

Saggio sul gruppo delle sostituzioni fra le 27 rette della superficie di 3.^o ordine, e sui gruppi ad esso isomorfi.

(Memoria II di ERNESTO PASCAL, a Pavia.)

Lo studio delle configurazioni fra enti geometrici, si riduce naturalmente allo studio del modo con cui è formato il gruppo delle sostituzioni fra quelli enti, sostituzioni, s'intende, compatibili colle relazioni inalterabili cui debbono soddisfare quelli elementi.

La configurazione delle 27 rette di S_3 è stata studiata con metodi geometrici da varii Autori e in varii sensi, e d'altra parte è anche stato studiato il gruppo delle sostituzioni fra le 27 rette, la sua risolubilità, ecc.

Così STURM e AFFOLTER hanno principalmente studiato gli assiemi gobbi e i poligoni chiusi storti che si possono formare con quelle rette, CREMONA ha studiato gli assiemi di nove piani (enneaedri) che si possono formare coi 45 piani tritangenti, BERTINI ha studiato tutti i poliedri i cui piani non si incontrino in rette della superficie (*), e d'altra parte CLEBSCH, JORDAN, KLEIN, BURKHARDT hanno studiato la formazione del gruppo delle sostituzioni, hanno studiato la risolubilità dell'equazione corrispondente mediante funzioni iperellittiche di 1.^o ordine, ecc. (**).

(*) STURM, *Fläch. 3.^{er} Ord.*, pag. 46 e segg. *Math. Ann.*, Bd. 23, pag. 289. — AFFOLTER, *Grunert's Archiv*, Bd. 56, pag. 113. — SCHROETER, *Crelle*, tom. 62, pag. 265. — CREMONA, *Rendiconti Istituto Lomb.*, serie III, vol. 3, 1870, pag. 209. *Crelle*, tom. 68. — BERTINI, *Annali di Matematica*, tom. 12.

(**) CLEBSCH, *Abhand. der Gött. Societät*, Bd. 14 (1868-69). — JORDAN, *Substitutions*, pag. 316-368. — SYLVESTER, *Proc. London Math. Soc.*, Bd. 2, pag. 155. — KLEIN, *Journal de Liouville*, serie IV, tom. 4, pag. 169 (1887). — BURKHARDT, *Göttinger Nachrichten*, 27 Januar 1892.

In un lavoro da poco tempo da me pubblicato in questo stesso Giornale (*), io ho sviluppato i fondamenti di un metodo assai singolare col quale posso studiare contemporaneamente il gruppo di sostituzioni e la configurazione, e posso così emanciparmi completamente, per lo studio della configurazione, dai metodi geometrici adoperati dagli Autori sunnominati. In questo lavoro e negli altri che seguiranno a questo, io mi propongo di sviluppare in tutta la sua estensione il metodo di cui parlo.

E sarà opportuno indicare qui per sommi capi lo schema generale di tutto il lavoro.

Il gruppo fra le 27 rette ha una relazione semplicissima con un sottogruppo di quello delle caratteristiche di genere 3 studiato nella citata Memoria precedente.

Propriamente, se considero il sottogruppo che lascia inalterata una determinata caratteristica dispari, e nelle sostituzioni di esso sopprimo tutte le caratteristiche pari, ottengo un gruppo di sostituzioni che corrisponde esattamente a quello delle 27 rette.

Se poi dopo avere studiato questo gruppo studiamo di esso il sottogruppo che lascia inalterata una delle 27 rette, cioè un'altra caratteristica dispari, possiamo ottenere, con un procedimento assai analogo, il gruppo e la configurazione delle 16 rette della superficie di 4.^o ordine a conica doppia studiata da CLEBSCH e altri.

Se infine di quest'ultimó gruppo consideriamo ancora il sottogruppo che lascia inalterata una delle 16 rette abbiamo la configurazione delle 10 rette della superficie di 5.^o ordine a quintica doppia studiata da CAPORALI e DEL RE.

Torniamo intanto al gruppo primitivo. Colle 27 rette si sa che si possono formare 45 piani tritangenti alla superficie, 36 bisestuple gobbe, 216 quintuple gobbe di 2.^a specie, 120 coppie di triedri coniugati, ecc. ecc.

I gruppi delle sostituzioni fra i 45 piani, le 36 bisestuple, ecc. sono naturalmente isomorfi con quello delle 27 rette.

Per lo studio della configurazione dunque io posso propormi di prendere o come elementi fondamentali nelle sostituzioni, le rette, e allora potrò ottenere tutti i risultati di STURM e AFFOLTER citati avanti; oppure potrò prendere come elementi fondamentali i piani e allora avrò i citati risultati di BERTINI e altri ancora; oppure le coppie di triedri coniugati e allora potrò avere per es. fra gli altri i risultati di CREMONA sugli enneaedri. E così di seguito.

(*) *Rappresentazione geometrica delle caratteristiche, ecc.*

Poi si potrà passare alle 16 rette di S_4 . Con queste si sa che si possono formare 40 piani tritangenti, e lo studio del gruppo delle sostituzioni, prendendo per elementi fondamentali i piani, ci potrà dare i risultati ottenuti da BERZOLARI in un suo lavoro (*) in cui ha seguito l'indirizzo tracciato da BERTINI nel lavoro sulle 27 rette.

Come si vede, la via così tracciata, è ampia ed è lunga; e noi ci proponiamo qui di cominciarla a percorrere, avendo cura di sorvolare, il più rapidamente che si potrà, sui punti già calcolati da altri Autori, e fermandoci specialmente sui risultati nuovi che troveremo.

In questo lavoro io mi occupo esclusivamente del gruppo quando prendo per enti fondamentali i piani. Nei lavori seguenti assumerò per elementi successivamente gli altri che ho enumerati sopra e otterrò una serie di altri risultati nuovi.

§ 1. Sottogruppo di sostituzioni che lasciano fisso un piano tritangente.

Cominciamo col ricordare per sommi capi quali sono i principii fondamentali del metodo sviluppato nella Memoria precedente.

Consideriamo 8 punti congiunti fra loro a due a due con 28 rette. Queste 28 rette possono farsi corrispondere univocamente alle 28 caratteristiche dispari di genere 3, in maniera che 4 rette formanti un quadrilatero coi vertici in 4 degli 8 punti, ovvero 4 rette non incontrantesi a due a due in *nessuno* degli 8 punti, corrispondano rispettivamente a 4 caratteristiche dispari la cui somma sia lo zero assoluto. La somma delle caratteristiche corrispondenti a 3 rette formanti un qualunque triangolo coi vertici in tre degli 8 punti, è sempre costante ed è propriamente una caratteristica pari che, per ragioni che è inutile ora ricordare, abbiamo chiamata la caratteristica pari fondamentale della rappresentazione.

Le sostituzioni che lasciano fissa questa caratteristica pari (e che quindi mutano un triangolo in un triangolo) corrispondono semplicemente alle 8! permutazioni degli 8 punti fra loro. Una sostituzione invece del gruppo generale è sempre quella che muta 4 rette qualunque formanti una figura di quelle due specie indicate sopra, in altre quattro formanti una figura delle

(*) Annali di Matematica, tom. 13.

stesse specie. Abbiamo poi anche visto in che modo, mediante le bisestuple, si può più precisamente rappresentare una sostituzione qualunque.

Se fra le 28 rette ne escludiamo una, per es. la retta (1 2), le altre 27 possono farsi corrispondere alle 27 rette di S_3 . Le sostituzioni fra esse sono quelle del gruppo generale (sopprimendo, s'intende, le caratteristiche pari), ma che lasciano inalterata quella determinata retta esclusa, ovvero la caratteristica corrispondente. Esse dunque debbono essere sostituzioni tali da mutare 3 rette formanti con quella fissa un quadrilatero di una delle due specie indicate, in 3 altre rette godenti della stessa proprietà. Di tali terne di rette se ne possono formare 45, e ciascuna di esse corrisponderà ad uno dei 45 piani tritangenti di S_3 .

Vogliamo ora prima di tutto esaminare come è formato il gruppo di quelle sostituzioni che lasciano fisso uno dei 45 piani tritangenti. Se l'ordine del gruppo totale è $72 \cdot 6!$, quello di tal sottogruppo sarà $\frac{72 \cdot 6!}{45} = 2 \cdot 4! \cdot 4!$

Sia fisso il piano delle 3 rette (vedi fig. I) (1 3) (3 4) (4 2).

Immaginiamo prima che le 3 rette del piano debbano restar fisse, ciascuna in sè; e poi faremo permutare le 3 rette fra loro in $3!$ modi.

Le altre 24 rette si scindono in $8 + 8 + 8$ e ciascuna di queste classi di 8 rette è coordinata con una delle 3 rette del piano. In effetti ciascuna delle 3 rette fisse è incontrata, oltre che dalle due del piano, da altre 8 rette, e le 8 rette corrispondenti ad una del piano sono tutte diverse da quelle corrispondenti ad un'altra del medesimo piano. Questi tre sistemi sono rappresentati dalle tre figure (a) (b) (c) (fig. I).

Se ciascuna delle rette del piano resta fissa, allora questi sistemi restano tre sistemi separati, cioè da una retta di uno non si potrà mai passare, colle sostituzioni, alle rette dell'altro. Ma se le 3 rette del piano si permutano fra loro lasciando fisso il piano, allora evidentemente i tre sistemi si permutano fra loro. Il gruppo dunque, presi per elementi le rette, è *imprimitivo* con tre sistemi *d'imprimitività*, ed è *transitivo* in tutte le 24 rette.

È facile poi vedere che gli altri 44 piani si scindono in $32 + 12$; i primi sono quei piani che non hanno rette comuni col dato, e nella nostra rappresentazione sarebbero formati con 3 rette di ciascuno dei tre sistemi (a) (b) (c), per es. (1 5) (5 6) (6 2). I secondi sono i piani che contengono una delle 3 rette del piano dato, e nella nostra rappresentazione sono formati con tale retta unita a due altre appartenenti al *medesimo* sistema, per es. (1 5) (5 4) (4 2). Il gruppo, presi per elementi i piani, è transitivo nei 32 e nei 12 separatamente.

Supponiamo che ciascuno dei sistemi d'imprimitività resti fisso, e esaminiamo quali sono allora le sostituzioni fra le 8 rette di un sistema. Dividendo l'ordine trovato sopra, per $3!$ si ha che l'ordine del gruppo, quando i tre sistemi sono fissi dovrà essere $8 \cdot 4!$. È facile ora vedere che se tutte le singole rette di un sistema per es. (a) sono fisse, allora resteranno fisse anche tutte le singole altre rette, cioè non c'è altra sostituzione che la *unità* che lasci fissi i sistemi, e fisse le rette di *uno solo* dei sistemi. E quindi allora fra le rette di un sistema vi debbono essere $8 \cdot 4!$ sostituzioni diverse. Effettivamente se sono fisse (1 5) (1 7) (1 8) (4 6) del sistema (a), sarà fissa la retta (2 6) del sistema (c) che è l'unica contenuta nel sistema (c) e che incontra contemporaneamente tutte le quattro nominate rette del sistema (a). E così si dimostrerebbe per tutte le altre.

Chiamando dunque Γ il gruppo simmetrico fra i tre sistemi (a) (b) (c) e chiamando G il gruppo di ordine $8 \cdot 4!$ fra le 8 rette di un sistema per es. (a), si ha che il gruppo richiesto, che lascia fisso un piano, è formato con

$$F = (\Gamma, G).$$

Stabilita la sostituzione fra le 8 rette di un sistema (sostituzione di G) e quella dei tre sistemi fra loro, resta stabilita univocamente la sostituzione totale.

Possiamo passare ad esaminare come son formate le sostituzioni di G . Le 8 rette di un sistema per es. (a) si riuniscono a due a due formanti 4 coppie di rette concorrenti. Queste 4 coppie si potranno permutare fra loro in $4!$ modi, e le 2 rette di una coppia si potranno scambiare fra loro. Però è facile vedere che questi scambi nelle 4 coppie non sono tutti fra loro indipendenti, ma solo tre di essi sono indipendenti. Cioè immaginiamo che tutti i sistemi sono fissi, e che sieno anche fisse le 4 coppie:

$$(1\ 5) \quad (5\ 4)$$

$$(1\ 7) \quad (7\ 4)$$

$$(1\ 8) \quad (8\ 4)$$

$$(1\ 6) \quad (6\ 4),$$

del sistema (a), e vediamo che se si lasciano fisse rispettivamente le 2 rette di ciascuna delle tre prime coppie, allora non si potrà fare lo scambio fra le 2 rette dell'ultima coppia; giacchè le 2 rette (1 6), (4 6) rispetto per es alle tre rette (1 5) (1 7) (1 8) hanno una conformazione diversa, nel senso che se a queste tre si aggiunge (1 6) allora l'unica retta (oltre le tre del piano) che

incontri tutte quattro le dette rette è una retta del sistema (b) [la (2 3)], e se invece si aggiunge (4 6), allora l'unica retta godente della proprietà analoga è una del sistema (c) [la (2 6)]. Restando dunque fissi i sistemi, e le rette (1 5) (1 7) (1 8) è chiaro che non potranno scambiarsi fra loro le rette (1 6) (4 6).

In generale si può far vedere che se restano fisse le 4 coppie di cui si parla, le trasposizioni fra le 2 rette di una coppia, sono possibili solo in un numero pari di esse, cioè le sostituzioni dell'ultimo sottogruppo che lascia fissi i sistemi, e lascia fisse le 4 coppie di un sistema, sono tutte sostituzioni pari, e sono in numero di $8 = 2^3$, perchè abbiamo visto che si può disporre della trasposizione in 3 coppie, restando quella nella quarta, determinata. Moltiplicando 8 per $4!$ si ha poi appunto esattamente l'ordine di G già noto.

Chiamando ora g il gruppo simmetrico fra quattro elementi, [le 4 coppie nel sistema (a) o (b) o (c)], e chiamando $s_1 s'_1, s_2 s'_2, s_3 s'_3, s_4 s'_4$ le 8 rette di un sistema riunite a coppie, e infine chiamando γ il gruppo delle 8 sostituzioni:

$$\gamma = [1, (s_1 s'_1)(s_2 s'_2), (s_1 s'_1)(s_3 s'_3), (s_1 s'_1)(s_4 s'_4), (s_2 s'_2)(s_3 s'_3), (s_2 s'_2)(s_4 s'_4), (s_3 s'_3)(s_4 s'_4), (s_1 s'_1)(s_2 s'_2), (s_3 s'_3)(s_1 s'_1), (s_4 s'_4)(s_2 s'_2), (s_4 s'_4)(s_3 s'_3)], .$$

possiamo infine dire che il gruppo che lascia fisso un piano tritangente è formato con

$$F = (\Gamma, g, \gamma).$$

§ 2. Sottogruppo di sostituzioni

che lasciano fisso il complesso di due piani passanti per una retta.

Il gruppo studiato nel paragrafo precedente è transitivo nei 12 piani che hanno col dato una retta comune, quindi l'ordine del sottogruppo che lascia fisso anche uno di questi 12 piani sarà $\frac{2 \cdot 4! \cdot 4!}{12} = 4 \cdot 4!$. Tale è l'ordine, se deve restar fisso ciascuno dei due piani passanti per una retta; ma se vogliamo che solo il complesso dei due piani resti fisso, potendo poi essi permutarsi fra loro, allora l'ordine si moltiplica per 2 e diventa $8 \cdot 4!$.

Per trovare come sono formate le sostituzioni di questo gruppo possiamo, seguendo i principii del paragrafo precedente, costruire i sistemi d'imprimittività relativi al primo piano, e quelli relativi al secondo. I primi sistemi si sovrappongono parzialmente coi secondi, e allora, possiamo trovare le rette

comuni rispettivamente ai primi sistemi e ai secondi, e queste, per un noto principio della teoria delle sostituzioni, formeranno i nuovi sistemi d'imprimitività.

Sieno per es. i due piani fissi (1 3 4 2) (1 5 4 2) fig. II.

Intanto allora evidentemente l'asse dei due piani dovendo restar fisso, si ha che il sistema di rette corrispondente a quest'asse (cioè l'assieme delle coppie di rette giacenti nel medesimo piano coll'asse) resterà fisso. Si ha un sistema composto di 6 rette [sistema (a)] che non potranno che solo permutarsi fra loro. Gli altri sistemi poi si sovrappongono in maniera da dar luogo a 4 nuovi sistemi d'imprimitività rappresentati rispettivamente dalle figure (b) (c) (d) (e).

Ora dobbiamo esaminare in che modo possiamo ordinare le sostituzioni del gruppo; e vediamo prima quali sono le permutazioni possibili fra i quattro sistemi (b) (c) (d) (e).

Dalla considerazione delle figure si vede subito che il sistema (b) insieme al sistema (c) formano il secondo sistema della figura precedente, cioè quella che dà la divisione in sistemi corrispondente al piano (1 3 4 2); e così i due sistemi (d) (e) danno il terzo sistema della figura precedente. Inoltre se si stabilisse analogamente la divisione in sistemi corrispondenti al piano (1 5 4 2) si troverebbe che i sistemi (b) (e) verrebbero ad unirsi e formare un sistema solo, e così i sistemi (c) (d).

Di qui ne ricaviamo che se i due piani debbono restar fissi ciascuno in sè, allora le permutazioni fra gli elementi *b c d e* dovranno essere tali che restino inalterate le funzioni:

$$\begin{aligned}\varphi(b + c, d + e) \\ \varphi(b + e, c + d),\end{aligned}$$

dove φ sia il simbolo di una funzione simmetrica dei *due* argomenti; e se poi, come vogliamo, è solo il complesso dei due piani che debba restar fisso, allora le sostituzioni dovranno essere quelle corrispondenti alla funzione

$$\varphi(b + c, d + e) + \varphi(b + e, c + d).$$

Chiamiamo Γ il gruppo di sostituzioni fra questi 4 elementi *b, c, d, e*. Evidentemente allora esso è transitivo, e inoltre se uno degli elementi, per es. *b* resta fisso, allora i due altri elementi *c, e* potranno solo permutarsi fra loro mentre *d* deve restar fisso. Quindi l'ordine di Γ è $4 \cdot 2 = 8$.

Tali 8 sostituzioni sono:

$$\Gamma' = [1, (ce), (bd), (bd)(ce), (bc)(ed), (cdeb), (be)(dc), (cbcd)].$$

Se poi ciascuno dei due piani fondamentali deve restar fisso in sè, allora le sostituzioni di Γ' sono solo quattro e sono tutte le sostituzioni *pari* comprese fra quelle di sopra.

Immaginiamo ora che tutti i sistemi debbano restar fissi.

Allora si ha un sottogruppo di ordine $\frac{8 \cdot 4!}{8} = 4!$. Io dico che allora, per stabilire una sostituzione, basterà stabilire una permutazione qualunque delle 4 rette di un sistema, restando allora univocamente determinata la permutazione di tutte le rimanenti rette.

Effettivamente si può far vedere che esiste una corrispondenza univoca fra le rette di un sistema e quelle di un altro, e inoltre fra le coppie di rette di un sistema, e le 6 rette del primo sistema (*a*); quindi allora ne concludiamo che se restano fisse le 4 rette di un sistema (*b*) (*c*) (*d*) (*e*), resteranno fisse tutte le rette, cioè fra le 4 rette debbono esserci $4!$ sostituzioni diverse, e quindi tutte le possibili permutazioni.

Il gruppo dunque che lascia fissi i sistemi è isomorfo col gruppo g (vedi paragrafo precedente) simmetrico di 4 elementi.

