Über Polar- und Nullsysteme.

Von **Theodor Schmid** in Steyr.

Der Zusammenhang des Polarsystemes einer Fläche zweiten Grades mit anderen Correlationen, sowie der Übergang des aus den letzteren abgeleiteten Nullsystemes zweiten Grades in ein solches ersten Grades ist der Gegenstand der nachfolgenden Untersuchung.

1. Das Polarsystem einer Fläche zweiten Grades sei als Vereinigung von zwei correlativen Räumen Σ und Σ^0 betrachtet. Nun werde Σ^0 durch eine „eigentliche Hermite'sche Transformation" in Σ^ω übergeführt, wobei jede der beiden Regelscharen der Fläche zweiten Grades in sich selbst übergeht. Von jeder Schar bleiben zwei Erzeugende ungeändert und bilden das Hauptvierseit der Transformation. Die eine Diagonale g dieses Vierseites trägt eine Reihe von selbstentsprechenden Punkten (darunter die Schnittpunkte S und T) und zwei selbstentsprechende Ebenen α und β (welche die Fläche bei A und B berühren); die andere Diagonale h (die polare Gerade zu g) trägt ein Büschel von selbstentsprechenden Ebenen (darunter die Berührungsebenen σ und τ) und zwei selbstentsprechende Punkte A und B.

Man kann diese Transformation als „projective Rotation" von Σ^0 um die Achse g in die neue Lage Σ^ω auffassen. Zwischen Σ und Σ^ω besteht dann eine Correlation, deren Kernflächen dem Büschel angehören, welches durch das Viereck $ASBT$ bestimmt ist.[1])

Ist π die Polarebene eines Punktes P, so entspricht ihr in Σ^ω ein Punkt P_{I}; wenn man sie aber als zu Σ^ω gehörig betrachtet, so entspricht ihr in Σ ein Punkt P_{II}. Die Verbindungsgerade von P_{I} und P_{II} — ein Wechselstrahl — liegt mit P auf einer Ebene, welche durch h geht. Dem Punkte P entspricht in Σ^ω eine Ebene π_{I}, und als Punkt von Σ^ω entspricht ihm in Σ eine Ebene π_{II}. Die Schnittgerade von π_{I} und π_{II} — ebenfalls

[1]) Rudolf Sturm, Mathematische Annalen, Band 26.

ein Wechselstrahl — geht mit π durch einen Punkt von g. Die hier vorkommende Correlation hat daher das besondere an sich, dass der tetraedrale Complex der Wechselstrahlen in die beiden linearen Complexe (Strahlengebüsche) mit den Achsen g und h zerfällt. Durch Veränderung des Drehungswinkels ω erhält man ein ganzes System von solchen Correlationen.

Wenn bei der Hermite'schen Transformation insbesondere die conjugierten Ebenen der auf g befindlichen Ebeneninvolution in einander übergehen, was man als „projective Rotation um einen Rechtwinkel" bezeichnen kann, so ergibt sich eine besondere Correlation, bei welcher die Punktkernfläche aus den Punktfeldern σ und τ, die Ebenenkernfläche aus den Ebenenbündeln S und T besteht.

Wenn endlich die Hermite'sche Transformation in die gescharte Involution mit den Achsen g und h übergeht, was als eine „projective Rotation um einen gestreckten Winkel" bezeichnet werden kann, so wird auch die Correlation involutorisch. Jeder Punkt P geht nämlich in einen Punkt Q über, in welchem P_{I} und P_{II} vereinigt sind; ebenso sind die Ebenen π_{I} und π_{II} vereinigt. Weil nun nicht jeder Punkt in seine Polarebene gelangt, so ist die besondere Correlation ein Polarsystem. Die Kernfläche desselben ist die zweite Doppelfläche des Büschels von Kernflächenpaaren der Correlationen und ist der ursprünglichen Fläche harmonisch zugeordnet,[1]) nämlich jede von ihnen ist in Bezug auf die andere ihre eigene Polarfläche.

2. Aus jeder Correlation ergibt sich ein Nullsystem zweiten Grades.[2])

Man erhält für eine Ebene π von Σ den Nullpunkt M als Schnittpunkt mit der Verbindungsgeraden des entsprechenden Punktes P_{I} von Σ^{ω} und des gewählten Hauptpunktes S.

