

Lehrsätze über das Strahlensystem erster Ordnung und erster Classe und den lineären Strahlencomplex.

(Von Herrn *Th. Reye* in Zürich.)

1. **Z**wei collineare ebene Systeme Σ, Σ_1 , die ihre Schnittlinie, nicht aber alle Punkte derselben entsprechend gemein haben, erzeugen ein *Strahlensystem* S . Wir rechnen zu demselben jeden Strahl, welcher einen Punkt von Σ mit dem entsprechenden Punkte von Σ_1 verbindet. Von anderen Strahlensystemen unterscheidet es sich dadurch, dass im Allgemeinen durch jeden Punkt des Raumes nur einer seiner Strahlen hindurchgeht und in jeder Ebene nur ein solcher enthalten ist; es ist also von der ersten Ordnung und der ersten Classe.

2. Haben die Ebenen Σ, Σ_1 einen Punkt ihrer Schnittlinie entsprechend gemein, so liegt derselbe auf einer *Axe* des Strahlensystemes S , d. h. auf einer Geraden, welche jeden Strahl von S schneidet. Durch jeden Punkt einer solchen *Axe* gehen, und in jeder Ebene derselben liegen unendlich viele Strahlen von S ; dieselben bilden einen gewöhnlichen Strahlenbüschel. Umgekehrt ist jeder Punkt, in welchem zwei Strahlen von S sich schneiden, auf einer solchen *Axe* enthalten, und auch die Verbindungsebene der beiden Strahlen geht durch eine *Axe*. Das Strahlensystem hat entweder zwei sich nicht schneidende *Axen*, oder eine, oder keine *Axe*. Im ersteren Falle ist jede die *Axen* schneidende Gerade ein Strahl des Systemes S , und dieses ist durch die *Axen* völlig bestimmt.

3. Ist s ein beliebiger Strahl des Systemes S , so wird dasselbe aus je zwei Punkten P, P_1 von s durch collineare Ebenenbündel projicirt, und von je zwei durch s gelegten Ebenen in collinearen ebenen Systemen geschnitten. Die letzteren sind durch das Strahlensystem reciprok auf die Ebenenbündel P, P_1 bezogen. — Zwischen je zwei Ebenen, die sich in keinem Strahle von S schneiden, wird durch das Strahlensystem eine geometrische Verwandtschaft zweiten Grades hergestellt, so dass jeder Geraden der einen Ebene im Allgemeinen ein Kegelschnitt der anderen entspricht. Die Strahlen von S ,

welche eine Curve n^{ter} Ordnung schneiden, erfüllen deshalb im Allgemeinen eine Fläche $2n^{\text{ter}}$ Ordnung.

4. Die sämtlichen Strahlen von S , welche einer beliebigen Geraden l begegnen, bilden im Allgemeinen eine zu l perspectivische Regelschaar, d. h. die eine Schaar von Geraden eines hyperbolischen Hyperboloides oder Paraboloides. Drei beliebige Strahlen a, b, c des Systemes S bestimmen eine Regelschaar (abc) , deren übrige Strahlen auch zu S gehören. Durch vier Strahlen a, b, c, d , die nicht alle vier in einer Fläche zweiter Ordnung oder zweiter Classe liegen, ist ein Strahlensystem erster Ordnung und erster Classe völlig bestimmt. Zu demselben gehört die Regelschaar (abc) , sowie jede andere Regelschaar, welche den vierten Strahl d und zwei Strahlen von (abc) enthält. Eine andere lineare Construction seiner Strahlen ist in (3.) angezeigt. Die speciellen Fälle erledigen sich durch (2.).

5. Jede Fläche zweiter Ordnung, welche eine zu S gehörige Regelschaar enthält, geht durch die Axen des Strahlensystemes S . Sie wird von jedem nicht auf ihr gelegenen Strahle von S geschnitten oder berührt oder gar nicht getroffen, jenachdem S zwei Axen oder eine oder keine Axe besitzt (2.). Zwei solche Flächen zweiter Ordnung von S haben niemals eine Curve mit einander gemein, sondern ausser den Axen noch höchstens zwei Strahlen von S .