Perciò chiamando F' il gruppo totale richiesto si ha che esso potrà esprimersi con

$$F' = (\Gamma', g).$$

Resta a far vedere qual'è la corrispondenza di cui si è parlato. Se i sistemi sono fissi, allora sarà fissa la retta (1 3) e quindi per es. se (3 6) del sistema (*d*) diventa (3 8), allora (2 6) del sistema (*e*) diventerà (2 8), perchè le 3 rette (1 3) (3 6) (2 6) formano un piano come anche (1 3) (3 8) (2 8). La corrispondenza è propriamente quella data dal seguente quadro:

sistemi	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>e</i>
	56	78	36	26
	58	67	38	28
	57	86	37	27
	23	14	25	35

In quanto poi alle 6 rette, si vede che esse si riuniscono in 3 coppie tali che

ciascuna coppia risulta di rette che stanno in un medesimo piano colla retta (2 4). Ognuna di queste coppie corrisponde alle tre scissioni in $2 + 2$ che si possono effettuare delle 4 rette di un sistema per es. (d).

Propriamente:

la coppia 1 7 — 7 4 corrisponde alla scissione 3 6 — 3 8; 3 7 — 2 5

„ 1 8 — 8 4 „ „ 3 6 — 3 7; 3 8 — 2 5

„ 1 6 — 6 4 „ „ 3 6 — 2 5; 3 7 — 3 8,

nel senso che le rette 1 7 — 7 4 sono le sole fra le sei che colla coppia 3 6 — 3 8 ovvero con 3 7 — 2 5 formano terne *pari*, tutte le altre formando terne *dispari* (vedi Mem. precedente, citata).

Stabilita così la permutazione fra le 3 coppie del sistema (a) resta a vedere quando si permutano o no le 2 rette di una stessa coppia. Ora è facile vedere che le 2 rette per es. (1 7) — (7 4) di una coppia si comportano diversamente rispetto a (3 6) o (3 8) che rispetto a (3 7) o (2 5) nel senso che le terne

$$2\ 4 - 1\ 7 - 3\ 6$$

$$2\ 4 - 1\ 7 - 3\ 8,$$

sono dispari mentre le terne

$$2\ 4 - 4\ 7 - 3\ 6$$

$$2\ 4 - 4\ 7 - 3\ 8,$$

sono pari; e viceversa si ottiene prendendo (3 7) o (2 5).

Inoltre se invece di prendere (3 6) o (3 8) prendiamo le rette corrispondenti negli altri sistemi, abbiamo una relazione analoga pel sistema (b) ma una relazione reciproca per gli altri due sistemi (c) (e).

Di qui ricaviamo che le 2 rette di una coppia di (a) si invertono fra loro: 1.^o quando si invertono fra loro le 2 coppie della scissione dei quattro elementi di un sistema (b) (c) (d) (e) in $2 + 2$; 2.^o quando la coppia di sistemi (b) (d) si inverte colla coppia (c) (e), cioè quando si operano le quattro ultime sostituzioni di Γ' .

Osserviamo infine che ognuna delle 4 rette

$$(1\ 3),\ (3\ 4),\ (1\ 5),\ (5\ 4),$$

dei due piani fondamentali, è coordinata rispettivamente alle coppie di sistemi

$$d + e, \quad b + c, \quad b + e, \quad c + d,$$

per modo che esse si permuteranno secondochè vengono a scambiarsi fra loro queste coppie.

Riassumendo, abbiamo: il gruppo F' non è transitivo in tutte le 22 rette restanti, ma le scinde in $6 + 16$, essendoci la transitività in ciascuno di questi due gruppi. I 43 piani restanti si scindono in $3 + 16 + 24$.

I primi tre passano tutti per la retta fissa (2 4); i secondi 16 passano a quattro a quattro per le altre 4 rette dei due piani fissi, e quindi c'è la transitività fra tutti questi 16, con quattro sistemi d'imprimitività. Gli ultimi 24 non hanno nessuna retta comune coi due piani.

Uno dei 16 è formato con una retta di un sistema insieme ad una retta di un altro accoppiando però i 4 sistemi solo in 4 modi:

$$d + e, \quad b + c, \quad b + e, \quad c + d.$$

Uno dei 24 ultimi piani è formato con una del sistema (a) e con due altre rette di due degli altri sistemi, accoppiando però questi ultimi solo nei due modi rimanenti.

$$b + d, \quad c + e.$$

Si può notare che: *il sottogruppo che lascia fisse le 5 rette di due piani concorrenti è isomorfo col gruppo simmetrico di quattro elementi.*

§ 3. Sottogruppo di sostituzioni

che lasciano fisso il complesso di due piani non aventi rette comuni.

Gruppo del triedro di 3.^a specie.

Per trovare le sostituzioni di questo sottogruppo adopereremo lo stesso metodo del paragrafo precedente, vedremo cioè in che modo si sovrappongono i sistemi d'imprimitività relativi al primo piano e relativi al secondo. L'ordine del gruppo sarà $2 \frac{2 \cdot 4! \cdot 4!}{32} = 2 \cdot 3! \cdot 3!$

Sieno (1 3 4 2) (1 5 6 2) i due piani fondamentali (fig. III). Operando la sovrapposizione dei primi sistemi coi secondi, si ottengono 3 rette (3 6) (4 5) (7 8) formanti un sistema a sè e non permutabile cogli altri, e poi altri sei sistemi d'imprimitività permutabili fra loro, ciascuno composto di 3 rette. Sono essi rappresentati dalle figure (a) (b) (c) (d) (e) (f). Questa separazione di 3 rette formanti un piano, da tutte le altre rimanenti, corrisponde al fatto noto che due piani non aventi rette comuni individuano un terzo piano, e le 9 rette

dei tre piani formano in una maniera sola altri tre piani diversi dai primi, formanti un triedro che si chiama *conjugato* al primo, e nel complesso dei sei piani si ha una cosiddetta *coppia di triedri coniugati*.

In questo paragrafo quindi noi possiamo studiare contemporaneamente varii gruppi, cioè:

1) Quello che lascia fissi ciascuno dei tre piani del triedro. Esso avrà per ordine $3! 3!$.

2) Quello che lascia fisso solo il complesso dei due piani dati. Esso ha per ordine $2 \cdot 3! 3!$.

3) Quello che lascia fisso il complesso dei tre piani del triedro. Esso ha per ordine $3! 3! 3!$.

4) E finalmente quello che lascia fisso il complesso dei due triedri coniugati, potendo scambiare un triedro nell'altro, cioè un piano dell'uno in un piano dell'altro, e allora per conseguenza *tutti* i piani del primo in tutti quelli dell'altro. Esso ha per ordine $2 \cdot 3! 3! 3!$.

Il primo è sottogruppo di tutti i seguenti, e mediante esso poi potremo facilmente costruire gli altri.

Troviamo prima il gruppo fra i sei sistemi; considerando come si riuniscono i sistemi a due a due per costituire quelli relativi solo a ciascuno dei tre piani del triedro, si ha, analogamente come nel paragrafo precedente, che tale gruppo Γ'' sarà quello corrispondente alle tre funzioni:

$$\varphi(a + e, b + f, c + d)$$

$$\varphi(a + f, b + d, c + e)$$

$$\varphi(a + d, b + e, c + f).$$

Per il gruppo 2) il Γ'' corrispondente è poi quello delle due funzioni rappresentate dalla somma delle due prime di queste, e dalla terza; e per 3) il Γ'' corrispondente è quello della funzione unica rappresentata dalla somma di tutte tre le φ di sopra.

È facile vedere che il gruppo Γ'' è di ordine $3!$, perchè intanto esso è transitivo nei sei elementi, e d'altra parte, se uno di questi elementi è fisso, sono tutti fissi.

Per completare questa ricerca possiamo far vedere quale sarà il Γ'' nel caso del gruppo 4) di sopra.

Il triedro coniugato al dato è quello dei tre piani:

$$(1\ 5\ 4\ 2), \quad (1\ 3\ 6\ 2), \quad [(3\ 4)(5\ 6)(7\ 8)].$$

Rispetto a questi, i sei sistemi si accoppiano diversamente che prima, cioè è facile vedere, che si accoppiano rispettivamente in

$$(c + d, a + f, b + e)$$

$$(c + f, a + e, b + d)$$

$$(c + e, a + d, b + f).$$

Quindi il gruppo Γ corrispondente deve anche trasformare quella prima scissione in questa seconda; esso si riduce al gruppo della funzione

$$\varphi(a + b + c) + \varphi(d + e + f),$$

di ordine $2 \cdot 3! \cdot 3!$. Tal gruppo è imprimitivo con due sistemi d'imprimitività, ciascuno di tre elementi.

Tornando ora al gruppo 1) e al corrispondente Γ' si ha che il suo sottogruppo che lascia fissi i sistemi, sarà di ordine $\frac{3! \cdot 3!}{3!} = 3!$. Ora noi faremo anche qui vedere che queste $3!$ sostituzioni non sono che le permutazioni possibili fra i tre elementi di un medesimo sistema, e quindi, chiamando F'' il gruppo 1) e g' il gruppo simmetrico di tre elementi si ha la formola

$$F' = (\Gamma'', g').$$

L'asserzione di sopra si dimostra subito facendo vedere che si può stabilire anche qui una corrispondenza univoca fra le rette di un sistema e quelle di ogni altro, in modo che se sono fisse quelle di un sistema sono fisse tutte, e quindi tutte le $3!$ sostituzioni rimanenti debbono operare permutazioni diverse fra i tre elementi di uno stesso sistema, e perciò non possono corrispondere ad altro che alle $3!$ sostituzioni possibili fra i tre elementi.

Si vede subito che se (1 7) diventa (1 8) allora (essendo fisse le rette dei piani dati, perchè sono fissi i sei sistemi) (2 8) deve diventare (2 7) perchè il piano (1 7 8 2) deve diventare (1 8 7 2), e così di seguito.

Propriamente la corrispondenza sarà espressa dal seguente quadro:

sistemi	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>e</i>	<i>f</i>
	28	67	47	17	38	58
	27	68	48	18	37	57
	35	14	16	46	25	23

Per stabilire questa corrispondenza si può anche osservare più facilmente che ogni retta di un sistema forma sempre colle due di un altro ad essa *non* corrispondenti, e solo con queste, una terna pari.

Il gruppo F'' è transitivo nelle rimanenti 18 rette non appartenenti al triedro. In quanto poi agli altri 42 piani esso li scinde in:

3 piani che sono i coniugati del triedro

9 piani contenenti una retta del piano (1 3 4 2)

9 piani " " " (1 5 6 2)

9 piani " " " [(2 6) (4 5) (7 8)]

12 piani non contenenti nessuna delle rette del triedro.

Uno dei 9 piani contiene una retta di un sistema a, b, c , e una di un sistema d, e, f ; invece uno dei 12 piani contiene 3 rette, una di a , una di b e una di c ovvero una di d una di e e una di f .

Si può notare che *il sottogruppo che lascia fisse le singole 9 rette di una coppia di triedri coniugati, è isomorfo col gruppo simmetrico di tre elementi.*

§ 4. Triedri di varie specie.

Il prof. BERTINI si è occupato in un lavoro già citato, di classificare tutti i diversi aggruppamenti di piani non aventi a due a due nessuna retta della superficie in comune (poliedri). Esistono, come si sa, tre specie di triedri; vediamo come possiamo ritrovare questo coi principii stabiliti avanti.

Se consideriamo una coppia di piani non aventi rette comuni [per es. (1 3 4 2) (1 5 6 2)], dallo studio fatto sopra del gruppo di sostituzioni che lasciano fissi quei due piani, si ha che tutti gli altri piani non aventi con quei due, rette comuni si scindono in $1 + 9 + 12$, e in ciascuna di queste classi ci è separatamente la transitività, senza però poter passare da un piano di una classe ad uno di un'altra. Ne vengono dunque tre specie di triedri distinti, che sono rispettivamente quelli chiamati da BERTINI, di 3.^a, di 2.^a, di 1.^a specie.

Di 3.^a specie ve ne sono $\frac{32 \cdot 45}{2 \cdot 3} = 240$, di 2.^a ve ne sono $\frac{32 \cdot 45 \cdot 9}{2 \cdot 3} = 2160$,
e di 1.^a ve ne sono $\frac{32 \cdot 45 \cdot 12}{2 \cdot 3} = 2880$.

Le figure IV, V, VI rappresentano tre triedri rispettivamente di 1.^a 2.^a 3.^a specie.

Possiamo qui fare alcune considerazioni generali sui triedri.

Sappiamo, e del resto lo vediamo dai risultati ora citati del § 3, che, dati due piani non aventi rette comuni, è individuato un terzo piano che si chiama coniugato ai due primi; i tre piani formano un triedro di 3.^a specie. Possiamo subito cominciare a vedere con quante figure diverse possono rappresentarsi le 9 rette di un triedro di 3.^a specie. Basta immaginare tutte le possibili figure di coppie di piani; se ne ottengono allora solo tre che sono quelle rappresentate dalle tre parti della fig. VII.

In ognuna di quelle figure è facile riconoscere che con quelle 9 rette si possono formare due triedri di 3.^a specie; per es. colla prima di quelle figure si possono formare i piani

$$(1\ 3\ 4\ 2) \quad (1\ 5\ 6\ 2) \quad [(3\ 6)(4\ 5)(7\ 8)],$$

ovvero gli altri tre

$$(1\ 3\ 6\ 2) \quad (1\ 5\ 4\ 2) \quad [(3\ 4)(5\ 6)(7\ 8)].$$

Dunque ogni triedro di 3.^a specie ne ha uno coniugato, come si sa.

Di figure del 1.^o tipo se ne possono formare 90, del 2.^o tipo se ne possono formare 20, e del terzo 10 come è facile calcolare. Si hanno dunque in tutto appunto le 120 coppie di triedri coniugati.

Potremmo dimostrare qui in un modo molto facile, cioè colla semplice considerazione delle figure disegnate, tutti i teoremi noti sui triedri di 3.^a specie; cioè per es. che una terna gobba di rette individua una coppia di triedri; che due piani aventi una retta comune appartengono a quattro diverse coppie di triedri, ecc. ecc. Ma per ora tralasciamo di far questo.

Considerando le tre figure IV, V, VI si può vedere subito che la differenza caratteristica fra i tre triedri, è, come si sa, che il 1.^o non ha nessun piano coniugato (piano formato con una retta di ciascuno dei tre piani del triedro), il 2.^o ne ha uno e il 3.^o ne ha tre (BERTINI).

Definiamo come *complementare* un triedro ottenuto da un dato costruendo i piani coniugati alle coppie di piani contenute nel triedro dato. Evidentemente il *complementare* di un triedro di 3.^a è sè stesso. Costruiamo poi il *complementare* di un triedro di 2.^a e propriamente di quello dato per es. dalla fig. V. Si vede subito che risulta precisamente il terzo tipo della fig. VII, e

quindi ne ricaviamo: che il complementare di un triedro di 2.^a specie è un triedro di 3.^a specie. Paragonando poi le due figure si vede anche che: il complementare e il dato hanno tre rette di comune formanti un piano; sono le tre rette (3 4) (5 6) (7 8). Si stabilisce dunque una corrispondenza fra un triedro di 2.^a e uno di 3.^a (BERTINI, pag. 22).

Analogamente se andiamo a costruire il complementare di un triedro di 1.^a specie per es. di quello della fig. IV, troviamo la fig. VIII, che è un triedro anche di 1.^a specie, non possedendo nessun piano coniugato; se di questo troviamo daccapo il complementare abbiamo la fig. IX che rappresenta anche un triedro di 1.^a specie, e se di questo torniamo a prendere il complementare si ha il triedro da cui siamo partiti. Si hanno tre triedri di 1.^a specie che esauriscono (come si vede dalle figure) tutte le 27 rette (BERTINI, pag. 24).

§ 5. Gruppo di sostituzioni che lasciano fisso un triedro di 1.^a specie.

Nel § 2 studiando il gruppo che lascia fisso il complesso di due piani che non si incontrano, siamo in fondo riusciti a studiare il gruppo che lascia fisso un triedro di 3.^a specie. Ora vogliamo fare lo stesso per un triedro di 1.^a e 2.^a specie, per poi poter passare a considerare tutte le diverse specie di tetraedri.

Incominceremo col servirci dell'ultimo teorema del paragrafo precedente; lasciando fisso il triedro dato (fig. IV) resteranno fissi, ciascuno in sè, gli altri due triedri consecutivamente complementari, rappresentati dalle fig. VIII, IX. Dunque le restanti 18 rette si scindono in $9 + 9$, e in ciascuna di queste classi ci sarà la transitività.

Studiando le tre figure diseguate si riconosce facilmente questo fatto singolare, che cioè ogni retta del primo si può univocamente far corrispondere ad una retta del secondo e a una del terzo, in modo che le tre rette formino poi un piano. Così per es. la retta (1 3) corrisponderà alla retta (2 7) di fig. VIII e (3 7) di fig. IX e solo a queste. Basterà quindi semplicemente studiare in che maniera si possono permutare fra loro le 9 rette del primo triedro, perchè allora necessariamente si permuteranno analogamente le corrispondenti rette del 2.º triedro fra loro, e quelle del 3.º fra loro. Da questo punto di vista la considerazione di queste sostituzioni diventa assai semplice, e basterà solo fissare in un quadro la corrispondenza indicata. Essa è, come si scorge dalle

figure, la seguente:

1.° triedro	2.° triedro	3.° triedro
13	27	37
34	76	58
24	16	46
15	53	32
56	47	38
26	68	81
17	78	82
75	36	48
52	54	41

Ricaviamo intanto questo risultato:

« Se le 9 rette del 1.° triedro restano fisse allora resteranno fisse tutte le rette. »

Le 9 rette di un triedro di 1.^a specie (sei solo di esse sono indipendenti) possono cioè servire a rappresentare una sostituzione qualunque fra le 27 rette nella stessa maniera con cui nella Memoria precedente abbiamo fatto vedere che i *sistemi di ARONHOLD* (corrispondenti alle sestuple) possono individuare una sostituzione. In altri termini, come altra volta abbiamo fatto vedere che una sostituzione del gruppo delle 27 rette si può rappresentare assegnando arbitrariamente il passaggio delle 6 rette di una sestupla alle 6 rette di un'altra (*), così ora potremmo dire che essa può anche rappresentarsi diversamente, fissando cioè il passaggio fra 6 rette indipendenti di un triedro

(*) *Rappresentaz. geometrica, ecc. Annali di Matem., tom. 20, § 23.*

di 1.^a specie alle 6 analoghe di un altro qualunque triedro di 1.^a specie. Cioè una sostituzione qualunque può considerarsi come il risultato della combinazione di una sostituzione che lascia fissa la sestupla, permutando fra loro le sue sei rette (e di tali sostituzioni ve ne sono 6!) con una sostituzione che muta una sestupla in un'altra qualunque fra le 72. Si hanno quindi in tutto $72 \cdot 6!$ sostituzioni. Ora invece ritroviamo che la medesima sostituzione può ritenersi come il risultato della combinazione di una che lascia fisso un triedro di 1.^a specie (troveremo ora che ve ne sono 18) con un'altra di natura diversa che muta quel triedro in un altro simile. Si ottengono allora $2880 \cdot 18$ sostituzioni diverse e questo numero coincide con quello di sopra.

Rispetto ai triedri di 2.^a o di 3.^a specie non si potrebbe avere qualcosa di analogo.

