SUR UN THÉORÈME DE M. HADAMARD DANS LA THÉORIE DES FONCTIONS ENTIÈRES.

Par M. **Ernst Lindelöf** (Helsingfors).

Adunanza del 24 novembre 1907.

Soit $f(x)$ une fonction entière *d'ordre fini* ρ, c'est-à-dire telle que l'on ait, quelque petit que soit le nombre positif ε,

$$|f(x)| < e^{|x|^{\rho+\varepsilon}}$$

dès que $|x|$ est supérieur à une certaine limite, et d'autre part

$$|f(x)| > e^{|x|^{\rho-\varepsilon}}$$

pour une infinité de points x tendant vers l'infini. Dans le théorème que nous avons en vue [1]), M. HADAMARD a établi l'existence d'une suite de cercles de rayons indéfiniment croissants sur lesquels est vérifiée l'inégalité

$$|f(x)| > e^{-|x|^{\rho+\varepsilon}}.$$

Plus tard, ce résultat a fait l'objet des recherches d'autres auteurs, qui l'ont précisé et généralisé dans différentes directions [2]).

Nous allons reprendre ici cette question par une méthode nouvelle, en nous appuyant sur certaines considérations d'un ordre très élémentaire développées par M. PHRAGMÉN et par nous dans un Mémoire qui paraîtra prochainement [3]).

---

[1]) *Étude sur les propriétés des fonctions entières et en particulier d'une fonction considérée par* RIEMANN [Journal de Mathématiques pures et appliquées, 4^e série, t. IX (1893), pp. 171-215], pp. 204-208.

[2]) *Voir* en particulier les travaux suivants:

PIERRE BOUTROUX, *Sur la croissance des fonctions entières* [Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences (Paris), t. CXXXIV (1er semestre 1902), pp. 153-155], p. 155; *Sur quelques propriétés des fonctions entières* [Acta Mathematica, t. XXVIII (1904), pp. 97-224], pp. 131-133.

ERNST LINDELÖF, *Mémoire sur la théorie des fonctions entières de genre fini* [Acta Societatis Scientiarum Fennicæ, t. XXXI (1903), n° 1 (16 décembre 1901), pp. I-IV, 1-79], pp. 8-11.

EDM. MAILLET, *Sur les fonctions entières et quasi entières* [Journal de Mathématiques pures et appliquées, 5^e série, t. VIII (1902), pp. 329-386], p. 339.

B. LINDGREN (élève de M. WIMAN), *Sur « le cas d'exception de* M. PICARD » [Thèse pour le doctorat, Upsala, 1903], p. 22.

A. WIMAN, *Sur une extension d'un théorème de* M. HADAMARD [Arkiv för Matematik, Astronomi och Fysik, Band II (1905-1906), N° 14, pp. 1-5].

[3]) E. PHRAGMÉN et ERNST LINDELÖF, *Sur une extension d'un principe classique de l'Analyse, et sur quelques propriétés des fonctions monogènes dans le voisinage d'un point singulier* [Acta Mathematica, t. XXXI (1907)].

1. Nous empruntons au Mémoire cité le lemme suivant, dont nous indiquerons ici rapidement la démonstration :

Soit une fonction monogène $f(x)$ *de la variable complexe* $x \equiv re^{i\varphi}$ *qui jouit des propriétés suivantes :*

1° *Elle est régulière à l'intérieur et sur le contour d'un domaine connexe* T *faisant partie de l'angle*

$$-\frac{\pi}{2\alpha} \leqq \varphi - \varphi_0 \leqq \frac{\pi}{2\alpha}. \tag{1}$$

2° *Sur le contour de ce domaine* T *on a*

$$|f(x)| \leqq C,$$

C étant une constante finie.

