Zur Transformationstheorie der elliptischen Functionen.

Von

A. Hurwitz in Hildesheim.

Betrachtet man den Modul k des elliptischen Integrals erster Gattung als Function des Periodenverhältnisses ω, so ist bekanntlich eine Haupteigenschaft dieser Function in dem folgenden Satze ausgesprochen:

„*Zwischen den Werthen* $k(\omega)$ *und* $k(\omega_1)$ *besteht eine algebraische Gleichung, wenn die Argumente* ω *und* ω_1 *eine Relation der Gestalt*

$$a\omega\omega_1 + b\omega + c\omega_1 + d = 0$$

befriedigen, wo a, b, c, d *ganze Zahlen sind, deren Determinante* $ad - bc$ *positiv ausfällt.*"*)

Es knüpft sich nun naturgemäss an diese Eigenschaft des Moduls die folgende Aufgabe an, deren Erledigung der Zweck der vorliegenden Arbeit ist:**)

„*Alle algebraischen Gleichungen zwischen* ω *und* ω_1 *zu bestimmen, welche der Anforderung genügen, dass die Werthe* $k(\omega)$ *und* $k(\omega_1)$ *selbst algebraisch zusammenhängen, wenn* ω *und* ω_1 *ihrerseits jene algebraische Gleichung befriedigen.*"

Den nachfolgenden Entwicklungen vorgreifend will ich gleich hier das Resultat unserer Untersuchung in folgendem Satze aussprechen:

Unter allen algebraischen Gleichungen genügt nur die in ω *und* ω_1 *bilineare Relation mit ganzzahligen Coefficienten und positiver Determinante der gestellten Anforderung.*

---

*) Der Modul k tritt hier und im Folgenden nur als Repräsentant einer ganzen Functionsclasse, nämlich der endlichwerthigen Modulfunctionen von endlichem Index auf. Es ist nur der concreteren Darstellungsweise halber, dass ich mich auf die Betrachtung des Moduls beschränke, eine Beschränkung, die übrigens bei den anzustellenden Untersuchungen um so weniger verschlägt, als jede andere Function der genannten Classe von Transcendenten eine algebraische Function des Moduls ist.

**) Es ist dieses dieselbe Aufgabe, auf welche ich im XVIII. Bande dieser Annalen, p. 566, gelegentlich hingewiesen habe.

Indem ich mich dem Beweise dieses Satzes zuwende, will ich annehmen

$$f(\omega, \omega_1) = 0$$

sei eine Gleichung, welche die geforderte Eigenschaft besitzt. Dann können wir zunächst voraussetzen, dass diese Gleichung irreductibel ist, denn widrigenfalls würden wir einen irreductibeln Factor derselben in Betracht ziehen. Tragen wir nunmehr successive $\omega + 1$, $\omega + 2$, $\omega + 3, \cdots$, an Stelle von ω in unsere Gleichung ein, so müssen wir schliesslich zu einer Zahl $\omega + n$ kommen, so dass die Gleichung

$$f(\omega + n, \overline{\omega}_1) = 0$$

mindestens eine Wurzel $\overline{\omega}_1^0$ liefert, die mit einer Wurzel ω_1^0 der ursprünglichen Gleichung

$$f(\omega, \omega_1) = 0$$

äquivalent ist, das heisst in folgender Weise zusammenhängt:

$$\overline{\omega}_1^0 = \frac{\alpha\omega_1^0 + \beta}{\gamma\omega_1^0 + \delta},$$

wobei $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ ist und $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ganze Zahlen bedeuten.

In der That, der Modul k kann nur dann für verschiedene Argumente ω_1^0 und $\overline{\omega}_1^0$ denselben Werth annehmen, wenn dieselben in der angegebenen Art zusammenhängen.*) Für die Argumente $\omega, \omega + 1, \cdots$, nimmt der Modul aber nur eine endliche Anzahl von verschiedenen Werthen an, und unter den zu allen diesen Argumenten $\omega + n$ vermöge $f(\omega, \omega_1) = 0$ gehörigen Werthen ω_1, muss man daher unzählig oft zwei solche wie ω_1^0 und $\overline{\omega}_1^0$ auswählen können, die in der genannten Relation stehen, da widrigenfalls zu *einem* Werthe $k(\omega)$ unzählig viele Werthe $k(\omega_1)$ gehören würden.

