28.

Remarques sur l'équation $\varphi(fx) = \varphi x \frac{dfx}{dx}$.

(Par Mr. *Ramus* à Copenhague.)

Dans le 1er cah. du 7me vol. de ce journal Mr. le Dr. Hill a proposé le problème de trouver la fonction φ liée par l'équation

$$\varphi(fx) = \varphi x \frac{dfx}{dx}$$

à la fonction donnée f. La solution, qui en est donnée par Mr. Th. Clausen dans le 4me cah. du même vol., ne me semble pas être exacte. En effet il pose $fx = \psi x + \psi' x$, ce qui donne, la substitution étant faite dans l'équation donnée,

$$\frac{\varphi(\psi x + \psi' x)}{\varphi x} = \frac{d\psi x}{dx} + \frac{d\psi' x}{dx},$$

d'où il veut conclure

$$\varphi(\psi x + \psi' x) = \varphi(\psi x) + \varphi(\psi' x).$$

C'est ce qui n'est pas admissible, la fonction φ en général n'étant pas la même pour $f = \psi$, $f = \psi'$ et $f = \psi + \psi'$, ensorte qu'il n'est pas permis de poser $\varphi(\psi x)$ au lieu de $\varphi x \frac{d\psi x}{dx}$, et $\varphi(\psi' x)$ au lieu de $\varphi x \frac{d\psi' x}{dx}$. Aussi l'équation $\varphi(\psi x + \psi' x) = \varphi(\psi x) + \varphi(\psi' x)$ n'est autre chose que la formule fondamentale de la multiplication, d'où il auroit dû suivre, que $\varphi(fx)$ seroit toujours afx, et φx seroit ax, résultat évidemment erroné. Cependant Mr. Clausen donne la solution suivante:

$$\varphi(fx) = x \frac{dfx}{dx},$$

contraire au résultat précédent, mais pas moins inexacte. En effet, en la combinant avec l'équation proposée, on trouve $\varphi x = x$, ce qui donne $\varphi(fx) = fx$, partant $fx = x \frac{dfx}{dx}$, d'où suit $fx = Cx$, cas spécial et le seul où la solution dont il s'agit peut être juste.

Le problème de Mr. Hill ne peut pas être complettement résolu par les forces actuelles de l'analyse; c'est ce qui sera sans doute évident par les recherches suivantes.

L'équation donnée peut être écrite en cette forme:

$$1. \quad \frac{dx}{\varphi x} = \frac{dfx}{\varphi(fx)},$$

d'où suit, en posant $\int \frac{dx}{\varphi x} = \psi x$:

$$2. \quad \psi x = \psi(fx) + C,$$

C étant la constante arbitraire. En suivant la méthode de Laplace pour l'intégration des équations aux différences variables, je pose

$$x = u_z, \quad fx = u_{z+1},$$

ce qui donne

$$3. \quad fu_z = u_{z+1}.$$

En changeant successivement z en $z+1$, $z+2$, $z+3$ etc., on trouve

$$f^n u_z = u_{z+n},$$

f^n étant la fonction f repétée n fois. En posant $z = 0$ et $n = z$, on a

$$4. \quad f^z u_0 = u_z,$$

ce qui est l'intégrale complette de l'équation (3.), u_0 étant la constante arbitraire. Si pour plus de simplicité on écrit $F(z)$ au lieu de $f^z(u_0)$, on a

$$5. \quad z = F_1(u_z) = F_1(x),$$

F_1 étant la fonction inverse de F. Cela posé on peut facilement intégrer l'équation (2.), puisque en fesant

$$\psi x = \psi u_z = y_z,$$
$$\psi(fx) = \psi u_{z+1} = y_{z+1},$$

on trouve

$$y_z = y_{z+1} + C,$$

dont l'intégrale est

$$y_z = y_0 - Cz$$

(en négligeant la fonction arbitraire périodique $\varpi(\cos 2z\pi, \sin 2z\pi)$ qu'il est permis d'y ajouter). La valeur de z, donnée par l'équation (5.), étant substituée dans cette intégrale, on trouve

$$6. \quad y_z = y_0 - CF_1(x) = \psi x$$

ou

$$y_0 - CF_1(x) = \int \frac{dx}{\varphi x},$$

ce qui donne par la différentiation

$$\varphi x = -\frac{1}{C} \cdot \frac{1}{F_1'(x)},$$

$F_1'(x)$ désignant le coefficient différentiel de $F_1(x)$. Enfin la solution présentée sous la forme la plus simple sera

$$7. \quad \varphi x = \frac{a}{F_1'(x)}$$

a étant une constante arbitraire, dont l'équation proposée elle même montre l'existence, cette équation réstant la même si au lieu de φ on écrit $a\varphi$.

La solution précédente est très facile dans le cas $fx = x^p$. L'équation (4.) devient

$$u_z = u_0 p^z = F(z),$$

ce qui donne

$$F_1(x) = \frac{\log\log x - \log\log u_0}{\log p}$$

$$F_1'(x) = \frac{1}{\log p \,.\, \log x \,.\, x}.$$

Ainsi la fonction cherchée est

$$\varphi x = a x \log x.$$

En effet cette fonction rend évidemment l'équation $\varphi x^p = \varphi x \,.\, p x^{p-1}$ identique. Il est seulement à remarquer, que dans le cas spécial $p = 1$ la fonction φ reste tout-à-fait arbitraire, l'équation proposée étant identique en elle même.

Le cas $fx = cx$ donne facilement par la méthode exposée

$$\varphi x = a x,$$

et en y posant $a = c$, on a $\varphi x = x \frac{d\,.\,cx}{dx}$, conformément à la solution particulière de Mr. Clausen.

En général on peut exprimer la fonction $F_1(x)$ au moyen de $F(x)$ par la formule d'inversion de Laplace sous la forme d'une série infinie ou par sa somme exprimée par Parseval, sous la forme d'intégrale définie; mais tout cela ne serait qu'un symbole, dans lequel la fonction cherchée φ seroit généralement aussi cachée que dans l'équation proposée elle-même, ensorte qu'elle reste généralement irréductible à des fonctions connues. Ainsi dans l'exemple particulier de $fx = a^x$ on est porté jusqu'à la transcendante inconnue $a^{a^{a^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}$, dont il a été question dans le 2. vol. de ce journal pag. 99.