} x^k$$

bildet, so giebt der Quotient $\frac{B_k}{B_{k-1}}$ bei numerischer Berechnung in vielen Fällen den angenäherten Werth einer Wurzel der gegebenen Gleichung. Diese Eigenschaft der Gleichungen fand Herr J. J. Raabe bei Gelegenheit anderer Untersuchungen, die er bald mitzutheilen beabsichtigt, und theilte sie dem Unterzeichneten zur weiteren Entwicklung mit, aus der die Bedingungen hervorgingen, unter welchen eine Convergenz eines Wurzelwerthes eintritt. Hat nemlich die obige Gleichung die Factoren:

$$x - a_1, \quad x - a_2, \quad x - a_3, \quad \dots \quad x - a_n,$$

so besitzt sie in der umgeänderten Gestalt, in der sie im Nenner erscheint, die Factoren

$$1 - a_1 x, \quad 1 - a_2 x, \quad 1 - a_3 x, \quad \dots \quad 1 - a_n x.$$

Aus

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 \dots \text{etc.}$$

folgt nun:

$$\frac{1}{1 - a_1 x} = 1 + a_1 x + a_1^2 x^2 + \dots a_1^k x^k,$$

$$\frac{1}{1 - a_2 x} = 1 + a_2 x + a_2^2 x^2 + \dots a_2^k x^k,$$

$$\frac{1}{1 - a_3 x} = 1 + a_3 x + a_3^2 x^2 + \dots a_3^k x^k,$$

$$\dots\dots\dots\dots$$

$$\frac{1}{1 - a_n x} = 1 + a_n x + a_n^2 x^2 + \dots a_n^k x^k.$$

Multiplicirt man diese Reihen mit einander, so erhält man eine Reihe, deren Coefficienten Variationsformen zu bestimmten Summen aus den Coefficienten dieser Reihen sind, die aber in Combinationsformen mit unbedingter Wiederholbarkeit und von bestimmten Classen übergehen, wenn $a_1, a_2, a_3, \ldots a_n$ als combinatorische Elemente betrachtet werden, d. h. man findet die Reihe

$$1+\overset{1}{C}(a_1 a_2 \ldots a_n)x+\overset{2}{C}(a_1 a_2 \ldots a_n)x \ldots +\overset{k-1}{C}(a_1 a_2 \ldots a_n)x^{k-1}+\overset{k}{C}(a_1 a_2 \ldots a_n)x^k,$$

die mit der Reihe (1.) identisch ist. Der Voraussetzung zufolge ist nun:

$$\frac{\overset{k}{C}(a_1 a_2 a_3 \ldots a_n)}{\overset{k-1}{C}(a_1 a_2 a_3 \ldots a_n)}$$

der angenäherte Werth einer Wurzel der gegebenen Gleichung. Es ist aber

$$\overset{k}{C}(a_1 a_2 \ldots a_n) = a_1 \overset{k-1}{C}(a_1 a_2 a_3 \ldots a_n) + \overset{k}{C}(a_2 a_3 \ldots a_n),$$

und hieraus folgt:

$$\frac{\overset{k}{C}(a_1 a_2 \ldots a_n)}{\overset{k-1}{C}(a_1 a_2 a_3 \ldots a_n)} = a_1 + \frac{\overset{k}{C}(a_2 a_3 \ldots a_n)}{\overset{k-1}{C}(a_1 a_2 a_3 \ldots a_n)}$$

$$= a_1 + \frac{\overset{k}{C}(a_2 a_3 \ldots a_n)}{\overset{k-1}{C}(a_2 a_3 \ldots a_n) + a_1 \overset{k-2}{C}(a_2 \ldots a_n) + a_1^2 \overset{k-3}{C}(a_2 \ldots a_n) \ldots a^{k-1}}.$$

Die Untersuchung ist jetzt darauf zurückgeführt, die Bedingungen aufzufinden, unter welchen dieser an die Wurzel a_1 geknüpfte Bruch einen sehr kleinen Werth giebt. Um dieses entscheiden zu können, wollen wir zuerst annehmen, daſs alle Wurzeln der gegebenen Gleichung reell sind, und daſs, abgesehen vom Zeichen, a_1 unter ihnen den gröſsten Zahlwerth besitze. Es sind alsdann $\frac{a_2}{a_1}, \frac{a_3}{a_1} \ldots \frac{a_n}{a_1}$ ächte Brüche, und die Reihen:

$$\text{I.} \quad \begin{cases} \dfrac{1}{1-\dfrac{a_2}{a_1}} = 1 + \dfrac{1}{a_1}a_2 + \dfrac{1}{a_1^2}a_2^2 + \dfrac{1}{a_1^3}a_2^3 \ldots \dfrac{1}{a_1^k}a_2^k \\ \dfrac{1}{1-\dfrac{a_3}{a_1}} = 1 + \dfrac{1}{a_1}a_3 + \dfrac{1}{a_1^2}a_3^2 + \dfrac{1}{a_1^3}a_3^3 \ldots \dfrac{1}{a_1^k}a_3^k \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{1}{1-\dfrac{a_n}{a_1}} = 1 + \dfrac{1}{a_1}a_n + \dfrac{1}{a_1^2}a_n^2 + \dfrac{1}{a_1^3}a_n^3 \ldots \dfrac{1}{a_1^k}a_n^k \end{cases}$$

