wird die Geometrie, welche entsteht, wenn man die linearen Transformationen, welche eine im Endlichen verlaufende Fläche zweiter Ordnung in sich transformieren, als Bewegungen ansieht.

Man braucht nicht mit allen philosophischen Anschauungen, durch welche der Verfasser den Gegenstand belebt und seine Tragweite kennzeichnet, übereinzustimmen, um zu dem Schlusse zu kommen, daß seine Schrift zu einer Einführung insbesondere in den Ideenkreis der mehrdimensionalen Geometrie wohl geeignet ist.

G. K.

Leçons sur les séries trigonométriques. Par Henri Lebesgue (Collection de monographies sur la théorie des fonctions publiée sous la direction de M. Émile Borel). 128 S. Preis Fcs. 3.50. Paris. Gauthier-Villars, 1906.

In einer Einleitung sind die zur Verwendung gelangenden Sätze, die nicht als allgemein bekannt vorausgesetzt werden konnten, zusammengestellt und kurz begründet; hauptsächlich sind es Sätze über die Funktionen von beschränkter Schwankung (à variation bornée), über die verallgemeinerte zweite Derivierte, den Inhalt der Punktmengen und das Lebesgue'sche Integral. Das erste Kapitel ist größtenteils von historischem Inhalt: wie man auf das Problem kam, eine willkürliche Funktion durch eine trigonometrische Reihe darzustellen und wie man die Koeffizienten dieser Reihen zu bestimmen suchte. Methoden von Fourier und Euler werden dargelegt und kritisiert, die alle zu den bekannten Formeln für die Koeffizienten führen und alle hoffnungslos unexakt sind. Nun wird präzisiert, was im folgenden unter der Fourierschen Reihe einer Funktion $f(x)$ von der Periode 2π verstanden werden soll: es ist die trigonometrische Reihe, deren Koeffizienten — die Fourier'schen Konstanten von $f(x)$ — durch die bekannten Formeln aus $f(x)$ zu bilden sind, das darin auftretende Integral im Sinne von Lebesgue verstanden. Nur Funktionen die in diesem Sinne integrierbar sind („fonctions sommables") wird eine Fourier'sche Reihe zugeordnet. Kap. II beginnt mit dem Zusammenhang zwischen trigonometrischen Reihen und Potenzreihen mit komplexer Veränderlicher, der zur Summierung einfacher trigonometrischer Reihen dient. Dann wird gezeigt, daß eine stetige Funktion durch ihre Fourierschen Konstanten völlig bestimmt ist. Es folgen Kriterien für die Konvergenz trigonometrischer Reihen, die sich aus der Abel'schen Reihentransformation ergeben. Weiter zeigt eine einfache Abschätzung, daß, wenn $f(x)$ von beschränkter Schwankung ist, die Absolutwerte der Fourier'schen Konstanten a_n, b_n die Schranke $\frac{A}{n}$ nicht übersteigen, wo A eine von n unabhängige Konstante ist. Hieraus folgt sofort, daß wenn $f(x)$ stetig ist und eine Ableitung von beschränkter Schwankung besitzt, die Fourier'sche Reihe von $f(x)$ gleichmäßig konvergiert, und somit, da $f(x)$ durch diese Reihe eindeutig bestimmt ist, auch wirklich $f(x)$ darstellt. Dieses Ergebnis reicht aus, um nach Lerch und Volterra den Weierstraß'schen Satz von der Entwickelbarkeit der stetigen Funktionen in Reihen von Polynomen zu beweisen, sowie um das Dirichlet'sche Randwertproblem der Potentialtheorie für den Kreis bei stetigen Randwerten zu lösen. Kap. III bringt die Bedingungen dafür, daß die Fourier'sche Reihe von $f(x)$ gegen $f(x)$ konvergiert.