6. Die Polarebenen eines beliebigen Punktes P in Bezug auf alle solche im Strahlensysteme enthaltenen Flächen zweiter Ordnung schneiden sich in einem Punkte P_1 , und zwar ist die Gerade PP_1 ein Strahl von S . Und die sämtlichen Pole einer Ebene hinsichtlich jener Flächen liegen in einer zweiten Ebene, welche die erstere in einem Strahle von S schneidet. Die Punkte sowie die Ebenen des Raumes sind also paarweise einander conjugirt in Bezug auf alle diese Flächen *).

7. Hat das Strahlensystem S nur eine Axe u , so ist jedem beliebigen Punkte ein Punkt von u , und jedem Punkte von u sind die sämtlichen Punkte einer durch u gehenden Ebene conjugirt (5.). Besitzt dagegen das System entweder zwei oder keine Axen, so bilden die Paare conjugirter Punkte und Ebenen ein involutorisches räumliches System. Beschreibt nämlich ein Punkt eine Ebene, so beschreibt zugleich sein conjugirter Punkt die conjugirte Ebene.

*) Herr *Hermes* hat Bd. 67, pag. 167 dieses Journals die Sätze (6.) analytisch bewiesen. Sie ergeben sich aus (3.), wenn die dort erwähnten collinearen Ebenen so angenommen werden, dass sie einander conjugirt sind hinsichtlich einer jener Flächen zweiter Ordnung.

Jeder Strahl von S entspricht in dem involutorischen Systeme sich selbst, und seine Punkte und Ebenen sind involutorisch gepaart, indem sie einander paarweise conjugirt sind. Keine Gerade des Raumes, ausser den Strahlen und Axen von S , hat mit ihrer entsprechenden einen Punkt gemein. Wenn zwei Axen vorhanden sind, so trennen dieselben je zwei conjugirte Punkte oder Ebenen harmonisch von einander.

8. Fünf beliebige Strahlen, von denen vier einem nicht durch den fünften gehenden Strahlensysteme S angehören und nicht auf einer Fläche zweiter Ordnung oder zweiter Classe enthalten sind, bestimmen einen *Strahlencomplex* C . Zu demselben rechnen wir alle Strahlensysteme, welche der fünfte Strahl mit irgend drei Strahlen des Systems S bestimmt (4.). Der Strahlencomplex wird ein linearer genannt, weil die unendlich vielen Strahlen desselben, welche in irgend einer Ebene liegen oder durch einen beliebigen Punkt gehen, allemal einen gewöhnlichen Strahlenbüschel bilden. Wenn die gegebenen fünf Strahlen von einer sechsten Geraden u geschnitten werden, so besteht der Complex aus allen Strahlen, welche die u schneiden. Diesen speciellen Fall wollen wir von jetzt an ausschliessen.

9. Wird durch den linearen Complex C jeder Ebene π des Raumes derjenige Punkt P zugeordnet, in welchem die in π liegenden Strahlen von C sich schneiden, so entsteht ein sogenanntes Nullsystem. In diesem ist jedem Punkte eine durch ihn gehende Ebene zugeordnet, jedem geraden Gebilde ein zu ihm perspectivischer Ebenenbüschel, also auch jeder Geraden eine Gerade und jeder Ebene ein in ihr liegender Punkt. Jeder Strahl des Complexes C entspricht im Nullsysteme sich selbst, und jede Gerade, welche zwei einander zugeordnete Gerade des Nullsystemes schneidet, gehört zu C . Zwei Paar zugeordnete Gerade des Nullsystemes liegen, wenn sie sich nicht wechselseitig schneiden, allemal in einer Regelschaar, deren Strahlen paarweise einander zugeordnet und dadurch involutorisch gepaart sind, und deren Leitschaar aus Strahlen von C besteht.

10. Ein Nullsystem ist nicht nur durch fünf beliebige, sich selbst zugeordnete Strahlen bestimmt, sondern auch durch zwei Paare einander zugeordneter Geraden, die in einer Regelschaar liegen, sowie durch ein solches Paar von Geraden und einen sie nicht schneidenden Strahl, welcher sich selbst zugeordnet ist ((8.) und (9.)). Das Nullsystem ist bekanntlich auch bestimmt durch eine Raumcurve dritter Ordnung, wenn jeder Punkt derselben seiner Schmiegungeebene, also auch jede Tangente sich selbst zugeordnet wird.