Somit ist klar, dass für irgend einen Werth von n und für passende Werthe von $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ die beiden Gleichungen

$$f(\omega, \omega_1) = 0$$

und

$$f\left(\omega + n, \frac{\alpha\omega_1 + \beta}{\gamma\omega_1 + \delta}\right) = 0$$

eine Wurzel ω_1^0 und folglich — wegen der vorausgesetzten Irreductibilität der Gleichung $f(\omega, \omega_1) = 0$ — alle Wurzeln gemeinsam haben. Jetzt müssen wir zwei Fälle unterscheiden:

---

*) Des Näheren ist $k(\omega) = k(\omega_1)$ dann und nur dann, wenn in der Beziehung

$$\omega_1 = \frac{\alpha\omega + \beta}{\gamma\omega + \delta}, \quad \begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \text{ oder } \begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix} \pmod{4}$$

ist.

1) Die Substitution

$$\omega_1' = \frac{\alpha\omega_1 + \beta}{\gamma\omega_1 + \delta}$$

ist *parabolisch*.

In diesem Falle können wir dieselbe in folgende Gestalt setzen:*)

$$\frac{a\omega_1' + b}{c\omega_1' + d} = \frac{a\omega_1 + b}{c\omega_1 + d} + k,$$

wo k eine ganze Zahl bedeutet. Führen wir jetzt die Grösse

$$\Omega_1 = \frac{a\omega_1 + b}{c\omega_1 + d}$$

statt ω_1 in unsere Gleichung $f(\omega, \omega_1) = 0$ ein, so geht letztere über in eine irreductible Gleichung

$$f_1(\omega, \Omega_1) = 0,$$

und von dieser neuen Gleichung wird nun verlangt, dass sie sich reproducirt, wenn $\omega + n$ statt ω und gleichzeitig $\Omega_1 + k$ statt Ω_1 gesetzt wird.

Deuten wir aber ω und Ω_1 als Cartesische Coordinaten in der Ebene, so stellt $f_1(\omega, \Omega_1) = 0$ eine irreductible algebraische Curve vor, die bei einer endlichen Translation der Ebene in sich übergehen soll. Die Curve ist daher nothwendig eine in der Richtung der Translation laufende Gerade, die Gleichung $f_1(\omega, \Omega_1) = 0$ also linear in ω und Ω_1. Wir erkennen so, wenn wir schliesslich wieder ω_1 an Stelle von Ω_1 einführen, dass unsre ursprüngliche Gleichung $f(\omega, \omega_1) = 0$ nothwendig bilinear in ω und ω_1 war.

2) Die Substitution

$$\omega_1' = \frac{\alpha\omega_1 + \beta}{\gamma\omega_1 + \delta}$$

ist *elliptisch* oder *hyperbolisch*. Dann lässt sich dieselbe in die Gestalt setzen:*)

$$\frac{\omega_1' - a}{\omega_1' - b} = \lambda \cdot \frac{\omega_1 - a}{\omega_1 - b}, \quad \lambda \gtrless 1,$$

und unsere Gleichung

$$f(\omega, \omega_1) = 0$$

geht, durch Einführung der Grösse

$$\Omega_1 = \frac{\omega_1 - a}{\omega_1 - b}$$

an Stelle von ω_1, in eine neue irreductible Gleichung

$$f_1(\omega, \Omega_1) = 0$$

über.

*) Siehe Klein, Ueber die Transformation der elliptischen Functionen und die Auflösung der Gleichungen fünften Grades, Math. Annalen XIV, pag. 122—124.

Diese letztere Gleichung soll nun ungeändert bleiben, wenn ω in $\omega + n$ und gleichzeitig Ω_1 in $\lambda\,\Omega_1$ verwandelt wird.

Deuten wir wiederum ω und Ω_1 als Cartesische Coordinaten, so muss also $f_1(\omega, \Omega_1) = 0$ eine irreductible algebraische Curve C vorstellen, die bei der linearen Transformation ihrer Ebene

$$\omega' = \omega + n, \quad \Omega_1' = \lambda \cdot \Omega_1$$

in sich übergeht. Daraus folgt aber, dass die Gleichung $f_1(\omega, \Omega_1) = 0$ ω gar nicht enthält, und *folglich* $f(\omega, \omega_1) = 0$ *gar keine Relation zwischen* ω *und* ω_1 *darstellt.*