Setzt man $\varphi(t) = f(x+2t) + f(x-2t) - 2f(x)$ und $\int\limits_0^t |\varphi(t)|\, dt = \Phi(t)$; ferner $\psi(t) = \frac{\varphi(t)}{\sin t}$, so lautet die allgemeinste hier abgeleitete Bedingung, aus der sich die übrigen bisher bekannten Bedingungen unschwer ableiten lassen, so: Die Fourier'sche Reihe von $f(x)$ konvergiert im Punkte x gegen $f(x)$, wenn:

1) $\Phi'(o) = 0$ ist, und 2) $\lim\limits_{\delta=0} \int\limits_\delta^{\frac{\pi}{2}} |\psi(t+\delta) - \psi(t)|\, dt = 0$ wobei in der zweiten Bedingung die obere Integrationsgrenze $\frac{\pi}{2}$ auch durch jede andere zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ gelegene Zahl ersetzt werden kann. Die erste Bedingung ist sicher erfüllt, wenn $\lim\limits_{t=+0} [f(x+2t) + f(x-2t)] = 2f(x)$ ist; — eine solche Stelle wird als regulär bezeichnet — also speziell in allen Stetigkeitsstellen von $f(x)$. Es ergibt sich hieraus unmittelbar der Satz von Riemann, daß die Konvergenz der Fourierschen Reihe gegen $f(x)$ nur vom Verhalten von $f(x)$ in der Umgebung von x abhängt. Auch wird hier gezeigt, daß die Fourierschen Konstanten von $f(x)$ stets gegen Null konvergieren. Ferner wird bewiesen, daß, wenn in einem Intervall, das ganz im Innern eines Stetigkeitsintervalls von $f(x)$ liegt, unsere obige zweite Bedingung gleichmäßig erfüllt ist, auch die Konvergenz der Fourierschen Reihe gegen $f(x)$ eine gleichmäßige ist. Durch Spezialisierung ergeben sich nun die folgenden Konvergenzbedingungen: Konvergenz gegen $f(x)$ findet statt, wenn $\left|\frac{f(x+t) - f(x)}{t}\right|$ nach t integrabel ist (Bedingung von Dini); und das ist sicher der Fall, wenn $f(x)$ an der betrachteten Stelle eine endliche Abteilung besitzt, oder wenn wenigstens die vier Derivierten an dieser Stelle endlich sind. Gleichmäßige Konvergenz in (a, b) findet statt, wenn (a, b) im Innern eines Stetigkeitsintervalles von $f(x)$ liegt, in dem $|f(x+\delta) - f(x)| \lg \delta$ gleichmäßig gegen Null konvergiert (Bedingung von Lipschitz). Konvergenz gegen $f(x)$ findet statt in jedem regulären Punkt eines Intervalls (a, b), in dem $f(x)$ von beschränkter Schwankung ist. Liegt (a, b) ganz im Innern eines Stetigkeitsintervalls, so ist die Konvergenz gleichmäßig. Es ist dies die Bedingung von Jordan, die die klassische Dirichlet'sche Bedingung als Spezialfall enthält. — Es folgt ein Exkurs über die Fourier'sche Integralformel, die Poisson'sche und Euler-Maclaurin'sche Summenformel; auch findet sich in diesem Kapitel ein Beispiel einer im Riemann'schen Sinne nichtintegrablen Funktion, die überall durch ihre Fourier'sche Reihe dargestellt wird. Kap. IV handelt von divergenten Fourier'schen Reihen. An zwei Beispielen wird gezeigt, daß die Fourier'sche Reihe einer durchwegs stetigen Funktion divergent sein kann, ferner wird eine Fourier'sche Reihe angegeben, die überall gegen die stetige Funktion $f(x)$ konvergiert, ohne gleichmäßig zu konvergieren. Von den Methoden zur Summation divergenter Fourier'scher Reihen wird besonders die von Fejer studiert: es wird gezeigt, daß das arithmetische Mittel der n ersten Glieder einer Fourier'schen Reihe gegen $f(x)$ konvergiert, wenn $\Phi'(o) = 0$, so daß von den oben genannten zwei Konvergenzbedingungen hier die zweite wegfällt. Hieraus folgt unmittelbar, daß eine konvergente Fourier'sche Reihe an jeder regulären Stelle $f(x)$ darstellt. Es wird sodann das Problem der Multiplikation der Fourier'schen Reihen — Zu-

