Erläuterungen zu den Anfangsgründen der Variationsrechnung.

Von

Hrn. Paul du Bois-Reymond in Tübingen.

Die Grundsätze und Grundbegriffe der Variationsrechnung sind durchaus nicht unbedenklich für den, welcher nicht blos an der Beherrschung einiger bekannter Methoden zur Lösung von Minimums- oder Maximumsproblemen sich erfreuen will, sondern der ein genaues Verständniss jener Lehre erstrebt. Vor ihm bäumen Fragen sich auf, denen scheinbar keine Anstrengung gewachsen ist. Die gebräuchlichen Methoden waren mir längst geläufig wie meine Muttersprache, als gelegentlich ein mir räthselhaft falsches Ergebniss mich auf die Unklarheit in meinen Grundbegriffen aufmerksam machte.

Die Variationsrechnung lässt sich, wie andere Theile der Integralrechnung, kaum noch gegen die Gebiete abgrenzen, in welchen der neuere Functions- und Integralbegriff massgebend ist. Hierin scheint mir der Grund zu liegen, weshalb sie heute uns nicht mehr dieselbe Befriedigung gewährt, wie unseren mathematischen Vorfahren. Was uns zum Bedürfniss geworden, den wünschenswerthen oder nothwendigen Umfang unserer Probleme und ihrer Lösungen zu kennen, kümmert sie nicht, und ihre Beweise entbehren der Schärfe. So weit ich die Dinge kenne, treten die angedeuteten Schwierigkeiten nicht allein gleich bei den ersten Anfangsgründen der Rechnungsart auf, sondern sie machen sich später bei gewissen mechanischen Problemen (Gleichgewicht und Bewegung faden- und flächenförmiger Gebilde und darauf vertheilter Massen) in anderer Form wieder bemerklich. Auf diese letzteren Probleme, bei denen bis jetzt noch nicht bekannte oder doch nicht beachtete eigenthümliche Paradoxa auftreten, beabsichtige ich später einmal einzugehen. Mein gegenwärtiger Vorwurf ist lediglich die Untersuchung der elementarsten Operationen der Variationsrechnung vom Standpunkt der allgemeinen Functionentheorie. Ich habe, um den Betrachtungen eine feste Richtung zu geben, sie in die Form gekleidet, dass ich die einfachste Variationsaufgabe, welcher man an der Spitze der ganzen Theorie zu begegnen pflegt, das Problem der kürzesten Linie zwischen zwei Punkten in voller Strenge zu lösen versuche. Und wenn mir dies, wie ich glaube, gelungen ist, so darf man im Nachstehenden den *ersten wirklichen* Beweis dafür erblicken, dass *unter allen rectificirbaren Linien die Gerade die kürzeste sei.* Auf dem Wege zu diesem Ergebniss sammeln wir einige neue Sätze der Integrabilitätslehre. Endlich werden zum Abschluss zwei ebenfalls neue Beweise für die isoperimetrische Regel gegeben.

1.

Ueber Sinn und Allgemeinheit der Variation δy einer Function y.

Zunächst wird die Variation selbst sehr verschieden aufgefasst. Mir sagt am meisten zu die spätere Lagrange'sche Auffassung, nach welcher $\delta y = \varepsilon \eta$ ist, wo ε eine differentialische Grösse bedeutet, und $\eta = \lambda(x)$ eine zunächst durch nichts beschränkte Function, so dass gleichsam ε die Kleinheit, η die Willkürlichkeit der Variation vorstellt. Die Umkehrung $\delta d y = d \delta y$ ist Definition. Wenn wir nämlich y und $y' = \frac{dy}{dx}$ variiren in y_1 und $y_1' = \frac{dy_1}{dx}$, und annehmen $\delta y = \varepsilon \eta$, $\delta y' = \varepsilon h$, so folgt aus $y_1' - y' = \varepsilon h = \frac{dy_1}{dx} - \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dx} + \frac{d\varepsilon\eta}{dx} - \frac{dy}{dx}$, dass $\varepsilon h = \frac{d\varepsilon\eta}{dx}$ ist. Nun ist $\varepsilon h = \delta y'$, $\frac{d\varepsilon\eta}{dx} = \frac{d\delta y}{dx}$, also, wie man es gewöhnlich schreibt, $\delta d y = d \delta y$.

Was hat man sich nun unter der Function $\lambda(x)$ in $\delta y = \varepsilon \lambda(x)$ vorzustellen? Wie beschaffene Functionen kann $\lambda(x)$ bedeuten? *Bequem* ist es allerdings, um Weiterungen wegen der Bedeutung der Differentialquotienten von $\delta y = \varepsilon \lambda(x)$ aus dem Wege zu gehen, $\lambda(x)$ mit einer angemessenen Anzahl Differentialquotienten *stetig* anzunehmen. Aber wenn die Aufgaben der Variationsrechnung ihrem eigentlichen Sinne nach verstanden werden, so ist diese Annahme einfach *falsch*, insofern sie nicht mehr die ursprüngliche, sondern irgend eine andere zu Gunsten der Rechnung beschränkte Aufgabe voraussetzt.

Betrachten wir, um einen bestimmten Fall vor Augen zu haben, die Aufgabe von der kürzesten ebenen Linie zwischen zwei Punkten. Ist y = einer Function von x die Gleichung der kürzesten Linie, so sei also $y + \delta y = y + \varepsilon \lambda(x)$ = einer Function von x die Gleichung der variirten also längeren Linie. Die kürzeste Linie muss die kürzeste von allen *möglichen rectificirbaren* ebenen Linien sein. Wenn wir die Variation δy nur zu Gunsten der Rechnung beschränken, so erhalten wir ein Minimum nur aus einer Gruppe von Linien und nicht die kürzeste unter *allen* möglichen Linien, welche die Endpunkte verbinden. Andererseits darf man aber auch auf $\delta y = \varepsilon \lambda(x)$ den allgemeinen Functionsbegriff der neuern Mathematik nicht ohne Weiteres anwenden, eben weil die variirte Linie eine *Länge* haben muss. (Mehrdeutigkeiten der

Function $\lambda(x)$ sind durch die Forderung der *kürzesten* Linie offenbar von vornherein ausgeschlossen.) Es fragt sich, wie man den Bereich der Function $\lambda(x)$ am richtigsten bestimmt, damit das Minimumsproblem nicht beschränkt und auch nicht über seine natürlichen Grenzen hinaus verallgemeinert werde. Es scheint, dass folgende Vorstellung diesen Forderungen am besten sich anpasst.

Die variirte „Linie" muss aus rectificirbaren Strecken bestehen, so dass der Differentialquotient der Variation integrirbar sein muss. Wo $\lambda(x)$ von einem Werth zu einem endlich verschiedenen plötzlich aufspringt, müssen, der Rectificirbarkeit wegen, die beiden Werthe durch eine geradlinige Strecke verbunden sein. Diese Unstetigkeiten dürfen sich nach einzelnen Punkten hin unendlich verdichten, die sich wieder nach einzelnen Punkten hin verdichten können, u. s. f. Dies scheint mir die allgemeinste Form der Variation $\lambda(x)$ zu sein, bei welcher man der variirten Linie eine *Länge* zusprechen kann. Ich sage, dass diese Form mir die allgemeinste zu sein *scheint*, weil man solche Anschauungen natürlich nicht beweisen kann.

Der Gegenstand ist gleichwohl so wichtig, dass wir diese unsere Ansicht von der grössten Allgemeinheit des Begriffs einer rectificirbaren Linie etwas genauer durchführen und begründen wollen.

Ueber den Begriff rectificirbarer Linien.

2.

Construction des Begriffs der Rectificirbarkeit.

Der allgemein verbreitete Begriff von der *Länge* krummer Linien ist zwar kein eigentlich geometrischer, ist aber doch wohl der unmittelbaren Naturanschauung entsprossen, indem ihn die Verbiegung gerader und die Streckung krummer linienförmiger Gegenstände erzeugt. Der *mathematisch-ideale* Begriff der Länge krummer Linien ist aber ein wesentlich *analytischer* Begriff, insofern er einen Grenzübergang enthält. Diese Länge ist nämlich die Grenze einer Summe nach bestimmtem Gesetz ins Unbegrenzte sich vermehrender und dabei angemessen sich verkürzender *wirklich vorgestellter Längen.* Sie ist also ein Integral. Der *Grenzübergang* ist es, welcher den Begriff zu einem analytischen macht, weil er stets den Fluss der sinnlichen Vorstellungen unterbricht. Aehnlich verhält es sich mit den krummlinig begrenzten ebenen und krummen Flächenräumen und mit dem Rauminhalt.

Hiernach möchte die Frage nach der grösstmöglichen Ausdehnung des Functionsgebiets, auf welches der Längenbegriff angewendet werden kann, nicht aus der Vorstellung Länge, welche wir nur bei der geradlinigen Strecke haben, sondern aus dem Erfolg jenes Grenzübergangs, ob er eine feste Grenze liefert oder nicht, zu entscheiden sein.

Nur wo die Function geradlinige Strecken ergiebt, werden diese wirklichen Längen entsprechen und unmittelbar als solche einzurechnen sein. Dergleichen geradlinige Strecken werden u. A. auftreten, wenn wir den Begriff der *rectificirbaren Functionen* nicht auf stetige beschränken. Falls die Function $f(x)$ für $x = x_1$ von einem Werthe $f(x_1 - 0)$ zu einem endlich verschiedenem $f(x_1 + 0)$ überspringt, und sie ist auf beiden Seiten von x_1 rectificirbar, so rechnen wir*), wo dies, wie in der Variationsrechnung, einen guten Sinn hat, zur Länge die positiv genommene Strecke $f(x_1 + 0) - f(x_1 - 0)$ hinzu. Wir sind dazu um so mehr berechtigt, ja aufgefordert, als wir eben eine wirkliche Länge hinzurechnen, und wir die Analogie der Länge einer treppenprofilartig gebrochenen geraden Linie vor Augen haben, welche von einem Ende zum andern eine wirkliche Länge und keine Grenze von Längen ist.

Zwischen zwei Sprüngen, z. B. für die Argumentwerthe $x = x_1$, $x = x_2$, verstehen wir unter Länge der Curve (für Function) $y = f(x)$ das Integral

$$\int_{x_1}^{x_2} dx \sqrt{1 + f'(x)^2},$$

wenn auch z. B. ein zweiter Differentialquotient $f''(x)$ gar nicht existirt.

Dieses Integral existirt stets, wenn $f'(x)$ eine integrirbare**) Function ist, d. i. $\sqrt{1 + f'(x)^2}$ ist gleichzeitig mit $f'(x)$ eine integrirbare Function. Denn mit $f'(x)$ ist $f'(x)^2$ integrirbar, weil, wie ich gezeigt habe***), das Product integrirbarer Functionen ebenfalls integrirbar ist.

Nun sei in einem Intervall δ:

$$f'(x_1)^2 - f'(x_2)^2 = 1 + f'(x_1)^2 - \left(1 + f'(x_2)^2\right) = u$$

der grösste Werthunterschied von von $f'(x)^2$. Betrachtet man aber, $a = \sqrt{1 + f'(x_1)^2}$, $b = \sqrt{1 + f'(x_2)^2}$ gesetzt, die Unterschiede:

$$u = a^2 - b^2,$$
$$v = a \ - b,$$

so ist $u > v$, wegen $u = v(a + b)$. Daher sind die grössten Werthunterschiede von $\sqrt{1 + f'(x)^2}$ kleiner, wie die von $f'(x)^2$, also ist, wie behauptet, *mit* $f'(x)$ *zugleich* $\sqrt{1 + f'(x)^2}$ *integrirbar.*

---

*) Siehe meinen Aufsatz: *Ueber die sprungsweisen Werthänderungen analytischer Functionen,* diese Annalen Bd. VII, pag. 241.

