Ueber die Darstellung der hypergeometrischen Reihe durch ein bestimmtes Integral.

Von

Paul Schafheitlin in Berlin.

Schon seit Euler ist es bekannt, dass die hypergeometrische Reihe bis auf einen constanten Factor dargestellt werden kann durch das Integral

$$\int_0^1 u^{\beta-1}(1-u)^{\gamma-\beta-1}(1-xu)^{-\alpha}\,du.$$

Es dürfte vielleicht nicht ohne Interesse sein, eine von dieser völlig verschiedene Integraldarstellung mitzutheilen. Diese neue Darstellung enthält unter dem Integrationszeichen Bessel'sche Functionen und während obige Darstellung giltig ist für alle Werthe von x mit Ausnahme der auf der reellen Axe zwischen 1 und ∞ liegenden, wird die neue Darstellung sich beschränken auf Punkte der reellen Axe.

Um nachher den Gang der Entwickelungen nicht zu unterbrechen, soll zuerst ein Hilfsintegral abgeleitet werden.

Bezeichnet man die Bessel'sche Function n^{ter} Ordnung mit $J^n(x)$, so ist:

$$(1)\qquad J^n(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{x^n}{2^{n-1}\Pi\left(n-\frac{1}{2}\right)}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(x\cos\omega)\sin^{2n}\omega\,d\omega,$$

sobald $n > -\frac{1}{2}\cdot$ Durch partielle Integration folgt:

$$J^n(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{x^{n-1}}{2^{n-2}\Pi\left(n-\frac{3}{2}\right)}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(x\cos\omega)\sin^{2n-2}\omega\cos\omega\,d\omega.$$

Dividirt man diese Gleichung durch $x^{n-\varkappa+1}$ und integrirt alsdann nach x von 0 bis ∞, so wird das entstehende Integral

$$\int_0^\infty \frac{J^n(x)}{x^{n-\varkappa+1}}\,dx$$

einen endlichen Werth besitzen, sobald $\varkappa > 0$ (wegen der unteren Grenze) und $\varkappa < \frac{3}{2} + n$ (wegen der oberen Grenze); die Ermittelung des Integrales geschieht durch Umkehrung der Integrationsordnung auf der rechten Seite. Es ist:

$$(2) \qquad \int_0^\infty \frac{J^n(x)}{x^{n-\varkappa+1}}\,dx$$

$$= \frac{1}{2^{n-2}\cdot\sqrt{\pi}\cdot\Pi\left(n-\frac{3}{2}\right)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n-2}\omega\,d\omega \int_0^\infty \frac{\cos\omega\sin(x\cos\omega)}{x^{2-\varkappa}}\,dx.$$

Das innere Integral hat nur dann einen endlichen Werth, wenn $0 < \varkappa < 2$ mit Ausschluss der Grenzen. Unter dieser Annahme behält es auch für $\omega = \frac{\pi}{2}$ eine Bedeutung; denn es ist, wie aus der Theorie der Euler'schen Integrale bekannt ist:

$$\int_0^\infty \frac{\cos\omega\sin(x\cos\omega)}{x^{2-\varkappa}}\,dx = \Pi(\varkappa-2)\cdot\sin\frac{\varkappa-1}{2}\pi\cdot\cos^{2-\varkappa}\omega.$$

Somit geht (2) über in:

$$(3) \qquad \int_0^\infty \frac{J^n(x)}{x^{n-\varkappa+1}}\,dx = \frac{\Pi(\varkappa-2)\sin\frac{\varkappa-1}{2}\pi}{2^{n-2}\sqrt{\pi}\,\Pi\left(n-\frac{3}{2}\right)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n-2}\omega\cos^{2-\varkappa}\omega\,d\omega.$$