Resta ora ad esaminare come si possono permutare fra loro le 9 rette della fig. IV, cioè qual'è il gruppo fra queste 9 rette. Da una di esse potrò passare ad un'altra qualunque, e quindi l'ordine sarà divisibile per 9. Se poi una delle rette resta fissa per es. la retta (1 3), allora le due rette (2 5) (2 6) che sono le sole degli altri piani che incontrano (1 3) possono solo permutarsi fra loro; e se queste ultime sono anche fisse, allora saranno fisse (5 6) e (5 7) e quindi poi saranno fisse tutte le altre. L'ordine è quindi $9 \cdot 2 = 18$, e le sostituzioni possiamo dire che sono quelle appartenenti alla funzione

$$\begin{aligned} & \varphi [(1\ 3) + (2\ 6),\ (2\ 4) + (1\ 5),\ (3\ 4) + (5\ 6)] \\ & + \varphi [(2\ 6) + (1\ 7),\ (1\ 5) + (5\ 7),\ (5\ 6) + (2\ 5)] \\ & + \varphi [(1\ 7) + (2\ 4),\ (5\ 7) + (3\ 4),\ (2\ 5) + (1\ 3)], \end{aligned}$$

dove φ sia il simbolo di una funzione simmetrica. Si capisce subito la formazione di questa funzione; sono accoppiate le rette di un piano con quelle di un altro piano, in modo che ogni coppia risulti di rette concorrenti, e ogni termine φ corrisponde ad una delle tre coppie di piani; si può dire anche diversamente, che, cioè, ogni termine φ corrisponde ad uno dei tre piani della fig. VIII.

Resta ora a vedere come si distribuiscono i piani rimanenti rispetto a quelli di un triedro di 1.^a specie, e consideriamo solo i piani che non passano per nessuna delle 9 rette del triedro dato. Basta allora considerare tutti i piani che possono formarsi colle rette delle due fig. VIII, IX.

Si vede subito che ogni retta della fig. IX forma un piano con una coppia di rette della fig. VIII e con una sola; così per es. la retta (2 3) forma un

piano colle due rette (3 6) (6 1); quindi abbiamo 9 piani evidentemente trasformabili gli uni negli altri, perchè fra le 9 rette della fig. IX ci è la transitività semplice. Oltre poi i piani dei due triedri VIII, IX non esistono altri piani non passanti per una retta del triedro dato.

Quindi ne concludiamo: i piani rimanenti sono 15 e si scindono in $3 + 3 + 9$; ognuno degli ultimi 9 è coordinato con una delle 9 rette della fig. IX, e quindi, per la corrispondenza univoca stabilita fra le rette di IV e di IX, ognuno di tali piani è coordinato con una delle rette del triedro dato; quindi gli ultimi 9 piani si dividono in $3 + 3 + 3$ corrispondentemente alle tre facce di questo.

Possiamo stabilire anche questi teoremi:

1.° Non esistono piani aventi *una sola* retta comune col triedro complementare di uno di 1.^a specie, e contemporaneamente nessuna retta comune col dato.

2.° Esistono solo 3 piani che non hanno alcuna retta comune nè col triedro dato di 1.^a specie, nè col suo complementare.

3.° Esistono 9 piani che non hanno nessuna retta comune col triedro dato e ne hanno due col complementare.

§ 6. Gruppo di sostituzioni per un triedro di 2.^a specie.

Il triedro complementare ad uno di 2.^a specie, è, come sappiamo, un triedro di 3.^a specie avente tre rette comuni col dato.

Il gruppo dunque che lascia fisso il triedro della fig. V, scinde le altre 18 rette nelle 6 della fig. X e nelle 12 della fig. XI.

Le sostituzioni lasceranno evidentemente inalterato l'unico piano coniugato [(3 4) (5 6) (7 8)] del triedro dato, e quindi scambieranno fra loro queste tre rette. Le altre tre rette della fig. V si possono distinguere in $3 + 3$ in modo che le prime tre rappresentano una terna gobba [le tre rette partenti dal punto 1, (1 3) (1 5) (1 7)] e le altre tre un'altra terna gobba le cui rette incontrano tutte quelle della prima [le tre rette partenti dal punto 2, (2 4) (2 6) (2 8)]. Ad una coppia di rette di una terna corrispondono due rette della fig. XI, per es. alla coppia (1 3) (1 5) corrispondono le due rette (3 5) (2 7) che sono le sole fra tutte le 12 le quali incontrino contemporaneamente quelle due. È chiaro che se una retta di una terna si muta in una dell'altra, le

due terne si invertono completamente, cioè fra le 6 rette delle due terne si hanno due sistemi d'imprimitività, e corrispondentemente le 12 rette di XI si scindono in $6 + 6$ in due sistemi d'imprimitività, che sono distinti colle rette piene o tratteggiate. Possiamo dire poi che ognuna di queste due sestuple si divide in tre coppie corrispondenti univocamente alle tre coppie di rette di una terna, o, ciò che è lo stesso, alle rette della terna stessa (considerando ogni volta anzichè la coppia di rette, la terza retta esclusa da quella coppia).

Possiamo riunire in un quadro questa corrispondenza, e allora abbiamo che secondochè si permutano le sei rette di V si permuteranno corrispondentemente le sei coppie di XI.

13	23 — 57
15	25 — 37
17	27 — 35
24	14 — 68
26	16 — 48
28	18 — 46

Se sono fisse le rette di V resteranno fisse le coppie, ma potranno ancora permutarsi fra loro le due rette di una coppia. Però notiamo che permutando o no le due rette di una delle coppie, bisogna fare lo stesso in tutte le altre coppie, perchè si riconosce subito che, paragonando due coppie fra loro, una retta dell'una incontra una sola retta dell'altra. Resta ora a fissare che relazione c'è fra le sei rette di V e le altre sei di X. Una coppia formata colla retta di una terna e con una dell'altra corrisponde ad una sola retta di X, così per es. alla coppia (1 3) (2 6) corrisponde l'unica retta (3 6) che incontra quelle due. Quindi possiamo fissare questo altro quadro per stabilire il movimento delle sei rette di X.

13 — 26	36
13 — 28	38
15 — 24	54
15 — 28	58
17 — 24	74
17 — 26	76

In quanto poi alle due terne di V esse si possono muovere con $6 \cdot 2$ sostituzioni, perchè una delle 6 rette può occupare il posto di ogni altra, e se una, per es. (1 3), è fissa, allora sono fisse le due terne, e le altre rette di quella terna possono solo permutarsi fra loro, restando allora determinate le altre dell'altra terna. Siccome poi si possono scambiare ancora gli elementi delle 6 coppie di XI, così si hanno in tutto $6 \cdot 2 \cdot 2 = 24$ sostituzioni.

Si può notare questo fatto singolare, che se si vogliono lasciar fisse le singole rette di un triedro di 3.^a specie (§ 3), allora si conserva ancora una arbitrarietà come 3!, cioè esistono 3! sostituzioni che lasciano fisse le singole rette di un triedro di 3.^a specie, mentre esistono 2! sostituzioni che lasciano fisse le singole rette di un triedro di 2.^a specie, e esiste 1! sostituzione che lascia fisse le singole rette di un triedro di 1.^a specie (§ 5).

Anche qui possiamo passare ad esaminare come si scindono in classi di transitività tutti i piani che non hanno rette comuni col triedro. Si vede che colle 6 rette di X si possono formare due piani, con quelle sole di XI non si può formare alcun piano, e infine ogni retta di X forma piano con due coppie di rette di XI, per es. la retta (3 6) forma piano con (2 3) (1 6) e con (4 8) (5 7) e solo con queste. Si hanno dunque soli 14 piani non aventi rette comuni col triedro; questi 14 piani si scindono in 2 + 12. Quei 12 piani si riuniscono in coppie, e ogni coppia corrisponde ad una delle sei rette di X. Quindi, essendoci la transitività fra le sei rette di X, ci sarà la transitività fra le sei coppie; siccome poi lo scambio dei due piani di una coppia corrisponde (come si vede da uno dei quadri segnati sopra) allo scambio fra loro delle due rette di una delle sei coppie in cui si scindono le 12 rette della fig. XI, così tale scambio è possibile, e quindi si ricava che fra tutti i 12 piani ci è la transitività semplice.

§ 7. Tetraedri di quattro specie.

Se a ciascuno dei triedri considerati sopra, aggiungiamo un altro piano esterno, abbiamo un tetraedro. In questa maniera possiamo venire a fare qui l'analisi e la distinzione di tutti i tetraedri, e giungeremo agli stessi risultati ottenuti da BERTINI con metodo diverso.

Cominciando da un triedro di 3.^a specie, noi abbiamo visto (§ 3) che i piani esterni sono 12 e formano tutti una classe di elementi congiunti fra loro transitivamente. Aggiungendo allora uno di tali piani per es. (1 7 5 2) si ha un tetraedro; dunque possiamo dire che *esiste una sola specie di tetraedri contenenti un triedro di 3.^a specie*. Esso è rappresentato dalla fig. XII, e corrisponde a quel tetraedro da BERTINI classificato per 2.º (*). Considerando la fig. XII si può subito ricavare che gli altri 3 triedri contenuti in questo tetraedro sono di 1.^a specie. Il numero di tali tetraedri sarà $240 \cdot 12 = 72 \cdot 40$.

Passiamo ora ai tetraedri contenenti un triedro di 2.^a specie. Abbiamo visto (§ 6) che rispetto ad un triedro di 2.^a, gli altri piani si scindono in $12 + 2$. Quindi aggiungendo uno dei primi o uno dei secondi piani dobbiamo avere due tetraedri di natura diversa.

Otteniamo le due fig. XIII, XIV, considerando le quali si riconosce subito che il primo ha 2 triedri di 2.^a specie e 2 di 1.^a specie, e il secondo ha tutti i quattro triedri di 2.^a specie.

Corrispondono rispettivamente a quelli classificati come 3.º e 4.º da BERTINI. Ve ne saranno rispettivamente $\frac{2160 \cdot 12}{2} = 81 \cdot 160$ e $\frac{2160 \cdot 2}{4} = 1080$.

Finalmente vediamo quanti tetraedri nuovi si possono formare partendo da un triedro di 1.^a specie. In tal caso, abbiamo visto che i piani esterni si scindono in $3 + 3 + 9$. Se aggiungiamo uno dei primi tre piani, cioè uno dei piani del triedro complementare (fig. VIII) abbiamo evidentemente un tetraedro contenente un triedro di 3.^a e quindi non può essere che quello già ottenuto sopra. Se aggiungiamo uno dei nove piani per es. (vedi fig. IV, VIII, IX) (1 6 8 2) è facile riconoscere che si ha un tetraedro contenente un triedro di 2.^a specie, e quindi uno di quelli già ottenuto; se finalmente aggiungiamo uno dei 3 piani del triedro della fig. IX, per es. (1 8 3 2) abbiamo il tetraedro rappresentato dalla fig. XV, e che, come facilmente si riconosce, ha tutti i

(*) Vedi la tabella in fine del citato lavoro di BERTINI.

4 triedri di 1.^a specie. Di essi ve ne saranno $\frac{2880 \cdot 3}{4} = 2160 = 54 \cdot 40$. Seguendo il BERTINI distingueremo i tetraedri delle fig. XII, XIII, XIV, XV rispettivamente come tetraedri di 2.^a, 3.^a, 4.^a, 1.^a specie.

Con ciò resta compiuta tutta la classificazione dei tetraedri, e passeremo ora a considerare i gruppi di sostituzioni che lasciano fisso ciascuno di essi.

§ 8. Gruppo di sostituzioni che lasciano fisso un tetraedro di 1.^a specie.

Dalle cose dette avanti risulta che un tetraedro di 1.^a specie si compone di tre piani come IV, e di un piano di IX, e ricordando che il triedro complementare di IX è proprio IV, possiamo dire che esso si compone di un piano di un triedro di 1.^a specie (IX) e di tre piani del triedro complementare a questo. Allora evidentemente si viene a scoprire una certa relazione fra le quattro facce del tetraedro, cioè ognuna viene ad avere la sua opposta sebbene, considerando che tutti i triedri contenuti in questo tetraedro sono di 1.^a specie, parrebbe a prima vista che rispetto ad una faccia tutte le altre comparissero simmetricamente.

Giacchè se nel triedro IX consideriamo la coppia di piani non contenente il piano scelto, questa coppia avrà il suo piano coniugato nel triedro IV, e tal piano dunque sarà corrispondente a quello scelto del triedro IX. Lo stesso può vedersi anche considerando i gruppi di sostituzioni. Teniamo presente la formazione del gruppo di sostituzioni di un triedro di 1.^a specie (§ 5). Se in esso lasciamo ancora fisso il piano (1 8 3 2) (quarto piano del tetraedro), allora dalla tabella stabilita nel § 5 risulta che resterà fisso anche il piano (1 5 6 2) del triedro. Dunque i quattro piani del tetraedro di 1.^a specie non potranno permutarsi fra loro in 4! modi, ma stabilito il passaggio di uno di essi in un altro, resta stabilito il passaggio di un altro dei quattro piani, e che potremo chiamare *opposto* al primo.

Per trovare dunque il gruppo che lascia fisso il tetraedro di 1.^a specie possiamo esaminare prima qual'è quel sottogruppo del gruppo del triedro di 1.^a studiato nel § 5, che lascia fisso uno dei piani, per es. (1 5 6 2). Dalle considerazioni svolte nel § 5 risulta che tal sottogruppo è quello corrispondente alle *due* funzioni

$$\varphi[(13) + (26), (24) + (15), (34) + (56)] + \varphi[(26) + (17), (15) + (57), (56) + (25)] \\ \varphi[(17) + (24), (57) + (34), (25) + (13)],$$

oppure più semplicemente alle due altre funzioni

$$\varphi[(1\ 7) + (2\ 4), (5\ 7) + (3\ 4), (2\ 5) + (1\ 3)]$$

$$\varphi[(1\ 3) + (1\ 7), (3\ 4) + (2\ 5), (2\ 4) + (5\ 7)],$$

dove φ al solito è il simbolo di una funzione simmetrica degli argomenti. Evidentemente l'ordine del gruppo sarà eguale a 6 perchè se (1 3) resta fisso allora restano fisse tutte le altre 6 rette. Stabilita poi una sostituzione fra le sei rette dei due piani (1 3 4 2) (1 7 5 2), resta determinata la sostituzione fra le tre rette del piano (1 5 6 2) perchè le tre rette di questo piano corrispondono alle coppie di rette

$$(1\ 3)\ (1\ 7), \quad (3\ 4)\ (2\ 5), \quad (2\ 4)\ (5\ 7),$$

e indi poi colla corrispondenza stabilita nel § 5 resta determinata la sostituzione delle altre rette fra loro.

Possiamo dunque dire che in un tetraedro di 1.^a specie, se uno dei piani resta fisso, allora restano solo possibili sei sostituzioni. Quindi, essendo poi evidentemente i singoli piani fra loro equivalenti, possiamo asserire che il gruppo del tetraedro di 1.^a specie possiede $6 \cdot 4 = 24$ sostituzioni.

Esaminando più addentro la fig. XV rappresentante un tetraedro di 1.^a specie, ne ricaviamo qualche altro risultato sulle relazioni reciproche dei quattro piani fra loro. Formando le sei coppie che risultano con quei quattro piani, e costruendo i piani coniugati di ciascuna di queste coppie, si ricava che per quattro di queste coppie i piani coniugati sono tutti diversi fra loro, e non hanno rette in comune, ma per le due coppie:

$$(1\ 3\ 4\ 2)\ (1\ 7\ 5\ 2)$$

$$(1\ 5\ 6\ 2)\ (1\ 8\ 3\ 2),$$

cioè per le coppie di piani che abbiamo già chiamati *opposti*, i piani coniugati sono coincidenti e cioè il piano:

$$(3\ 5)\ (6\ 8)\ (7\ 4),$$

il quale non ha rette comuni cogli altri quattro corrispondenti alle 4 coppie. Quindi intanto possiamo ricavare: « che le 15 rette esterne ad un tetraedro di 1.^a specie, formano un pentaedro ».

È chiaro poi che restando fisso, per le sostituzioni, il tetraedro, resterà fisso il piano (3 5) (6 8) (7 4) e quindi: « ad ogni tetraedro di 1.^a specie è

coordinato un unico piano esterno ». Resta inoltre fisso l'altro tetraedro dei 4 piani corrispondenti alle 4 coppie, e che sono:

$$(1\ 6\ 7\ 2), \quad [(3\ 6)(4\ 5)(7\ 8)], \quad (1\ 4\ 8\ 2), \quad [(3\ 7)(8\ 5)(4\ 6)],$$

e si può verificare che tutti i triedri contenuti in questo nuovo tetraedro sono tutti anche di 1.^a specie, e quindi possiamo dire: « che ad ogni tetraedro di 1.^a ne corrisponde un altro tutto esterno ad esso della stessa specie, e ai due corrisponde un unico piano esterno ».

Dalle cose dette risulta che le 15 rette esterne ad un tetraedro di 1.^a si scindono in $12 + 3$; le prime 12 sono rappresentate dalla fig. XV. Possiamo osservare che rispetto alle tre rette del piano fisso, le 12 rette di XV e le 12 di XVI si scindono in 3 sistemi di 4 rette ciascuno. Ognuno di questi sistemi risulta di quelle rette che incontrano una delle tre $(3\ 5)(6\ 8)(7\ 4)$ del piano fisso. Tali sistemi sono rispettivamente:

Piano fisso	1. ^o tetraedro	2. ^o tetraedro
35	13, 15, 23, 25	48, 46, 67, 87
68	26, 18, 57, 34	16, 28, 54, 37
47	24, 17, 38, 56	14, 27, 36, 58

Ora si può subito vedere che ogni retta di uno qualunque dei tetraedri forma un piano e uno solo con due rette dell'altro tetraedro e che in questa tabella non compariscono nella sua medesima orizzontale, così per es. $(1\ 3)$ forma un piano con $(3\ 7)(2\ 7)$, e viceversa $(4\ 8)$ forma un piano con $(1\ 8)(2\ 4)$.

Con questa osservazione si vede subito che tutte le sostituzioni fra le 12 rette del tetraedro sono quelle corrispondenti alla funzione

$$\begin{aligned} & \varphi [(1\ 8) + (2\ 4), (5\ 7) + (3\ 8), (2\ 6) + (1\ 7), (3\ 4) + (5\ 6)] + \\ & + \varphi [(2\ 5) + (5\ 6), (1\ 3) + (3\ 8), (1\ 5) + (2\ 4), (2\ 3) + (1\ 7)] + \\ & + \varphi [(2\ 3) + (3\ 4), (1\ 5) + (5\ 7), (1\ 3) + (6\ 2), (2\ 5) + (8\ 1)]. \end{aligned}$$

Tali sostituzioni sono precisamente in numero di 24 quante sappiamo che debbono essere. Ognuna poi delle 12 coppie qui segnate corrisponde ad una

delle 12 rette del 2.º tetraedro; e ogni termine φ corrisponde ad una delle tre rette del piano fisso; resta così determinato il movimento di tutte le rette.

Si può ora vedere come si distingueranno fra loro i piani esterni rispetto al tetraedro dato. I piani esterni al tetraedro sono prima di tutto i quattro piani del tetraedro della fig. XVI, e poi i 6 piani passanti per una retta del piano (3 5) (4 7) (6 8) e per due rette dello stesso tetraedro, e infine il piano (3 5) (4 7) (6 8). In tutto 11 piani divisi in 3 categorie di $1 + 4 + 6$.