**) In einem Intervall $b - a = \delta_1 + \delta_2 + \cdots + \delta_n$ integrirbar heisst eine dort, wie folgt, beschaffene Function: Bildet man für jede Theilstrecke δ_p den grössten Unterschied der darin auftretenden Functionalwerthe, und bezeichnet ihn, positiv gerechnet, mit Δf_p, so muss $\delta_1 \Delta f_1 + \delta_2 \Delta f_2 + \cdots + \delta_n \Delta f_n$ zugleich mit sämmtlichen δ_p Null zur Grenze haben.

***) Borch. Journ. Bd. 79, pag. 24.

Man fällt nicht sogleich auf dieselbe Beziehung bei der Nichtintegrirbarkeit von $f'(x)$. Falls $f'(x)$ z. B. nur von -1 zu $+1$ schwankte, wäre $\sqrt{1+f'(x)^2} = \sqrt{2}$. Ob freilich Differentialquotienten möglich sind, die nur derartige Schwankungen zeigen, ist mindestens fraglich, jedenfalls aber würden wir nicht ohne Weiteres behaupten dürfen, dass die Nichtintegrirbarkeit von $f'(x)$ diejenige von $\sqrt{1+f'(x)^2}$ bedingt. Aus diesem Grunde lassen wir es bei der Integrirbarkeit von $\sqrt{1+f'(x)^2}$ als der möglich allgemeinsten Bedingung für die Rectificirbarkeit von $f(x)$ bewenden.

Doch gestattet der Begriff der Rectificirbarkeit noch diese erhebliche Verallgemeinerung, dass wir die Anzahl der Sprungstellen nicht endlich anzunehmen brauchen. Es bezeichne x_p allgemein einen solchen Argumentwerth, für welchen $f(x)$ springt, so ist nur erforderlich, dass die Summe:

$$\sum \operatorname{mod} \left(f(x_p+0) - f(x_\nu - 0)\right),$$

über alle Sprungstellen erstreckt ~~Null~~ endlich sei. Nur *pantachisch**) vertheilte Sprünge verträgt der Begriff der Rectificirbarkeit auch nicht im kleinsten Intervall, weil es alsdann dort keinen Differentialquotienten giebt. Die Sprungstellen können sich nach einzelnen Punkten ins Unbegrenzte verdichten, indem die Sprunghöhe in solchem Masse abnimmt, dass die Summen der unendlichen Reihen, welche die Sprunghöhen bilden, convergent sind. Die Verdichtungspunkte I. Ordnung können sich wieder nach einzelnen Punkten zu unbegrenzt verdichten, u. s. f. *Charakteristisch für diese Art Punktvertheilung ist, dass man stets durch eine endliche Anzahl Strecken des betrachteten Intervalls, die zusammengefügt eine beliebig kleine Strecke geben, so viel Sprungstellen ausschliessen kann, dass der Rest eine endliche Anzahl bildet.*

Somit gelangen wir zu folgender *Definition der Rectificirbarkeit einer Function* $f(x)$:

Die Function muss in dem Intervall, in welchem sie rectificirbar sein soll, stets endlich sein. Sie darf sprungweise Werthänderungen erleiden in einer endlichen Anzahl Punkte oder in Punkten, die Verdichtungspunkte endlicher Ordnung bilden. Die Summe ihrer positiv genommenen Sprünge muss endlich sein. Zwischen je zwei benachbarten Sprungstellen muss die Function $\sqrt{1+f'(x)^2}$ *integrirbar sein.*

---

*) Ich nenne *pantachische Vertheilung einer Punktart in einem Intervall* eine solche Vertheilung, bei der in jeder kleinsten Strecke des Intervalls Punkte, die zu jener Punktart gehören, angetroffen werden.

3.

Polygonale und mit allen Differentialquotienten stetige Linien, als deren Grenze eine rectificirbare Linie angesehen werden kann.

An solche Function schliesst sich alsdann stets eine aus geradlinigen Strecken bestehende gebrochene Linie $\varphi(x)$ an, die mit ihr in den Eckpunkten übereinstimmt, und ihr in der Länge beliebig nahe kommt. Dies lässt sich, wie folgt, einsehen.

Wir schliessen zunächst durch geradlinige Strecken, welche Punkte von $f(x)$ verbinden, die Verdichtungspunkte der Sprungstellen aus. Die Summe dieser Strecken sei s_1, und dies s_1 lässt sich durch Verkürzung der Strecken beliebig verkleinern. Es bleibt also nur noch eine endliche Anzahl Sprungstellen übrig. Die Sprünge lassen wir zu $\varphi(x)$ gehören, ihre Summe sei s_2, und dieses s_2 gehört sowohl zu $f(x)$ als zu $\varphi(x)$. Endlich bleiben die stetigen Strecken von $f(x)$ übrig, und von diesen ist es bekannt, dass man sie durch polygonale Linien s_3 ersetzen kann, deren Länge von $\int dx \sqrt{1+f'(x)^2}$ beliebig wenig abweicht, und deren Eckpunkte mit $f(x)$ übereinkommen. Also wird es sich nur um die Vergleichung der Strecken s_1 mit den entsprechenden Längen von $f(x)$ handeln können. Doch auch diese müssen mit den s_1 zugleich beliebig klein sein. Denn sie zerfallen in zwei Theile: in die in ihnen enthaltenen stetigen Strecken, die offenbar beliebig klein sind, und in die in ihnen enthaltenen Sprünge. Auch diese müssen zusammengerechnet etwas beliebig Kleines ergeben. Es reicht aus, dies an einem Verdichtungspunkt erster Ordnung zu bestätigen. Sind x_p, $x_{p+1}, \cdots$ die sich ihm nähernden Sprungstellen, so muss die Reihe $\Sigma \operatorname{mod}[f(x_p+0) - f(x_p-0)]$ convergent sein. Die Strecke, welche den Verdichtungspunkt ausschneidet, enthält den Rest dieser Reihe, den man ihrer Convergenz wegen beliebig verkleinern kann. Da also die Strecken s_1 und die ausgeschnittenen entsprechenden Curventheile $f(x)$ beliebig klein sind, die Strecken s_2 sowohl $f(x)$ wie $\varphi(x)$ angehören, und der übrige Theil der Länge von $\varphi(x)$ der Länge von $f(x)$ beliebig nahe gebracht werden kann, so gilt das Gleiche von der Gesammtlänge von $\varphi(x)$ und $f(x)$.

Was im gewöhnlichen Sinne die Rectificirbarkeit kennzeichnet, dass man z. B. den Kreisumfang als Grenze einer Reihe ein- oder umschriebener Polygone auffasst, gilt, wie aus dem eben Gesagten folgt, auch für im allgemeinsten Sinne rectificirbare Linien: *Man kann der Länge von $f(x)$ sich mit Längen polygonaler Linien $\varphi(x)$ so nähern, dass die Länge von $f(x)$ die Grenze der Längen von $\varphi(x)$ ist, während allerwärts der Unterschied $f(x) - \varphi(x)$ unter jede Grenze sinkt.*

Man kann übrigens, wie ich kurz berühren will, noch weiter gehen und zeigen, dass wir jeder polygonalen Linie $\varphi(x)$ mit einer anderen $\Phi(x)$, die mit ihren sämmtlichen Differentialquotienten stetig ist, uns in derselben Weise nähern können. Wir brauchen nur die Ecken der polygonalen Linien in geeigneter Weise durch kurze Bögen zu ersetzen*). Weiter unten werden wir Veranlassung haben etwas Aehnliches wie diese Abrundung durchzuführen, woraus das Verfahren, wie sie zu bewirken ist, einleuchten wird, so dass ich darauf nicht weiter eingehe. Ich nehme also an, dieser Punkt sei erledigt, und dass wir schliesslich das Ergebniss haben:

Man kann stets zu einer zwischen den Grenzen $x = a$ und $x = b$ rectificirbaren Function $f(x)$ andere zwischen denselben Grenzen mit allen ihren Differentialquotienten stetige Functionen $\Phi(x)$ finden, der Art, dass die Längen von $f(x)$ und $\Phi(x)$ zwischen den Grenzen a und b sich beliebig wenig unterscheiden, und dass der Unterschied $f(x) - \Phi(x)$ im ganzen Intervall unter einer beliebig kleinen Grenze sich befindet.

Das Problem von der kürzesten ebenen Linie zwischen zwei Punkten.

4.

Das Problem der kürzesten rectificirbaren Linie wird auf das der kürzesten rectificirbaren und stetigen Linie zurückgeführt.

Die Aufgabe wird also, wie oben verlangt, so ausgesprochen und gelöst werden müssen:

Es soll unter allen möglichen rectificirbaren Functionen, welche zwischen den Punkten p_1 und p_2 gegeben sein können, die kürzeste angegeben werden.

Die Methode Lagrange's zur Lösung solcher Aufgaben beginnt nun, wie folgt. Man nimmt an, die gesuchte Function existire und sei $y = f(x)$. Wenn wir mit S_{ab} die Länge der Linie (für Function) von $f(x)$ bezeichnen, mit S'_{ab} die irgend einer anderen Linie $\eta = \psi(x)$, so muss also $S'_{ab} > S_{ab}$ sein. Aber, den Grundsätzen der Theorie der Maxima und Minima gemäss, wird die Linie $\psi(x)$ dahin beschränkt, dass ihr Unterschied von $f(x)$ längs des Intervalles eine gewisse Grösse nicht überschreiten darf. Um diese Bedingung gleich auch formal zu

---

*) Es kann übrigens auf sehr mannigfaltige Weise eine solche Function $\Phi(x)$ bestimmt werden. Man verbinde z. B. die Endpunkte von $\varphi(x)$ durch eine nicht in der Ebene von $\varphi(x)$ gelegene Linie, so dass man im Ganzen eine geschlossene Linie erhält. Die Niveaulinie der durch diese geschlossene Linie gelegten Minimalfläche nähert sich in der verlangten Weise der Linie $\varphi(x)$, als einer Grenzfigur.

Ein Abrundungsverfahren, wie das im Text gemeinte, habe ich auch schon durchgeführt bei Gelegenheit der Functionen, deren Fourier'sche Entwickelung nicht convergirt (Abh. d. Münch. Akad. II. Cl. XII. Bd. II. Abth. Unters. über die Convergenz und Divergenz etc. Art. 42 sqq.).

erfüllen, setzt man, wie oben bemerkt, $\psi(x) = f(x) + \varepsilon\lambda(x)$, wo ε die kleine Grösse.

Hier aber fangen schon die Schwierigkeiten an, wenn man nach den üblichen Regeln die Aufgabe in ihrer ganzen Allgemeinheit in Formeln kleiden will, um die Bedingungen zu finden, aus denen $f(x)$ bestimmt werden kann.

Wenn wir $f(x)$ nicht durchweg stetig voraussetzen, so besteht die Länge S_{ab} aus den Integralen

$$\int_{\alpha}^{\beta} dx\,\sqrt{1 + f'(x)^2}\,,$$

zwischen deren Grenzen $f(x)$ stetig und $\sqrt{1 + f'(x)^2}$ integrirbar ist, und den Strecken

$$\Sigma \bmod [f(x_p + 0) - f(x_p - 0)],$$

und wenn man nun die analogen Aggregate für die variirte Function $\psi(x)$ aufstellte und beide vergleichen wollte, so wäre dies auf dem Wege der gewöhnlichen Variationsrechnung nicht möglich wegen der Summen, die zu den Integralen treten, und wegen der Zerfällung des Integrals von a bis b in die unbestimmte, ja unbegrenzte Zahl Theilintegrale von α bis β.