3° *A l'intérieur de* T *le module* $|f(x)|$ *croît moins vite que l'exponentielle* e^{r^k}, *où* $k < \alpha$, *en sorte que l'inégalité*

$$|f(x)| < e^{r^k}$$

est vérifiée dans T *dès que* r *est suffisamment grand.*

Dans ces conditions on aura

$$|f(x)| \leqq C \tag{2}$$

pour tout point x *du domaine en question.*

Considérons en effet le produit

$$F(x) = e^{-\varepsilon(xe^{-i\varphi_0})^{k'}} f(x) \qquad (k < k' < \alpha),$$

ε étant un nombre positif arbitrairement petit mais fixe. Le module du facteur exponentiel s'écrit

$$e^{-\varepsilon\cos k'(\varphi-\varphi_0).r^{k'}}.$$

Dans l'angle (1) cette expression reste inférieure à

$$e^{-\varepsilon\beta r^{k'}},$$

β désignant la quantité positive $\cos\frac{k'\pi}{2\alpha}$. On en conclut, en tenant compte de la condition 2°, que $|F(x)| \leqq C$ sur le contour du domaine T, et d'autre part, d'après la condition 3°, que $F(x)$ tend uniformément vers zéro lorsque x tend vers l'infini en restant à l'intérieur de T, et cela quelque petit qu'on ait choisi ε.

Ayant fixé arbitrairement un point x_0 dans l'intérieur de T, on peut donc trouver un nombre positif R, supérieur à $|x_0|$ et tel que l'inégalité $|F(x)| \leqq C$ ait lieu sur l'arc ou les arcs du cercle $|x| = R$ compris dans le domaine T et, par suite, sur tout le contour de la portion finie, retranchée de ce domaine par le cercle en question, qui renferme le point x_0. D'après un principe bien connu, l'inégalité $|F(x)| \leqq C$ aura alors lieu aussi pour $x = x_0$, de sorte qu'on aura en ce point

$$|f(x)| < C|e^{\varepsilon(xe^{-i\varphi_0})^{k'}}|.$$

Cette conclusion restant vraie quelque petit que soit ε, il en résulte bien que l'inégalité (2) est vérifiée pour $x = x_0$, et elle se démontre de même pour tout autre point du domaine T.

2. Le lemme que nous venons de démontrer conduit facilement à cette conséquence:

Le module d'une fonction entière dont l'ordre est inférieur à $\frac{1}{2}$ ne saurait rester au-dessous d'une limite finie sur aucun rayon, à moins que la fonction ne se réduise à une constante.

Soit, en effet, $f(x)$ une fonction entière d'un ordre $\rho < \frac{1}{2}$, et admettons qu'on ait, pour une certaine valeur φ_0 de φ et pour toutes les valeurs de r,

$$|f(x)| \leqq C,$$

C étant une constante finie.

Cela étant, la fonction $f(x)$ vérifie dans l'angle

$$-\pi \leqq \varphi - \varphi_1 \leqq \pi, \qquad (\varphi_1 = \varphi_0 + \pi),$$

toutes les conditions énumérées au n° 1. Ceci est évident pour les deux premières de ces conditions, et, quant à la troisième, il suffit d'observer qu'on a dans le cas présent $\alpha = \frac{1}{2}$, tandis qu'on peut choisir pour k un nombre quelconque supérieur à ρ, donc aussi un nombre inférieur à α.

Le lemme du n° 1 nous apprend dès lors que l'inégalité $|f(x)| \leqq C$ est vérifiée pour tout point de l'angle considéré, ou, en d'autres termes, pour toute valeur de x, ce qui exige bien que la fonction $f(x)$ se réduise à une constante.

3. Nous allons maintenant démontrer la proposition suivante:

Étant donnée une fonction entière quelconque, $f(x)$, qui ne s'annule pas identiquement et dont l'ordre est inférieur à $\frac{1}{2}$, on peut trouver une suite de cercles concentriques de rayons indéfiniment croissants sur lesquels on a

$$|f(x)| > C,$$

C étant une constante positive.

Cette proposition est évidente dans les cas où $f(x)$ se réduit à une constante ou un polynôme.