Das in (3) vorkommende Integral ist ein Euler'sches erster Gattung und man erhält, sobald $n > \frac{1}{2}$:

$$\int_0^\infty \frac{J^n(x)}{x^{n-\varkappa+1}}\,dx = \frac{\Pi(\varkappa-2)\,\Pi\left(\frac{1-\varkappa}{2}\right)\sin\frac{\varkappa-1}{2}\pi}{2^{n-1}\sqrt{\pi}\,\Pi\left(n-\frac{\varkappa}{2}\right)}, \quad (0 < \varkappa < 2).$$

Nun ist:

$$\frac{\sin\frac{\varkappa-1}{2}\pi}{\sqrt{\pi}} = \frac{\sqrt{\pi}}{\Pi\left(\frac{1-\varkappa}{2}\right)\Pi\left(\frac{\varkappa-3}{2}\right)};$$

Also:

$$\int_0^\infty \frac{J^n(x)}{x^{n+\varkappa-1}}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}\,\Pi(\varkappa-2)}{2^{n-1}\,\Pi\left(\frac{\varkappa-3}{2}\right)\Pi\left(n-\frac{\varkappa}{2}\right)}.$$

Ferner ist nach einem bekannten Gauss'schen Theorem:

$$\sqrt{\pi} = \frac{\Pi\left(\frac{\varkappa}{2}-1\right)\Pi\left(\frac{\varkappa-3}{2}\right)}{2^{2-\varkappa}\,\Pi(\varkappa-2)}.$$

Somit ergiebt sich schliesslich:

$$(4) \qquad \int_0^\infty \frac{J^n(x)}{x^{n-\varkappa+1}}\,dx = \frac{\Pi\left(\frac{\varkappa}{2}-1\right)}{2^{n-\varkappa+1}\,\Pi\left(n-\frac{\varkappa}{2}\right)}, \qquad \begin{pmatrix} n > \frac{1}{2} \\ 0 < \varkappa < 2 \end{pmatrix}.$$

Die untere Grenze von n kann hierin bis auf $-\frac{3}{2}$ herabgesetzt werden. Nämlich aus den bekannten Formeln:

$$(5\text{a}) \qquad \frac{2n}{x} J^n(x) = J^{n-1}(x) + J^{n+1}(x),$$

$$(5\text{b}) \qquad 2\,\frac{dJ^n(x)}{dx} = J^{n-1}(x) - J^{n+1}(x)$$

folgen die beiden anderen:

$$(6\text{a}) \qquad \frac{d(x^n J^n(x))}{dx} = x^n J^{n-1}(x),$$

$$(6\text{b}) \qquad \frac{d(x^{-n} J^n(x))}{dx} = -x^{-n} J^{n+1}(x).$$

Vermöge (6a) erhält man:

$$\int_0^\infty \frac{J^{n-1}(x)}{x^{n-\varkappa}}\,dx = \int_0^\infty \frac{x^n J^{n-1}(x)}{x^{2n-\varkappa}}\,dx$$

$$= \left[\frac{J^n(x)}{x^{n-\varkappa}}\right]_0^\infty + (2n-\varkappa)\int_0^\infty \frac{J^n(x)}{x^{n-\varkappa+1}}\,dx.$$

Ist $0 < \varkappa < n + \frac{1}{2}$, so verschwindet die Klammer und man erhält vermittelst (4):

$$\int_0^\infty \frac{J^{n-1}(x)}{x^{n-\varkappa}}\,dx = \frac{\Pi\left(\frac{\varkappa}{2}-1\right)}{2^{n-\varkappa}\,\Pi\left(n-\frac{\varkappa}{2}-1\right)}, \qquad \begin{pmatrix} n > \frac{1}{2} \\ 0 < \varkappa < 2 \text{ resp. } n + \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

oder bei Vertauschung von $n-1$ mit n:

$$\int_0^\infty \frac{J^n(x)}{x^{n-\varkappa+1}}\,dx = \frac{\Pi\left(\frac{\varkappa}{2}-1\right)}{2^{n-\varkappa+1}\,\Pi\left(n-\frac{\varkappa}{2}\right)}, \quad \left(\begin{matrix} n > -\frac{1}{2} \\ 0<\varkappa<2 \text{ resp. } n+\frac{3}{2}\end{matrix}\right).$$