Hier muss also irgend ein Kunstgriff helfen, sonst wären wir sogleich gezwungen die Bedingungen der Aufgabe einzuschränken, und blos nach der kürzesten *stetigen* Linie zu fragen.

Ich habe mir Mühe gegeben ein allgemeines analytisches Verfahren auszusinnen, um den bekannten Methoden der Variationsrechnung die volle Allgemeinheit zu ertheilen, ohne jedoch zum Ziele zu gelangen. Mein Ziel war, unter Benutzung des Satzes am Schlusse des vorigen Artikels die Grössen unter dem Integral in geeigneter Weise in einen stetigen und einen zu vernachlässigenden unstetigen Theil zu zerlegen. Es scheint dies aber schwierig zu sein. Allein ich wurde für diese Misserfolge einigermassen schadlos gehalten durch die Bemerkung, dass es nicht allein bei dem Problem der kürzesten Linie, sondern auch bei zahlreichen andern Aufgaben der Variationsrechnung durch ein blosses Raisonnement, aber mit Hilfe jenes Satzes, gelingt, den Fall der Unstetigkeit auf den der Stetigkeit zurückzuführen. Der Schluss lautet so:

Wir suchen zuerst die kürzeste unter allen stetigen Linien. Ich nenne sie L. Dann suchen wir die kürzeste unter allen rectificirbaren Linien überhaupt. Sie heisse L_1 und sei stetig oder unstetig. Ist sie stetig, so kann es keine andere als L sein, da sie auch die kürzeste unter den Stetigen sein muss. Ist sie unstetig, so sei $L - L_1 = \varepsilon$. Alsdann kann man nach dem Satz am Schluss des vorigen Artikels stets eine stetige Linie L_1' finden, welche L_1 in der Länge beliebig nahe kommt, also sich von L_1 um weniger als ε unterscheidet. Sie müsste kleiner als L sein gegen die Voraussetzung, also giebt es keine solche unstetige Linie, die kürzer ist als die kürzeste stetige Linie. Nun ist durch diesen Gedankengang noch nicht ausgeschlossen, dass es mehrere kürzeste (gleich lange) stetige oder unstetige Linien geben kann. Dass es nur eine stetige giebt, wird der Calcül zu beweisen haben. Dann könnte es aber noch, und dies ist das logische Residuum, unstetige kürzeste Linien geben, die *gleich* lang wären wie die kürzeste stetige. Diese letzte Möglichkeit widerlegen wir so. Der Calcül ergiebt die Gerade als kürzeste stetige Linie. Also sind in der hypothetischen kürzesten unstetigen Linie alle stetigen Strecken, die nicht gerade sind, durch gerade zu ersetzen. Dann wird sie eine polygonale, aus geraden Strecken zusammengesetzte Linie, und von einer solchen lehrt die Elementargeometrie, dass sie keine kürzeste Linie ist, wenn ihre Winkel nicht alle zwei Rechte betragen.

So ist denn das Problem vollständig auf die stetigen Functionen zurückgeführt. Verfolgen wir nun die Methode weiter.

5.

Die Methode verlangt abermals eine Beschränkung der Functionen, aus welcher die der kürzesten Länge gesucht wird, jedoch ergiebt sich wieder, dass diese Beschränkung das Resultat nicht beschränkt.

Wir nehmen also die hypothetische kürzeste Linie $y = f(x)$ und eine andere beliebige, mit der sie verglichen werden soll, $\eta = f(x) + \varepsilon\lambda(x)$, stetig an, und es soll

$$\text{(I)} \qquad \int_{x_0}^{x_1} dx \sqrt{1 + (f'(x) + \varepsilon\lambda'(x))^2} - \int_{x_0}^{x_1} dx \sqrt{1 + f'(x)^2} > 0$$

sein. Wonach wir streben ist $\lambda(x)$ nicht weiter zu beschränken, als durch die Bedingung der Rectificirbarkeit von $f(x) + \varepsilon\lambda(x)$.

Hier aber erhebt sich ein neues Bedenken. Wenn nämlich ε nicht beschränkt wird, so kann allerdings $f(x) + \varepsilon\lambda(x)$ jede nahe und ferne Linie vorstellen. Wenn $f(x) + \varepsilon\lambda(x)$ z. B. gleich $\varphi(x)$ sein soll, und $f(x) - \varphi(x)$ ist durchweg klein, so können wir eine nach dem Parameter ε variable Curvenschaar $f(x) + \varepsilon\lambda(x)$ annehmen, wo $\lambda(x) = \frac{\varphi(x) - f(x)}{\varepsilon_1}$, und ε_1 den grössten Unterschied zwischen $f(x)$ und $\varphi(x)$ vorstellt. Dann gehört $\varphi(x)$ in der That zu dieser Schaar. Aber wenn, wie es die analytische Methode heischt, für ε eine Grenze besteht, die von der Beschaffenheit von $\lambda(x)$ abhängt, so ist dadurch wieder ein Theil Functionen $\varphi(x)$ ausgeschlossen, und wir erhalten wieder zunächst nur ein partielles Minimum. Indessen hilft folgende Erwägung über diese Schwierigkeit hinweg:

Wir erhalten eine Bedingung für das partielle Minimum $f(x)$, welcher auch das wirkliche genügen muss, denn wenn die ihm entsprechende Function bekannt und von vornherein eingesetzt wäre, so könnte durch die weitere Unterstellung, dass sie auch einem partiellen Minimum entspricht, was ja doch auch zutrifft, nichts Falsches herauskommen. Das wirkliche Minimum muss also ebenfalls der Bedingung genügen. Findet sich sodann nur *eine* Function, die der Bedingung genügt, so muss sie mit der wirklichen Minimumsfunction identisch sein. So dass also auch diese neue Einschränkung der Functionen, unter denen die kürzeste Linie zu suchen ist, die Allgemeinheit des Resultats nicht beeinträchtigt.

Eine letzte Einschränkung, die jedoch eben wahrscheinlich keine ist, lässt sich aber nicht vermeiden. Es ist die, dass wir $f'(x)$ und $\lambda'(x)$ integrirbar annehmen, und die Integrirbarkeit also nicht blos von $\sqrt{1+(f'(x)+\varepsilon\lambda'(x))^2}$ voraussetzen. Denn durch die Anwendung der Methode erhalten wir die erste Potenz von $f'(x)$ und $\lambda'(x)$ unter dem Integral.

6.

Die Gleichung, aus der die Variationsrechnung die Differentialgleichungen für die unbekannte Function mit Hilfe partieller Integration schliesslich findet, wird auch hier nach Beseitigung einiger Bedenken erhalten.

Nun also wird unsere Bedingung (I) des vor. Art., wenn wir darin das Differential des ersten Integrals (nicht das Integral selbst*)) nach Potenzen von ε mit dem Lagrange'schen Rest entwickeln:

$$\text{(II)}\quad \varepsilon\int_{x_0}^{x_1} dx\,\frac{\lambda'(x)\,f'(x)}{\sqrt{1+\varphi'(x)^2}}+\frac{\varepsilon^2}{2}\int_{x_0}^{x_1} dx\,\frac{\lambda'(x)^2}{[1+(f'(x)+\varepsilon_1\lambda'(x))^2]^{\frac{3}{2}}}>0,\ 0\leqq\varepsilon_1\leqq\varepsilon.$$

Es giebt ohne Zweifel für jede Function $\lambda'(x)$ ein hinreichend kleines ε, damit das erste Glied das Vorzeichen bestimme. Schreiben wir die vorstehende Formel einen Augenblick $\varepsilon A+\varepsilon^2 B>0$, so braucht nur $(\varepsilon B)^2<A^2$ zu sein. Dies wird stattfinden, wenn dem numerischen Werthe nach:

---

*) Weil man, wenn man das Integral selbst nach ε entwickeln wollte, erst seine Differenzirbarkeit untersuchen müsste, was bei Integralen nur integrirbar angenommener Differentiale nicht einfach ist. Der Unterschied bei den Operationen thut sich darin kund, dass ε_1 bei Entwickelung des Integrals von den Integrationsvariabeln unabhängig wird, was bei Entwickelung des Differentials nicht der Fall ist.

$$\varepsilon \int_{x_0}^{x_1} dx\,\lambda'(x)^2 < \int_{x_0}^{x_1} dx \frac{\lambda'(x) f'(x)}{\sqrt{1+f'(x)^2}}$$

ist. Es muss also wirklich für jede Function $\lambda(x)$ sein:

$$\text{(III)} \qquad \int_{x_0}^{x_1} dx \frac{\lambda'(x) f'(x)}{\sqrt{1+f'(x)^2}} = 0\cdot$$

Doch wir haben etwas versäumt. Wenn wir ein Integral einer integrirbaren Function zerlegen, müssen wir erst zeigen, dass *jedes von ihnen für sich integrirbar ist.* Wir haben:

$$\int_{x_0}^{x_1} dx \sqrt{1+(f'(x)+\varepsilon\lambda'(x))^2} = \int_{x_0}^{x_1} dx \sqrt{1+f'(x)^2} + \varepsilon \int_{x_0}^{x_1} dx \frac{\lambda'(x) f'(x)}{\sqrt{1+f'(x)^2}}$$
$$+ \frac{\varepsilon^2}{2} \int_{x_0}^{x_1} dx \frac{\lambda'(x)^2}{[1+(f'(x)+\varepsilon_1\lambda'(x))^2]^{\frac{3}{2}}} = C + \varepsilon A + \varepsilon^2 B\cdot$$

Das erste Integral rechts hat ein integrirbares Differential. Wenn man bei dem dritten die $-\frac{3}{2}$ Potenz vor das Integral nimmt, so ist deren Mittelwerth < 1, und in das Integral $\int_{x_0}^{x_1} dx\lambda'(x)^2$ multiplicirt, welches ein integrirbares Differential hat. Es ist gleichgültig, ob der Factor dieses Integrals unbestimmt ist. Es reicht aus, dass er kleiner als Eins ist. Zunächst muss $\varepsilon A + \varepsilon^2 B$ zusammen bestimmt sein, weil der übrige Theil der Gleichung es ist. Dann muss aber sowohl A wie B bestimmt sein, denn da sowohl A wie εB endlich sind, also, falls sie unbestimmt wären, zwischen endlichen Grenzen schwanken müssten, so könnte die gleichzeitige Unbestimmtheit von εB diejenige von A nicht aufheben, weil ja εB durch Verkleinerung von ε gegen A beliebig klein gemacht werden kann, so dass also doch $\varepsilon A + \varepsilon^2 B$ unbestimmt wäre. Dieser Beweis für die Integrirbarkeit der Function unter dem Integral A lässt sich auf andere ähnliche Fälle ausdehnen. Uebrigens kann man die Integrirbarkeit dieser *besonderen* Function auch direct beweisen, was bei einer späteren Gelegenheit (Art. 14) geschehen wird.

Nun endlich kann uns die Gleichung

$$\text{(III)} \qquad \int_{x_0}^{x_1} dx \frac{\lambda'(x) f'(x)}{\sqrt{1+f'(x)^2}} = 0$$

nicht mehr streitig gemacht werden. Wir haben sie in ihrer vollen Allgemeinheit glücklich durch alle Klippen geführt.

7.

Die Gleichung (III) und die aus ihr mit Hülfe partieller Integration erhaltene werden discutirt. Wir können von nun an die Allgemeinheit nicht mehr wahren, sondern müssen einschränkende Voraussetzungen machen. Indessen kann das allgemeine Resultat auf anderem Wege erhalten werden. Ein Satz der Variationsrechnung.