Man erhält für einen Punkt P_{I} von Σ^{ω} die Nullebene μ als Verbindungsebene mit der Schnittgeraden der entsprechenden Ebene π von Σ und der zu S zugeordneten Hauptebene σ.

Ein anderes Nullsystem ergibt sich, indem man die Verbindungsgeraden mit T, beziehungsweise die Schnittgeraden mit τ benützt. Zwei weitere Nullsysteme ergeben die Punkte P_{II}. Alle diese Systeme sind von besonderer Art, da der Hauptpunkt auf der Hauptebene liegt. Aus den beiden Polarsystemen gehen polare Nullsysteme hervor. Besonders erwähnenswert ist jedoch, dass bei einer der obigen Correlationen die daraus abgeleiteten Nullsysteme zweiten Grades in solche ersten Grades übergehen.

[1]) Heinrich Schröter, Theorie der Kegelschnitte (2. Auflage) S. 385. Christian Wiener, Lehrbuch der darstellenden Geometrie, II. Band, S. 99.

[2]) Adolf Ameseder, Das allgemeine räumliche Nullsystem zweiten Grades. Journal für die reine und angewandte Mathematik. 97. Band (1884), Seite 73.

Aus der Correlation, für welche die Punktkernfläche aus den Punktfeldern σ und τ, die Ebenenkernfläche aus den Ebenenbündeln S und T besteht, ergeben sich bei Annahme von S oder T als Hauptpunkte zwei entgegengesetzt gewundene Nullsysteme ersten Grades.

Der Pol einer Ebene des Bündels S kommt nämlich durch Rotation auf die Schnittgerade dieser Ebene mit σ zu liegen. Die Verbindungsgerade mit S fällt daher mit der Schnittgeraden zusammen, so dass einer Ebene des Bündels S nicht nur ein Punkt, sondern ihre ganze Schnittgerade mit σ entspricht. Einem beliebigen Ebenenbündel entspricht nur ein ebenes Punktfeld, denn dem Ebenenbüschel, welches durch S geht, entspricht das Strahlenbüschel $S\sigma$, so dass die Hauptebene σ einen singulären Bestandtheil jeder Nullfläche bildet.

3. Es soll nun der besondere Fall des Rotationsellipsoides näher betrachtet werden. Die Gerade g sei die Rotationsachse der Fläche, S und T seien ihre Scheitel, σ und τ die Scheiteltangentialebenen, endlich A und B seien die absoluten Kreispunkte auf der unendlich fernen Geraden h_∞ der Kreisschnittebenen.

In der Figur (auf der nächsten Seite) sind P', P'' die Bilder des Punktes P und p_2 ist die zweite Spur seiner Polarebene π, ferner sind s_2 und t_2 die zweiten Spuren von σ und τ ....

Durch Rechtsdrehen von Σ^0 kommt P nach P_{I} und zwar bei einem gewissen Drehungswinkel ω auf seine Polarebene π, so dass P_{I} der Punktkernfläche, π dagegen der Ebenenkernfläche der Correlation angehört. Diese Kernflächen sind Rotationsflächen mit den Äquatorialradien b_p und b_e.