Durch nochmalige Anwendung dieses Verfahrens ergiebt sich:

$$(7)\quad \int_0^\infty \frac{J^n(x)}{x^{n-\varkappa+1}}\,dx = \frac{\Pi\left(\frac{\varkappa}{2}-1\right)}{2^{n-\varkappa+1}\,\Pi\left(n-\frac{\varkappa}{2}\right)}, \quad \left(\begin{matrix} n > -\frac{3}{2} \\ 0<\varkappa<2 \text{ resp. } n+\frac{3}{2}\end{matrix}\right).$$

Kleiner darf, wegen der Beschränkung von $\varkappa$, n nicht sein. Auch die obere Grenze von $\varkappa$ lässt sich genauer feststellen. Durch Anwendung von (6b) folgt:

$$\int_0^\infty \frac{J^{n+1}(x)}{x^{n-\varkappa}}\,dx = -\left[\frac{J^n(x)}{x^{n-\varkappa}}\right]_0^\infty + \varkappa\int_0^\infty \frac{J^n(x)}{x^{n-\varkappa+1}}\,dx.$$

Die Klammer verschwindet, sobald $0<\varkappa<n+\frac{1}{2}$; folglich:

$$\int_0^\infty \frac{J^{n+1}(x)}{x^{n-\varkappa}}\,dx = \frac{\Pi\left(\frac{\varkappa}{2}\right)}{2^{n-\varkappa}\,\Pi\left(n-\frac{\varkappa}{2}\right)}, \quad \left(\begin{matrix} n > -\frac{3}{2} \\ 0<\varkappa<2 \text{ resp. } n+\frac{1}{2}\end{matrix}\right).$$

Setzt man n an Stelle von $n+1$ und $\varkappa-2$ an Stelle von $\varkappa$, so folgt:

$$\int_0^\infty \frac{J^n(x)}{x^{n-\varkappa+1}}\,dx = \frac{\Pi\left(\frac{\varkappa}{2}-1\right)}{2^{n-\varkappa+1}\,\Pi\left(n-\frac{\varkappa}{2}\right)}, \quad \left(\begin{matrix} n > -\frac{1}{2} \\ 2<\varkappa<4 \text{ resp. } n+\frac{3}{2}\end{matrix}\right).$$

Da nun (4) auch für $\varkappa=2$ giltig ist, wie unmittelbar aus (6b) erhellt, so folgt:

$$(8)\quad \int_0^\infty \frac{J^n(x)}{x^{n-\varkappa+1}}\,dx = \frac{\Pi\left(\frac{\varkappa}{2}-1\right)}{2^{n-\varkappa+1}\,\Pi\left(n-\frac{\varkappa}{2}\right)}, \quad \left(\begin{matrix} n > -\frac{3}{2} \\ 0<\varkappa\leqq 4 \text{ resp. } n+\frac{3}{2}\end{matrix}\right).$$

Durch wiederholte Anwendung desselben Verfahrens erhält man schliesslich die Formel:

$$(9) \qquad \int_0^\infty \frac{J^n(x)}{x^{n-\varkappa+1}}\,dx = \frac{\Pi\left(\frac{\varkappa}{2}-1\right)}{2^{n-\varkappa+1}\,\Pi\left(n-\frac{\varkappa}{2}\right)}, \qquad \left(\begin{array}{c} n > -\frac{3}{2} \\ 0 < \varkappa < n+\frac{3}{2} \end{array}\right).$$

Diese Formel ist für ein ganzes n schon von Herrn H. Weber*) gefunden worden.

