

## 16.

Elementarer Beweis eines Fundamentalsatzes aus  
der Theorie der Gleichungen.

(Von dem Herrn Dr. Stern in Göttingen.)

Der folgende Beweis des Satzes, daß jede ganze rationale algebraische Function einer Veränderlichen sich in reelle Factoren vom ersten und zweiten Grade zerlegen läßt, beruht auf demselben Grundgedanken, wie der bekannte Beweis, den *Cauchy* in seinem *cours d'analyse* vorgetragen hat; er scheint mir aber einfacher zu sein und sich besonders zur Aufnahme in die Elemente der Algebra zu eignen.

Sei die Gleichung

$$Fx = x^t + Ax^{t-1} + \dots = 0$$

gegeben. Setzt man für  $x$  irgend einen Werth  $p + q\sqrt{-1}$ , wo  $p$  und  $q$  endliche reelle Werthe sind, so geht  $Fx$  in  $P + Q\sqrt{-1}$  über. Unter den verschiedenen Werthen die  $P$  und  $Q$  erhalten, je nachdem  $p$  und  $q$  andere Werthe annehmen, wird es ein Paar zusammengehörender Werthe von  $P$  und  $Q$  geben, für welche der Modulus  $P^2 + Q^2$  ein Minimum wird. Es soll nun bewiesen werden, daß in diesem Falle nothwendig  $P$  und  $Q$  beide Null sind.

Sei  $p + q\sqrt{-1}$  der Werth von  $x$ , für welchen  $P^2 + Q^2$  ein Minimum wird, und sei nicht zu gleicher Zeit  $P = 0$  und  $Q = 0$ . Man kann zu mehrerer Einfachheit annehmen, daß  $Q$  positiv ist, da man im entgegengesetzten Falle nur  $-q$  statt  $q$  zu setzen braucht. Man setze nun  $p + m$  statt  $p$  und  $q + n$  statt  $q$ , so erhält man, wenn man nach Potenzen von  $m + n\sqrt{-1}$  ordnet,

$$F(p + q\sqrt{-1} + m + n\sqrt{-1}) =$$

$P + Q\sqrt{-1} + (m + n\sqrt{-1})^r (P' + Q'\sqrt{-1}) + (m + n\sqrt{-1})^{r+1} (P'' + Q''\sqrt{-1}) + \dots$ ,  
wo  $r = 1$  oder  $> 1$  ist und  $P', Q', P'', Q'', \dots$  reelle Größen sind, die nicht von  $m$  und  $n$  abhängen. Nun kann man  $m$  und  $n$  so klein annehmen, daß die Glieder, welche mit höheren Potenzen von  $m + n\sqrt{-1}$  multiplicirt sind, gegen das erste, welches die  $r^{\text{te}}$  Potenz enthält, sehr un-

bedeutend werden. Oder mit andern Worten, wenn man  $m + n\sqrt{-1} = \sqrt{(\alpha + \beta\sqrt{-1})}$  setzt, wo  $\alpha$  und  $\beta$  noch unbestimmte Zahlen sind, und die Summe der Glieder

$(m + n\sqrt{-1})^{r+1}(P'' + Q''\sqrt{-1}) + (m + n\sqrt{-1})^{r+2}(P''' + Q'''\sqrt{-1}) \dots$  durch  $a + b\sqrt{-1}$  bezeichnet, wodurch man

$F(p + q\sqrt{-1} + m + n\sqrt{-1}) = P + \alpha P' - \beta Q' + a + (Q + \alpha Q' + \beta P' + b)\sqrt{-1}$  erhält, so kann man immer  $\alpha$  und  $\beta$  so klein annehmen, daß die Werthe von  $a$  und  $b$  auf das Zeichen der Ausdrücke  $\alpha P' - \beta Q' + a$ ,  $\alpha Q' + \beta P' + b$  keinen Einfluss haben, diese Ausdrücke mithin positiv oder negativ werden, je nachdem  $\alpha P' - \beta Q'$  und  $\alpha Q' + \beta P'$  positiv oder negativ sind. Zugleich können  $\alpha$  und  $\beta$  so klein angenommen werden, daß das Zeichen von  $P + \alpha P' - \beta Q'$  mit dem Zeichen von  $P$ , das Zeichen von  $Q + \alpha Q' + \beta P'$  mit dem Zeichen von  $Q$  übereinstimmt. Setzt man nun  $P + \alpha P' - \beta Q' + a = R$ ,  $Q + \alpha Q' + \beta P' + b = S$ , so ist leicht zu zeigen, daß, sobald  $P$  und  $Q$  nicht Null sind, die Werthe von  $\alpha$  und  $\beta$  so gewählt werden können, daß  $R < P$ ,  $S < Q$ , mithin der Modulus  $R^2 + S^2$  kleiner als der Modulus  $P^2 + Q^2$  ist; gegen die Voraussetzung. Denn man gebe  $\alpha$  das entgegengesetzte Zeichen von  $Q'$  und  $\beta$  das entgegengesetzte Zeichen von  $P'$ , so ist  $\alpha Q' + \beta P'$  negativ, also  $S < Q$ . Setzt man nun ferner, je nachdem  $P$  positiv oder negativ ist, die Zahlenwerthe von  $\alpha$  und  $\beta$  so, daß der Werth von  $\alpha P' - \beta Q'$  negativ oder positiv wird \*), so ist auch  $P + \alpha P' - \beta Q' < P$  und mithin  $R < P$ .

Im Vorhergehenden wurde vorausgesetzt, daß  $P$  und  $Q$  beide nicht Null werden. Der Beweis bliebe derselbe, wenn man annehmen wollte, daß nur eine dieser Größen, z. B.  $P$ , Null würde. Denn in diesem Falle hätte man  $R = \alpha P' - \beta Q' + a$ ,  $S = Q + \alpha Q' + \beta P' + b$ .

Daß aber der Modulus  $[\alpha P' - \beta Q' + a]^2 + [Q + \alpha Q' + \beta P' + b]^2$  kleiner als  $Q^2$  ist, erhellt daraus, daß in der Entwicklung dieses Ausdrucks

$$Q^2 + 2Q(\alpha Q' + \beta P' + b) + (\alpha Q' + \beta P' + b)^2 + (\alpha P' - \beta Q' + a)^2$$

das Glied  $2Q(\alpha Q' + \beta P' + b)$  negativ wird und sein Zahlenwerth, nach dem Vorhergehenden, den Werth der folgenden Glieder übertrifft. (Oct. 1841.)

\*) Der Ausdruck  $\alpha P' - \beta Q'$  enthält nemlich immer ein positives und ein negatives Glied. Denn haben  $P'$  und  $Q'$  gleiche, also  $\alpha$  und  $\beta$  die entgegengesetzten Zeichen, so ist  $-\beta Q'$  positiv und  $\alpha P'$  negativ. Haben  $P'$  und  $Q'$  entgegengesetzte Zeichen, so hat  $\alpha$  gleiches Zeichen mit  $P'$  und  $\beta$  gleiches Zeichen mit  $Q'$ , also ist  $\alpha P'$  positiv und  $-\beta Q'$  negativ. Man hat daher  $\alpha$  und  $\beta$  nur so zu nehmen, daß nach Umständen das positive oder das negative Glied den größten Zahlenwerth hat.