Nun ist für Punkte, welche auf dem Äquator der Punktkernfläche liegen,

$$b_p \,.\, b_e = b^2 \quad \text{und} \quad b_e : b_p = \cos\omega,$$

also

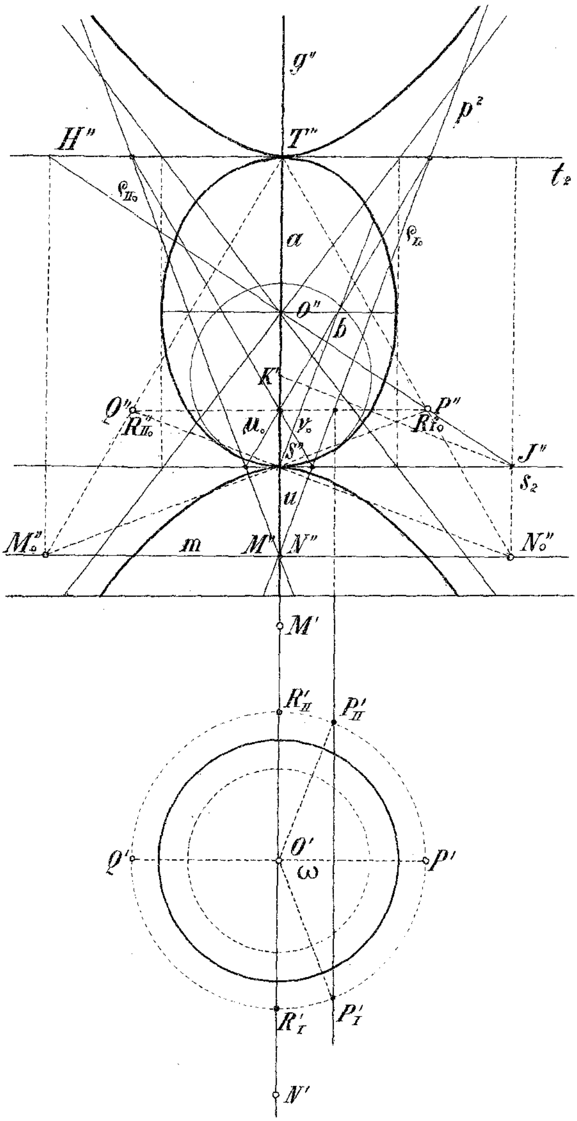
$$b_p = \frac{b}{\sqrt{\cos\omega}} \quad \text{und} \quad b_e = b \,.\, \sqrt{\cos\omega}$$

Wenn der Drehungswinkel ω ein Spitzwinkel ist, so sind die Kernflächen Ellipsoide, ist er ein Rechtwinkel, so bestehen die Kernflächen aus $\sigma\tau$ und ST, ist ω ein Stumpfwinkel, so sind die Kernflächen Hyperboloide, endlich für einen gestreckten Winkel[1]) ergibt sich als Kernfläche das harmonisch zugeordnete Hyperboloid mit den Achsen a und $b.i$.

Bei der Correlation, welche durch Drehung um einen Rechtwinkel entsteht, sollen die der Ebene π entsprechenden Punkte

---

[1]) Die Drehung um einen gestreckten Winkel hat Herr Wilhelm Fiedler eine „Wendung" genannt. XII. geometrische Mittheilung; Vierteljahrsschrift, 36. Bd., S. 85.



mit $R_{\rm I}$ und $R_{\rm II}$, die dem Punkte P entsprechenden Ebenen mit $\rho_{\rm I}$ und $\rho_{\rm II}$ bezeichnet werden. Der Complex der Wechselstrahlen reduciert sich hier auf die Congruenz gh. Je zwei Strahlen $R_{\rm I}R_{\rm II}$ und $\rho_{\rm I}\rho_{\rm II}$ sind in Bezug auf die Fläche zweiten Grades polar.

Die Punkte $R_{\rm I}$ und $R_{\rm II}$ bestimmen mit S und T ein vollständiges Vierseit,[1] dessen zwei weitere Eckpunkte M und N

[1]) In der Figur um 90° um die Achse g zurückgedreht.

(wegen der harmonischen Eigenschaft) auf dem Wechselstrahle liegen, welcher sich auf der Ebene π befindet. Der Punkt M, durch welchen die Geraden $R_I S$ und $R_{II} T$ gehen, ist der Nullpunkt der Ebene π für ein rechts-gewundenes Nullsystem ersten Grades; der Punkt N, durch welchen die Geraden $R_I T$ und $R_{II} S$ gehen, ist der Nullpunkt von π für das links-gewundene Nullsystem.

Ebenso bestimmen die Ebenen ρ_I und ρ_{II} mit σ und τ ein vollständiges Vierkant,[1]) dessen zwei weitere Ebenen μ und ν durch den Wechselstrahl gehen, der den Punkt P enthält. Die Ebene μ, welche die Schnittgeraden $\rho_{II}\sigma$ und $\rho_I\tau$ enthält, ist die Nullebene des Punktes P für das rechts-gewundene Nullsystem; die Ebene ν, welche die Schnittgeraden $\rho_I\sigma$ und $\rho_{II}\tau$ enthält, ist die Nullebene von P für das links-gewundene Nullsystem.

Man sieht hieraus, dass R_I und M, sowie ρ_I und μ (auch R_{II} und N, sowie ρ_{II} und ν) entsprechende Elemente einer perspectiven Involution sind, für welche S das Centrum und τ die Involutionsebene ist; ebenso sind R_I und N, sowie ρ_I und ν (auch R_{II} und M, sowie ρ_{II} und μ) entsprechende Elemente einer perspectiven Involution, für welche T das Centrum und σ die Involutionsebene ist. Dies gilt übrigens für jede beliebige Fläche zweiten Grades.