Nunmehr schreiten wir zur eigentlichen Aufgabe dieser Arbeit. Es sei:

$$(10) \qquad \varphi(z) = \int_0^\infty \frac{J^\mu(x)\,J^\nu(xz)}{x^\lambda}\,dx,$$

so ist:

$$(11) \qquad \begin{cases} \varphi'(z) = \dfrac{1}{z}\displaystyle\int_0^\infty \frac{J^\mu(x)}{x^{\lambda-1}}\,\frac{\partial J^\nu(xz)}{\partial x}\,dx, \\[2ex] \varphi''(z) = \dfrac{1}{z^2}\displaystyle\int_0^\infty \frac{J^\mu(x)}{x^{\lambda-2}}\,\frac{\partial^2 J^\nu(xz)}{\partial x^2}\,dx. \end{cases}$$

Damit die Integrale in (10) und (11) nicht sinnlos sind, müssen die Bedingungen erfüllt sein:

$$(11a) \qquad 1 < \lambda < \mu + \nu + 1.$$

Bei Benutzung der bekannten Bessel'schen Differentialgleichung erhält man aus (10) und (11):

$$(12) \qquad \varphi''(z) + \frac{1}{z}\,\varphi'(z) - \frac{\nu^2}{z^2}\,\varphi(z) = -\int_0^\infty \frac{J^\mu(x)\,J^\nu(xz)}{x^{\lambda-2}}\,dx.$$

Aus (11) ergiebt sich ferner durch partielle Integration:

$$(13) \qquad \varphi'(z) = \frac{\lambda-1}{z}\,\varphi(z) - \frac{1}{z}\int_0^\infty \frac{J^\nu(xz)}{x^{\lambda-1}}\cdot\frac{\partial J^\mu(x)}{\partial x}\,dx,$$

$$(14) \qquad \varphi''(z) = \frac{(\lambda-1)(\lambda-2)}{z^2}\,\varphi(z)$$

$$+ \frac{1}{z^2}\int_0^\infty \frac{J^\nu(xz)}{x^{\lambda-2}}\left\{\frac{\partial^2 J^\mu(x)}{\partial x^2} - \frac{2(\lambda-2)}{x}\,\frac{\partial J^\mu(x)}{\partial x}\right\}dx.$$

Aus (13) und (14) folgt:

*) Crelle, Journal f. M. Bd. 69, pag. 231.

$$(15)\qquad z^2\varphi''(z) - (2\lambda - 3)z\varphi'(z) + \{(\lambda-1)^2 - \mu^2\}\,\varphi(z)$$
$$= -\int\limits_0^\infty \frac{J^\mu(x)\,J^\nu(xz)}{x^{\lambda-2}}\,dx.$$

Aus (12) und (15) erhält man nun:

$$(16)\qquad z^2(z^2-1)\,\varphi''(z) - z\{(2\lambda-3)\,z^2+1\}\,\varphi'(z)$$
$$+ \{[(\lambda-1)^2-\mu^2]\,z^2+\nu^2\}\,\varphi(z) = 0.$$

Setzt man:

$$(17)\qquad \varphi(z) = z^\nu\,\psi(z),$$

so ergiebt sich aus (16):

$$(18)\qquad z^2(z^2-1)\,\psi''(z) + z\{(2\nu-2\lambda+3)\,z^2-(2\nu+1)\}\,\psi'(z)$$
$$+ \{\nu(\nu-2\lambda+2)+(\lambda-1)^2-\mu^2\}\,z^2\psi(z) = 0.$$

Setzt man ferner:

$$(19)\qquad z^2 = \zeta,$$

so folgt aus (18):

$$(20)\qquad \zeta(\zeta-1)\,\psi''(\zeta) + \{(\nu-\lambda+2)\,\zeta-(\nu+1)\}\,\psi'(\zeta)$$
$$- \frac{(\mu-\nu+\lambda-1)\,(\mu+\nu-\lambda+1)}{4}\,\psi(\zeta) = 0.$$