sammensetzung der Fourier'schen Konstanten von $f(x).\varphi(x)$ aus denen von $f(x)$ und $\varphi(x)$ — gelöst unter der Voraussetzung, daß f und φ zwischen end lichen Grenzen liegen. Es folgt der Satz, daß die durch gliedweise Integration der Fourier'schen Reihe von $f(x)$ entstehende Reihe stets gleichmäßig gegen das unbestimmte Integral von $f(x)$ konvergiert. Hat umgekehrt $f(x)$ eine im Lebesgueschen Sinne integrierbare Abteilung $f'(x)$, so liefert die durch gliedweise Differentiation der Fourier'schen Reihe von $f(x)$ gewonnene trigonometrische Reihe, nach dem Verfahren von Fejer summiert, den Wert von $f'(x)$ überall, wo die Fourier'sche Reihe von $f'(x)$, nach demselben Verfahren summiert, $f'(x)$ liefert. Von den nun folgenden Anwendungen sei Hurwitz' Lösung des isoperimetrischen Problems hervorgehoben. — Während die bisherigen Kapitel sich fast ausschließlich mit der zu einer Funktion $f(x)$ gehörigen Fourier'schen Reihe befaßten, handelt das letzte Kapitel von der Darstellbarkeit von $f(x)$ durch trigonometrische Reihen der Form $\Sigma\, a_n \cos nx + b_n \sin nx$ überhaupt. Es beginnt mit dem Beweise des Cantor'schen Theorems, daß eine trigonometrische Reihe nur dann in allen Punkten eines Intervalls konvergieren kann, wenn $\lim\limits_{n=\infty} a_n = \lim\limits_{n=\infty} b_n = 0$ ist. Sodann wird das Riemann'sche Verfahren studiert, das der trigonometrischen Reihe den Wert $\lim\limits_{n=0} \frac{a_0}{2} + \sum \left(\frac{\sin n\, h}{n\, h}\right)^2 (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ beilegt, überall wo diese Limite existiert. Es wird zunächst gezeigt, daß, wenn die trigonometrische Reihe konvergent ist, das Riemann'sche Summationsverfahren gerade die Reihensumme liefert. Dann wird die notwendige und hinreichende Bedingung entwickelt, der $f(x)$ genügen muß, damit es eine trigonometrische Reihe mit nach Null konvergierenden Koeffizienten gebe, die nach dem Riemann'schen Verfahren summiert überall $f(x)$ ergibt. Es ergibt sich ohne weiteres, daß es nur eine solche Reihe geben kann; speziell kann es also gewiß nur eine trigonometrische Reihe geben, die überall im gewöhnlichen Sinne $f(x)$ zur Summe hat. Endlich wird gezeigt, daß falls $f(x)$ zwischen endlichen Grenzen liegt, dies nur die Fourier'sche Reihe von $f(x)$ sein kann. Auch die Cantor'sche Erweiterung des obigen Satzes wird bewiesen: Es gibt nur eine trigonometrische Reihe, welche überall gegen $f(x)$ konvergiert, abgesehen von den Punkten einer reduktiblen Menge.

Dies ist der hauptsächlichste Inhalt des Buches. Sieht man von einer Anzahl von kleinen Versehen und Druckfehfern ab, die größtenteils leicht richtig zu stellen sind, so ist auch die Form der Darstellung durchaus anzuerkennen. Das Buch ist, wie fast alle Bücher der Borel'schen Sammlung von hervorragendem Werte.

Hans Hahn.

Wahrscheinlichkeitsrechnung und Kollektivmaßlehre. Von H. Bruns. Leipzig, 1906.

Dieses in der Teubner'schen Sammlung mathematischer Lehrbücher erschienene Buch bietet weniger eine lehrbuchmäßige Darstellung der Wahrscheinlichkeitsrechnung, als eine solche der Kollektivmaßlehre dar, welche hiebei so behandelt wird, daß die im Mittelpunkte der gewöhnlichen systematischen Darstellungen der W. stehenden Probleme nur als spezielle Aufgaben der allgemeinen Kollektivmaßlehre erscheinen. In diesem Sinne gibt auch Bruns nur eine gedrängte Darstellung der W. R. und diese auch weniger systematisch als aus kritischen Gesichtspunkten behandelt, (so gibt der Ver-