convergiren. Multiplicirt man diese Reihen mit einander, so erhält man:

$$\frac{1}{\left(1-\frac{a_2}{a_1}\right)\left(1-\frac{a_3}{a_1}\right)\ldots\left(1-\frac{a_n}{a_1}\right)}$$
$$= 1 + \frac{1}{a_1}\overset{1}{C}(a_2\ldots a_n) + \frac{1}{a_1^2}\overset{2}{C}(a_2\ldots a_n)\ldots\frac{1}{a_1^k}\overset{k}{C}(a_2\ldots a_n),$$

wo $\frac{1}{a_1^k}\overset{k}{C}(a_2\ldots a_n)$ als eine verschwindende Gröfse zu betrachten ist. Hieraus folgt:

$$\frac{a_1^{k-1}}{\left(1-\frac{a_2}{a_1}\right)\left(1-\frac{a_3}{a_1}\right)\ldots\left(1-\frac{a_n}{a_1}\right)}$$
$$= \overset{k-1}{C}(a_2\ldots a_n) + a_1\overset{k-2}{C}(a_2\ldots a_n) + a_1^2\overset{k-3}{C}(a_2\ldots a_n)\ldots a^{k-1}.$$

Durch Substitution dieses Werthes verwandelt sich der Quotient

$$\frac{\overset{k}{C}(a_1 a_2\ldots a_n)}{\overset{k-1}{C}(a_1 a_2\ldots a_n)}$$

in:

$$a_1 + \frac{\overset{k}{C}(a_2 a_3\ldots a_n)}{a_1^{k-1}}\left(1-\frac{a_2}{a_1}\right)\left(1-\frac{a_3}{a_1}\right)\ldots\left(1-\frac{a_n}{a_1}\right)$$
$$= a_1 + a_1\left(1-\frac{a_2}{a_1}\right)\left(1-\frac{a_3}{a_1}\right)\left(1-\frac{a_4}{a_1}\right)\ldots\left(1-\frac{a_n}{a_1}\right).\frac{1}{a_1^k}\overset{k}{C}(a_2 a_3\ldots a_n).$$

Nun ist aber $\frac{1}{a_1^k}\overset{k}{C}(a_2.a_3\ldots a_n)$ eine verschwindende Gröfse, während ein Factor von der Form $1-\frac{a_n}{a_1}$ nie den Werth 2 übertrifft; es kann daher der mit a_1 verbundene Ausdruck bis zu jeder beliebigen Kleinheit hinabgedrückt werden, wenn man nur k hinlänglich grofs annimmt. Die Convergenz ist desto gröfser, je mehr a_1 die übrigen Wurzeln an Werth übertrifft, und wenn alle Wurzeln positiv sind.

Enthält die Gleichung unmögliche Wurzeln, ist z. B.

$$a_2 = \alpha + \beta\sqrt{-1} = w(\cos\varphi + \sin\varphi\sqrt{-1}),$$
$$a_3 = \alpha + \beta\sqrt{-1} = w(\cos\varphi - \sin\varphi\sqrt{-1}),$$

so ist die Reihe:

$$\frac{1}{1-\frac{w}{a_1}(\cos\varphi \pm \sin\varphi\sqrt{-1})} = 1 + \frac{1}{a_1}w(\cos\varphi \pm \sin\varphi\sqrt{-1})$$
$$+ \frac{1}{a_1^2}w^2(\cos 2\varphi \pm \sin 2\varphi\sqrt{-1})\ldots\frac{1}{a_1^k}w^k(\cos k w \pm \sin k w\sqrt{-1})$$

convergirend, wenn $a_1 > w$, d. h. wenn $a_1 > \sqrt{(\alpha^2+\beta^2)}$.

Der Quotient hat alsdann die Form:

$$a_1 + a_1\left(1 - 2\frac{w}{a_1}\cos\varphi + \frac{w^2}{a_1^2}\right)\left(1 - \frac{a_4}{a_1}\right)\left(1 - \frac{a_5}{a_1}\right)\cdots\left(1 - \frac{a_n}{a_1}\right)\frac{1}{a_1^k}\overset{k}{C}(a_2 a_3 \ldots a_n),$$

in der die mit a_1 verbundene Gröfse für einen grofsen Werth von k verschwindet. Es können auch noch mehrere Wurzeln unmöglich sein, ja alle, bis auf a_1, und der Quotient wird immer einen angenäherten Werth der Wurzel a_1 geben, wenn nur allgemein

$$a_1 > \sqrt{(\alpha_h^2 + \beta_h^2)},$$

wo $\alpha_h \pm \beta_h \sqrt{-1}$ allgemein ein Paar der unmöglichen Wurzeln bedeutet.

Endlich ist noch die Bemerkung hinzuzufügen, dafs für $a_1 = a_2$ der Factor $1 - \frac{a_2}{a_1}$ nicht zu Null wird, denn $\frac{1}{1-1}$ ist nur dann unendlich, wenn wir alle Glieder der Entwicklung nehmen; für k Glieder ist aber:

$$\frac{1}{1 - \frac{a_2}{a_1}} = 1 + 1 + 1 \ldots = k,$$

und daher

$$1 - \frac{a_2}{a_1} = \frac{1}{k}.$$