Aber was ist nun mit der Gleichung (III) anzufangen? Sie steht da, allein die partielle Integration, zu der man nun weiter seine Zuflucht nehmen soll, hier dürfen wir sie nicht anwenden, wenn wir nicht die Allgemeinheit unserer Voraussetzungen, die wir bisher so sorglich geschützt, plötzlich zum besten Theile preisgeben wollen.

Der Umfang, in welchem die gewöhnliche Formel für partielle Integration angewendet werden kann, wurde von mir bestimmt, wie folgt:*)

Falls im Intervall $a \cdots b$ von x $f(x)$ und $\varphi'(x)$ nicht in denselben Punkten und nur so unendlich werden, dass die Integrale convergent sind, und übrigens diese Functionen die Bedingung der Integrirbarkeit erfüllen, während $\varphi(x)$ stetig sein muss, hat man:

$$\int_a^b d\alpha\, \varphi(\alpha) f(\alpha) = \varphi(b) \int_a^b d\alpha f(\alpha) - \int_a^b d\alpha\, \varphi'(\alpha) \int_a^\alpha d\beta f(\beta) \cdot$$

In unserer Formel entsprechen $\frac{f'(x)}{\sqrt{1+f'(x)^2}}$ und $\lambda'(x)$ den Functionen $\varphi(x)$ und $f(x)$ in dieser.

Wären jene Bedingungen der Formel für partielle Integration erfüllt, so hätte man:

$$\int_{x_0}^{x_1} dx \frac{\lambda'(x) f'(x)}{\sqrt{1+f'(x)^2}} = \frac{\lambda(x_1) f'(x_1)}{\sqrt{1+f'(x_1)^2}} - \frac{\lambda(x_0) f'(x_0)}{\sqrt{1+f'(x_0)^2}} - \int_{x_0}^{x_1} dx\, \lambda(x) \frac{d}{dx} \frac{f'(x)}{\sqrt{1+f'(x)^2}},$$

und wenn zudem $\frac{f'(x)}{\sqrt{1+f'(x)^2}}$ nur darin die Bedingungen nicht erfüllte, dass sie einzelne Sprungstellen hätte für die Punkte x_p, so käme noch (der Kürze halber $F(x) = \frac{f'(x)}{\sqrt{1+f'(x)^2}}$ gesetzt) rechts der Term

$$\Sigma \lambda(x_p) \left[F(x_p+0) - F(x_p-0)\right]$$

hinzu.

---

*) Abh. d. K. baier. Acad. d. Wissensch. II. Cl. XII. Bd., I. Abth., Beweis dass die Coefficienten etc. Art. 12. Mittheilungen des Hrn. Thomä in *Schlömilchs Zeitschrift.*

Wenn wir an unser Problem der kürzesten Linie zwischen zwei Punkten und an unsere bisherige Untersuchung denken, so hat $\lambda(x)$ folgende Bedingungen zu erfüllen:

1. Es ist $\lambda(x_0) = 0$, $\lambda(x_1) = 0$,
2. $\lambda'(x)$ ist im Intervalle von x_0 bis x integrirbar, und $\lambda(x)$ stetig.

Wie wir $\lambda(x)$ diesen Bedingungen gemäss auch bestimmen mögen, stets ist Formel (III) richtig, wenn nur $f(x)$ die oben besprochene Minimalfunction ist.

Die Bedingungen für die partielle Integration sind von $\lambda(x)$ jedenfalls erfüllt. Aber die Stetigkeit von $\frac{f'(x)}{\sqrt{1+f'(x)^2}}$ beschränkt die Gruppe der rectificirbaren Function bedeutend.

Um so erfreulicher ist es, dass es doch noch einen Weg giebt auf dem man wenigstens im Falle der kürzesten Linie die Allgemeinheit aus dieser letzten und bedenklichsten Gefahr unverkümmert retten kann. Ich werde ihn weiter unten (Art. 14.) mittheilen.

Zuvörderst will ich die gewöhnliche Methode verfolgen, und ihren Schlüssen die grösste Allgemeinheit und Strenge zu ertheilen suchen, wobei sich neue Sätze der Integrabilitätslehre ergeben werden.

Wir nehmen zu diesem Zwecke an, wir hätten unsere Voraussetzungen den Bedingungen der Formel für partielle Integration gemäss beschränkt, und wollen die durch partielle Integration umgeformte Gleichung (III) so schreiben:

$$\lambda(x_1)F(x_1) - \lambda(x_0)F(x_0) + \Sigma\lambda(x_p)[F(x_p+0) - F(x_p-0)]$$
$$+\int_{x_0}^{x_1} dx\,\lambda(x)\,F'(x) = 0,$$

indem wir vorerst vereinzelte Sprünge von $F(x)$ zulassen. Ich habe um die Formel in ihrer Vollständigkeit zu geben $\lambda(x_1)$ und $\lambda(x_0)$, die bei der kürzesten Linie eigentlich Null sind, noch nicht unterdrückt.

Nun ist $\lambda(x)$ blos rectificirbar anzunehmen. Wir werden also, ich werde alsbald zeigen, wie dergleichen Functionen analytisch darzustellen sind, $\lambda(x)$ Null annehmen dürfen ausser in Strecken $x_p - \delta \cdots x_p + \delta$, in denen sie von Null verschieden ist, und zwar so, dass $\lambda(x_0)$ dennoch durch das ganze Intervall x_0 und x_1 stetig bleibt.

Setzen wir noch $\lambda(x_1) = 0$, $\lambda(x_0) = 0$, so reducirt sich der Ausdruck auf:

$$\sum \lambda(x_p)[F(x_p+0) - F(x_p-0)] + \sum \int_{x_p-\delta}^{x_p+\delta_1} dx\,\lambda(x)\,F'(x) = 0.$$

Wir können ihn noch weiter kürzen, indem wir alle $\lambda(x_p)$ bis auf eines, $\lambda(x_r)$, Null annehmen:

$$\lambda(x_r)[F(x_p+0)-F(x_p-0)]+\int_{x_r-\delta}^{x_r+\delta_1} dx\,\lambda(x)F'(x)=0\cdot$$

Den Werth des Integrals können wir durch in unserem Belieben stehende Zusammenziehung der Grenzen verkleinern, bis es kleiner wie der von Null verschieden gedachte Werth von $\lambda(x_r)[\quad]$ wird. Also kann dieser Werth nicht wirklich von Null verschieden sein, also kann $F(x)$ keine einzelnen Unstetigkeiten haben, wenn sie sonst stetig angenommen wird.

Es ergiebt sich hieraus ein Satz der Variationsrechnung:*)

Wenn in

$$\int_{x_0}^{x_1} dx\,\lambda'(x)F(x)=0$$

$\lambda'(x)$ *den integrirbaren Differentialquotienten einer stetigen Function darstellt, die beliebig ist bis auf die Endwerthe* $\lambda(x_0)$ *und* $\lambda(x_1)$, *die gegeben und zwar der Einfachheit halber* $=0$ *angenommen werden, und wenn man von* $F(x)$ *weiss, dass sie eine bis auf einzelne Sprungstellen stetige Function ist, so sind auch diese einzelnen Sprungstellen nicht vorhanden, und* $F(x)$ *ist im ganzen Intervall* $x_0 \cdots x_1$ *stetig.*

Hiernach bleibt von der transformirten Gleichung (III) übrig:

$$\text{(IV)} \qquad \int_{x_0}^{x_1} dx\,\lambda(x)F'(x)=0$$

und wir haben nun zu untersuchen, was aus der Willkürlichkeit von $\lambda(x)$ in Betreff der Function $F'(x)$ folgt, *die, da wir von* $F(x)$ *nichts als die Stetigkeit wissen, nur integrirbar zu sein braucht.*

---

*) Was diese Annalen Bd. II, pag. 190 von Hrn. Heine erörtert wird, hat zwar die Richtung obigen Satzes, erreicht ihn jedoch nicht ganz, da wir von $F'(x)$ nur die Integrirbarkeit brauchen, l. c. aber $F'(x)=0$ zu Grunde gelegt wird.

Ueber den Hauptgrundsatz der Variationsrechnung.

8.

Besondere Bestimmung der Variation $\lambda(x)$ und Formulirung des Hauptgrundsatzes im Falle die Function $F'(x)$ Stetigkeitseigenschaften hat.

Wir dürfen nicht, wie in der Variationsrechnung geschieht, aus

$$\text{(IV)} \qquad \int_{x_0}^{x_1} dx\,\lambda(x) F'(x) = 0$$

sogleich schliessen $F'(x) = 0$. Man kann dies ohne Zweifel ihren *Hauptgrundsatz* nennen, es müssen jedoch die Bedingungen seiner Gültigkeit sorgfältig untersucht werden. Wir setzen zuerst Stetigkeitseigenschaften der Function $F'(x)$ voraus.

Um die Formel (IV) alsdann discutiren zu können, ist es zweckmässig, in besonderer Weise über die Variation $\lambda(x)$ zu verfügen.

Ich habe schon von einer solchen Bestimmungsweise der willkürlichen Function $\lambda(x)$ Gebrauch gemacht, bei der sie bis auf gewisse Strecken Null und dennoch stetig ist. Dergleichen Functionen lassen sich auf mannigfache Art construiren. Zwei solche Constructionsmethoden werde ich hier mittheilen, deren erste eine so beschaffene Function ergiebt, dass sie mit einer beliebigen Anzahl Differentialquotienten stetig ist, während die zweite Functionen liefert, die mit allen ihren Differentialquotienten stetig sind, und die, weil sie sich beliebig nahe an polygonale Linien anschliessen, in allen Theilen der Variationsrechnung sich gut verwenden lassen, indem man sie namentlich auch leicht als Flächenvariationen darstellen kann.

Nach der ersten Constructionsmethode nehmen wir zwei Argumentwerthe α und β an, die der Ungleichheit

$$a < \alpha < \beta < b$$

genügen, und bestimmen $\lambda(x)$ so:

$$\begin{array}{llll} \text{für} & a \leqq x < \alpha & \text{ist} & \lambda(x) = 0, \\ \text{für} & \beta < x \leqq b & \text{ist} & \lambda(x) = 0, \\ \text{für} & \alpha \leqq x \leqq \beta & \text{ist} & \lambda(x) = [(x-a)(b-x)]^{n+1}. \end{array}$$

Alsdann ist $\lambda(x)$ im Intervall a und b nirgends negativ und sammt seinen n ersten Differentialquotienten stetig.

Die Gleichung

$$\int_{x_0}^{x_1} dx\,\lambda(x) F'(x) = 0$$

ergiebt also:

$$0 = F'(\xi)\int_\alpha^\beta \lambda(x)\,dx, \quad \alpha \leqq \xi \leqq \beta,$$

oder $F'(\xi) = 0$, $\alpha \leqq \xi \leqq \beta$. Lassen wir α und β einem Argument x' bis auf beliebig kleine Unterschiede sich nähern, so ist $\lim F'(\xi) = 0$. Der Werth $F'(\xi)$ ist irgend ein unbekannter Werth, der zwischen dem grössten und dem kleinsten Werth liegt, den die Function $F'(x)$ im Intervall $\alpha \leqq x \leqq \beta$ erhält. Wird nun eine Grösse ε alle Zahlen von einer gewissen an durchlaufend unbegrenzt klein, und werden es mit ε zugleich entweder $F'(x') - F'(x'-\varepsilon)$ oder $F'(x') - F'(x'+\varepsilon)$, oder diese beiden Unterschiede zugleich, so ist nothwendigerweise $F'(x') = 0$. Wenn also $F'(x)$ für $x = x'$ nach links oder nach rechts oder nach beiden Seiten stetig ist, so folgt immer $F'(x) = 0$, und da der Punkt x' irgendwo liegen kann, *so ist die Function $F'(x)$ allerwärts, wo sie die angegebenen Stetigkeitseigenschaften hat, Null.*

9.