§ 9. Gruppo di sostituzioni che lasciano fisso un tetraedro di 2.^a specie.

Il tetraedro di 2.^a specie, come sappiamo, si forma aggiungendo ad un triedro di 3.^a specie un altro piano (§ 7) in modo che questo colle tre coppie di piani del 1.º triedro dia luogo sempre a triedri di 1.^a specie. Allora si intende subito che i quattro piani non figurano nello stesso modo, ma quest'ultimo aggiunto figura in maniera completamente diversa da tutti gli altri; per le sostituzioni dunque che lasciano fisso il tetraedro di 2.^a specie, tal piano non può che restar fisso, e non permutarsi con gli altri. Onde intanto ne ricaviamo il risultato: « che il gruppo del tetraedro di 2.^a specie è un sottogruppo di quello del triedro di 3.^a specie (§ 3) ».

Propriamente è quel sottogruppo che scambia fra loro solo le tre rette (1 7) (2 5) (5 7) le quali nella tabella del § 3 appartengono rispettivamente ai sistemi d e f , e a linee diverse.

Tenendo presente allora la formazione del gruppo altrove studiato (§ 3) si ricava che i sistemi d e f potranno solo permutarsi fra loro, e così i sistemi a b c . Perciò le 15 rimanenti rette si scindono in $9 + 6$, e sono rappresentate rispettivamente dalle linee nere e tratteggiate della fig. XVII, che si può subito costruire tenendo presente la fig. III.

Per potere facilmente orizzontarci nella formazione di questo gruppo, anzichè ricavarlo da quello del § 3, facciamo delle considerazioni a parte, e esaminiamo la disposizione di tutte le 9 e 6 rette rispetto alle tre rette del piano fisso (1 7 5 2).

Troviamo che le 9 rette nere di XVII si dividono in 3 classi tali che le 3 rette di ciascuna classe incontrano una delle 3 rette del piano, e così anche le sei rette tratteggiate si scindono in 3 classi di 2 rette ciascuna, e infine anche le 9 rette del triedro di 3.^a specie di XII si dividono analogamente in 3 classi.

La corrispondenza di cui si parla è data dal seguente quadro:

Piano fisso	Rette tratteggiate	Rette nere di XVII	Rette di XII
17	23	74	24
	73	76	26
		28	78
57	38	68	34
	46	27	15
		48	36
52	58	53	13
	18	16	56
		14	54

Si vede da questo quadro che le 3 rette comprese in una classe formano una terna gobba, e inoltre le tre di una classe delle prime 9 rette si corrispondono una ad una alle tre della classe corrispondente delle altre 9 rette, perchè per es. la retta (7 4) incontra solo la retta (2 4) fra le altre tre (2 4) (2 6) (7 8). Noi nel quadro abbiamo disposto sulla stessa orizzontale le corrispondenti. Inoltre le due rette di una coppia della 2.^a colonna sono sempre due rette concorrenti, e d'altra parte nessuna di esse incontra una delle 6 comprese nella medesima linea, ma nella 3.^a e 4.^a colonna.

Si vede inoltre che le 9 rette della 3.^a colonna formano una figura come il primo tipo di fig. VII, e quindi quelle 9 rette formano una coppia di triedri coniugati. Infine nella 4.^a colonna le prime rette di ciascuna classe si corrispondono fra loro come quelle che vengono a costituire una delle facce del tetraedro dato, e così le seconde e le terze. E quindi si avrà un'analogia corrispondenza fra le varie classi della 3.^a colonna. Ne ricaviamo che restando fisso il tetraedro resta fisso un altro triedro di 3.^a specie tutto esterno ad esso e naturalmente anche il coniugato di questo, ovvero « ad ogni tetraedro di 2.^a specie corrispondono due triedri di 3.^a specie esterni, e fra loro coniugati ».

Ciascuna delle tre rette di una classe dell'ultima colonna appartiene ad

uno dei tre piani di XII, e quindi permutandosi quelle tre rette fra loro, ciò corrisponderà alla permutazione fra loro dei tre piani di XII, e quindi alla analoga permutazione delle rette delle altre classi.

Il gruppo dunque ce lo possiamo figurare come una permutazione fra le tre rette del piano fisso, accompagnata da una permutazione qualunque fra le tre rette di una classe (il che porterà permutazione analoga fra le rette di qualunque altra classe). Resta allora stabilita la permutazione fra le due rette di una coppia della 2.^a colonna, perchè è facile vedere che per es. la retta (2 3) incontra le tre della 2.^a classe della 4.^a colonna, e non quelle della 3.^a classe, e viceversa (7 3) incontra quelle della 3.^a e non quelle della 2.^a. Quindi se la 2.^a si permuta colla 3.^a e solo allora, le due rette (2 3) (7 3) si scambiano fra loro.

Si hanno quindi in tutto $3! \cdot 3!$ sostituzioni.

Si può esaminare infine come si distribuiscono fra loro i piani esterni. Ve ne sono, come risulta dalle cose di sopra, tre formanti un triedro di 3.^a specie, e tre altri formanti il triedro coniugato; formano due classi fra loro separate; e poi ve ne sono altri due formati colle 6 rette tratteggiate, cioè:

$$[(3\ 7)\ (4\ 6)\ (5\ 8)], \quad (1\ 8\ 3\ 2).$$

In tutto vi sono 8 piani esterni divisi in tre classi cioè $2 + 3 + 3$. Si può osservare che non esiste altra sostituzione che l'unità che lasci fisse tutte le singole rette del tetraedro di 2.^a specie.

§ 10. Gruppo del tetraedro di 3.^a specie.

Questo tetraedro ha due triedri di 1.^a specie e due di 2.^a specie. Quindi i suoi quattro piani non potranno permutarsi fra loro in qualunque modo, cioè ogni piano ha un altro solo (che diremo suo *opposto*) con cui può permutarsi, e le due coppie di piani opposti non possono però permutarsi fra loro, come succedeva nel tetraedro di 1.^a specie (§ 8). Nella fig. XIII i piani opposti sono:

$$(1\ 8\ 5\ 2) \quad (1\ 3\ 4\ 2)$$

$$(1\ 5\ 6\ 2) \quad (1\ 7\ 8\ 2),$$

di cui i due primi si oppongono ai due triedri di 2.^a specie, e i due ultimi si oppongono ai due triedri di 1.^a specie.

Il piano coniugato ai due primi è $[(8\ 4)(7\ 6)(3\ 5)]$ cioè è un piano tutto esterno al tetraedro, mentre il coniugato agli altri due è $[(5\ 8)(3\ 4)(7\ 6)]$ cioè possiede due rette del tetraedro dato, e una retta di quest'ultimo piano. Questi due piani debbono dunque restar fissi isolatamente; resterà fissa la retta $(6\ 7)$ che è il loro asse comune.

Dunque: « il gruppo del tetraedro di 3.^a è un sottogruppo di quello studiato nel § 2, che lascia fissi due piani concorrenti ».

Fra le 12 rimanenti rette si vede che ve ne sono quattro sole che incontrano la $(6\ 7)$, e sono quelle segnate in nero nella fig. XVIII, e poi fra le rimanenti ve ne sono 2 sole che si incontrano fra loro e con $(3\ 5)$ e 2 altre che si incontrano fra loro e con $(4\ 8)$.

Dalle rimanenti 8 si staccano quindi queste altre 4, potendo $(3\ 5)$ scambiarsi con $(4\ 8)$. E restano poi finalmente le ultime 4. Dunque possiamo dire che le 12 rette si separano in 3 sistemi, in modo che non esiste la transitività fra le rette di un sistema in quelle di un altro. Questi sistemi sono rappresentati dalla fig. XVIII. Si vede subito che si possono formare in una sol maniera quattro piani le cui rette appartengono a ciascuno dei tre sistemi, il che verrà a stabilire una corrispondenza univoca fra le rette dei sistemi, per modo che stabilita la sostituzione per es. fra le 4 rette segnate in nero nella fig. XVIII, resta stabilito il movimento di tutte le altre. Tale corrispondenza è:

1. ^o sistema	2. ^o sistema	3. ^o sistema
16	63	32
27	74	41
38	57	46
45	68	37

Le quattro rette del primo sistema formano due coppie di rette concorrenti, e le rette di una coppia non incontrano quelle dell'altra. È facile vedere che fra quelle quattro rette non ci possono essere più che 4 sostituzioni, perchè se una di esse per es. $(1\ 6)$ è fissa, allora resterà naturalmente fissa $(2\ 7)$ che con essa forma coppia, e inoltre restando fisse $(6\ 3)$ $(3\ 2)$ e, osservando che la prima di queste due incontra $(4\ 5)$ e non $(3\ 8)$, mentre vice-

versa la (3 2) incontra (3 8) e non (4 5), si ha che resteranno fisse anche (3 8) (4 5). Propriamente il gruppo fra le 4 rette del 1.º sistema (e così in corrispondenza per gli altri sistemi), essendo *transitivo* e avendo 4 sostituzioni, è il noto gruppo *quadruplo* di 4 elementi (KLEIN lo chiama *vierergruppe*). Dunque: « il gruppo del tetraedro di 3.ª specie è isomorfo col gruppo quadruplo di 4 elementi ».

Stabilita la sostituzione fra le quattro rette del 1.º sistema, resta stabilita quella fra tutte le 15 rette esterne come risulta dalle osservazioni fatte sopra, e poi resta anche stabilita quella fra le 12 rette del tetraedro perchè si può facilmente osservare sulle figure che ogni singola retta di XIII si può far corrispondere a due rette di XVIII in maniera che con questa venga a costituire un piano; così per es. la retta (1 3) appartiene al piano (1 3 7 2) di cui le altre rette sono in XVIII, e la retta (1 7) appartiene analogamente al piano (1 7 3 2).

I piani esterni al tetraedro sono (come risulta anche dall'analisi fatta):

- 1) Il piano fisso (6 7) (3 5) (4 8).
- 2) Due piani passanti per (6 7) e quindi fissi nel loro assieme, cioè (6 7) (4 5) (3 8), (1 6 7 2).
- 3) Due piani passanti rispettivamente per (35), (48) e sono (35)(68)(47), (4 8) (5 7) (3 6).

4) Quattro piani formati prendendo una retta di ciascuno dei tre sistemi. Essi sono quelli corrispondenti alle quattro linee del quadretto segnato sopra.

In tutto 9 piani esterni divisi in 4 classi.

Si può osservare che i quattro ultimi piani non hanno rette comuni, e formano un tetraedro che si riconosce subito di 1.ª specie, perchè contiene tutti triedri di 1.ª specie. Infatti tenendo presente la tabella di sopra si ha che il piano coniugato dei piani rappresentati dalle due prime linee è

$$(6\ 7)(5\ 8)(3\ 4),$$

e questo stesso è anche il piano coniugato dei piani delle ultime due linee. Ora nessuna di queste rette comparendo nel tetraedro stesso si ricava che esso ha tutti i triedri di 1.ª specie.

Onde:

« Ad un tetraedro di 3.ª specie corrisponde un altro di 1.ª specie tutto esterno ad esso. Le tre rette esterne ad ambedue i tetraedri formano a loro

volta un piano (6 7) (3 5) (4 8); onde il tetraedro di 3.^a è compreso in un enneaedro. »

Con tutte le osservazioni già fatte non sarebbe difficile dedurre altri teoremi sulle relazioni reciproche fra i due tetraedri così costruiti.

§ 11. Gruppo del tetraedro di 4.^a specie e del pentaedro *principale*.

Nel tetraedro di 4.^a specie (fig. XIV) tutti i quattro triedri sono di 2.^a specie. Consideriamo allora i piani coniugati di ciascun triedro.

Si hanno i quattro piani:

$$(3\ 4)\ (5\ 6)\ (7\ 8)$$

$$(1\ 7\ 4\ 2)$$

$$(1\ 3\ 6\ 2)$$

$$(1\ 5\ 8\ 2),$$

i quali non hanno rette comuni, e formano anche tutti triedri di 2.^a specie, possiamo dunque enunciare questo risultato notevole:

« I quattro piani coniugati dei 4 triedri contenuti in un tetraedro di 4.^a specie, formano un tetraedro della medesima specie. »

Teniamo presente come abbiamo formata la fig. XIV. L'abbiamo formata aggiungendo alla V uno dei due piani di X. Le rette esterne sono dunque ancora le altre tre di X e le 12 di XI. Ora riconosciamo subito che le prime tre stanno rispetto al tetraedro in posizione completamente diversa che le altre.

Esse sono (6 7) (3 8) (5 4), formano un piano, e ciascuna di esse, per es. (6 7) incontra due coppie di rette (1 7) (6 2), (3 4) (5 8) del tetraedro XIV, colle quali forma due piani; queste quattro rette appartengono ciascuna a ciascuno dei quattro piani, e quindi possiamo dire che ogni retta fra quelle tre corrisponde ad una delle tre scissioni dei 4 piani in $2 + 2$.

Le 12 rette di XI si riuniscono in 6 coppie le quali a loro volta si riuniscono a due a due correlate alle tre rette del piano fisso; in altri termini delle 12 rette ve ne sono 4 che incontrano (3 8), 4 che incontrano (6 7), e le ultime 4 che incontrano (5 4).

Questo fa vedere che fra queste 12 rette c'è la transitività semplice, e esse formano tre sistemi d'imprimitività, rappresentati rispettivamente dalla

fig. XIX. Se restano fissi questi sistemi, restano fisse le tre rette del piano fondamentale, e quindi, per l'osservazione fatta sopra, fra le quattro facce $a b c d$ del tetraedro saranno solo possibili le quattro sostituzioni:

$$1, \quad (ab)(cd), \quad (ac)(bd), \quad (ad)(bc).$$

Anche le 12 rette di XIV si distribuiscono in 3 sistemi d'imprimitività ciascuno coordinato con una delle tre rette del piano fondamentale, e quindi si ha la corrispondenza fra le due serie di sistemi. Questa corrispondenza è espressa dal seguente quadro:

Piano fondamentale	Rette di XIV	Rette di XIX
38	13, 28, 47, 56	23, 18, 57, 46
67	34, 17, 58, 26	27, 16, 35, 48
45	24, 87, 36, 15	25, 14, 37, 68

Le tre rette del piano fondamentale possono permutarsi in $3!$ modi. Sieno esse fisse, allora i tre sistemi resteranno separati.

Fra le rette del primo sistema della seconda colonna possono farsi, come abbiamo detto, solo quattro sostituzioni corrispondenti ad altrettante sostituzioni fra i quattro piani del tetraedro dato; e se quelle quattro rette son fisse, saranno fisse le quattro facce, e quindi ogni singola retta del 2.º e 3.º sistema contenuto nella seconda colonna. Si può ora esaminare la relazione che ci è fra le rette di un sistema della seconda colonna, e quelle di un sistema della terza colonna. Ogni retta della seconda colonna non incontra nessuna di quelle dell'altra colonna e della sua medesima linea, mentre incontra due sole delle quattro situate in linee diverse. Propriamente le due rette (1 3) (4 7) incontrano (2 7) (3 5) mentre le altre due (8 6) (1 5) incontrano le medesime due rette.

In altri termini restando fisse tutte le rette della 2.ª colonna, si potranno ancora permutare fra loro (2 7) con (3 5) e (1 6) con (4 8) cioè operare fra le quattro rette (2 7) (1 6) (3 5) (4 8) quattro sostituzioni:

$$1, \quad [(2\ 7)(3\ 5)], \quad [(1\ 6)(4\ 8)], \quad [(2\ 7)(3\ 5)][(1\ 6)(4\ 8)].$$

Se poi queste rette sono fisse allora restan fisse tutte le altre, perchè in

quelle per es. della prima linea, colla considerazione di sopra si vede che dovrebbe restar fissa la coppia (2 3) (5 7), ma (2 7) incontra (5 7) senza incontrare (2 3) dunque, (5 7) deve restar fisso; e così tutte le altre rette. Onde ricaviamo che l'ordine del gruppo è $3! 4 \cdot 4$.

Se al tetraedro aggiungiamo il piano fisso chiamato da noi fondamentale, allora si ha un pentaedro in cui tutti i triedri sono di 2.^a specie, e che non ha altri piani esterni, si ha cioè il *pentaedro principale* (CREMONA, BERTINI).

Il gruppo del pentaedro principale avrà per ordine $5 \cdot 3! 4 \cdot 4$ perchè se lasciamo fisso uno dei cinque piani dobbiamo ricadere nel gruppo precedente; l'ordine di tal gruppo è il terzo dell'ordine del gruppo che lascia fissa una bisestupla, che è quella formata colle 12 rette esterne.

Rispetto al tetraedro di 4.^a specie i piani esterni sono di due categorie, cioè o il piano (3 8) (6 7) (4 5), oppure i sei piani passanti per una di queste tre rette e per due rette di XIX. Fra questi ultimi c'è la transitività come risulta dalle considerazioni sopra svolte.

§ 12. Pentaedri di varie specie.

Vediamo ora quante specie di pentaedri si possono formare aggiungendo un altro piano a ciascuno dei tetraedri considerati sopra. In quanto ai pentaedri ricavati dal tetraedro di 1.^a specie noi possiamo osservare che qualunque piano aggiungiamo al tetraedro di 1.^a specie, si viene a formare sempre almeno un triedro di 2.^a o di 3.^a specie; non esisteranno cioè pentaedri in cui tutti i triedri sono di 1.^a specie; ciò si può riconoscere subito tenendo presenti le considerazioni svolte nel § 8. Onde allora un pentaedro ricavato da un tetraedro di 1.^a specie, potrà anche certamente ricavarsi da un tetraedro di 2.^a 3.^a o 4.^a specie; quindi noi possiamo limitarci a considerare solo questi ultimi.

In quanto al tetraedro di 2.^a specie abbiamo già visto (§ 9) che i piani esterni si riuniscono in 3 categorie distinte.

Per piani rappresentanti queste tre categorie possiamo scegliere rispettivamente

I — (1 8 3 2)

II — (1 4 8 2)

III — (1 6 8 2),

che insieme con i piani della fig. XII dànno luogo a tre pentaedri. Sulla figura si può riconoscere che il primo di essi contiene:

1 triedro di 3. ^a specie	3 tetraedri di 1. ^a specie
9 triedri di 1. ^a »	2 » 2. ^a »

il secondo contiene:

2 triedri di 3. ^a specie	1 tetraedro di 1. ^a specie
8 » 1. ^a »	4 tetraedri di 2. ^a »

e il terzo:

1 triedro di 3. ^a specie	2 tetraedri di 2. ^a specie
3 triedri di 2. ^a »	3 » 3. ^a »
6 » 1. ^a »	

Ricordando dunque il numero dei tetraedri XII si ricava subito che i numeri rispettivi di questi pentaedri sono:

$$\frac{72 \cdot 40 \cdot 2}{2} = 2880$$

$$\frac{72 \cdot 40 \cdot 3}{2} = 4320$$

$$\frac{72 \cdot 40 \cdot 3}{4} = 2160.$$

Essi corrispondono rispettivamente a quelli classificati da BERTINI nella tabella inserita in fine del suo lavoro in 1.^o 2.^o 3.^o posto. Noi li chiameremo rispettivamente pentaedri I II III.