Setzt man:

$$\mu = \alpha - \beta,$$
$$\nu = \gamma - 1,$$
$$\lambda = \gamma - \alpha - \beta,$$

so geht (20) über in die bekannte hypergeometrische Differentialgleichung. Bezeichnet man somit:

$$(21)\qquad \int\limits_0^\infty \frac{J^{\alpha-\beta}(x)\,J^{\gamma-1}(xz)}{x^{\gamma-\alpha-\beta}}\,dx$$

mit $\varphi(\alpha, \beta, \gamma, z)$, so erhält man mit Rücksicht auf (17), (19) und (20):

$$(22)\qquad \varphi(\alpha, \beta, \gamma, z) = Az^{\gamma-1}F(\alpha, \beta, \gamma, z^2)$$
$$+ Bz^{1-\gamma}F(\alpha-\gamma+1,\ \beta-\gamma+1,\ 2-\gamma,\ z^2);$$

hierin bedeuten A und B noch näher zu bestimmende Constanten. Die Bedingungsgleichung (11a) geht über in

$$(23)\qquad \gamma-\alpha-\beta-1 > 0 \quad \text{und} \quad \alpha > 0.$$

Ausserdem darf weder $\alpha-\beta$ noch $\gamma-1$ eine negative ganze Zahl sein. Um zur Bestimmung von A und B zu gelangen, gelte folgendes:

In der Reihenentwickelung von $J^n(x)$ bezeichne man die nach Abtrennung des ersten Gliedes verbleibende Reihe mit $H^n(x)$; es wird alsdann $H^n(x)$ mit der $(n+2)^{\text{ten}}$ Potenz von x beginnen.

Dann ist

$$\varphi(\alpha, \beta, \gamma, z) = \frac{z^{\gamma-1}}{2^{\gamma-1}\Pi(\gamma-1)} \int_0^\infty x^{\alpha+\beta-1} J^{\alpha-\beta}(x)\, dx$$
$$+ \int_0^\infty \frac{J^{\alpha-\beta}(x)\, H^{\gamma-1}(xz)}{x^{\gamma-\alpha-\beta}}\, dx,$$

vorausgesetzt, dass das erste Integral einen endlichen Werth besitzt. Unter dieser Annahme ist nach (9):

$$(24) \quad \varphi(\alpha, \beta, \gamma, z) = \frac{z^{\gamma-1}\Pi(\alpha-1)}{2^{\gamma-\alpha-\beta}\Pi(-\beta)\Pi(\gamma-1)} + \int_0^\infty \frac{J^{\alpha-\beta}(x)\, H^{\gamma-1}(xz)}{x^{\gamma-\alpha-\beta}}\, dx.$$

Setzt man für die linke Seite dieser Gleichung den aus (22) folgenden Werth, dividirt dann durch $z^{\gamma-1}$ und setzt alsdann $z = 0$, so verschwindet wegen der obigen Bemerkung über $H^n(x)$ das Integral auf der rechten Seite. Ist $\gamma > 1$, so sieht man, dass dann B den Werth Null hat; auch für $\gamma = 1$ muss B Null gesetzt werden, weil dann die zweite Lösung der Differentialgleichung logarithmisch unendlich wird. Somit ergiebt sich für kleine Werthe von z:

$$(25) \quad \varphi(\alpha, \beta, \gamma, z) = \frac{\Pi(\alpha-1)}{2^{\gamma-\alpha-\beta}\Pi(-\beta)\Pi(\gamma-1)} z^{\gamma-1} F(\alpha, \beta, \gamma, z^2),$$

vorausgesetzt dass (nach (9)):

$$(26) \qquad \alpha + \beta < \tfrac{3}{2}, \quad \beta - \alpha < \tfrac{3}{2} \quad \text{und} \quad \gamma \geqq 1.$$

Von diesen beschränkenden Bedingungen kann man sich indess befreien. Es ist:

$$(27) \qquad \varphi(\alpha, \beta, \gamma) = \int_0^\infty \frac{J^{\alpha-\beta}(x)\, J^{\gamma-1}(xz)}{x^{\gamma-\alpha-\beta}}\, dx,$$

$$(28) \qquad \varphi(\alpha+1, \beta, \gamma) = \int_0^\infty \frac{J^{\alpha-\beta+1}(x)\, J^{\gamma-1}(xz)}{x^{\gamma-\alpha-\beta-1}}\, dx.$$