Die Anwendung des Hauptgrundsatzes auf das Problem der kürzesten Linie, und die Probleme der Variationsrechnung überhaupt, verlangt eine neue Einschränkung der Allgemeinheit der Voraussetzungen. Der ganze Inbegriff rectificirbarer Linien wird durch sie sehr verkümmert, und man erhält die kürzeste Linie nur von einem beschränkten Theil rectificirbarer Linien.

In der Bedingung für die kürzeste Linie

$$\int_{x_0}^{x_1} dx\,\lambda(x)\frac{d}{dx}\,\frac{f'(x)}{\sqrt{1+f'(x)^2}} = 0$$

wird, wie gesagt, von $F'(x) = \frac{d}{dx}\,\frac{f'(x)}{\sqrt{1+f'(x)^2}}$ keineswegs Stetigkeit verlangt, $F'(x)$ braucht entschieden nur integrirbar zu sein, nur so weit waren wir behufs Anwendung der üblichen Regeln der Variationsrechnung gezwungen von der Allgemeinheit unserer Ausgangsannahmen nachzulassen. Wenn wir also aus

$$\int_{x_0}^{x_1} dx\,\lambda(x)F'(x)$$

den Schluss ziehen

$$F'(x) = 0,$$

so können wir dies nur auf Grund einer neuen Einschränkung thun. Wir greifen eben aus dem Inbegriff der rectificirfachen Functionen einen noch engeren Inbegriff heraus. Die erste wirkliche Einschränkung war, dass wir die Stetigkeit von $F(x) = \frac{f'(x)}{\sqrt{1+f'(x)^2}}$ voraussetzen mussten, also wohl die Stetigkeit von $f'(x)$, nachdem wir schon früher $f(x)$

selbst hatten stetig annehmen müssen, allerdings *ohne* dabei die Allgemeinheit der Lösung zu beschränken. Nun also würde

$$F'(x) = \frac{f''(x)}{(1+f'(x)^2)^{\frac{3}{2}}}$$

auch stetig sein sollen, also gewiss $f'''(x)$. Wenn mithin die Variationsrechnung auf die Gleichung

$$F'(x) = \frac{f''(x)}{(1+f'(x)^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{r} = 0$$

d. i. $f''(x) = 0$ der kürzesten Linie führt, so gelangt sie dahin nur durch folgende Beschränkung der natürlich sich darbietenden Voraussetzungen:

*Die Variationsrechnung schliesst aus, um zum Resultat zu gelangen, von dem Inbegriff aller Functionen, die den Begriff der Länge zulassen, alle solche Functionen, die nicht sammt ihren ersten und zweiten Differentialquotienten stetig sind.**)

Jene Methode bringt es also nur zu einem sehr verkümmerten Ergebniss, und es ist durchaus falsch, wenn man ihr nachrühmt, sie liefere den Beweis, dass die Gerade die kürzeste Linie ist. Wie angekündigt, werden wir den Beweis dafür wirklich führen, allein durch ein ausserhalb der Methode sich bewegendes Verfahren. Dieser Beweis erscheint vom Standpunkt der allgemeinen Raumtheorie aus keineswegs überflüssig, abgesehen davon, dass man es der Mathematik doch nicht gern vorhalten lassen will, sie sei noch nicht im Stande solche Anschauungswahrheiten zu beweisen.

Zunächst aber wenden wir uns im Anschluss an das Vorstehende zu einer Untersuchung, welche auch der Integrabilitätstheorie zu Gute kommt. Es werde also $F'(x)$ nicht mehr stetig vorausgesetzt, und von Neuem die Bedingung $\int\limits_{x_0}^{x_1} dx \lambda(x) F'(x)$ betrachtet. Wir schreiben sie behufs dieser allgemeinen Untersuchung etwas anders, und stellen uns zuerst die Frage:

Wenn über $\lambda(x)$ und $f(x)$ nichts als die Integrirbarkeit vorausgesetzt ist und $\lambda(x)$ ist eine sonst willkürliche Function, was folgt aus der Gleichung

$$\int\limits_a^b dx\, \lambda(x) f(x)$$

in Bezug auf $f(x)$?

*) Durch unsere Richtigstellung des Hauptgrundsatzes (Art. 12, I. Satz) wird die Beschränkung, dass $f''(x)$ stetig sein müsse, auf die Bedingung der Integrirbarkeit herabgesetzt.

10.

Einführung der begrenzten mit allen ihren Differentialquotienten stetigen Variationen.

Als bequemes Instrument für diese Untersuchung wollen wir jetzt nach der zweiten der (Art. 8.) angekündigten Constructionsweisen eine Function $\lambda(x)$ angeben, die bis auf eine oder mehrere beliebig lange Strecken Null ist. Sie hat vor der ersten im Art. 8. angegebenen voraus, erstens, dass sie in den Strecken, in denen sie nicht Null ist, bis auf beliebig zu verkleinernde Intervalle an den Enden der Strecken constant ist, und zweitens, dass sie im ganzen Intervall $a \cdots b$ mit *allen* ihren Differentialquotienten stetig ist. Dies können freilich algebraische Functionen nicht leisten, und wir werden eine Exponentialfunction zu Hülfe nehmen müssen.

Wir theilen das Intervall $a \cdots b$ in fünf Theile wie folgt:

$$a \cdots \alpha \cdots \alpha' \cdots \beta' \cdots \beta \cdots b$$

und verfügen über λ so, dass diese Function Null ist in den Strecken

$$a \leqq x \leqq \alpha, \quad \beta \leqq x \leqq b$$

und Eins in der Strecke

$$\alpha' \leqq x \leqq \beta'.$$

In den übrigbleibenden Strecken $\alpha < x < \alpha'$, $\beta' < x < \beta$ soll sie so bestimmt werden, dass sie von α bis α' stetig von 0 bis 1 wächst, von β' bis β stetig von 1 bis 0 abnimmt, und dass in α, α', β', β ihre sämmtlichen Differentialquotienten stetig sind. Es genügt, dies für die Strecke $\alpha \cdots \alpha'$ einzurichten.

Wir setzen zu diesem Zweck:

$$\lambda(x) = \frac{1}{\pi}\left\{\operatorname{arctg}\, \varrho(x) + \frac{\pi}{2}\right\}$$

und:

$$\varrho(x) = \left(x - \frac{\alpha + \alpha'}{2}\right) e^{\frac{1}{(x-\alpha)(\alpha'-x)}}.$$

Das Minimum des Exponenten fällt auf $x = \frac{\alpha + \alpha'}{2}$. Während daher x von $\alpha + 0$ bis $\alpha' - 0$ wächst, steigt nur zunehmend $\varrho(x)$ von $-\infty$ bis $+\infty$ und der $\operatorname{arctg}\, \varrho(x)$ von $-\frac{\pi}{2}$ bis $+\frac{\pi}{2}$, und $\lambda(x)$ von 0 bis 1.

Weiter ist:

$$\pi\lambda'(x) = \frac{\varrho'}{1+\varrho^2}, \quad \pi\lambda''(x) = -\frac{2\varrho\varrho'^2}{(1+\varrho^2)^2} + \frac{\varrho''}{1+\varrho^2}, \quad \text{etc.}$$

Die Differentialquotienten bestehen aus Brüchen, deren Zähler eine niedere Potenz der Exponentialfunction enthält als der Nenner, und welche differenzirt immer ähnlich zusammengesetzte Brüche ergeben. Sie sind Producte rationaler Functionen in Brüche der Form:

$$\frac{e^{r\mu}}{(1+ue^{2\mu})^n}.$$

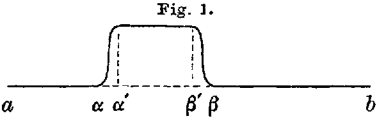
wo $\mu = \frac{1}{(x-\alpha)(\alpha'-x)}$, und $r < 2n$. Der Differentialquotient ist:

$$-n(u'+2u\mu')\frac{e^{(r+2)\mu}}{(1+ue^{2\mu})^{n+1}} + \frac{r\mu' e^{r\mu}}{(1+ue^{2\mu})^n}.$$

Im ersten Bruch steht im Zähler die $r+2^{\text{te}}$, im Nenner die $2n+2^{\text{te}}$ Potenz der Exponentialfunction. Also werden in der That sämmtliche Differentialquotienten von $\lambda(x)$ bei Annäherung an α und α' Null. Wenn man daher $\lambda(x)$ im Intervall $\beta' \cdots \beta$ ähnlich bestimmt, wie im Intervall $\alpha \cdots \alpha'$, so hat diese Function die verlangten Eigenschaften im ganzen Intervall $a \cdots b$.

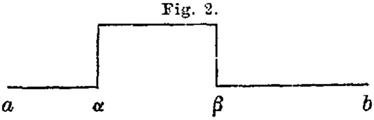
Der Verlauf der Function $\lambda(x)$ ist etwa dieser:

Fig. 1.



und da die Strecken $\alpha\alpha'$ und $\beta'\beta$ beliebig kurz im Verhältniss zu $\alpha\beta$ gemacht werden können, so ist die Function $\lambda(x)$ beliebig wenig verschieden von dieser:

Fig. 2.



in dem Sinne, dass die Unterschiede der Integrale, in welchen die Function $\lambda(x)$, und derer, in welchen die letztere unstetige auftritt, beliebig verringert werden können. Dabei ist aber $\lambda(x)$ stets mit allen Differentialquotienten stetig. Die in diesem Artikel construirte Form der Variation soll *begrenzte Variation* genannt werden.

11.

Anwendung der mit allen Differentialquotienten stetigen begrenzten Variationen um unstetige Variationen durch stetige zu ersetzen.

Führen wir die Function $\lambda(x)$ in unserem Integral

$$0 = \int_a^b dx\,\lambda(x) f(x)$$

ein, so folgt zunächst, weil $\lambda(x)$ ausserhalb des Intervalls $\alpha \cdots \beta$ Null, im Intervall $\alpha' \cdots \beta'$ Eins ist:

$$0 = \int_\alpha^\beta f(x)\,dx + \int_\alpha^{\alpha'} dx(\lambda(x) - 1) f(x) + \int_{\beta'}^{\beta} dx(\lambda(x) - 1) f(x).$$

Da in den beiden letzteren Integralen $\lambda(x) - 1$ nur wächst oder nur abnimmt, so können sie, unter der Voraussetzung, dass $\int f(x)\,dx$ zwischen keinen innerhalb a und b gelegenen Grenzen eine gewisse Grösse überschreitet, auf Grund meines Mittelwerthsatzes beliebig klein angenommen werden. Setzt man daher:

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx = \int_\alpha^{\alpha'} dx(1 - \lambda(x)) f(x) + \int_{\beta'}^{\beta} dx(1 - \lambda(x)) f(x),$$

so kann die rechte Seite durch Verkleinerung der Unterschiede $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$ beliebig klein gemacht werden. Sie enthält aber die Grössen $\alpha'\beta'$ gar nicht, weil die linke sie nicht enthält, also muss sie so klein sein, wie eine Grösse überhaupt sein kann, d. i. Null.

12.

Die mit der Variationsrechnung in Zusammenhang stehenden allgemeinen Sätze der Integrabilitätstheorie.

Hieraus ergiebt sich:

I. *Wenn das Integral*

$$\int_a^b dx\,\lambda(x) f(x)$$

Null ist, welche Function mit stetigen Differentialquotienten man auch an die Stelle von $\lambda(x)$ setzen möge, so ist $f(x)$ eine solche integrirbare Function, deren Integral zwischen beliebigen dem Intervall $a \cdots b$ angehörigen Grenzen Null ist.