Nel § 10 abbiamo visto che rispetto ad un tetraedro di 3.^a specie i piani esterni si riuniscono in 4 categorie; però possiamo osservare che aggiungendo il piano (3 5) (6 7) (4 8) della prima categoria veniamo ad ottenere un pentaedro contenente già un triedro di 3.^a specie (quello dei piani (1 3 4 2), (1 8 5 2), [(3 5) (6 7) (4 8)]), e quindi contenente certamente un tetraedro di 2.^a specie che è l'unica specie di tetraedri contenenti triedri di 3.^a specie. Perciò otteniamo un pentaedro di quelli già considerati sopra.

Aggiungiamo allora i piani delle altre tre categorie, e propriamente pos-

siamo scegliere i piani

IV — (1 6 3 2) della categoria 4.^a

V — [(3 6) (4 8) (5 7)] " 3.^a

VI — (1 6 7 2) " 2.^a

Abbiamo allora rispettivamente pentaedri contenenti

6 triedri di 1. ^a specie		1 tetraedro di 1. ^a specie
4 " 2. ^a "		4 tetraedri di 3. ^a "
5 " 1. ^a "		5 " 3. ^a "
5 " 2. ^a "		
4 " 1. ^a "		4 " 3. ^a "
6 " 2. ^a "		1 tetraedro di 4. ^a "

e quindi i loro numeri sono rispettivamente

$$\frac{81 \cdot 160 \cdot 4}{4} = 12960$$

$$\frac{81 \cdot 160 \cdot 2}{5} = 5184$$

$$\frac{81 \cdot 160 \cdot 2}{4} = 6480,$$

e corrispondono esattamente a quelli classificati da BERTINI in 4.^o 5.^o 6.^o posto.

Finalmente rispetto ad un tetraedro di 4.^a i piani esterni sappiamo (§ 11) che si riuniscono in 2 categorie; ma aggiungendo uno dei 6 piani della seconda categoria, per es. (2 3 8 1) si viene a formare certamente almeno un triedro di 1.^a specie (per es. quello dei tre piani (1 3 4 2) (1 5 6 2) (1 8 3 2) fig. XIV) e quindi il pentaedro che si forma deve essere uno di quelli già ottenuti precedentemente.

Resta allora ad aggiungere solo il piano

VII — (3 8) (6 7) (4 5),

e, come abbiamo già osservato, si ha allora il *pentaedro principale*. Esso contiene:

10 triedri di 2.^a specie | 5 tetraedri di 4.^a specie,

e quindi ve ne sono

$$\frac{1080}{5} = 216.$$

Esso corrisponde al VII di BERTINI ed è disegnato nella fig. XX.

§ 13. Alcuni teoremi sui pentaedri. — Poliedri principali.

Si sa che le 12 rette restanti da un pentaedro principale formano una doppia sestupla; esse sono rappresentate dalla fig. XIX; noi ora ci proponiamo qui di fare ricerche analoghe relative agli altri pentaedri, cioè di studiare la configurazione delle 12 rette esterne ad uno dei sei altri pentaedri già classificati nel paragrafo precedente. E cominciando dal pentaedro I, si ha che le 12 rette esterne sono:

$$(4\ 6)(3\ 7)(5\ 8); \quad (1\ 4)(1\ 6)(3\ 5)(2\ 7)(8\ 6)(4\ 8)(7\ 6)(2\ 8)(4\ 7).$$

Andando ad esaminare le relazioni reciproche che hanno queste rette fra loro riconosciamo subito questo, che cioè ognuna di esse ne incontra cinque altre, e propriamente una delle 9 della seconda categoria incontra una delle prime tre, e due coppie di rette concorrenti comprese nella stessa seconda categoria; mentre che una delle prime tre incontra le altre due, e tre altre della seconda categoria formanti poi una terna gobba. Così per es. (1 4) incontra (4 6) e poi le coppie (2 8)(4 8), (2 7)(4 7), mentre (4 6) incontra (3 7)(5 8) e poi la terna gobba (1 4)(1 6)(3 5). Questo ci fa vedere che le prime tre si comportano in maniera completamente diversa che le altre, ed è perciò che noi le abbiamo separate dalle altre nove. Quelle tre prime formano un piano, e le altre nove si scindono in $3 + 3 + 3$, ognuna di queste classi coordinata ad una delle tre rette del piano.

Possiamo propriamente distribuire le altre nove nella seguente tabella

$$\begin{array}{ccc} (1\ 4) & (1\ 6) & (3\ 5) \\ (8\ 6) & (4\ 8) & (2\ 7) \\ (7\ 6) & (4\ 7) & (2\ 8), \end{array}$$

in maniera che, come si vede, le tre rette di una orizzontale formano una terna gobba, e corrispondono ad una medesima retta del piano (4 6)(3 7)(5 8); le tre rette di una colonna formano anche una terna gobba, e le tre rette di

una diagonale (intendendo per tre rette di una diagonale quelle non situate a due a due nè sulla medesima orizzontale nè verticale), formano un piano, e quindi si hanno 6 piani; e perciò intanto ne concludiamo che esistono solo 7 piani completamente esterni al pentaedro I. Si riconosce subito che quelle 9 rette formano una coppia di triedri coniugati; i tre piani di uno dei triedri col piano esterno formano un tetraedro di 2.^a specie (§ 9). Di tali tetraedri ve ne saranno due secondochè si considera uno dei triedri di 3.^a specie o il suo coniugato. Dunque possiamo conchiudere:

« Ad un pentaedro I corrispondono esternamente due tetraedri di 2.^a specie. »

Tenendo presente che nel pentaedro I esiste un triedro di 3.^a specie, e che in luogo di questo possiamo considerare il suo coniugato, e allora otteniamo un altro pentaedro I, possiamo completare il risultato precedente dicendo:

« Ad una coppia di pentaedri I coniugati corrisponde esternamente una « coppia di tetraedri II coniugati. »

Effettivamente si sa che il numero dei pentaedri I e tetraedri II è il medesimo cioè 2880.

Ricaviamo anche allora naturalmente che:

« Un pentaedro I esiste in due enneaedri, e non esiste in nessun altro « poliedro principale al disotto dell'enneaedro. » (*) (BERTINI.)

Passiamo ora al pentaedro II.

Le rette esterne sono:

$$(2\ 3)(3\ 5)(3\ 7)(3\ 8)(7\ 4)(7\ 6)(4\ 6)(1\ 8)(1\ 6)(6\ 8),$$

e si riconosce che con queste non possono formarsi che solo i quattro piani

$$(2\ 3\ 8\ 1)\ (2\ 7\ 6\ 1)\ (3\ 5\cdot 7\ 4\cdot 6\ 8)\ (3\ 7\cdot 5\ 8\cdot 4\ 6).$$

Questi quattro piani non hanno rette comuni, e si può verificare che tutti i triedri con essi formati sono di 1.^a specie, dunque essi formano un tetraedro di 1.^a specie. Dunque:

« Ad ogni pentaedro II corrisponde esternamente un tetraedro I ed effettivamente i loro numeri coincidono cioè esistono 2160 di quei pentaedri e « di quei tetraedri. »

(*) Si sa che cosa si intende per poliedro principale; s'intende quello non contenuto in altro con un numero maggiore di facce, cioè quello *esternamente* al quale non esistono altri piani.

Si ha ancora che:

« Ogni pentaedro II esiste in un solo poliedro principale che è l'enneaedro, ed esiste *in un solo* enneaedro. »
risultato già trovato dal BERTINI.

Passando ora al pentaedro III troveremo una relazione singolare fra i pentaedri III e i pentaedri II.

Le rette esterne a III sono, come si riconosce subito, le stesse di prima, meno che, in luogo di (1 6) (8 6) vi sono (1 4) (8 4), cioè, osservando poi che tutte le altre rette stanno costruite simmetricamente rispetto ai punti (4) (6), possiamo dire che scambiando i due punti (4) (6) si otterranno le rette esterne al pentaedro III da quelle corrispondenti al pentaedro II. Di qui ne ricaviamo che colle medesime rette di un pentaedro II si può costruire un pentaedro III, e quindi si viene a stabilire una corrispondenza fra i pentaedri delle due specie. Badando poi ai numeri di essi pentaedri, cioè che di III ve ne sono 4320 mentre di II ve ne sono 2160 si viene a conchiudere che ad ogni pentaedro II ne corrisponderanno *due* di III. Nè può venire il dubbio che colle medesime rette di un pentaedro II se ne possano formare degli altri, perchè abbiamo già visto che il complemento di uno di essi è un tetraedro I e uno solo, non potendo formare colle 12 rette di uno dei 2160 tetraedri I altri piani che le facce stesse del tetraedro, e quindi esisteranno certamente 2160 assieme *diversi* di 15 rette ognuno corrispondente ad un unico pentaedro II.

Adesso ci si presenta il problema: Qual'è l'altro pentaedro III coniugato al medesimo II?

Se noi in III permutiamo i punti (4) (6), abbiamo, come risulta dalle cose di sopra dette, un pentaedro III coniugato a II. Esso è quello dei cinque piani:

$$(1\ 3\ 6\ 2)(1\ 5\ 4\ 2)(3\ 4\cdot 5\ 6\cdot 7\ 8)(1\ 7\ 5\ 2)(1\ 4\ 8\ 2). \quad (a')$$

Se prendiamo il triedro coniugato a quello di 3.ª specie formato con i primi tre piani, abbiamo:

$$(1\ 3\ 4\ 2)(1\ 5\ 6\ 2)(3\ 6\cdot 4\ 5\cdot 7\ 8)(1\ 7\ 5\ 2)(1\ 4\ 8\ 2), \quad (a)$$

che formano precisamente il pentaedro II.

Onde ricaviamo:

« Se nel pentaedro II prendiamo il triedro coniugato di uno dei due « triedri di 3.ª specie in esso contenuti, abbiamo un pentaedro III corrispondente al II. Naturalmente se quello che abbiamo fatto per un triedro di

« 3. specie, lo facciamo per l'altro triedro di 3.^a specie, abbiamo l'altro pentaedro III. »

Quindi al medesimo (a) oltre (a') corrisponderà anche [l'altro triedro di 3.^a specie di (a) è quello del 3.° 4.° 5.° piano]:

$$(1\ 3\ 4\ 2)(1\ 5\ 6\ 2)(1\ 7\ 8\ 2)(1\ 4\ 5\ 2)(3\ 6 \cdot 4\ 8 \cdot 7\ 5). \quad (a'')$$

E si riconosce che « i due pentaedri (a') (a'') corrispondenti al medesimo (a) « non hanno piani comuni ».

Naturalmente, come avanti, anche qui possiamo dire:

« Ogni pentaedro III è compreso in un solo poliedro principale che è « l'enneaedro e esiste in un solo enneaedro. »

Le 12 rette esterne ad un pentaedro IV sono:

$$\begin{aligned} (3\ 5) \quad (7\ 6) \quad (4\ 8) \\ (1\ 4) \quad (4\ 7) \quad (7\ 2) \\ (3\ 7) \quad (4\ 5) \quad (6\ 8) \\ (5\ 7) \quad (3\ 8) \quad (4\ 6), \end{aligned}$$

le quali formano i quattro piani corrispondenti a ciascuna di queste linee, e poi formano anche i due piani $(3\ 5)(4\ 7)(6\ 8)$, $(7\ 6)(3\ 8)(4\ 5)$ e con quelle rette non si possono formare altri piani che questi sei.

I quattro primi piani formano un tetraedro III, quindi:

« Ad ognuno dei 12960 pentaedri IV corrisponde uno dei tetraedri di « 3.^a specie. »

Se al pentaedro uniamo i quattro primi piani, abbiamo un enneaedro, e se invece uniamo il piano $(3\ 5)(4\ 7)(6\ 8)$ allora non possiamo poi che aggiungere il piano $(5\ 7)(3\ 8)(4\ 6)$ ovvero $(7\ 6)(3\ 8)(4\ 5)$ e nessun altro e quindi si ha un ettaedro principale, mentre che se uniamo $(7\ 6)(3\ 8)(4\ 5)$ possiamo aggiungere [oltre $(5\ 7)(3\ 8)(4\ 6)$] anche $(1\ 4\ 7\ 2)$. Quindi si hanno 3 ettaedri principali a cui appartiene il pentaedro IV (BERTINI).

Pel pentaedro V si vede analogamente che colle rette esterne si possono formare solo i cinque piani

$$\begin{aligned} 1\ 6 \cdot 6\ 7 \cdot 7\ 2 \\ 1\ 4 \cdot 4\ 7 \cdot 7\ 2 \\ 3\ 5 \cdot 4\ 7 \cdot 6\ 8 \\ 6\ 8 \cdot 3\ 7 \cdot 4\ 5 \\ 3\ 8 \cdot 4\ 5 \cdot 7\ 6. \end{aligned}$$

Ognuno di questi piani ha una retta comune col precedente e una col seguente, mentre l'ultimo ha una retta comune col primo. Essi formano un pentaedro di quelli che in seguito chiameremo *circolari chiusi*. Quindi:

« Ad ogni pentaedro V corrisponde esternamente un pentaedro circolare « chiuso. »

È chiaro allora che fra quei cinque non se ne possono scegliere *più che due* non aventi fra loro rette comuni, e inoltre di tali coppie ve ne saranno cinque. Dunque:

« Un pentaedro V appartiene solo a cinque ettaedri principali e non ad « altri poliedri principali. »

Finalmente le rette esterne ad un pentaedro VI sono:

$$(2\ 3)(1\ 4)$$

$$(6\ 8)(4\ 7)(3\ 5)(4\ 5)(3\ 7)$$

$$(5\ 7)(3\ 8)(4\ 6)(3\ 6)(4\ 8),$$

e si vede che esse non formano altro che due piani passanti per (6 8) e due altri passanti per (5 7) e non aventi coi primi alcuna retta comune. Tali due coppie di piani sono:

$$(6\ 8 \cdot 4\ 7 \cdot 3\ 5)(6\ 8 \cdot 4\ 5 \cdot 3\ 7)$$

$$(5\ 7 \cdot 3\ 8 \cdot 4\ 6)(5\ 7 \cdot 3\ 6 \cdot 4\ 8),$$

mentre le due prime rette non appartengono a nessun piano formato solo con rette esterne. Evidentemente dunque non potrà aggiungersi che un piano della prima coppia e uno della seconda, e ciò potrà farsi in quattro modi diversi. Dunque:

« Un pentaedro VI appartiene a 4 ettaedri principali, e a nessun altro « poliedro principale. »

Raccogliendo tutti i risultati dell'analisi fatta si può anche dedurre che non esistono altri poliedri principali che gli enneaedri, gli ettaedri, e i pentaedri, come fu già dimostrato dal prof. BERTINI.

Come si vede, in questo paragrafo e nei precedenti, insieme a molti risultati nuovi concernenti principalmente la formazione di varii sottogruppi di sostituzioni fra le 27 rette, abbiamo ritrovato una gran parte dei risultati trovati già da BERTINI per una via più faticosa; del resto anche egli avrebbe

potuto procedere con minore difficoltà se avesse voluto abbandonare il metodo puramente stereometrico.

I risultati nuovi da noi trovati sono poi un necessario complemento a quelli del BERTINI, i quali riguardano solo le proprietà configurative.

Nei paragrafi seguenti considereremo aggruppamenti finora non studiati.

§ 14. Poliedri circolari aperti e chiusi. — Tetraedri circolari.

Nei paragrafi precedenti abbiamo studiati i poliedri formati con piani non aventi a due a due rette (della superficie) in comune. Ora vogliamo iniziare un altro genere di ricerche nuove, cioè lo studio dei poliedri le cui facce si immaginano seguirsi con un certo ordine, e ognuna ha una retta comune colla precedente, e un'altra (diversa dalla prima) comune colla seguente, e nessuna altra retta in comune con altre facce dello stesso poliedro.

Tale poliedro, a causa di questo ordinamento circolare con cui pensiamo distribuite le facce, lo chiameremo un *poliedro circolare*; se poi l'ultima faccia ha una retta comune colla prima, lo diremo *chiuso*, altrimenti *aperto*.

Possiamo dire che lo studio di tali poliedri sta allo studio di quelli altri studiati da BERTINI, e considerati nei paragrafi precedenti, allo stesso modo che le ricerche di STURM e AFFOLTER (citato nel principio di questo lavoro) sui poligoni storti che si possono formare colle 27 rette, stanno a quelle precedenti di STURM sugli assiemi gobbi di rette.

Potrebbe credersi a prima vista che questa ricerca coincide con quella dei poligoni storti o multilateri, perchè si può osservare che ogni multilatero individua un poliedro chiuso che si ottiene facendo passare i piani per i lati consecutivi. Però è facile vedere che la nostra ricerca è di altra natura. Giacchè il poliedro chiuso individuato da un multilatero non sarà sempre di quelli che noi consideriamo, potendo qualche volta le terze rette di ciascuna faccia non essere tutte diverse fra loro e quindi non aversi propriamente un poliedro circolare nel senso nostro.

D'altra parte un poliedro circolare chiuso non sempre individua un multilatero nel senso noto, perchè il poligono formato cogli spigoli può essere tale che alcune coppie di spigoli *non consecutivi* non sieno coppie gobbe, ciò che invece si richiede per i multilateri.

Le due ricerche sono dunque di genere diverso.

Cominciando dai diedri, troviamo che di essi evidentemente ne esiste una

specie sola, perchè abbiamo già visto nel § 1 che il gruppo che lascia fisso un piano, è transitivo in tutti quelli altri 12 piani che col dato hanno una retta comune. Di tali diedri ve ne saranno $\frac{45 \cdot 12}{2} = 270$.

Passiamo ora ai triedri circolari. Rispetto al complesso di due piani aventi una retta comune, gli altri piani passanti per rette di tal diedro, si distribuiscono (vedi § 2) in $3 + 16$ di cui i primi passano per l'asse comune del diedro, e gli altri passano a 4 a 4 per una delle altre 4 rette del diedro stesso.

Fra questi 16 piani vi è la transitività, e aggiungendo uno di essi si ha dunque un *triedro circolare aperto*.

Risulta che esistono $45 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 3$ di tali triedri, di *una specie sola*; e inoltre non esistono triedri circolari chiusi.

Sieno:

$$A \equiv (1 \ 5 \ 4 \ 2)$$

$$B \equiv (1 \ 3 \ 4 \ 2)$$

$$C \equiv (1 \ 3 \ 7 \ 2),$$

i tre piani del triedro.

Il gruppo di sostituzioni che lascia fisso questo triedro, evidentemente lascerà fisso il piano intermedio *B* (che chiameremo *base*) mentre potrà scambiare fra loro i piani *A*, *C*. L'ordine di tal gruppo lo possiamo ricavare da quello considerato nel § 2.

Se in questo vogliamo che il piano *C* (che è uno dei 16 di cui si è parlato) resti fisso, allora resterà fisso *A* e l'ordine sarà $\frac{8 \cdot 4!}{16}$; e facendo poi che *A*, *C* si permutino fra loro si ha infine per l'ordine del gruppo del triedro circolare il numero $4!$.

Tal gruppo evidentemente lascia fisso anche il piano coniugato ai due piani *A*, *C*; esso è un sottogruppo di quello del § 3 che lascia fisso un triedro di 3.ª specie.

Questo piano coniugato *C'* è $(3 \ 4)(5 \ 7)(6 \ 8)$ ed ha una retta comune colla base *B*, la quale è dunque uno dei tre piani coniugati del triedro *ACC'*.

Le 18 rette esterne a questa figura di quattro piani, si distribuiscono a 6 a 6 correlate a ciascuna delle tre rette del piano base, formando rispettivamente gli altri tre piani passanti per ciascuna di queste rette.