Hieraus folgt mit Hilfe von (5a):

$$(29) \qquad 2(\alpha+\beta)\varphi - \varphi(\alpha+1) = \int_0^\infty \frac{J^{\alpha-\beta-1}(x)\, J^{\gamma-1}(xz)}{x^{\gamma-\alpha-\beta-1}}\, dx.$$

Aehnlich folgt:

$$(30)\qquad 2(\gamma-1)\,\varphi - z\varphi(\gamma-1) = z\int\limits_0^\infty \frac{J^{\alpha-\beta}(x)\,J^{\gamma}(xz)}{x^{\gamma-\alpha-\beta-1}}\,dx.$$

Aus (30) folgt vermöge (5b):

$$(\gamma-1)\,\varphi - z\,\varphi(\gamma-1) = -\int\limits_0^\infty \frac{J^{\alpha-\beta}(x)}{x^{\gamma-\alpha-\beta-1}}\cdot\frac{\partial}{\partial x}\left\{J^{\gamma-1}(xz)\right\}dx$$

$$= \left[-\frac{J^{\alpha-\beta}(x)\,J^{\gamma-1}(xz)}{x^{\gamma-\alpha-\beta-1}}\right]_0^\infty - \int\limits_0^\infty \frac{(\gamma-\alpha-\beta-1)\,J^{\alpha-\beta}(x)\,J^{\gamma-1}(xz)}{x^{\gamma-\alpha-\beta}}\,dx$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_0^\infty \frac{J^{\gamma-1}(xz)\left\{J^{\alpha-\beta-1}(x) - J^{\alpha-\beta+1}(x)\right\}}{x^{\gamma-\alpha-\beta-1}}\,dx.$$

Da wegen (23) die Klammer verschwindet, so erhält man mit Rücksicht von (27), (28), (29):

$$(31)\quad 2(\gamma-\alpha-1)\,\varphi(\alpha,\beta,\gamma) + \varphi(\alpha+1,\beta,\gamma) - z\varphi(\alpha,\beta,\gamma-1) = 0.$$

Analog ergiebt sich:

$$(32)\quad 2(\gamma-\beta-1)\,\varphi(\alpha,\beta,\gamma) - \varphi(\alpha,\beta+1,\gamma) - z\varphi(\alpha,\beta,\gamma-1) = 0.$$

Denselben beiden Gleichungen genügt die Function

$$\frac{\Pi(\alpha-1)}{2^{\gamma-\alpha-\beta}\,\Pi(-\beta)\,\Pi(\gamma-1)}\,z^{\gamma-1}\,F(\alpha,\beta,\gamma,z^2),$$

wie aus zwei bekannten Gauss'schen Formeln*) sich ergiebt. In (25) kann α, das positiv sein muss, willkürlich gewählt werden. Dann werden β und γ beschränkt wie aus (26) folgt, durch die Bedingungen:

$$\beta < \frac{3}{2} - \alpha,\qquad \gamma \geqq 1.$$

Formel (31) hebt aber die Beschränkung von γ und (32) die von β auf.

Ferner musste im Verlauf des Beweises angenommen werden, dass $\gamma-\alpha-\beta-1 > 0$; sonst lässt sich nämlich φ nicht zweimal nach z differenziren. Das Integral φ selbst bleibt aber endlich, sobald nur $\gamma-\alpha-\beta+1 > 0$; es lässt sich zeigen, dass auch hierfür noch (25) bestehen bleibt.

Man dividire (25) durch $z^{\gamma-1}$ und differenzire unter Anwendung von (6b), so folgt:

*) Gauss, Disq. circa ser. inf. etc. formula 5, 12. Werke III, pag. 130.

$$\int_0^\infty \frac{J^{\alpha-\beta}(x)\, J^{\gamma}(xz)}{x^{\gamma-\alpha-\beta-1}}\, dx = \frac{\Pi(\alpha-1)}{2^{\gamma-\alpha-\beta}\,\Pi(-\beta)\,\Pi(\gamma-1)}\, z^{\gamma-1}\, \frac{dF(\alpha,\beta,\gamma,z^2)}{dz},$$
$$(\gamma-\alpha-\beta-1>0).$$