Soit donc $f(x)$ une fonction entière transcendante d'ordre ρ $\left(< \frac{1}{2}\right)$, et admettons d'abord sans démonstration qu'elle puisse se mettre sous la forme d'un *produit canonique:*

$$f(x) = Ax^m \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x}{a_n}\right),$$

A désignant une constante différente de zéro et m un entier positif ou nul. On sait que les zéros a_n sont tels que la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{1}{a_n}\right|^{\rho+\varepsilon}$$

converge ou diverge suivant que ε est positif ou négatif, et, inversement, que le produit ci-dessus définit une fonction entière d'ordre ρ toutes les fois que les zéros satisfont à cette condition [4]).

[4]) *Voir* par exemple le livre de M. Borel : *Leçons sur les fonctions entières* (Paris, Gauthier-Villars, 1900), et notre Mémoire cité dans la note [2]).

Pour tout point x de la circonférence $|x| = r$, on a évidemment les inégalités

$$\left|1 - \frac{r}{|a_n|}\right| \leqq \left|1 - \frac{x}{a_n}\right| \leqq 1 + \frac{r}{|a_n|}.$$

En posant

$$\varphi(x) = Ax^m \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 + \frac{x}{|a_n|}\right),$$

ce qui est également une fonction entière d'ordre ρ, d'après la remarque faite tout à l'heure, on aura donc sur la même circonférence

$$(3) \qquad |\varphi(-r)| \leqq |f(x)| \leqq |\varphi(r)|.$$

Or la proposition établie au n° 2 nous apprend que le module de la fonction $\varphi(x)$ ne reste sur aucun rayon au-dessous d'une limite finie. Il en résulte qu'on peut trouver une suite de valeurs positives indéfiniment croissantes, $r_1, r_2, \ldots, r_\nu, \ldots,$ telles qu'on ait pour chacune de ces valeurs de r

$$|\varphi(-r)| > C,$$

la constante positive C étant donnée aussi grande qu'on voudra. D'après (3), on aura donc aussi $|f(x)| > C$ sur chacune des circonférences

$$|x| = r_\nu \qquad (\nu = 1, 2, \ldots).$$

La démonstration étant ainsi faite pour le cas d'un produit canonique, on en conclut, à l'aide de théorèmes connus [4]), que toute fonction entière transcendante dont l'ordre est inférieur à $\frac{1}{2}$ se réduit effectivement à un tel produit. La proposition est donc exacte.

4. Nous sommes maintenant en état d'établir en quelques lignes le résultat suivant, qui sert à préciser beaucoup le théorème de M. HADAMARD rappelé au début.

Soit $f(x)$ une fonction entière quelconque d'ordre fini qui ne s'annule pas identiquement, et soit $M(r)$ la plus grande valeur que prend le module de cette fonction sur la circonférence $|x| = r$; on pourra trouver une infinité de cercles concentriques de rayons indéfiniment croissants sur lesquels on a

$$|f(x)| > \frac{1}{(M(r))^h},$$

h étant une constante finie.

Pour les fonctions d'ordre inférieur à $\frac{1}{2}$, ceci résulte de la proposition établie au n° 3, qui comporte d'ailleurs, dans ce cas, une plus grande précision. Nous supposerons donc l'ordre ρ de la fonction $f(x)$ supérieur ou égal à $\frac{1}{2}$.

Soit k un entier positif assez grand pour qu'on ait $\frac{\rho}{k} < \frac{1}{2}$, et soit ω une racine primitive $k^{\text{ième}}$ de l'unité. Nous formerons le produit

$$F(x) = f(x)f(\omega x) \ldots f(\omega^{k-1}x).$$

C'est une fonction entière de x^k qui ne s'annule pas identiquement. D'autre part on a, quelque petit que soit le nombre positif ε,

$$|F(x)| < e^{r^{\rho+\varepsilon}}$$

dès que r est suffisamment grand, ce qui nous montre que l'ordre de la fonction $F(x)$, considérée comme fonction de x^k, est au plus égal à $\frac{\rho}{k}$ et, par suite, inférieur à $\frac{1}{2}$.