Es hat Interesse, festzustellen, ob nicht *mehr* über die Function $f(x)$ folgt. Zu diesem Zweck wollen wir den umgekehrten Satz, jedoch in dieser allgemeineren Form beweisen:

II. *Wenn die Function $f(x)$ integrirbar ist und ihr Integral, genommen zwischen dem Intervall $a \cdots b$ angehörigen Grenzen, stets Null ist, so ist auch*

$$\int_a^b dx\,\lambda(x) f(x)$$

Null, wenn die Function $\lambda(x)$ ebenfalls integrirbar ist. Der Einfachheit halber werden beide Functionen $\lambda(x)$ und $f(x)$ endlich angenommen.

Beweis. Wenn $f(x)$ im Intervall $a \cdots b$ integrirbar ist, und wir in einem Theilintervall δ_p mit f_{0p}, f_{up} den grössten und kleinsten Werth von $f(x)$ bezeichnen, so ist nach dem Begriff der Integrirbarkeit:

$$\int f(x)\,dx = \lim \sum f_{up}\delta_p = \lim \sum f_{0p}\delta_p,$$

wo die δ_p in jeder der Summen rechts beliebig sind, und in der einen Summe anders wie in der andern angenommen werden dürfen.

Falls weiter $\int f(x)\,dx = 0$ ist, so muss in einem Intervall δ_p, wo der kleinste und grösste Werth nicht verschiedenes Vorzeichen haben, entweder der kleinste oder der grösste Werth Null sein, wobei ich — um Einwendungen vorzubeugen — ausdrücklich betonen will, dass ich nicht behaupte, die grössten und kleinsten Werthe würden von den Functionalwerthen wirklich erreicht.

Da demnach in $\Sigma f_{up}\,\delta_p$ die Grössen f_{up} Null oder negativ, in $\Sigma f_{0p}\,\delta_p$ die Grössen f_{0p} Null oder positiv sind, so wird, wenn man die positiven Werthe der Function $f(x)$ durch Null ersetzt, und die so definirte Function $f_2(x)$ nennt, $\int f_2(x)\,dx$ Null sein. Desgleichen muss, wenn man die negativen Werthe von $f(x)$ durch Null ersetzt, und die so entstandene Function $f_1(x)$ nennt, $\int f_1(x)\,dx$ Null sein. Auch ist $f_1(x) + f_2(x) = f(x)$.

Sodann setze man:

$$\int dx\,\lambda(x) f(x) = \int dx\,\lambda_1(x) f(x),$$

wo $\lambda_1(x) = \lambda(x) + c$ positiv sei. Endlich zerlege man:

$$\int dx\,\lambda_1(x) f(x) = \int dx\,\lambda_1(x) f_1(x) + \int dx\,\lambda_1(x) f_2(x).$$

Beide Integrale rechts sind Null, wie sich ergiebt, wenn man mittlere Werthe von $\lambda_1(x)$ herausnimmt. Es fragt sich aber, was diese Herleitung in Bezug auf $\lambda(x)$ für Forderungen stellt. Offenbar nur, dass $\lambda(x)f(x)$, $\lambda(x)f_1(x)$ und $\lambda(x)f_2(x)$ integrirbare Functionen seien. Nun habe ich aber gezeigt, dass das Product zweier integrirbarer Functionen wieder eine integrirbare Function ist. Also braucht $\lambda(x)$ nur eine integrirbare Function zu sein, *muss* es aber andererseits sein, wenn nichts über $f(x)$ als die Integrirbarkeit und das Nullsein ihres Integrals vorausgesetzt ist. Q. e. d.

Nun nehmen wir an, für irgend eine Functionengruppe $\lambda(x)$, die der Gruppe der integrirbaren Functionen angehört, sei stets

$$\int dx\,\lambda(x) f(x) = 0,$$

wobei über die Function $f(x)$ nichts als die Integrirbarkeit vorausgesetzt wird, und es folge daraus zunächst das Nullsein des Integrals $\int f(x)\,dx$.

Wenn noch mehr in Betreff der Function $f(x)$ daraus folgen soll, so muss es eine jener Gruppe angehörige Function $\lambda^*(x)$ und eine Function $f^*(x)$ geben, der Art, dass

$$\int dx \lambda^*(x) f^*(x)$$

nicht Null ist, auch wenn $f^*(x)$ die Bedingung der Integrirbarkeit und des Nullseins seines Integrals erfüllt. Es ergiebt sich aber aus dem umgekehrten Satze, dass dann immer $\int dx \lambda^*(x) f^*(x) = 0$ sein muss, also kann aus der Willkürlichkeit von $\lambda(x)$ über $f(x)$ auch nichts weiter geschlossen werden, wie deren Integrirbarkeit und das Nullsein ihres Integrals, auch wenn man die Willkürlichkeit von $\lambda(x)$ bis zur blos integrirbaren Function erweitert.

Hiermit sind die allgemeinen Sätze der Integrabilitätstheorie, auf welche die Variationsrechnung führt, im Reinen.

Ich bemerke noch, dass die Function $f(x)$ in einzelnen Punkten unendlich werden darf mit den üblichen Einschränkungen, auf welche näheren Ausführungen ich indessen nicht eingehen will.

Beide Sätze, der Satz I. und der Satz II., haben gleichsam entgegengesetzte Ziele. Bei Satz I. besteht das Interesse darin, *wie sehr man die Function $\lambda(x)$ beschränken darf*, ohne dass ein anderes Ergebniss über $f(x)$ als das in ihm behauptete hervorgeht. Wir werden wohl mit der Bedingung, dass die Function $\lambda(x)$ sammt allen ihren Differentialquotienten stetig sei, hart an die Grenze streifen. Bei Satz II. handelt es sich darum, wie wenig $\lambda(x)$ zu beschränken sei, damit aus dem Nullsein des Integrals der integrirbaren Function $f(x)$ das Nullsein des Integrals $\int dx \lambda(x) f(x)$ folge. Hier haben wir mit der Integrirbarkeit von $\lambda(x)$ die Grenze wirklich erreicht.

Unterwirft man $\lambda(x)$ grösseren Beschränkungen, setzt z. B. $\lambda(x) = (x-\gamma_1)(x-\gamma_2)\cdots(x-\gamma_n)$, so ergeben sich in Bezug auf $f(x)$ Folgerungen, welche diese Function in dem Masse, wie die Function $\lambda(x)$, mehr und mehr beschränken. Man hat dann nicht mehr den Vortheil die Function $\lambda(x)$ in einer Strecke gleich Eins, im übrigen Theil des Integrationsintervalls Null setzen zu können, und muss vielmehr den Umstand benutzen, dass ein Integral mit nicht negativem Differential Null sein kann, nur wenn sein Differential es ebenfalls ist. Der Variationsrechnung ist mit der weiteren Verfolgung dieser Frage kaum gedient, während in der Integralrechnung sonst wohl Fälle vorkommen, in denen willkürliche ganze rationale Functionen unter dem Integralzeichen eine ähnliche Rolle wie Variationen spielen.

13.

Anwendung dieser allgemeinen Principien auf die Variationsrechnung.

Aus dem Obigen folgt zunächst, dass die Function $f(x)$ zwar, wie bereits gezeigt, Null ist, wo für einen Punkt x' entweder an der Seite $x'-0$ oder an der Seite $x'+0$ oder an beiden die Stetigkeitsbedingung erfüllt ist. Es ist aber nicht ausgeschlossen, dass $f(x)$ in unzähligen Punkten von Null verschieden ist. Wenn bei den gewöhnlichen Problemen der Variationsrechnung die allgemeine Folgerung, dass nur das Integral $\int f(x)\,dx$ Null zu sein braucht, durch die einfachere, dass $f(x)$ selbst Null ist, ersetzt zu werden pflegt, und sich auch Irrthümer daraus nicht ergeben haben, so ist es doch möglich, dass bei tiefer liegenden Aufgaben auf die allgemeine und correcte Bedingung wird Rücksicht genommen werden müssen. Uebrigens auch bei den gewöhnlichen Aufgaben können „durch Abänderung einzelner Functionswerthe hebbare" Unstetigkeiten der sonst überall verschwindenden Function $f(x)$ auftreten, deren Unschädlichkeit für die Aufstellung der Differentialgleichung hiermit dargethan ist.

Nehmen wir, um noch den gewöhnlichen bei der Variation der Integrale betrachteten Fall besonders zu erwähnen, an, dass es sich um das Maximum oder Minimum von $\int_a^b V\,dx$ handele, wo V von $x, y, y', \cdots y^{(n)}$ abhängt. Es hat sich also ergeben (wenn man nur auf das durch partielle Integration erhaltene Integral Rücksicht nimmt), *dass die Bedingung des Nullseins von:*

$$\int_a^b dx\,\delta y \left\{\frac{\partial V}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial V}{\partial y'} + \cdots\right\}$$

für das Maximum oder Minimum unter Voraussetzung einer dergestalt unbeschränkten Variation δy, dass sie nur eine integrirbare Function zu sein braucht, stets erfüllt ist, wenn das Integral

$$\int dx \left\{\frac{\partial V}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial V}{\partial y'} + \cdots\right\}$$

zwischen Grenzen, die dem Intervall $a \cdots b$ angehören, immer Null ist.

Und wenn diese Bedingung durch

$$0 = \frac{\partial V}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial V}{\partial y'} + \cdots \pm \frac{d^n}{dx^n}\frac{\partial V}{\partial y^{(n)}}$$

ersetzt wird, so kommt dies mit der Annahme überein, dass die Minimalfunction y und die Functionenclasse, aus der sie ausgesucht werden soll, beschränkt wird durch die Vorschrift, dass sie sammt ihren $2n$ ersten Differentialquotienten stetig sei, welcher Vorschrift auch die

Variation genügen muss, da sie zur Klasse, aus welcher das Minimum bestimmt werden soll, gehört. Nur vereinzelte Sprungstellen bei der $2n^{\text{ten}}$ Ableitung schliesst die Methode nicht aus.

Was endlich unsere Einführung auf eine beliebige begrenzte Strecke bezüglicher Variationen anlangt, in welcher sie bis auf die unmittelbare Nähe der Enden constant, und ausserhalb deren sie Null sind, so erleichtert sie in der That manche Untersuchungen ungemein, und ist auch sofort auf Flächen etc. zu übertragen.

Der Vortheil besteht darin, dass man von der kurzen Strecke oder dem kleinen Gebiet, in welchem die Variation von Null zu einem anderen Werth stetig ansteigt, *in praxi* absehen kann. Man kann, was bequemer ist, sie sich plötzlich, sprungweise von Null aus ihren anderen Werth annehmend denken, weil man ja in der Idee die unstetige Function durch stetige ohne Weiteres ersetzen kann.

Wir können z. B. in dem Oberflächenintegral $\int dO\,\delta N U$ das δN Null annehmen bis auf ein Oberflächenstück O, wo δN einen constanten Werth hat. Man hat sich dies wohl schon immer so gedacht, wenigstens ich bekenne es. Allein ich habe das Bewusstsein mit einer legitimen Vorstellung zu operiren, erst seitdem ich die Function $\lambda(x)$ mir bereit zu halten gewohnt bin, um meinen Schlüssen erforderlichen Falles sogleich volle Strenge ertheilen zu können.

Das Problem über die kürzeste Linie.

14.

Vergleichung der Willkürlichkeit der Variationen selbst mit derjenigen der Differentialquotienten der Variation. Der Beweis dafür, dass die gerade Linie die kürzeste Verbindungslinie zweier Punkte ist, wird nach einem ersten Verfahren zu Ende geführt.

Wir betrachteten bis jetzt möglichst unbeschränkte Variationen und wollen zum Abschluss dieser Erläuterungen auch mit einigen Beschränkungen der Willkürlichkeit der Variationen uns beschäftigen.