Le sostituzioni che lasciano fissa questa figura nel suo complesso, formano un gruppo transitivo nelle 18 rette esterne con tre sistemi d'imprimitività; se poi è solo la figura dei tre piani *A B C* che deve restar fissa, allora le rette

esterne sono $18 + 2$, cioè 18 di prima, e le altre due del piano C' . Queste evidentemente si separano dalle altre, mentre delle 18 se ne staccano 6 altre formanti il sistema correlato al piano C ovvero, ciò che è lo stesso, alla retta (3 4). Le 20 esterne si separano dunque in $2 + 6 + 12$.

Esaminiamo i piani passanti per rette della figura [che non sieno però quelle già comuni a due piani della figura per es. (1 3)(4 2)].

Tali piani sono:

1. Due piani aventi una retta di A e una di C .
2. Tre piani aventi solo una retta di B .
3. 16 piani passanti solo per una retta di A o di C .

Queste tre categorie sono corrispondenti alle tre categorie di rette stabilite sopra, cioè i due primi piani passano ciascuno per una delle due prime rette; [sono gli altri due piani coniugati al triedro ACC' (oltre B)]; i secondi piani son formati colle 6 rette riunite a due a due, e gli ultimi passano ciascuno per una coppia delle 12 ultime rette.

Se dunque vogliamo formare un tetraedro circolare chiuso, non c'è che aggiungere uno dei due primi piani, e si ha:

« Esistono $\frac{45 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{4} = 45 \cdot 8 \cdot 3$ tetraedri circolari chiusi, ed essi sono

« tutti di una medesima specie, ed esistono sempre in una coppia di triedri « coniugati. »

Ciò ci fa vedere che lo studio dei tetraedri circolari avrà molti punti di contatto con quello delle coppie di triedri coniugati. Gli altri due piani che insieme col tetraedro completano i sei piani della coppia di triedri, hanno una retta di comune e saranno i piani coniugati delle coppie di facce opposte del tetraedro circolare.

Ora il numero delle coppie di piani aventi una retta comune è, come abbiamo visto poco fa, 270, mentre il numero dei tetraedri circolari è $\frac{1}{2} \cdot 270$, dunque:

« Ad ogni coppia di piani concorrenti corrispondono 4 tetraedri circolari « chiusi. »

Ci proponiamo ora di esaminare la configurazione reciproca di questi quattro tetraedri.

Uno dei due tetraedri trovati sopra, contenenti il triedro ABC è quello dei quattro piani:

$$\begin{aligned} A &\equiv (1 \ 5 \ 4 \ 2) & B &\equiv (1 \ 3 \ 4 \ 2) \\ C &\equiv (1 \ 3 \ 7 \ 2) & D &\equiv (1 \ 5 \ 7 \ 2), \end{aligned}$$

e ad esso corrisponde la coppia di piani

$$(3\ 4 \cdot 5\ 7 \cdot 6\ 8), \quad (5\ 4 \cdot 3\ 7 \cdot 6\ 8),$$

passanti per la retta (6 8).

I 4 piani $A\ B\ C\ D$ passano ciascuno per una delle quattro rette (3 4) (5 7) (5 4) (3 7) di questa coppia; facciamo passare per queste rette gli altri tre piani, e si hanno allora 12 piani che dovranno poi potersi distribuire in una sol maniera in altri 3 tetraedri circolari.

Essi saranno quelli compresi nella seguente tabella, dove per simmetria abbiamo ripetuti i piani del tetraedro dato.

$$\begin{array}{llll} A \equiv (1542) & B \equiv (1342) & C \equiv (1372) & D \equiv (1572) \\ A' \equiv (1452) & B' \equiv (1432) & C' \equiv (1732) & D' \equiv (1752) \\ A'' \equiv (54 \cdot 36 \cdot 78) & B'' \equiv (34 \cdot 56 \cdot 78) & C'' \equiv (37 \cdot 56 \cdot 48) & D'' \equiv (57 \cdot 36 \cdot 48) \\ A''' \equiv (54 \cdot 38 \cdot 76) & B''' \equiv (34 \cdot 67 \cdot 58) & C''' \equiv (37 \cdot 58 \cdot 46) & D''' \equiv (57 \cdot 38 \cdot 46). \end{array}$$

Si vede da questa tabella che due piani che non stanno nè nella stessa orizzontale nè nella stessa colonna, non hanno rette comuni. Possiamo anche dire:

« I quattro tetraedri circolari corrispondenti ad un medesimo diedro, sono « formati in modo che un piano di uno incontra uno e uno solo piano di un « altro. »

Consideriamo tre piani, di cui due non stieno nè nella stessa verticale, per es. $A\ B'\ C''$. Si vede che questi formano un triedro di 1.^a specie (§ 4). Quindi se noi formiamo il tetraedro (nel senso del § 7) formato con 4 piani che nel quadro precedente formano una diagonale, abbiamo un tetraedro di cui tutti i triedri sono di 1.^a specie; dunque:

« Ogni tetraedro circolare ne individua tre altri esterni; coi sedici piani « dei 4 tetraedri circolari (corrispondenti ad uno stesso diedro), si possono « formare 8 tetraedri ordinarii di 1.^a specie (vedi § 7-8). »

Consideriamo le tre coppie di piani formate con un piano di uno dei 4 tetraedri circolari, e coi tre piani ad esso *non* corrispondenti di un altro, per es. le tre coppie

$$AB', \quad AC', \quad AD',$$

e prendiamo i coniugati di queste tre coppie. Si ottengono i tre piani

$$(1\ 3\ 5\ 2), \quad (3\ 5 \cdot 4\ 7 \cdot 6\ 8), \quad (1\ 4\ 7\ 2),$$

che formano un triedro circolare aperto; dunque:

« I coniugati delle 3 coppie di piani formate con un piano di uno dei « tetraedri, e coi *non* corrispondenti di un altro formano un triedro circolare « aperto. »

Invece i coniugati delle 3 coppie

$$AC', \quad AC'', \quad AC''',$$

si vede subito che sono i tre rimanenti piani (oltre i due del diedro) passanti per (6 8), cioè:

« I coniugati delle tre coppie di piani formate con un piano e coi tre « piani degli altri tre tetraedri, corrispondenti alla sua faccia opposta, sono « sempre i medesimi tre piani passanti per una medesima retta. »

Infine possiamo notare anche gli altri teoremi che si dimostrano facilmente:

« Esistono tre tetraedri circolari chiusi aventi una data coppia di facce « opposte. »

« In ogni coppia di triedri coniugati esistono nove diversi tetraedri circolari chiusi. »

§ 15. Tetraedri circolari aperti e pentaedri chiusi.

Se ad un triedro circolare aperto aggiungiamo uno dei 16 piani della 3.^a categoria di cui si è parlato nel paragrafo precedente, abbiamo un tetraedro circolare aperto. Al solito modo possiamo dire che di tali tetraedri ve ne sono $45 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 8$ e sono tutti fra loro equivalenti, cioè ve n'è *una sola* specie.

Uno di essi sia quello dei quattro piani

$$A \equiv (1\ 5\ 4\ 2) \quad B \equiv (1\ 3\ 4\ 2) \quad C \equiv (1\ 3\ 7\ 2) \quad D \equiv (1\ 4\ 7\ 2).$$

Esaminando la relazione reciproca che hanno i due piani estremi, si scorge che le rette di questi piani (meno quelle due colle quali essi sono congiunti ai piani medii) formano una coppia gobba e una coppia di rette concorrenti. La coppia gobba è quella delle due rette

$$(1\ 5) \quad (4\ 7),$$

e l'altra coppia è

$$(5\ 4) \quad (1\ 4).$$

Queste due ultime individuano un piano $E \equiv (1\ 4\ 5\ 2)$ che non ha altre rette comuni coi piani precedenti, quindi:

« Ad ogni tetraedro circolare aperto è correlato un unico piano che con esso forma un pentaedro circolare chiuso. Esistono quindi $\frac{45 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 8}{5} = 27 \cdot 128$ pentaedri circolari chiusi. »

Possiamo anche aggiungere:

« I pentaedri circolari chiusi sono di una specie sola. »

Possiamo ora ricercare alcune proprietà di questi pentaedri.

Ogni piano ne ha evidentemente due opposti coi quali non ha rette comuni; si possono formare colle cinque facce, cinque coppie di piani non aventi rette comuni. Consideriamo i piani coniugati di queste cinque coppie. Otteniamo i piani

$$A' \equiv (1\ 5\ 3\ 2) \quad B' \equiv (3\ 4 \cdot 5\ 7 \cdot 6\ 8) \quad C' \equiv (1\ 7\ 3\ 2)$$

$$D' \equiv (3\ 5 \cdot 7\ 4 \cdot 6\ 8) \quad E' \equiv (1\ 7\ 5\ 2),$$

e si riconosce subito che questi cinque piani formano un nuovo pentaedro circolare in cui i piani si succedono nell'ordine $A' C' E' B' D'$. Dunque:

« Ad ogni pentaedro chiuso è coniugato un nuovo pentaedro simile che si ottiene da quello prendendo i piani coniugati delle coppie di facce opposte. I due pentaedri hanno relazione reciproca, cioè dal secondo collo stesso processo si tornerebbe al primo. »

Si può osservare una relazione singolare che esiste fra i due pentaedri. Gli spigoli del primo sono:

$$(4\ 2) (1\ 3) (7\ 2) (1\ 4) (5\ 4),$$

e le rette libere (cioè quelle appartenenti ad una faccia sola) di esso, sono invece

$$(1\ 5) (3\ 4) (3\ 7) (4\ 7) (2\ 5),$$

mentre pel secondo si hanno rispettivamente le rette

$$(2\ 3) (1\ 7) (5\ 7) (6\ 8) (3\ 5)$$

$$(1\ 5) (3\ 7) (2\ 5) (5\ 7) (4\ 7),$$

cioè:

« I due pentaedri hanno le medesime rette libere, e spigoli diversi. Essi in complesso vengono ad occupare 15 rette diverse. »

Possiamo facilmente esaminare che cosa formano le 12 rette restanti. Esse sono:

$$1\ 8 \cdot 2\ 8 \cdot 6\ 3 \cdot 6\ 4 \cdot 6\ 5 \cdot 6\ 7$$

$$1\ 6 \cdot 2\ 6 \cdot 8\ 3 \cdot 8\ 4 \cdot 8\ 5 \cdot 8\ 7,$$

e, come si vede, formano una doppia sestupla, dunque:

« Le 12 rette esterne ad una coppia di pentaedri chiusi coniugati formano una doppia sestupla gobba; o anche, le 15 rette che servono a formare una coppia di pentaedri circolari coniugati, possono anche formare sei pentaedri *principali* ordinari. » (§ 11) (*)

Si potrebbe ora continuare nello stesso modo e considerare le relazioni che dovranno esistere fra gli uni e gli altri, ma preferiamo passar oltre.

Vogliamo solo notare:

« Due piani non aventi rette comuni, appartengono, come facce opposte, a 48 pentaedri chiusi diversi. »

§ 16. Pentaedri circolari aperti. — Esaedri circolari chiusi.

Dei poliedri aperti o chiusi considerati sinora ne esistevano sempre una specie unica, ma dai pentaedri aperti in poi le specie si incominciano a differenziare.

Per formare dal tetraedro aperto del paragrafo precedente, i pentaedri aperti, dobbiamo esaminare i piani passanti per le rette estreme che sono (1 5) (4 7) (5 4) (1 4).

Ora poichè evidentemente i piani estremi A , D entrano simmetricamente nella formazione del tetraedro aperto e possono quindi permutarsi fra loro (permutando anche B , C) così basterà considerare solo i piani passanti per le rette appartenenti ad uno di essi per es. D , cioè i piani passanti per (1 4) (4 7).

Tali piani sono [escludendo (1 4 5 2) e quelli altri che passano per rette già comprese in A , B , C]:

$$(1\ 4\ 6\ 2) \quad (1\ 4\ 8\ 2)$$

$$(4\ 7 \cdot 3\ 6 \cdot 5\ 8) \quad (4\ 7 \cdot 3\ 8 \cdot 5\ 6)$$

$$(4\ 7 \cdot 3\ 5 \cdot 6\ 8).$$

(*) Ricordando la proprietà nota che, colle 15 rette esterne ad una bisestupla, si possono formare 6 pentaedri *principali* (CREMONA, BERTINI).

Io dico che essi costituiscono tre categorie distinte. Prima di tutto è chiaro che per le sostituzioni che lasciano fisso il tetraedro aperto dato, la coppia gobba (1 5 · 4 7) non può che tornare in sè stessa e così l'altra coppia non gobba di rette estreme (1 4 · 4 5). Quindi i piani passanti per (1 4) dovranno costituire una categoria diversa rispetto a quelli passanti per (4 7). D'altra parte poichè nella formazione dei piani $A B C D$ non entrano i punti (6) (8) così è chiaro che per lo scambio di questi due punti il tetraedro rimane inalterato, quindi esiste una sostituzione che lascia fisso il tetraedro e che inverte fra loro i due piani di ciascuna delle due prime categorie sopra segnate, e perciò certamente tali due piani saranno fra loro equivalenti.

Resta a far vedere che l'ultimo piano (4 7 · 3 5 · 6 8) costituisce una categoria a sè e non è equivalente ad uno dei due della seconda categoria. Ciò si può vedere assai facilmente, giovandoci dei principii fondamentali. Se il tetraedro aperto deve restar fisso e debbono restar fissi i piani estremi, allora per l'osservazione fatta sopra, dovendo restar fisse in sè le coppie di rette (1 5 · 4 7) (1 4 · 4 5) resteranno addirittura fisse singolarmente queste rette, e quindi anche (4 2), onde resterà fisso il triangolo (1 4 2) e quindi le sostituzioni possibili sono allora solo alcune di quelle che lasciano fissa la caratteristica pari base della rappresentazione (*) che è proprio la somma delle tre caratteristiche dispari corrispondenti ai tre lati del triangolo; ma d'altra parte le sostituzioni che lasciano inalterata la caratteristica pari fondamentale, sono, come sappiamo (**), quelle corrispondenti alle permutazioni degli otto punti fondamentali fra loro, quindi ne possiamo dedurre che le sostituzioni del gruppo totale che lasciano fisso il tetraedro aperto, mentre lasciano fissi anche i piani estremi, sono solo quelle tali permutazioni fra gli otto punti compatibili colla inalterabilità del complesso della figura. E quindi i due piani (4 7 · 3 6 · 5 8) (4 7 · 3 5 · 6 8) non sono equivalenti perchè [dovendo la retta (4 7) restar fissa] dal primo si passerebbe al secondo colle permutazioni di 5 con 6 ovvero di 3 con 8 ovvero colla permutazione circolare (3 6 8 5), e queste non sono permutazioni compatibili colla stabilità del resto della figura. Quindi vi sono cinque piani, divisi in tre categorie, passanti per le rette estreme di D e non per altre rette del tetraedro; così ve ne saranno cinque altre passanti per le rette estreme di A ; in tutto dunque 10 piani divisi in tre categorie di $4 + 4 + 2$.

L'aggiunzione di uno di questi piani dà luogo ad un pentaedro circolare

(*) Vedi Memoria precedente, §§ 8, 23.

(**) Memoria precedente, § 4.

aperto; quindi *vi sono 3 specie di pentaedri circolari aperti*. Ricerchiamo le proprietà caratteristiche di ciascuna di queste specie.

Segniamo qui i piani componenti i pentaedri delle varie specie:

$A \equiv (1542)$ $B \equiv (1342)$ $C \equiv (1372)$ $D \equiv (1472)$ $E_1 \equiv (1462)$ 1.^a specie

$E_2 \equiv (47 \cdot 36 \cdot 58)$ 2.^a specie

$E_3 \equiv (47 \cdot 35 \cdot 68)$ 3.^a specie

ed esistono rispettivamente

1 3 5 · 1 2 8 · 2

1 3 5 · 1 2 8 · 2

1 3 5 · 1 2 8

pentaedri di ciascuna delle tre specie.

Nella prima specie i piani estremi sono riuniti agli altri mediante le due rette (4 2) (1 4) formanti una coppia gobba di rette, mentre nella seconda e terza specie gli spigoli estremi sono (4 2) (4 7) formanti una coppia di rette concorrenti. Ciò costituisce una prima differenza fra la prima e le altre due specie.

Inoltre sopprimiamo successivamente uno dei due piani estremi; restano due tetraedri aperti che, come sappiamo (§ 15), individuano ciascuno un piano con cui formano pentaedri chiusi. Tali due piani complementari sono rispettivamente:

nel 1.^o caso: (1 4 5 2), (1 6 4 2)

nel 2.^o caso: (1 4 5 2), (3 4 · 5 8 · 6 7)

nel 3.^o caso: (1 4 5 2), (3 4 · 6 8 · 5 7),

e, come si vede, nel 1.^o caso i due piani aggiunti e i due tolti formano un tetraedro circolare, e nel 2.^o e 3.^o caso formano invece una coppia di diedri staccati.

Fin qui però il 2.^o e 3.^o caso non ci hanno presentato proprietà diverse; ma prendiamo nel 2.^o e 3.^o caso i piani coniugati della coppia di piani estremi, e della coppia di piani ora trovata.

Nel 2.^o caso si hanno i due piani

(1 7 5 2), (1 8 3 2),

e nel 3.^o caso si hanno i piani

(1 7 3 2), (1 7 3 2),

cioè nel 2.º caso si hanno due piani distinti e nel 3.º si hanno due piani coincidenti.

Possiamo aggiungere un'altra notevole diversità geometrica fra i tre casi.

Il primo, terzo, e quinto piano sono sempre tre piani senza rette comuni. Ora nel 1.º e 2.º caso essi formano un triedro di 1.^a specie, mentre nel 3.º formano un triedro di 2.^a specie.

Da un pentaedro circolare aperto vediamo come si possono formare degli esaedri circolari chiusi.

Il primo evidentemente non può che chiudersi solo col piano

$$F \equiv (1\ 5\ 6\ 2),$$

mentre il secondo può chiudersi con due piani

$$F_1 \equiv (1\ 5\ 8\ 2), \quad F_2 \equiv (5\ 4 \cdot 3\ 6 \cdot 7\ 8),$$

e il terzo coll'unico piano

$$F' \equiv (1\ 5\ 3\ 2),$$

perchè l'altro piano $(5\ 4 \cdot 6\ 8 \cdot 3\ 7)$ con cui anche si chiude il pentaedro aperto ha però la retta $(3\ 7)$ già posseduta da un altro dei piani, e quindi non si avrebbe un vero esaedro circolare chiuso, ma un esaedro spezzato in due tetraedri chiusi.

Si può ora vedere che l'esaedro formato coll'aggiunzione dei piani F_1 , F_2 è della stessa natura di quello formato coll'aggiunzione di F perchè si può far vedere che quei due esaedri contengono ambedue un pentaedro aperto di 1.^a specie, da cui come risulta da quest'analisi non deriva che una sola specie di esaedri. Effettivamente i pentaedri $BCDE_2F_1$, ovvero CDE_2F_2A sono di 1.^a specie avendo gli spigoli estremi $(1\ 3 \cdot 5\ 8)$ $(7\ 2 \cdot 5\ 4)$ formanti coppie gobbe. Si ha dunque:

« Esistono solo *due* specie di esaedri circolari chiusi e sono rappresentati « da $ABCDE_1F$, $ABCDE_2F'$. »

Esaminando questi piani si trova che il primo, delle tre coppie di spigoli opposti, ne ha due non gobbe e una gobba; e il secondo ha tutte tre le coppie di spigoli opposti *non gobbe*. Ciò costituisce una proprietà geometrica caratteristica dei due casi.