D'après le n° 3, le module de $F(x)$ restera donc supérieur à une certaine constante positive C sur une infinité de cercles de rayons indéfiniment croissants. Sur ces cercles on aura ainsi

$$|f(x)| > \frac{C}{|f(\omega x)f(\omega^2 x) \ldots f(\omega^{k-1} x)|},$$

et par conséquent, à plus forte raison,

$$|f(x)| > \frac{C}{\left(M(r)\right)^{k-1}},$$

d'où l'on tire immédiatement la proposition énoncée, en observant que $M(r)$ croît indéfiniment avec r.

5. On peut établir un résultat bien plus précis dans le cas où $\rho < \frac{1}{2}$. A cet effet, nous commençons par préciser la proposition établie au n° 2.

Soit $V(x)$ une fonction monogène de la variable complexe $x \equiv r e^{i\varphi}$ qui jouit des propriétés suivantes:

1° *Elle est régulière pour tout point du domaine*

$$-\pi \leqq \varphi \leqq \pi, \qquad r \geqq R,$$

excepté le point à l'infini.

2° *Elle prend des valeurs réelles et positives pour $\varphi = 0$, $r \geqq R$.*

3° *Quelque petit qu'on se donne le nombre positif ε, l'expression*

$$\frac{V(x)}{r^{\rho+\varepsilon}}$$

tend uniformément vers zéro pour $-\pi \leqq \varphi \leqq \pi$ lorsque r augmente indéfiniment.

4° *r tendant vers l'infini, le rapport*

$$\frac{V(x)}{V(r)}$$

tend uniformément vers $e^{\rho\varphi i}$ pour $-\pi \leqq \varphi \leqq \pi$.

Telle est, par exemple, toute fonction de la forme

$$x^\rho (\log x)^{\alpha_1} (\log \log x)^{\alpha_2} \ldots,$$

les exposants α étant des quantités réelles quelconques.

Cela posé, nous allons établir cette proposition:

Soit une fonction entière, $f(x)$, dont l'ordre ρ est inférieur à $\frac{1}{2}$ et dont le module, quelque petit qu'on se donne le nombre positif ε, vérifie l'inégalité

$$|f(x)| > e^{(A-\varepsilon)V(r)} \tag{4}$$

pour une suite illimitée de points x tendant vers l'infini, A désignant une constante positive et V une fonction monogène qui jouit des propriétés énumérées ci-dessus.

Dans ces conditions, il existe sur tout rayon une infinité de points x tendant vers l'infini pour lesquels on a

$$|f(x)| > e^{(A\cos\rho\pi - \varepsilon)V(r)},$$

le nombre positif ε étant donné aussi petit que l'on veut.

Ce résultat subsiste aussi pour $\rho = 0$ [5]).

Si cette proposition n'était pas vraie, on aurait pour une certaine valeur φ_0 de φ, à partir d'une valeur finie de r,

$$|f(x)| < e^{A'\cos\rho\pi . V(r)}, \tag{5}$$

A' désignant une constante positive inférieure à A. Choisissons une constante A'' telle que $A' < A'' < A$, et formons l'expression

$$F(x) = e^{-A''V(xe^{-i\varphi_1})} f(x),$$

où $\varphi_1 = \varphi_0 + \pi$.

D'après les propriétés de la fonction $V(x)$, cette expression définit une fonction monogène qui reste régulière dans le domaine

$$-\pi \leqq \varphi - \varphi_1 \leqq \pi, \qquad r \geqq R. \tag{6}$$

D'autre part, la partie réelle de $V(xe^{-i\varphi_1})$ peut se mettre sous la forme

$$[\cos\rho(\varphi - \varphi_1) + \varepsilon(r, \varphi)]\, V(r),$$

$\varepsilon(r, \varphi)$ tendant uniformément vers zéro pour $-\pi \leqq \varphi - \varphi_1 \leqq \pi$ lorsque r augmente indéfiniment. En tenant compte de l'hypothèse (5), on en conclut que le module $|F(x)|$ reste au dessous d'une limite finie C sur le bord du domaine (6). Comme ce domaine fait partie d'un angle inférieur à $\frac{\pi}{\rho}$, et comme, à l'intérieur du domaine, le module $|F(x)|$ croît moins vite que $e^{r^{\rho+\varepsilon}}$, quelque petit que soit le nombre positif ε, il résulte donc du lemme démontré au n° 1 qu'on a $|F(x)| \leqq C$ pour tout point du domaine en question.