Deren einfachste wurde zuerst verkannt und man fand darin kurz nach Lagrange's Veröffentlichung in den Turiner Mémoiren einen Einwand gegen die Allgemeingültigkeit seiner Methode, welcher freilich bald genug entkräftet wurde. Es handelt sich darum, dass wenn die Variation δy als vollkommen willkürlich (innerhalb der Grenzen der Integrale) angenommen wird, die Variationen $\delta y'$, $\delta y''$, $\cdots$ es dort nicht zu sein brauchen, falls nämlich die Variation δy in gewissen *Punkten*, z. B. an den Grenzen der Integrale, gewisse Bedingungen erfüllen muss. Also um umständlichere Auseinandersetzungen zu vermeiden, kehren wir zu unserem Problem von der kürzesten Linie, die zwei Punkte verbindet, zurück. Wenn man $f(x)$ aus:

$$0 = \int\limits_{x_0}^{x_1} dx\,\lambda'(x)F(x), \quad F(x) = \frac{f'(x)}{\sqrt{1+f'(x)^2}},$$

zu bestimmen hat, so untersagt es die Methode den Coefficienten von $\lambda'(x)$, also $F(x)$ Null zu setzen, sondern erst muss eben durch partielle Integration $\lambda'(x)$ durch $\lambda(x)$ ersetzt worden sein, und dann ist der Coefficient von $\lambda(x)$ gleich Null zu setzen.

Man hat in der That:

$$\int\limits_{x_0}^{x} dx\,\lambda'(x) = \lambda(x) - \lambda(x_0).$$

Nehmen wir nun für $\lambda'(x)$ etwas Willkürliches an, z. B. eine *begrenzte Variation*, welche in der Strecke $\alpha \cdots \beta$ gleich einer von Null verschiedenen Function $\gamma(x)$ ist, ausserhalb, also in den Strecken $a \cdots \alpha$, $\beta \cdots b$, Null, so hat man:

$$\lambda(x_1) - \lambda(x_0) = \int\limits_{\alpha}^{\beta} dx\,\gamma(x).$$

Für $\gamma(x)$ können wir entweder $((x-\alpha)(\beta-x))^{n+1}$, oder die Function $\frac{2}{\pi}\left\{\operatorname{arctg}\varrho(x) + \frac{\pi}{2}\right\}$ des Art. 10., oder einfach eine Constante, jedenfalls, um den Mittelwerthsatz anwenden zu können, nur eine positive Grösse setzen. Dann können die Variationen $\lambda(x_1)$, $\lambda(x_0)$ nicht, wie die Aufgabe verlangt, Null sein. Umgekehrt, wenn man $\lambda(x)$ willkürlich annimmt, und diese Grösse so bestimmt, dass sie von a bis α und von β bis b Null ist, von α bis β positiv, so ist $\lambda'(x)$ im Intervall $\alpha \cdots \beta$ entweder durchweg Null oder wechselt dort sein Zeichen, so dass auf das Integral mit $\lambda'(x)$ der Mittelwerthsatz nicht angewendet werden kann, und dass also auch nicht bewiesen werden kann, dass der Coefficient von $\delta y'$ verschwindet, was eben auch nicht der Fall ist.

Nehmen wir aber die Aufgabe der kürzesten Linie so gestellt an, dass sie die kürzeste Verbindung zwischen den zwei auf den Abscissen $x = a$, $x = b$ errichteten Ordinaten sei, so liegen die Dinge ganz anders. *Alsdann sind die Variationen $\lambda(x_1)$, $\lambda(x_0)$ ganz willkürlich, da die Endpunkte der kürzesten Linie auf den Geraden $x = x_0$, $x = x_1$ beliebig verschoben werden können.* Hier also ist auch $\lambda'(x)$ ganz willkürlich, und somit setzen wir nach der Regel der Variationsrechnung

$$F'(x) = \frac{f'(x)}{\sqrt{1+f'(x)^2}} = 0,$$

woraus folgt $f'(x) = 0$, welches demnach auch die richtige Lösung der Aufgabe ist.

Nun endlich können wir das allgemeine Problem der kürzesten Linie lösen.

Wir behandeln zuerst die Aufgabe der kürzesten rectificirbaren Linie zwischen den zwei Geraden $x = x_0$, $x = x_1$. Es muss also Null sein das Integral

$$\int_{x_0}^{x_1} dx\,\lambda'(x)\,\frac{f'(x)}{\sqrt{1+f'(x)^2}},$$

wenn $\lambda'(x)$ eine willkürliche endliche integrirbare Function, und auch $f'(x)$ eine integrirbare Function ist.

Ich bemerke zunächst, dass wenn in einem Intervall $x_0 \cdots x_1$ eine Function $\varphi(x)$ integrirbar und $\geqq 1$ ist, so ist im nämlichen Intervall $\frac{1}{\varphi(x)}$ integrirbar*). Denn es seien φ_0 und φ_u der grösste und kleinste Werth von $\varphi(x)$ in der Theilstrecke δ, so ist

$$\frac{1}{\varphi_u} - \frac{1}{\varphi_0} = \frac{\varphi_0 - \varphi_u}{\varphi_u\,\varphi_0}$$

jedenfalls nicht grösser als $\varphi_0 - \varphi_u$, und jede andere Differenz $\frac{1}{\varphi_0}, -\frac{1}{\varphi_u},$ ist *a fortiori* nicht grösser. Da also $\sqrt{1+f'(x)^2}$ integrirbar ist, so ist es auch $\frac{1}{\sqrt{1+f'(x)^2}}$. Weiter setzen wir

$$\frac{\lambda'(x)}{\sqrt{1+f'(x)^2}} = \Lambda(x).$$

Alsdann ist in

$$\int_{x_0}^{x_1} dx\,\Lambda(x) f'(x)$$

$\Lambda(x)$ nicht minder willkürlich als $\lambda'(x)$ und ist integrirbar. Dann folgt aber aus dem allgemeinen Satze Art. 12.:

$$\int f'(x)\,dx = 0$$

zwischen irgend welchen dem Intervall $x_0 \cdots x_1$ angehörigen Grenzen: d. h. $f(x)$ ist im ganzen Intervall $x_0 \cdots x_1$ constant, so dass wir hier in der That auf die horizontale Gerade fallen.

Das weitere Raisonnement ist sehr einfach. Die Gerade ist also die kürzeste Verbindungslinie zwischen den beiden Geraden $x = x_0$, $x = x_1$, also jedenfalls zwischen ihren eigenen Endpunkten, denn könnte man zwischen diesen eine kürzere Verbindung herstellen, so wäre sie es ja auch zwischen den Geraden $x = x_0$, $x = x_1$. Von der *Lage* der Punkte ist aber die Eigenschaft der kürzesten Verbindung

*) Wenn $\varphi(x) >$ als eine beliebig kleine positive Grösse ist, kann man sie stets mit einer Grösse multipliciren, dass sie $\geqq 1$ ist.

unabhängig, was aus den Symmetrieeigenschaften des Raumes folgt, also wird man durch je zwei Punkte zwei auf ihrer Verbindungslinie senkrechte Gerade legen können, und durch unsere bisherigen Betrachtungen beweisen können, dass sie die kürzeste ist. Q. e. d.

15.

Die isoperimetrischen Probleme.

Man kann noch auf einem anderen Wege bei Problemen wie das der kürzesten Linie die letzte Differentiation unter dem Integralzeichen umgehen, indem man sie nämlich als *isoperimetrische* Probleme auffasst. Bevor ich dies zeige, will ich einige Bemerkungen über die isoperimetrischen Probleme voranstellen.

Es sind Probleme der Variationsrechnung, bei denen die Willkürlichkeit der Variationen eine allgemeinere Art Beschränkung erfährt, als die im vorigen Artikel erörterte. Die isoperimetrische Beschränkung besteht darin, dass die Variationen δy, $\delta y'$, $\cdots$ einer Bedingung für ihren *ganzen* Verlauf:

$$\delta \int_a^b V dx = \int_a^b dx \left\{ \frac{\partial V}{\partial y} \delta y + \frac{\partial V}{\partial y} \delta y' \cdots \right\} = 0$$

zu genügen haben, um ein Integral $\int_a^b U dx$ zu einem Maximum oder Minimum zu machen, so dass gleichzeitig:

$$\delta \int_a^b U dx = \int_a^b dx \left\{ \frac{\partial U}{\partial y} \delta y + \frac{\partial U}{\partial y'} \delta y' + \cdots \right\} = 0$$

ist.

Die isoperimetrische Regel, dass alsdann das Integral

$$\int_a^b dx \,(U + \sigma V)$$

zu variiren und so zu behandeln ist, als ob die Variation δy unbeschränkt wäre, die Constante σ aber so bestimmt werden muss, dass $\int_a^b V dx$ den gegebenen Werth erhält, diese Regel ist daraus entstanden, dass bei der älteren vor-Euler'schen und der Euler'schen Behandlung der isoperimetrischen Probleme die Bedingungen für die Variation wirklich auf Eliminationen führten, die dann durch Einführung solcher Multiplicatoren geleistet wurden. Seit Lagrange findet man die Regel meist so begründet, dass man sagt, wegen

$\int \delta V dx = 0$ stehe es nicht in Widerspruch mit $\int \delta U dx = 0$, wenn man $\int (\delta U + \sigma \delta V)\, dx = 0$ setze, während eben σ dazu dient, nachträglich $\int V dx =$ seinem gegebenen Werth zu machen.

Wenn dies nun auch richtig scheint, so behält man doch das Gefühl, dass eine genauere Begründung der Regel nicht überflüssig ist.

Ich kenne solcher Beweise Manche, die hier und da mitgetheilt sind. Zwei weitere habe ich aber noch nicht gedruckt gesehen, und so mögen sie hier noch ihre Stelle finden. Der erstere ist die Anwendung auf den gewöhnlichen Fall eines Gedankens des Hrn. R. Reiff*), den anderen erlaube ich mir vorzulegen.

16.

Erster Beweis für die isoperimetrische Regel.

Es sei $\int_a^b U dx$ ein Maximum oder Minimum, während $\int_a^b V dx$ einen vorgeschriebenen Werth behalten soll, so dass also

$$\Big|_a^b U'' + \int_a^b dx\, U' \delta y = 0$$

ist, während die Variation δy die Bedingung:

$$\Big|_a^b V'' + \int_a^b dx\, V' \delta y = 0$$

erfüllen muss.

Wir nehmen U'', V'' an den Grenzen Null an, und setzen δy Null ausser in zwei gleichen, kleinen Strecken $\alpha_0 \cdots \beta_0$, $\alpha_1 \cdots \beta_1$, wo δy constant sei und resp. gleich δy_0 und δy_1. Aus der ersten Gleichung folgt:

$$\delta y_0 \int_{\alpha_0}^{\beta_0} dx\, U' + \delta y_1 \int_{\alpha_1}^{\beta_1} dx\, U' = 0,$$

und hieraus folgt wegen $\beta_0 - \alpha_0 = \beta_1 - \alpha_1$:

$$\delta y_0 U_0' + \delta y_1 U_1' = 0,$$

wo, wenn man $\beta_0 - \alpha_0$ unendlich klein annimmt, U_0' und U_1', die ursprünglich Mittelwerthe waren, den Werthen $x_0 = \alpha_0 = \beta_0$, $x_1 = \alpha_1 = \beta_1$ zugehören. Ebenso folgt aus der Variation $\delta \int V dx$:

$$\delta y_0 V_0' + \delta y_1 V_1' = 0,$$

was beweist, dass unsere Annahme über die Variation δy erlaubt war, da die Bedingungsgleichung erfüllt werden kann.

---

*) *Inaugural-Dissertation über den Einfluss der Capillarkräfte auf die Form der Oberfläche einer bewegten Flüssigkeit*, *Tübingen*, 1879, pag. 8.