Möbius *) hat es zuerst bei Untersuchung des räumlichen Kräftesystemes entdeckt; je zwei Einzelkräfte nämlich, durch welche ein solches Kräftesystem ersetzt werden kann, wirken in zugeordneten Geraden eines bestimmten Nullsystemes. Diejenigen Geraden, in Bezug auf welche das Moment eines solchen Kräftesystemes verschwindet, sind deshalb, wie schon *Möbius* bemerkt, in dem zugehörigen Nullsysteme sich selbst zugeordnet (9.), und umgekehrt; sie bilden also einen linearen Strahlencomplex.

11. Zwei lineare Strahlencomplexe haben die sämtlichen Strahlen eines Systemes erster Ordnung und erster Classe mit einander gemein. Hat das letztere zwei Axen, so sind dieselben in jedem der beiden, durch die Complexe bestimmten Nullsysteme einander zugeordnet. Zwei Strahlensysteme erster Ordnung und erster Classe haben im Allgemeinen eine Regelschaar gemein, wenn sie Bestandtheile eines linearen Complexes sind; im anderen Falle dagegen höchstens zwei Strahlen oder bei ganz besonderer Lage einen Strahlenbüschel.

12. Im Nullsysteme laufen alle Geraden, deren zugeordnete unendlich fern liegen, zu einander parallel (9.). Eine einzige n unter ihnen steht senkrecht auf denjenigen Ebenen, welche durch die ihr zugeordnete Gerade hindurchgehen. Diese Gerade n liegt mit je zwei einander zugeordneten Geraden g, g_1 , von denen sie nicht geschnitten wird, in einem gleichseitigen Paraboloid (9.), und schneidet deshalb die Linie des kürzesten Abstandes von g und g_1 rechtwinklig.

13. Zu jedem linearen Strahlencomplexe C kann (nach 12.) eine einzige Gerade n construirt werden, welche auf allen sie schneidenden Strahlen von C senkrecht steht und die *Hauptlinie* des Complexes C genannt werden mag. Der Complex ist völlig bestimmt durch seine Hauptlinie n und einen sie nicht schneidenden Strahl (10.). Bilden zwei Strahlen von C mit der Hauptlinie n die Winkel α und α_1 , und haben sie von n die resp. Abstände a und a_1 , so gilt die Gleichung $a \cdot \tan \alpha = a_1 \cdot \tan \alpha_1 = \text{Const.}$; und jede Gerade, für welche $a \cdot \tan \alpha = \text{Const.}$ ist, gehört zu C . Jeder andere Complex, welcher aus C durch eine Verschiebung parallel zur Hauptlinie n und durch eine Drehung um n entsteht, hat mit C alle seine Strahlen gemein. In Bezug auf die Tangenten einer Raumcurve dritter Ordnung sind diese Sätze von besonderem Interesse (vgl. 10.). **)

*) *Möbius* Bd. 10, pag. 317 dieses Journals..

**) Diese Sätze (13.) können u. A. leicht aus einem Theoreme abgeleitet werden, welches *Möbius* a. a. O. pag. 333 über das Nullsystem bewiesen hat.

14. Zu einem Strahlensysteme S erster Ordnung und erster Classe können unendlich viele Hauptlinien construiert werden, d. h. Gerade, welche auf allen sie schneidenden Strahlen von S senkrecht stehen. Jede derselben ist die Hauptlinie eines durch S gehenden linearen Complexes, und ihr Abstand von einem beliebigen Strahle s des Systemes, multiplicirt mit der Tangente ihres mit s gebildeten Neigungswinkels, ist constant (13.). Diese Hauptlinien schneiden sich paarweise und werden sämmtlich von einem bestimmten Strahle des Systemes S rechtwinklig geschnitten. Jedoch in dem besonderen Falle, in welchem das System eine unendlich ferne Axe u hat, ist jede Gerade, welche auf den durch u gehenden Ebenen senkrecht steht, eine Hauptlinie von S .

15. Ist n die Linie des kürzesten Abstandes von irgend zwei Strahlen einer Regelschaar, sind ferner a und a_1 ihre Abstände von irgend zwei anderen Strahlen dieser Schaar, und resp. α und α_1 ihre mit den letzteren gebildeten Winkel, so gilt die Gleichung $a \cdot \tan \alpha = a_1 \cdot \tan \alpha_1 = \text{Const.}$ Die Linie des kürzesten Abstandes zwischen n und irgend einem Leitstrahle der Regelschaar schneidet noch einen zweiten Leitstrahl rechtwinklig (vgl. 12.), so dass die Leitstrahlen paarweise mit n auf gleichseitigen Paraboloiden liegen.

Zürich, den 23. April 1868.