Dans l'hypothèse (5) on aurait ainsi, quelque petit que soit ε,

$$|f(x)| < e^{(A''+\varepsilon)V(r)}$$

dès que r dépasse une certaine limite. Or cette conclusion est en contradiction avec la condition (4), ce qui démontre l'exactitude de notre proposition.

On se convainc aisément que la démonstration qui précède subsiste sans modification lorsque $\rho = 0$.

6. En supposant toujours $\rho < \frac{1}{2}$, nous allons maintenant démontrer le théorème suivant, qui ne saurait être précisé davantage:

Soit $f(x)$ une fonction entière dont l'ordre ρ est inférieur à $\frac{1}{2}$ et dont le module, dès que $\varepsilon > 0$, vérifie l'inégalité

$$|f(x)| > e^{(A-\varepsilon)V(r)} \tag{7}$$

[5]) Cette proposition se trouve également démontrée dans le Mémoire cité dans la note [3]), et même pour toutes les valeurs de ρ inférieures à l'unité.

pour une suite illimitée de points x tendant vers l'infini, A désignant une constante positive et V une fonction monogène telle qu'il est dit au n° 5; *on pourra trouver, quelque petit que soit ε, une infinité de cercles concentriques de rayons indéfiniment croissants sur lesquels on a*

$$|f(x)| > e^{(A\cos\rho\pi-\varepsilon)V(r)} \tag{8}$$

Ce résultat subsiste également pour $\rho = 0$.

Écrivons, en effet, la fonction donnée $f(x)$ sous forme d'un produit infini et formons la fonction $\varphi(x)$ correspondante, comme nous l'avons dit au n° 3. On aura, d'après (3),

$$|\varphi(r)| \geq |f(x)| \quad \text{pour} \quad |x| = r,$$

d'où il résulte, en vertu de l'hypothèse (7), que la fonction entière $\varphi(x)$, qui est du même ordre que $f(x)$, vérifie l'inégalité

$$|\varphi(x)| > e^{(A-\varepsilon)V(r)}$$

pour une infinité de valeurs x tendant vers l'infini. La proposition démontrée au n° 5 nous permet d'en conclure qu'il existe une suite de valeurs positives de r indéfiniment croissantes, $r_1, r_2, \ldots, r_\nu, \ldots$, pour lesquelles on a

$$|\varphi(-r)| > e^{(A\cos\rho\pi-\varepsilon)V(r)}.$$

Mais, d'après (3), l'inégalité (8) est alors vérifiée sur chacun des cercles $|x| = r_\nu$. Le théorème est donc exact.

$f(x)$ étant d'ordre ρ, on sait qu'on a, dès que $\varepsilon > 0$,

$$|f(x)| > e^{r^{\rho-\varepsilon}} \tag{9}$$

pour des valeurs x de modules indéfiniment croissants. Dans le théorème ci-dessus il est donc permis de prendre pour $V(x)$ la fonction $x^{\rho-\varepsilon}$, et on trouve ainsi que, *lorsque $\rho < \frac{1}{2}$, il existe une infinité de cercles de rayons indéfiniment croissants sur lesquels est vérifiée l'inégalité* (9), *le nombre positif ε étant donné aussi petit qu'on le veut.*

Ce résultat avait déjà été établi par M. WIMAN, par une voie moins élémentaire, dans le travail cité au début.

Helsingfors, novembre 1907.

ERNST LINDELÖF.