Aus beiden Relationen folgt aber:

$$U_0' V_1' - U_1' V_0' = 0.$$

Denken wir uns nun den Punkt x_0 fest, den Punkt x_1 beweglich, den wir sodann x nennen, und setzen noch $\frac{U_0'}{V_0'} = -\sigma$, so ergiebt sich:

$$U' + \sigma V' = 0$$

entsprechend der ~~hypergeometri~~schen Regel.

Wenn die Variation $\delta \int dx\, U$ verschwinden soll, während δy die zwei Bedingungen

$$\delta \int dx\, V = 0, \quad \delta \int dx\, W = 0,$$

zu erfüllen hat, so ist der Beweis ebenso einfach.

Man setzt $\delta y = 0$, ausser in den drei gleichen, unendlich kleinen Strecken $\alpha_0 \cdots \beta_0$, $\alpha_1 \cdots \beta_1$, $\alpha_2 \cdots \beta_2$, in welchen δy die constanten Werthe δy_0, δy_1, δy_2 erhalten möge. So erhält man die drei Gleichungen:

$$\begin{aligned}
\delta y_0 U_0' + \delta y_1 U_1' + \delta y_2 U_2' &= 0, \\
\delta y_0 V_0' + \delta y_1 V_1' + \delta y_2 V_2' &= 0, \\
\delta y_0 W_0' + \delta y_1 W_1' + \delta y_2 W_2' &= 0.
\end{aligned}$$

Eliminirt man δy_0, δy_1, δy_2, nimmt die Punkte $x_0 = \alpha_0 = \beta_0$, $x_1 = \alpha_1 = \beta_1$ fest an, und den Punkt $x = \alpha_2 = \beta_2$ beweglich und lässt den Index 2 fort, so ergiebt sich wieder

$$U' + \sigma_1 V' + \sigma_2 W' = 0,$$

wo die σ_1 und σ_2 nur von den festen Punkten x_0 und x_1 abhängen, welches wieder die isoperimetrische Bedingung ist, die man so auf eine unbegrenzte Zahl Integrale ausdehnen kann.

17.

Zweiter Beweis für die isoperimetrische Regel.

Der zweite Beweis ist dieser:

Es soll sein:

$$0 = \int \delta U\, dx = \int dx \left\{ \frac{\partial U}{\partial y} \delta y + \frac{\partial U}{\partial y'} \delta y' + \cdots \right\},$$

$$0 = \int \delta V\, dx = \int dx \left\{ \frac{\partial V}{\partial y} \delta y + \frac{\partial V}{\partial y'} \delta y' + \cdots \right\},$$

wo wieder die zweite Gleichung die Bedingungsgleichung für die δy vorstellt.

Nun seien $\delta_1 y$ und $\delta_2 y$ zwei unbeschränkte Variationen, die man sich also von vornherein beliebig aussuchen kann.

Stets lässt sich in

$$\delta y = \delta_1 y + C\delta_2 y$$

C so bestimmen, dass die Bedingung erfüllt ist. Denn aus

$$0 = \int dx \left\{ \frac{\partial V}{\partial y}(\delta_1 y + C\delta_2 y) + \frac{\partial V}{\partial y'}(\delta_1 y' + C\delta_2 y') + \cdots \right\}$$

folgt:

$$C = -\frac{\int dx \left\{ \frac{\partial V}{\partial y}\,\delta_1 y + \frac{\partial V}{\partial y'}\,\delta_1 y' + \cdots \right\}}{\int dx \left\{ \frac{\partial V}{\partial y}\,\delta_2 y + \frac{\partial V}{\partial y'}\,\delta_1 y' + \cdots \right\}}.$$

Diese Form der Variation δy führen wir in $\int \delta U dx = 0$ und $\int \delta V dx = 0$ ein, und erhalten:

$$0 = \int dx \left\{ \frac{\partial U}{\partial y}\delta_1 y + \frac{\partial U}{\partial y'}\delta_1 y' + \cdots \right\} + C\int dx \left\{ \frac{\partial U}{\partial y}\delta_2 y + \frac{\partial U}{\partial y'}\delta_2 y' + \cdots \right\},$$

$$0 = \int dx \left\{ \frac{\partial V}{\partial y}\delta_1 y + \frac{\partial V}{\partial y'}\delta_1 y' + \cdots \right\} + C\int dx \left\{ \frac{\partial V}{\partial y}\delta_2 y + \frac{\partial V}{\partial y'}\delta_2 y' + \cdots \right\}.$$

Durch Elimination von C folgt:

$$0 = \int dx \left\{ \frac{\partial}{\partial y}(U + \sigma V)\delta_1 y + \frac{\partial}{\partial y'}(U + \sigma V)\delta_1 y' + \cdots \right\} = \int dx\, \delta_1 (U + \sigma V)$$

wo

$$\sigma = \frac{\int dx \left\{ \frac{\partial U}{\partial y}\,\delta_2 y + \frac{\partial U}{\partial y'}\,\delta_2 y' + \cdots \right\}}{\int dx \left\{ \frac{\partial V}{\partial y}\,\delta_2 y + \frac{\partial V}{\partial y'}\,\delta_2 y' + \cdots \right\}}$$

von $\delta_1 y$ unabhängig ist, $\delta_1 y$ aber eine unbeschränkte Variation vorstellt.

Dies scheint die beste Begründung der isoperimetrischen Regel zu sein, weil sie in keiner Beziehung unserer Verfügung über die Natur der Variationen und der Functionen U und V, ob wir sie blos integrirbar, oder stetig, oder wie sonst annehmen wollen, vorgreift. Es wird ohne irgend welche Einschränkung das relative in ein absolutes Maximums- oder Minimumsproblem übergeführt. Dagegen ist die im vorigen Art. mitgetheilte Reiff'sche Ableitung der Regel dienlich, um die isoperimetrische Beschränkung der Variation schnell in die Rechnung einzuführen, falls, wie bei physikalischen Aufgaben, die Stetigkeit der zu variirenden Functionen nicht in Frage steht.

18.

Die kürzeste Linie als isoperimetrisches Problem.

Wir sahen, dass in der Bedingung:

$$\int_{x_0}^{x_1} dx\, \lambda'(x) \frac{f'(x)}{\sqrt{1 + f'(x)^2}} = 0$$

die Willkürlichkeit von $\lambda'(x)$ durch die vorgeschriebenen Werthe $\lambda(x_1)=0$, $\lambda(x_0)=0$ beschränkt wird, so dass man nicht den Coefficienten von $\lambda'(x)$ Null setzen darf. Dies veranlasst zu prüfen, ob man die Beschränkung von $\lambda'(x)$ nicht als isoperimetrische auffassen, und die Aufgabe nach der isoperimetrischen Regel behandeln könne.

In der That muss:

$$\int_{x_0}^{x_1}\lambda'(x)dx=\lambda(x_1)-\lambda(x_0)=0$$

sein. Damit ist jedenfalls ein Theil der Beschränkung in die entsprechende Form gebracht. Nun soll noch ausserdem $\lambda(x_0)$ oder $\lambda(x_1)$ für sich Null sein. *Hieraus kann aber eine weitere Beschränkung von $\lambda'(x)$ nicht entspringen, denn, wie $\lambda'(x)$ auch beschaffen sein mag, ein Functionalwerth der zu $\lambda'(x)$ gehörigen Function $\lambda(x)$ ist stets willkürlich*, so dass also wirklich die Bedingung

$$\int_{x_0}^{x_1}\lambda'(x)dx=0$$

die ganze Beschränkung darstellt, welche die Bedingungen $\lambda(x_1)=0$, $\lambda(x_0)=0$ dem $\lambda'(x)$ auferlegen.

Nach der isoperimetrischen Regel ist daher in

$$\int_{x_0}^{x_1}dx\lambda'(x)\left\{\frac{f'(x)}{\sqrt{1+f'(x)^2}}+\sigma\right\}$$

$\lambda'(x)$ eine unbeschränkte Variation. Wenn nun auch, um hieraus $\frac{f'(x)}{\sqrt{1+f'(x)^2}}+\sigma=0$ folgern zu können, die Stetigkeit von $f'(x)$ vorausgesetzt werden muss, und für die Lösung des Problems der kürzesten Linie also nicht dieselbe Allgemeinheit wie durch den Kunstgriff des Art. 14. erreicht wird, so setzt dies Verfahren doch die Beschränkungen der allgemeinen Methode herab, indem der zweite Differentialquotient aus dem Spiele bleibt. Ich habe diese Bemerkung, weil sie unter Umständen nützlich sein kann, nicht unterdrücken wollen.

19.

Schluss der Untersuchung des Problems über die kürzeste Linie.

Unser Hauptzweck war, wie in der Einleitung angegeben, nicht die Lösung des Problems der kürzesten Linie, sondern dies Problem diente uns als leitender Faden durch das Labyrinth der Schlüsse, aus denen die Methode der Variationsrechnung zusammengesetzt ist.

Handelt es sich aber nur um den Nachweis, dass die Gerade die kürzeste Linie ist, so empfiehlt es sich den geometrischen Beweis und den analytischen möglich von einander zu trennen. Der geometrische ist offenbar schon in dem Satze enthalten, dass man der rectificirbaren Strecke sich mit einer geradlinig-polygonalen beliebig nähern kann.

Denn es sei eine andere Linie L zwischen zwei Punkten kürzer als die Gerade, so giebt es also eine an L sich anschliessende Polygonale Λ, die L beliebig nahe verläuft, und an Länge ihr beliebig nahe kommt. Diese müsste mithin bei hinreichender Annäherung von L kürzer als die Gerade werden. Nun setzen wir den elementaren Satz voraus, dass zwischen zwei Punkten die Gerade die kürzeste aus geradlinigen Strecken bestehende Linie sei. Daraus folgt dann, dass eine solche Linie L, die kürzer als die Gerade ist, nicht existiren kann.

Unter Voraussetzung dieses letzteren Satzes können wir auch die analytische Lösung des Problems der kürzesten Linie von dem Satze betreffend die unbegrenzte Annäherung geradlinig-polygonaler Linien an stetig gekrümmte Linien unabhängig machen. Allerdings gewährt dieser Satz, sowie seine weiteste Consequenz (am Schluss des Art. 3.) den grossen Vortheil, dass man durch ganz ähnliche Schlüsse, wie die am Ende des Art. 4. mitgetheilten, die Art. 7. und 9. gerügte Beschränkung der Voraussetzungen, welche durch die Methode der Variationsrechnung gefordert wird, in vielen Fällen unschädlich machen kann. Man wird es aber bei einer rein analytischen Frage vorziehen, von den Sätzen Art. 3., wenn möglich, keinen Gebrauch zu machen, weil sie auf Anschauung beruhen, theilweise casuistischer Natur sind, und folglich nur sehr mühsam rein analytisch sich beweisen lassen würden.

Bei dem Problem der kürzesten Linie können wir die Benutzung dieser Sätze wie folgt umgehen. Wir suchen zuerst die kürzeste unter allen stetigen rectificirbaren Linien, und finden nach dem Obigen rein analytisch die Gerade. Würde nun eine unstetige Linie kürzer sein, so müsste sie jedenfalls aus lauter geradlinigen Strecken bestehen, denn eine stetig gekrümmte Strecke ist ja bewiesenermassen durch eine kürzere geradlinige zu ersetzen. Nun braucht man nur noch den oben schon benutzten elementaren Satz, dass die Gerade die kürzeste geradlinig-polygonale Verbindungslinie zwischen zwei Punkten ist, womit auch das analytische Problem, wie ich glaube, auf das Befriedigendste gelöst ist.

Tübingen im März 1879.