Wenn das Polarsystem einer Fläche zweiten Grades durch projective Rotation um einen Rechtwinkel um eine Gerade g als eigentliche Hermitesche Collineation, ferner durch perspective Involution $S\tau$ oder $T\sigma$ transformiert wird, so bildet der neue Raum mit dem ursprünglichen ein rechts- oder links-gewundenes Nullsystem ersten Grades.

Man kann nun auch die metrischen Beziehungen des erhaltenen Nullsystemes zum Rotationsellipsoide leicht auffinden. Die Gerade OP schneidet die Ebene σ in einem Punkte J; in der perspectiven Involution $T\sigma$ entspricht ihr daher eine Gerade, welche durch J parallel zu g geht, weil dem Punkte O der unendlich ferne Punkt von g entspricht. Diese Parallele muss den zu P gehörigen Punkt N_0 enthalten. Der Abstand der Nullpunkte M und N von der Achse g ist der Strecke SJ gleich. Bewegt sich der Punkt P auf der Geraden OJ, so bleibt die Polarebene π parallel, und ihre Nullpunkte bewegen sich auf Parallelen zur Achse g.

Die Nullpunkte von parallelen Ebenen liegen auf einer zur Achse parallelen Geraden — einem Durchmesser.

Die Polare von J'' in Bezug auf die Contourellipse geht durch S'' und ist zu p_2 parallel. Die Ellipse hat das Polarenbüschel S'', welches der Reihe s_2 entspricht, mit dem Krümmungskreis für den Scheitel S'' gemeinsam. Fällt man daher von

[1]) In der Figur um 90^0 um die Achse g zurückgedreht.

jedem Punkte J'' auf p_2 eine Normale, so geht die letztere durch den Mittelpunkt K'' des Krümmungskreises.

Da nun $S''J''$ dem Abstande m des Punktes M von der Achse g und Winkel $S''J''K''$ der Neigung μ der Ebene π gegen die Achse g gleich ist, so folgt aus den rechtwinkeligen Dreiecken $S''J''K''$, in welchen $S''K''$ als Radius des Krümmungskreises dem Parameter k (der halben Brennpunktsehne) der Ellipse gleich ist:

$$m \,.\, \operatorname{tg} \mu = k = \frac{b^2}{a}.$$

Wenn man das Polarsystem eines Rotationsellipsoides eine Drehung von 90° nach rechts um die Rotationsachse ausführen lässt und dann durch die perspective Involution $S\tau$ transformiert, so bildet der neue Raum mit dem ursprünglichen ein rechts-gewundenes Nullsystem ersten Grades, dessen Constante dem Parameter des Rotationsellipsoides gleich ist. Dasselbe Nullsystem ergibt sich auch durch Drehung nach links und perspective Involution $T\sigma$; dagegen ergibt die Drehung nach links und Involution $S\tau$, sowie die Drehung nach rechts und Involution $T\sigma$ ein links-gewundenes Nullsystem mit der Constanten $-k$.

Da die Ebene π den Punkt Q als Pol in Bezug auf das harmonisch zugeordnete Rotationshyperboloid (mit den Achsen a und $b.i$) hat, so sieht man sofort, dass auch für diese Fläche der obige Satz gilt, nur dass „Drehung nach rechts“ mit „Drehung nach links“ zu vertauschen ist.

Das einschalige Rotationshyperboloid hat imaginäre Scheitel und liefert daher auch imaginäre Nullsysteme.

Rückt der Scheitel T ins Unendliche, so geht das Ellipsoid in ein nach oben geöffnetes Rotationsparaboloid über; das zugeordnete Hyperboloid geht in ein congruentes nach unten geöffnetes Paraboloid über. Für das Paraboloid gehen daher die perspectiven Involutionen $S\tau$ und $T\sigma$ in die centrische, beziehungsweise planare Symmetrie (S bezw. σ) über.

Den letzten Fall (über Drehung und Spiegelung) untersuchte Herr Guido Hauck in seiner anregenden Abhandlung „Über die Beziehung des Nullsystemes und linearen Strahlencomplexes zum Polarsysteme des Rotationsparaboloides“ [Zeitschrift für Mathematik und Physik, 31. Jahrgang, 1886].