Possiamo anche aggiungere:

« Non esistono esaedri chiusi in cui le tre coppie di spigoli opposti sono « tutte gobbe. »

E ancora:

« Esistono $135 \cdot 128$ esaedri circolari chiusi di 1.^a specie, e $45 \cdot 64$ esaedri circolari chiusi di 2.^a specie. »

considerando che un esaedro di 1.^a, per le cose dette, contiene due pentaedri aperti di 1.^a, e uno esaedro di 2.^a, contiene invece 6 pentaedri aperti di 3.^a specie.

Possiamo subito dimostrare una proprietà dei due esaedri.

Consideriamo nell'uno e nell'altro le due terne di piani *non consecutivi*; si hanno tre piani senza rette, e che, come si riconosce subito, nel 1.^o caso formano sempre un triedro di 1.^a specie, e nel secondo formano sempre un triedro di 2.^a. Dunque:

« Le due specie di esaedri circolari chiusi sono distinte dalla proprietà caratteristica che il primo si può immaginare come il complesso di due convenienti triedri di 1.^a specie coi piani dell'uno intercalati fra i piani dell'altro, e il secondo invece si può immaginare come un'analogha disposizione di due triedri di 2.^a specie. »

Con i piani di un esaedro si possono formare sei tetraedri circolari aperti, sopprimendo ogni volta una coppia di piani consecutivi. Ognuno di questi sei tetraedri, individua, come sappiamo, un piano, e si hanno quindi in generale sei piani. Esaminiamo questi sei piani nei due casi.

Nel primo caso essi sono:

$$\begin{array}{cc} (1\ 4\ 5\ 2) & (1\ 7\ 4\ 2) \\ (1\ 6\ 4\ 2) & (1\ 4\ 3\ 2) \\ (3\ 7 \cdot 5\ 6 \cdot 4\ 8) & (3\ 7 \cdot 5\ 6\ 4\ 8), \end{array}$$

dove si son posti sulla stessa linea quelli che corrispondono a tetraedri aventi i medesimi piani estremi. Si vede intanto che i due dell'ultima linea coincidono, e quindi:

« Fra le tre coppie di tetraedri contenuti nell'esaedro di 1.^a specie, e aventi gli stessi piani estremi, ve n'è una i cui tetraedri sono chiusi da un medesimo piano. »

Gli altri quattro piani formano, come si vede, due diedri staccati e non hanno nessuna retta comune con quel piano unico.

Facendo la considerazione analoga per l'esaedro di 2.^a specie si hanno i 6 piani

$$\begin{array}{cc} (1\ 4\ 5\ 2), & (1\ 4\ 5\ 2) \\ (3\ 4 \cdot 6\ 8 \cdot 5\ 7), & (3\ 4 \cdot 6\ 8 \cdot 5\ 7) \\ (1\ 7\ 3\ 2), & (1\ 7\ 3\ 2), \end{array}$$

cioè si hanno tre coppie di piani coincidenti, e il triedro formato con questi tre piani, è, come si vede, di 3.^a specie, onde:

« Le tre coppie di tetraedri circolari aperti contenuti nell'esaedro chiuso « di 2.^a specie, risultano di tetraedri che sono chiusi dal medesimo piano, e « i tre piani che così si ottengono formano un triedro di 3.^a specie. »

§ 17. Gruppi di sostituzioni per i pentaedri circolari aperti.

Vogliamo ricercare i gruppi di sostituzioni rispettivamente per i pentaedri delle tre specie. Per quello di 1.^a specie osserviamo che tali sostituzioni dovranno lasciare fissa la retta (3 7) del piano medio *C*, e al massimo permutare fra loro le altre due rette (3 4) (4 7) dei piani *B*, *D*. Quindi in ogni caso tali sostituzioni lasceranno fisso il triangolo (3 4 7) e quindi, per un principio già invocato (§ 16), esse corrisponderanno solo a permutazioni fra alcuni degli otto punti fondamentali. Il punto (4) deve restar fisso dovendo restar fissa la retta (3 7) e il triangolo (4 3 7). I due punti 3, 7 possono scambiarsi fra loro, scambiandosi allora però anche fra loro i punti 1, 2 perchè il piano *B* si scambia col piano *D*, e dovendo poi *A* scambiarsi con *E*₁, si permuteranno i punti 5, 6. Dunque il gruppo del pentaedro di 1.^a specie contiene solo due sostituzioni che sono rappresentate da

$$[1, (1\ 2)(3\ 7)(5\ 6)].$$

Passando al pentaedro di 2.^a specie osserviamo che l'assieme delle tre rette (3 4) (3 7) (1 4) deve restar fisso, e così l'assieme dei quattro spigoli che sono:

$$(4\ 2) (1\ 3) (7\ 2) (4\ 7),$$

e propriamente le sostituzioni del gruppo debbono tutte, o lasciare le suddette rette inalterate, o trasformare rispettivamente

$$3\ 4 \cdot 3\ 7 \cdot 1\ 4 \cdot 4\ 2 \cdot 1\ 3 \cdot 7\ 2 \cdot 4\ 7$$

in

$$1\ 4 \cdot 3\ 7 \cdot 3\ 4 \cdot 4\ 7 \cdot 7\ 2 \cdot 1\ 3 \cdot 4\ 2.$$

Una tale sostituzione lascerà certamente inalterata la retta (1 7) che colle prime tre di quelle forma un quadrilatero-zero.

Per stabilire una tale sostituzione possiamo servirci della rappresentazione mediante i sistemi completi di ARONHOLD di cui abbiamo estesamente discorso

nella Memoria precedente (*), e costruire uno dei *due* sistemi completi contenenti la quaterna $1\ 2 \cdot 1\ 7 \cdot 1\ 4 \cdot 13$, per es. il sistema completo

$$1\ 2 \cdot 1\ 7 \cdot 1\ 4 \cdot 1\ 3 \cdot 1\ 5 \cdot 1\ 6 \cdot 1\ 8,$$

e trasformarlo in uno *dei due* contenenti la quaterna $1\ 2 \cdot 1\ 7 \cdot 3\ 4 \cdot 2\ 7$, per es. in

$$1\ 2 \cdot 1\ 7 \cdot 3\ 4 \cdot 2\ 7 \cdot 3\ 6 \cdot 3\ 5 \cdot 3\ 8.$$

La corrispondenza riguardo alle prime quattro rette non è arbitraria; quella delle altre deve stabilirsi colla condizione che si verifichino le trasformazioni stabilite sopra, ovvero, più generalmente, che il pentaedro resti fisso. Dovendo il piano A diventare il piano E_2 deve (1 5) trasformarsi univocamente in (3 6), e dovendo poi (3 6) di E_2 diventare una retta di A si vede subito che (1 6) deve diventare (3 5) e non (3 8), e quindi la sostituzione resta tutta definita. L'altro sistema completo in cui potrebbe trasformarsi il primo è:

$$1\ 2 \cdot 1\ 7 \cdot 3\ 4 \cdot 2\ 7 \cdot 4\ 6 \cdot 4\ 5 \cdot 4\ 8,$$

ma allora la retta (1 5) dovrebbe diventare una delle ultime tre di questa linea, e ciò contrasta colle inalterabilità del pentaedro. Quindi:

« Anche il gruppo del pentaedro di 2.^a specie possiede due sole sostituzioni che sono, l'unità e quella rappresentata da

$$\begin{pmatrix} 1\ 7 \cdot 1\ 4 \cdot 1\ 3 \cdot 1\ 5 \cdot 1\ 6 \cdot 1\ 8 \\ 1\ 7 \cdot 3\ 4 \cdot 2\ 7 \cdot 3\ 6 \cdot 3\ 5 \cdot 3\ 8 \end{pmatrix};$$

« questa seconda inverte l'ordine dei piani nel pentaedro. »

Pel pentaedro di 3.^a specie gli spigoli sono rispettivamente gli stessi di prima, e possiamo sino ad un certo punto fare considerazioni perfettamente analoghe. Solo che le tre ultime rette $1\ 5 \cdot 1\ 6 \cdot 1\ 8$ del primo sistema completo non le dobbiamo più mutare in $3\ 6 \cdot 3\ 5 \cdot 3\ 8$ rispettivamente, ma dovendo (1 5) di A trasformarsi o in (3 5) o in (6 8) di E_3 si vede che non resta altra possibilità che trasformarlo unicamente in (3 5). In quanto poi alla corrispondenza fra le altre due rette $1\ 6 \cdot 1\ 8$ con $3\ 6 \cdot 3\ 8$ è facile convincersi che essa è arbitraria perchè il pentaedro di 3.^a specie $ABCDE_3$ non si altera per lo scambio di 6 con 8. Quindi:

« Il gruppo del pentaedro di 3.^a specie possiede 4 sostituzioni di cui la prima è l'unità, la seconda è corrispondente allo scambio dei punti rappre-

(*) Vedi § 23.

« sentativi (6), (8), e queste non spostano i piani del pentaedro; le altre due
« sono date rispettivamente da

$$\begin{pmatrix} 1\ 7 \cdot 1\ 4 \cdot 1\ 3 \cdot 1\ 5 \cdot 1\ 6 \cdot 1\ 8 \\ 1\ 7 \cdot 3\ 4 \cdot 2\ 7 \cdot 3\ 5 \cdot 3\ 6 \cdot 3\ 8 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1\ 7 \cdot 1\ 4 \cdot 1\ 3 \cdot 1\ 5 \cdot 1\ 6 \cdot 1\ 8 \\ 1\ 7 \cdot 3\ 4 \cdot 2\ 7 \cdot 3\ 5 \cdot 3\ 8 \cdot 3\ 6 \end{pmatrix},$$

« e queste invertono l'ordine dei piani. »

§ 18. Esaedri circolari aperti.

Abbiamo visto nel paragrafo precedente che i tre pentaedri aperti sono simmetrici sia a destra che a sinistra, cioè che esistono sempre sostituzioni che scambiano la parte destra colla parte sinistra. Per passare allora agli esaedri, noi possiamo continuare ad aggiungere il sesto piano da una parte sola per es. a destra. Per le rette libere dell'ultimo piano a destra (piani *E*) noi dobbiamo far passare altri piani che non abbiano altre rette in comune con tutto il pentaedro.

Tali piani sono:

pel 1.º pentaedro:

$$F_1 \equiv (4\ 6 \cdot 3\ 8 \cdot 5\ 7)$$

$$F_2 \equiv (4\ 6 \cdot 3\ 5 \cdot 7\ 8)$$

$$F_3 \equiv (1\ 7\ 6\ 2)$$

$$F_4 \equiv (1\ 8\ 6\ 2)$$

pel 2.º pentaedro:

$$F_5 \equiv (1\ 6\ 3\ 2) \quad F_5' \equiv (1\ 8\ 5\ 2)$$

$$F_6 \equiv (3\ 6 \cdot 5\ 7 \cdot 4\ 8)$$

pel 3.º pentaedro:

$$F_7' \equiv (5\ 3 \cdot 4\ 6 \cdot 7\ 8)$$

$$F_7'' \equiv (5\ 3 \cdot 4\ 8 \cdot 7\ 6)$$

$$F_8' \equiv (1\ 6\ 8\ 2)$$

$$F_8'' \equiv (1\ 8\ 6\ 2).$$

Pel 1.º e 2.º pentaedro non essendoci alcuna sostituzione (oltre 1) che lasci inalterati i piani *E* (v. § 17) si ha che i piani *F* ci si presentano come *non equivalenti* fra loro, e quindi danno luogo ad altrettante specie distinte di esaedri.

Per i quattro piani poi relativi al 3.^o pentaedro, si vede che essi si riuniscono in 2 coppie, un elemento di una coppia ricavandosi dall'altro permutando i punti (6) e (8), la qual permutazione, come abbiamo detto nel paragrafo precedente, non altera i piani del pentaedro. Ora però possiamo far vedere che gli esaedri veramente distinti sono quelli che si hanno aggiungendo solo i primi sei piani F . Un esaedro aperto contiene evidentemente due pentaedri aperti che potremo chiamare pentaedro a destra e a sinistra.

Ora coi piani $F_5', F_8', (F_8'')$ si verifica subito che il secondo pentaedro, contenendo gli spigoli estremi formanti una coppia gobba, è un pentaedro di 1.^a specie, e quindi gli esaedri corrispondenti saranno certamente compresi fra i primi quattro che si ottengono sopra.

Inoltre si può analogamente verificare che il pentaedro a destra degli esaedri ottenuti coi piani $F_7', (F_7'')$ è di 2.^a specie, e quindi quelli esaedri non sono diversi da alcuni dei precedenti; onde infine possiamo dire:

« Esistono sei diverse specie di esaedri aperti, e sono rispettivamente « rappresentate dagli esaedri:

$$\begin{aligned} &ABCDE_1F_1 \\ &ABCDE_1F_2 \\ &ABCDE_1F_3 \\ &ABCDE_1F_4 \\ &ABCDE_2F_5 \\ &ABCDE_2F_6. \text{ »} \end{aligned}$$

Esaminando poi la coppia di pentaedri contenuta in ciascuno di questi esaedri si può aggiungere:

« L'esaedro di 1.^a specie ha 2 pentaedri di 1.^a specie

« " 2.^a " 2 " 1.^a "

« " 3.^a " 1 pentaedro di 1.^a " e uno di 3.^a specie

« " 4.^a " 1 " 1.^a " " 2.^a "

« " 5.^a " 1 " 2.^a " " 3.^a "

« " 6.^a " 2 pentaedri di 2.^a "

Si vede dunque che, a cominciare dagli esaedri, comincia a verificarsi questo fatto nuovo, che le due braccia (diciamo così) del poliedro non sono più equivalenti, cioè permutabili fra loro.

Possiamo anche dire:

« Non esistono esaedri aperti in cui i due pentaedri sieno ambedue di 3.^a specie. »

Dal quadro precedente si vede che, salvo i due primi, tutti gli altri esaedri si possono fra loro differenziare per rispetto ai pentaedri in essi contenuti.

Potrebbe venire qui il dubbio che i due primi fossero lo stesso, che cioè pur non esistendo una sostituzione che muti ordinatamente i piani $ABCDE, F_1$ in $ABCDE, F_2$, esista invece una sostituzione che muti i primi piani ordinatamente in $F_2E, DCBA$. Noi faremo ora vedere che ciò non è; e allora ci risulterà anche una proprietà che differenzia le due prime specie.

Lo spigolo medio di ciascuno dei due esaedri è sempre (27), e le rette libere dei piani estremi sono rispettivamente

$$15 \cdot 54; \quad 38 \cdot 57$$

$$15 \cdot 54; \quad 35 \cdot 78.$$

La retta (27) nel primo caso incontra solo $15 \cdot 57$ che a loro volta si incontrano; e nel secondo invece la medesima retta incontra $15 \cdot 78$ che non si incontrano più. Dunque:

« L'esaedro di 1.^a si differenzia dall'esaedro di 2.^a perchè in esso lo spigolo medio insieme a due rette libere dei piani estremi forma un piano, e « nel secondo invece il medesimo spigolo incontra una coppia gobba di rette « libere dei piani estremi. »

§ 19. Poliedri circolari *principali*.

Massimo ordine dei poliedri circolari.

Per i poliedri circolari *aperti* possiamo proporci il problema analogo a quello proposto dal prof. BERTINI per i poliedri ordinarii, e da noi anche trattato nel § 13; cioè possiamo chiedere se esistono e quali sono, poliedri circolari aperti (oltre quelli di ordine (*) massimo) che non sieno più contenuti in altri di ordine maggiore, cioè tali che qualunque altra faccia ad essi si aggiunga, questa, oltre lo spigolo che ha comune colla faccia precedente, venga a contenere sempre una retta appartenente già al poliedro primitivo.

Adoperando anche qui la denominazione di BERTINI, un tale poliedro circolare lo chiameremo *principale*.

(*) Per *ordine* di un poliedro intendiamo, al solito, il numero delle sue facce.

Noi ci proponiamo di esaminare quali sono, cioè di quali ordini possono essi essere, e contemporaneamente giungeremo a scoprire qualcosa riguardo al massimo ordine dei poliedri circolari aperti e chiusi. Giacchè è chiaro che un poliedro circolare aperto di ordine n contiene in tutto $2n + 1$ rette della superficie cubica, e un poliedro chiuso contiene invece $2n$ rette; quindi poichè in tutto le rette sono 27 parrebbe a prima vista che si potessero costruire poliedri aperti sino all'ordine 13, e poliedri chiusi sino anche all'ordine 13. Noi invece troveremo che di tali ordini non esistono nè poliedri aperti, nè chiusi, e che l'ultimo ordine che si può raggiungere è il 12.^{mo}.

Cominciamo coll'esaminare partitamente i sei esaedri aperti del § 18.

Le rette esterne al 1.^o di essi sono:

$$16 \cdot 17 \cdot 18 \cdot 23 \cdot 25 \cdot 28 \cdot 35 \cdot 36 \cdot 48 \cdot 56 \cdot 58 \cdot 67 \cdot 68 \cdot 78,$$

colle quali si possono formare solo i sei piani

$$(1632) \equiv I$$

$$(1652) \equiv II$$

$$(1682) \equiv III$$

$$(1782) \equiv IV$$

$$(1852) \equiv V$$

$$(35 \cdot 48 \cdot 67) \equiv VI.$$

Dobbiamo esaminare come questi piani possono aggiungersi a destra o a sinistra dell'esaedro di 1.^a specie in maniera da formare poliedri aperti di ordine superiore.

E prima di tutto osserviamo che l'esaedro di cui si parla è simmetrico rispetto alle sue due estremità, come anche l'esaedro di 2.^a specie e quello di 6.^a, come risulta dal paragrafo precedente. E quindi per tali esaedri basterà fare la considerazione solo per un braccio, dovendo accadere pel braccio opposto la cosa analoga a quella che si troverà accadere da una parte. Ciò servirà ad abbreviare la nostra ricerca.

Consideriamo dunque il braccio a destra, e allora i soli piani che si possono riunire ad F_1 sono:

$$(1832) \equiv a$$

$$(1752) \equiv b$$

e ci resta da esaminare in quanti modi ad uno di questi piani possiamo far succedere una catena di piani scelti successivamente fra i sei segnati sopra.

Ora questo lavoro lo possiamo fare con un metodo grafico nella seguente maniera.

Segniamo sei punti ognuno dei quali stia a rappresentare uno dei sei piani di sopra (vedi fig. XXI), e uniamo con rette quei punti che rappresentano piani aventi rette comuni.

Sul medesimo disegno poi poniamo altri tre punti che rappresentino i piani a , b , c , e analogamente riuniamo questi punti con quelli dei precedenti rappresentanti piani con cui a , b , c hanno rispettivamente rette comuni.

Allora sulla figura che ne risulta dobbiamo rintracciare tutti i cammini continui partenti da a , b , c , e non passanti mai per punti che sulla figura stieno congiunti con altri pei quali già precedentemente si è passati. Così per es. (fig. XXI) il cammino a I III IV è uno da considerarsi, ma l'altro a I III II non è da considerarsi perchè il punto II sulla figura è già congiunto con I, e la successione di piani rappresentata da quel cammino conterrebbe i tre piani I II III passanti tutti per la medesima retta (16) cosa che non può accadere in un poliedro circolare.