Nach der Formel

$$\frac{dF(\alpha,\beta,\gamma,z)}{dz} = \frac{\alpha\beta}{\gamma}\, F(\alpha+1,\ \beta+1,\ \gamma+1,\ z)$$

ergiebt sich aus obiger Formel:

$$\int_0^\infty \frac{J^{\alpha-\beta}(x)\, J^{\gamma}(xz)}{x^{\gamma-\alpha-\beta-1}}\, dx$$
$$= \frac{\Pi(\alpha)}{2^{\gamma-\alpha-\beta-1}\,\Pi(-\beta-1)\,\Pi(\gamma)}\, z^{\gamma}\, F(\alpha+1,\ \beta+1,\ \gamma+1,\ z^2),$$
$$(\gamma-\alpha-\beta-1>0),$$

oder wenn α, β, γ an Stelle von $\alpha+1$, $\beta+1$, $\gamma+1$ gesetzt wird:

$$\int_0^\infty \frac{J^{\alpha-\beta}(x)\, J^{\gamma-1}(xz)}{x^{\gamma-\alpha-\beta}}\, dx$$
$$= \frac{\Pi(\alpha-1)}{2^{\gamma-\alpha-\beta}\,\Pi(-\beta)\,\Pi(\gamma-1)}\, z^{\gamma-1}\, F(\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ z^2), \qquad (\gamma-\alpha-\beta>0).$$

Durch nochmalige Anwendung desselben Verfahrens erhält man schliesslich für kleine Werthe von z:

$$(33)\quad \int_0^\infty \frac{J^{\alpha-\beta}(x)\, J^{\gamma-1}(xz)}{x^{\gamma-\alpha-\beta}}\, dx = \frac{\Pi(\alpha-1)}{2^{\gamma-\alpha-\beta}\,\Pi(-\beta)\,\Pi(\gamma-1)}\, z^{\gamma-1}\, F(\alpha,\beta,\gamma,z^2),$$

($\alpha>0$; $\gamma-\alpha-\beta+1>0$; weder $\alpha-\beta$ noch $\gamma-1$ negativ ganzzahlig).

Für $z=0$ und $\gamma=1$ bleibt (33) nur giltig, sofern $\alpha+\beta<\frac{3}{2}$.

Wie schon erwähnt gilt (33) in der Umgebung des Nullpunktes; es ist noch zu untersuchen, wie der Werth des betrachteten Integrales sich über den Punkt $z=1$ hinaus fortsetzt.

Ist $z>1$, so setze man

$$z = \frac{1}{\zeta}$$

und man erhält:

$$\varphi(z) = \int_0^\infty \frac{J^{\alpha-\beta}(x)\, J^{\gamma-1}\left(\frac{x}{\zeta}\right)}{x^{\gamma-\alpha-\beta}}\, dx. \quad (\zeta<1).$$

Man substituire unter der Voraussetzung $\zeta > 0$,

$$\xi = \frac{x}{\zeta},$$

so folgt:

$$\varphi(z) = \frac{1}{\zeta^{\gamma-\alpha-\beta-1}} \int_0^\infty \frac{J^{\gamma-1}(\xi)\, J^{\alpha-\beta}(\xi\zeta)}{\xi^{\gamma-\alpha-\beta}}\, d\xi$$

oder

$$(34) \qquad \frac{\varphi(z)}{z^{\gamma-\alpha-\beta-1}} = \int_0^\infty \frac{J^{\gamma-1}(\xi)\, J^{\alpha-\beta}(\xi\zeta)}{\xi^{\gamma-\alpha-\beta}}\, d\xi. \quad (\zeta < 1).$$

Mit Hilfe von (33) ergiebt sich hieraus:

$$(35) \qquad \int_0^\infty \frac{J^{\alpha-\beta}(x)\, J^{\gamma-1}(xz)}{x^{\gamma-\alpha-\beta}}\, dx$$

$$= \frac{\Pi(\alpha-1)}{2^{\gamma-\alpha-\beta}\,\Pi(\gamma-\alpha-1)\,\Pi(\alpha-\beta)}\, z^{\gamma-2\alpha-1} F\left(\alpha,\ \alpha-\gamma+1,\ \alpha-\beta+1,\ \frac{1}{z^2}\right)$$
$$(z > 1).$$

Es geht somit das Integral an der Stelle $z = 1$ in eine andere Function über, da die in (35) vorkommende Function nicht die reguläre Fortsetzung der in (33) vorkommenden ist.