Zunächst schliessen wir nämlich, dass die Curve C die Gerade $\Omega_1 = 0$ (ω-Axe) nur im unendlich fernen Punkte der letzteren treffen darf, da jeder im Endlichen liegende Schnittpunkt von C und $\Omega_1 = 0$ eine unendliche Zahl solcher Schnittpunkte hervorrufen würde. Demnach ist:

$$f_1(\omega, \Omega_1) \equiv \Omega_1 f_2(\omega, \Omega_1) + k_1;$$

es folgt:

$$\lambda \cdot f_2(\omega + n, \lambda\Omega_1) \equiv f_2(\omega, \Omega_1),$$

und daher muss die Curve $f_2(\omega, \Omega_1) = 0$ entweder die Gerade $\Omega_1 = 0$ als Bestandtheil enthalten, oder diese Gerade im unendlich fernen Punkte treffen. Es ist also

$$f_2(\Omega_1) \equiv \Omega_1 f_3(\omega, \Omega_1) + k_2.$$

Auf f_3 sind dieselben Schlüsse anwendbar, wie auf f_1 und f_2 u. s. f. Wir erhalten somit eine Reihe von Identitäten folgender Gestalt:

$$\begin{aligned} f_1 &\equiv \Omega_1 f_2 + k_1, \\ f_2 &\equiv \Omega_1 f_3 + k_2, \\ &\vdots \\ f_n &\equiv \Omega_1 k_{n+1} + k_n. \end{aligned}$$

Hierbei bedeuten die k_i constante Grössen. Aus diesen Identitäten ergiebt sich nun unmittelbar f_1 als ganze Function von Ω_1, und f_1 enthält also in der That gar nicht die Grösse ω.

Es ist somit erwiesen, dass nur in ω und ω_1 bilineare Relationen zu algebraischen Gleichungen zwischen den Werthen $k(\omega)$ und $k(\omega_1)$ des Moduls Anlass bieten können. Wir haben diese bilinearen Relationen noch näher in Bezug auf ihre Coefficienten zu untersuchen.

Bei dieser Untersuchung werden wir von der Gleichung

$$a\omega\omega_1 + b\omega + c\omega_1 + d = 0$$

anzunehmen haben, dass sie nur eine endliche Zahl von inäquivalenten Werthen ω_1 (resp. ω) liefert, wenn für ω (resp. ω_1) alle einer festen

Zahl äquivalenten*) Werthe eingetragen werden. Drücken wir nun zunächst aus, dass irgend eine ganze Zahl n existirt, so dass der zu $\omega + n$ gehörige Werth von ω_1 äquivalent ist dem zu ω gehörigen Werthe, so folgt:

Die Substitution

$$\begin{pmatrix} -b & -d-nb \\ a & c+na \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{c}{\Delta} & \frac{d}{\Delta} \\ -\frac{a}{\Delta} & -\frac{b}{\Delta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\Delta + abn}{\Delta} & \frac{b^2 n}{\Delta} \\ -\frac{a^2 n}{\Delta} & \frac{\Delta - abn}{\Delta} \end{pmatrix}$$

ist nothwendig ganzzahlig. Hierbei ist $ad - bc = \Delta$ gesetzt. Da sonach $\frac{abn}{\Delta}$ und $\frac{b^2 n}{\Delta}$ ganze Zahlen sein müssen, so muss

$$\frac{abn}{\Delta} : \frac{b^2 n}{\Delta} = \frac{a}{b}$$

eine rationale Zahl sein. Wegen der vollkommenen Gleichberechtigung von ω und ω_1 muss daher auch $\frac{a}{c}$ eine rationale Zahl sein. In gleicher Weise ergiebt sich aus der Forderung, dass für eine passende ganze Zahl n' der zu $-\frac{1}{\omega + n'}$ gehörige Werth von ω_1 dem zu ω gehörigen Werthe äquivalent sein wird, dass $\frac{c}{d}$ eine rationale Zahl sein muss.

Diese Resultate zusammengefasst ergeben schliesslich:

Die Verhältnisse $a : b : c : d$ müssen rationale Zahlen sein, und die Grössen a, b, c, d können daher als ganze Zahlen angenommen werden.

Damit ist der Beweis unserer Behauptung geliefert, bis auf die kleine in die Aussage unseres Satzes aufgenommene Beschränkung, dass nämlich die Determinante $ad - bc$ der bilinearen Gleichung positiv sein soll.

Dieser Zusatz motivirt sich durch die Eigenthümlichkeit des Moduls nur für Argumente mit positiver zweiter Ordinate definirt zu sein. Dadurch wird es nämlich erforderlich, dafür zu sorgen, dass zu Werthen ω mit positiver zweiter Ordinate nur Werthe ω_1 gehören, die gleichfalls in der positiven Halbebene liegen, was, wie man sich leicht überzeugt, durch die Annahme $ad - bc > 0$ erzielt wird.

Hildesheim, den 11. August 1881.

---

*) Zwei Werthe ω und ω_1 heissen äquivalent resp. inäquivalent, jenachdem es möglich resp. unmöglich ist, vier ganze Zahlen α, β, γ, δ so zu bestimmen, dass $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ und $\omega = \frac{\alpha\omega_1 + \beta}{\gamma\omega_1 + \delta}$ ist. (Cf. p. 68.)