In tal maniera si trova che i cammini possibili sono:

a I III IV	b V	c VI
a I II	b II I	c I II V
a V II III IV	b II III	c I III IV
	b IV III I	

e possiamo conchiudere che al di là dei piani estremi corrispondenti a ciascuno di tali cammini, non esistono altri da potere aggiungere. Ognuno di questi cammini dunque corrisponderà ad un poliedro circolare aperto *principale* cui appartiene l'esaedro dato. Onde (tenendo presente l'osservazione fatta riguardo alla simmetria dei due bracci):

« Un esaedro circolare aperto di 1.^a specie è contenuto (come esaedro di « termine) in quattro ottaedri principali, in sei ennaedri principali, in otto decaedri principali, e finalmente in due soli endecaedri principali. »

In tal maniera veniamo anche a scoprire l'esistenza degli ottaedri principali che adesso potremmo anche costruire.

Non ci resta ora che rifare un lavoro perfettamente analogo per gli altri cinque esaedri.

Per quello di 2.^a specie, le rette esterne sono:

$$1\ 6 \cdot 1\ 7 \cdot 1\ 8 \cdot 2\ 3 \cdot 2\ 5 \cdot 2\ 8 \cdot 3\ 6 \cdot 3\ 8 \cdot 4\ 8 \cdot 5\ 6 \cdot 5\ 7 \cdot 5\ 8 \cdot 6\ 7 \cdot 6\ 8,$$

e i piani che possono formarsi con queste rette sono:

$$\begin{aligned} (1\ 6\ 3\ 2) &\equiv \text{I} & (1\ 6\ 5\ 2) &\equiv \text{II} & (1\ 6\ 8\ 2) &\equiv \text{III} \\ (1\ 7\ 5\ 2) &\equiv \text{IV} & (1\ 8\ 3\ 2) &\equiv \text{V} & (1\ 8\ 5\ 2) &\equiv \text{VI} & (5\ 7 \cdot 3\ 6 \cdot 4\ 8) &\equiv \text{VII}, \end{aligned}$$

mentre i piani da potersi aggiungere direttamente ad F_2 sono:

$$(1\ 7\ 8\ 2) \equiv a \quad (3\ 5 \cdot 4\ 8 \cdot 6\ 7) \equiv b,$$

e cogli stessi principii di avanti costruiamo la fig. XXII, dalla quale ricaviamo i cammini possibili:

$$\begin{array}{ll} a \text{ III I V VI} & b \text{ VII IV II III} \\ a \text{ III I VII} & b \text{ VII IV VI V} \\ a \text{ III II VI V} & b \text{ VII I III} \\ a \text{ IV II I V} & b \text{ VII I II VI} \\ a \text{ IV VI V I} & b \text{ VII I V VI} \\ a \text{ IV VII I V}, & \end{array}$$

e quindi:

« L'esaedro circolare aperto di 2.^a specie appartiene (come esaedro di « termine) a quattro decaedri principali, e a 18 endecaedri principali. »

Per gli altri tre esaedri seguenti non si può fare la ricerca solamente dal lato sinistro, come abbiamo fatto ora, e poi raddoppiare i risultati, ma bisogna farla separatamente da ambo i lati, perchè, come abbiamo osservato, quelli esaedri non sono simmetrici dalle due parti.

Le rette esterne al nostro esaedro di 3.^a specie sono:

$$1\ 6 \cdot 1\ 8 \cdot 2\ 3 \cdot 2\ 5 \cdot 2\ 8 \cdot 3\ 5 \cdot 3\ 6 \cdot 3\ 8 \cdot 4\ 8 \cdot 5\ 6 \cdot 5\ 7 \cdot 5\ 8 \cdot 6\ 8 \cdot 7\ 8,$$

e i piani formati con queste rette sono:

$$\begin{aligned} (1\ 6\ 3\ 2) &\equiv \text{I} & (1\ 6\ 5\ 2) &\equiv \text{II} & (1\ 6\ 8\ 2) &\equiv \text{III} & (1\ 8\ 3\ 2) &\equiv \text{IV} \\ (1\ 8\ 5\ 2) &\equiv \text{V} & (4\ 8 \cdot 5\ 7 \cdot 3\ 6) &\equiv \text{VI}, \end{aligned}$$

mentre al solito i piani dalla parte destra possono essere solo

$$(1\ 7\ 5\ 2) \equiv a \quad (1\ 7\ 8\ 2) \equiv b \quad (6\ 7 \cdot 4\ 8 \cdot 3\ 5) \equiv c,$$

e da sinistra

$$(1\ 5\ 3\ 2) \equiv a' \quad (1\ 5\ 8\ 2) \equiv b' \quad (4\ 5\ 6\ 3\cdot 7\ 8) \equiv c',$$

e si hanno rispettivamente le successioni:

$$\begin{array}{lll} a & \text{VI I III} & b & \text{III I IV V} & c & \text{VI I IV V} \\ a & \text{VI I IV} & b & \text{III I VI} & c & \text{VI I III} \\ a & \text{V IV I III} & b & \text{III II V IV} & c & \text{VI I II V} \\ a & \text{II I IV} & & & & \\ a & \text{II III} & & & & \\ a' & \text{I III} & b' & \text{III I IV V} & c' & \text{I IV V} \\ a' & \text{I II V} & b' & \text{III I VI} & c' & \text{I II V} \\ a' & \text{I VI} & b' & \text{III II} & c' & \text{I III} \\ a' & \text{IV V II III} & b' & \text{V II I VI} & c' & \text{VI} \\ & & b' & \text{V IV I VI} & & \end{array}$$

« L'esaedro di 3.^a specie appartiene (come esaedro di termine) ad un solo
« ottaedro principale, a 5 enneaedri, a 9 decaedri, e a 9 endecaedri tutti
« principali. »

Le rette esterne al nostro esaedro di 4.^a specie sono:

$$1\ 6\cdot 1\ 7\cdot 2\ 3\cdot 2\ 5\cdot 2\ 8\cdot 3\ 5\cdot 3\ 6\cdot 3\ 8\cdot 4\ 8\cdot 5\ 6\cdot 5\ 7\cdot 5\ 8\cdot 6\ 7\cdot 7\ 8,$$

e i piani con queste formati sono:

$$\begin{array}{llll} (1\ 6\ 3\ 2) \equiv \text{I} & (1\ 6\ 5\ 2) \equiv \text{II} & (1\ 7\ 5\ 2) \equiv \text{III} & (1\ 7\ 8\ 2) \equiv \text{IV} \\ & (4\ 8\cdot 5\ 7\cdot 3\ 6) \equiv \text{V} & (4\ 8\cdot 3\ 5\cdot 6\ 7) \equiv \text{VI}, & \end{array}$$

mentre i piani a destra e a sinistra sono:

$$\begin{array}{llll} (1\ 8\ 3\ 2) \equiv a & (1\ 8\ 5\ 2) \equiv b & (1\ 6\ 8\ 2) \equiv c & \\ (1\ 5\ 3\ 2) \equiv a' & (1\ 5\ 8\ 2) \equiv b' & (4\ 5\cdot 6\ 7\cdot 3\ 8) \equiv c' & (4\ 5\cdot 6\ 3\cdot 7\ 8) \equiv d', \end{array}$$

e si può formare la fig. XXIV, da cui si ricavano le successioni:

$$\begin{array}{lll} a & \text{I II III IV} & b & \text{II I V IV} & c & \text{I V III} \\ a & \text{I V III IV} & b & \text{III IV} & c & \text{I V VI} \\ a & \text{I V VI} & b & \text{III V I} & c & \text{II III V VI} \\ & & b & \text{III V VI} & c & \text{IV III V VI} \end{array}$$

a' I II III IV	b' IV III II I	c' VI V I II	d' I II III
a' I V III IV	b' IV III V I	c' VI V III II	d' V III
a' VI V III II	b' IV III V VI	c' VI V III IV	d' V VI
a' VI V III IV			d' IV III II.

« L'esaedro di 4.^a specie appartiene a 3 enneaedri, 7 decaedri, e 15 en-
« decaedri principali. »

Per l'esaedro di 5.^a specie le rette e i piani esterni sono rispettivamente:

$$17 \cdot 18 \cdot 25 \cdot 26 \cdot 28 \cdot 35 \cdot 36 \cdot 46 \cdot 48 \cdot 56 \cdot 57 \cdot 67 \cdot 68 \cdot 78$$

$$(1752) \equiv I \quad (1762) \equiv II \quad (1782) \equiv III \quad (1862) \equiv IV$$

$$(35 \cdot 46 \cdot 78) \equiv V \quad (35 \cdot 48 \cdot 67) \equiv VI \quad (38 \cdot 46 \cdot 57) \equiv VII,$$

mentre i piani a destra e sinistra sono:

$$(1852) \equiv a \quad (1682) \equiv b \quad (1832) \equiv c$$

$$(1562) \equiv a' \quad (45 \cdot 67 \cdot 38) \equiv b'$$

e si costruisce al solito la fig. XXV, da cui ricaviamo le successioni:

a I III V VI	b III I VII	c VII I II VI
a I VII V VI	b III V VII	c VII I III
a I II VI V	b III II VI	c VII V III II
a I II IV	b III V VI	c VII V VI II
	b IV II VI V VII	c IV II VI V
	b IV II I VII V	c IV II III V
		c IV II I
a' IV	b' II IV	
a' II VI V VII	b' II I	
a' II I VII V	b' II III V	
a' II III V VII	b' VI V III I	
	b' VII V III	
	b' VII I III.	

« L'esaedro di 5.^a specie appartiene ad 1 ottaedro, 2 enneaedri, 10 de-
« caedri, 12 endecaedri, 2 dodecaedri tutti principali. »

Incontriamo dunque qui per la prima volta i dodecaedri aperti; essi si ottengono aggiungendo convenientemente una rete di piani da quel braccio dell'esaedro di 5.^a specie, da cui sta il pentaedro di 3.^a specie. Si vede che le due rette esterne a quei due *dodecaedri* sono rispettivamente:

$$\begin{array}{cc} 25, & 56 \\ 48, & 56, \end{array}$$

cioè formano in ambo i casi una coppia di rette concorrenti; ma è anche facile vedere che non si può chiudere con un piano, passante per una di queste rette, nessuno di quei dodecaedri aperti, e quindi non si può con essi formare un poliedro chiuso di 13 facce.

Passando finalmente all'esaedro di 6.^a specie (che è simmetrico nei due suoi bracci, e quindi basterà considerare solo un lato per es. il destro), si ha che le rette e i piani esterni sono:

$$\begin{array}{l} 16 \cdot 17 \cdot 18 \cdot 23 \cdot 25 \cdot 26 \cdot 28 \cdot 35 \cdot 38 \cdot 46 \cdot 56 \cdot 67 \cdot 68 \cdot 78 \\ (1762) \equiv I \quad (1782) \equiv II \quad (1652) \equiv III \quad (1682) \equiv IV \\ (1832) \equiv V \quad (1862) \equiv VI \quad (35 \cdot 46 \cdot 78) \equiv VII, \end{array}$$

mentre i piani a destra sono:

$$(1752) \equiv a \quad (57 \cdot 46 \cdot 38) \equiv b \quad (48 \cdot 35 \cdot 67) \equiv c.$$

Si costruisce la fig. XXVI nel solito modo, e se ne ricava:

$$\begin{array}{lll} a \text{ I VI V} & b \text{ V VI I II} & c \text{ I VI V} \\ a \text{ I VI IV} & b \text{ V VI IV III} & c \text{ I VI IV III} \\ a \text{ II IV VI V} & b \text{ VII II I VI} & c \text{ I II IV III} \\ a \text{ II VII} & b \text{ VII II IV VI} & c \text{ VII II IV III} \\ a \text{ III IV VI V} & b \text{ VII II IV III} & c \text{ VII II IV VI V.} \end{array}$$

« L'esaedro di 6.^a specie appartiene a 2 enneaedri, 6 decaedri, 20 en-decaedri, 2 dodecaedri, tutti principali. »

Anche qui, come si vede, compariscono i dodecaedri. Le rette esterne ad uno di essi sono qui 25 · 56 formanti anche una coppia di rette concorrenti. E anche qui si può verificare che se si vuol chiudere con un piano uno dei due dodecaedri, non si può trovare un piano che non abbia contem-

poraneamente rette in comune con altri piani del poliedro; e quindi neanche qui possono formarsi poliedri chiusi di 13.^{mo} ordine.

In quanto poi ai dodecaedri chiusi non è difficile vedere che essi effettivamente esistono; così per es. abbiamo trovato che il nostro esaedro di 1.^a specie appartiene all'endecaedro principale ottenuto aggiungendo ad esso a destra successivamente i piani:

$$(1\ 8\ 3\ 2) \quad (1\ 8\ 5\ 2) \quad (1\ 6\ 5\ 2) \quad (1\ 6\ 8\ 2) \quad (1\ 7\ 8\ 2),$$

e questo endecaedro può chiudersi col piano $(5\ 4 \cdot 7\ 8 \cdot 3\ 6)$ in maniera da formare un dodecaedro chiuso.

Possiamo dunque concludere:

« Esistono poliedri aperti e chiusi sino all'ordine 12, e non oltre. Esistono poliedri circolari aperti principali di soli cinque ordini, cioè dagliottaedri sino ai dodecaedri.

« Le due rette lasciate libere da un dodecaedro aperto, formano sempre una coppia di rette concorrenti.

« Gli esaedri delle prime quattro specie non sono contenuti (come esaedri *terminali*) in nessun dodecaedro principale; quelli delle altre due specie vi sono invece contenuti.

« Solamente gli esaedri di 1.^a 3.^a 5.^a specie sono contenuti (come esaedri *terminali*) in ottaedri principali. »

E colle tavole stabilite sopra avremmo anche il mezzo di ricavare una gran quantità di altri teoremi; come per es.:

« Gli esaedri di 3.^a e 5.^a specie sono contenuti (sempre come esaedri di *termine*) in un solo ottaedro principale che si ottiene da essi aggiungendovi successivamente due piani dalla parte da cui essi contengono i pentaedri rispettivamente di 1.^a e di 2.^a specie, e non dalla parte opposta.

« Un dodecaedro (principale) aperto termina sempre con pentaedri di 2.^a specie, e mai con pentaedri di 1.^a o 3.^a specie. »

E così altri ancora che per brevità tralasciamo.

Prima di por termine a questo capitolo dobbiamo avvertire espressamente una cosa che del resto risulta evidente dopo tutta l'analisi precedentemente fatta; ed è che ogni volta in cui ci è accaduto di scrivere delle frasi come queste: *il tal esaedro appartiene al tal poliedro principale*, abbiamo sempre inteso dire che ci appartiene come *esaedro terminale*, cioè che quel tal poliedro principale in uno degli estremi termina con quell'esaedro.

§ 20. Considerazioni sul metodo adoperato in queste ricerche.

Lo scopo essenziale che ci siamo proposti in questi lavori sulla configurazione delle 27 rette di S_3 , e in altri sulla configurazione delle 28 tangenti doppie di C_4 (Lincei-Rendiconti, 1892-93) è stato di studiare aggruppamenti finora affatto o poco considerati, e di studiarli in relazione ai gruppi e sottogruppi di sostituzioni che a loro corrispondono. Però non è male dire qualche parola sul metodo col quale abbiamo abitualmente proceduto nella ricerca. Esso è, si può dire, un metodo *grafico*, e che appunto per questa sua qualità è capace di rappresentarci in modo più intuitivo le proprietà di configurazione. Ma si ingannerebbe chi credesse che si tratti di un metodo sostanzialmente diverso da quello che risulta dalla conosciuta notazione di HESSE e ARONHOLD per le tangenti doppie della C_4 (*) e dalla notazione di SCHLAEFLI per le rette di S_3 (**).

Nella nostra maniera in fondo non si fa che ridurre sotto forma grafica queste medesime notazioni, il che qualche volta è un non lieve vantaggio. Ciò risulta senz'altro dagli stessi principii che abbiamo adoperato nella Memoria precedente, dove abbiamo appunto applicati gli studii di HESSE e ARONHOLD sulle tangenti doppie di C_4 , alle caratteristiche di genere 3 che erano state studiate da WEBER, ma adoperando la notazione solita che si usa per le caratteristiche di genere qualunque.

In quanto alla notazione di SCHLAEFLI essa notoriamente è la seguente. Indichiamo con

$$\begin{array}{cccccc} a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & a_7 & a_8 \\ b_3 & b_4 & b_5 & b_6 & b_7 & b_8, \end{array}$$

le rette di una bisestupla di S_3 e con c_{ik} la retta che incontra $a_i b_k$, $a_k b_i$. Ora facciamo le seguenti modificazioni: in luogo di a poniamo il numero 1, e in luogo di b il numero 2, e sopprimiamo il simbolo c , e alteriamo poi leggermente la scrittura.

Si vede che allora possiamo rappresentare le 27 rette con

$$\begin{array}{l} (1\ 3)(1\ 4)(1\ 5)(1\ 6)(1\ 7)(1\ 8) \\ (2\ 3)(2\ 4)(2\ 5)(2\ 6)(2\ 7)(2\ 8) \\ (ik) \quad (i, k = 3, 4, \dots 8). \end{array}$$

(*) Vedi per es. SALMON, *Higher plane curves* tradotto da FIEDLER, Cap. VI.

(**) Vedi per es. CREMONA, *Crelle*, tom. 68, pag. 76 e seg.

Ciò ci mostra subito che se consideriamo otto punti, e li congiungiamo a due a due con 28 rette, e sopprimiamo la retta (1 2), le altre 27 possono rappresentare, opportunamente interpretate, le 27 rette di S_3 , e così si ricade appunto nella figura fondamentale che noi abbiamo sempre adoperata. Per noi questi 8 punti sono gli 8 punti basi di una rete di quadriche; nella notazione di SCHLAEFLI invece i 6 punti 3, 4, ... 8 sono 6 punti della rappresentazione piana di S_3 .

Milano, estate del 1892.

I N D I C E.

- § 1. Sottogruppo di sostituzioni che lasciano fisso un piano tritangente.
- § 2. Sottogruppo di sostituzioni che lasciano fisso il complesso di due piani passanti per una retta.
- § 3. Sottogruppo di sostituzioni che lasciano fisso il complesso di due piani non aventi rette comuni. — Gruppo del triedro di 3.^a specie.
- § 4. Triedri di varie specie.
- § 5. Gruppo di sostituzioni che lasciano fisso un triedro di 1.^a specie.
- § 6. Gruppo di sostituzioni per un triedro di 2.^a specie.
- § 7. Tetraedri di quattro specie.
- § 8. Gruppo di sostituzioni che lasciano fisso un tetraedro di 1.^a specie.
- § 9. Gruppo di sostituzioni che lasciano fisso un tetraedro di 2.^a specie.
- § 10. Gruppo del tetraedro di 3.^a specie.
- § 11. Gruppo del tetraedro di 4.^a specie e del pentaedro *principale*.
- § 12. Pentaedri di varie specie.
- § 13. Alcuni teoremi sui pentaedri. — Poliedri principali.
- § 14. Poliedri circolari aperti e chiusi. — Tetraedri circolari.
- § 15. Tetraedri circolari aperti e pentaedri chiusi.
- § 16. Pentaedri circolari aperti. — Esaedri circolari chiusi.
- § 17. Gruppi di sostituzioni per i pentaedri circolari aperti.
- § 18. Esaedri circolari aperti.
- § 19. Poliedri circolari *principali*. — Massimo ordine dei poliedri circolari.
- § 20. Considerazioni sul metodo adoperato in queste ricerche.

FINE DEL TOMO XX.^o (SERIE II.^a).