Man sieht leicht ein, dass $\varphi(\alpha, \beta, \gamma, z)$ für $z = 1$ endlich und stetig bleibt, sobald $\gamma - \alpha - \beta > 0$; bezeichnet man die in der Zahl n enthaltene grösste ganze Zahl mit $E(n)$, so bleiben auch die Ableitungen von φ bis zur Ordnung $E(\gamma - \alpha - \beta)$ endlich und stetig. Die höheren Ableitungen dagegen sind für $z = 1$ unstetig. Es folgt dies daraus, dass φ selbst an der betreffenden Stelle unstetig wird, sobald $\gamma - \alpha - \beta \leqq 0$. Setzt man nämlich in diesem Falle

$$\alpha + \beta - \gamma = 1 - \lambda,$$

wo

$$0 < \lambda \leqq 1,$$

so ist:

$$(36) \qquad \varphi(1) = \int_0^\infty x^{1-\lambda}\, J^{\alpha-\beta}(x)\, J^{\gamma-1}(x)\, dx.$$

Für die obere Grenze ist die zu integrirende Function gleich:

$$\frac{2}{\pi}\, \frac{\cos\left\{\frac{2(\alpha-\beta)+1}{4}\pi - x\right\} \cos\left\{\frac{2\gamma-1}{4}\pi - x\right\}}{x^\lambda}$$

$$= \frac{1}{\pi}\, \frac{\cos\left\{\frac{\gamma+\alpha-\beta}{2}\pi - 2x\right\} + \cos\frac{\gamma-\alpha+\beta-1}{2}\pi}{x^\lambda}.$$

Wegen des zweiten Summanden wird $\varphi(1)$ im allgemeinen unendlich werden; nur in dem Falle, dass $\gamma - \alpha + \beta$ eine gerade Zahl ist, wird $\varphi(1)$ endlich bleiben. Dieser Grenzwerth ist noch zu ermitteln.

Es sei

$$\gamma - \alpha + \beta = 2m \tag{37}$$

wo m eine positive oder negative ganze Zahl bedeutet. Aus der Ungleichheit

$$0 < \gamma - \alpha - \beta + 1 \leq 1$$

folgt alsdann:

$$m \leq \beta < m + \tfrac{1}{2} \tag{38}$$

und es ist zu ermitteln das Integral:

$$\int_0^\infty x^{2(\beta-m)} J^{\alpha-\beta}(x) J^{\alpha-\beta+2m-1}(x)\, dx = \psi(m). \tag{39}$$

Für $m = 0$ und 1 lässt sich der Werth von (39) leicht finden. Nämlich aus (5a) und (5b) folgt:

$$\frac{n}{x} J^{(n)}(x) + \frac{dJ^n(x)}{dx} = J^{n-1}(x). \tag{40}$$

Setzt man $n = \alpha - \beta$ und multiplicirt (40) mit $x^{2\beta} J^{\alpha-\beta}(x)$ so folgt:

$$(\alpha-\beta) x^{2\beta-1} [J^{\alpha-\beta}(x)]^2 + x^{2\beta} J^{\alpha-\beta}(x) \frac{dJ^{\alpha-\beta}(x)}{dx} \tag{41}$$
$$= x^{2\beta} J^{\alpha-\beta}(x) J^{\alpha-\beta-1}(x).$$

Nun ist:

$$x^{2\beta} J^{\alpha-\beta}(x) \frac{dJ^{\alpha-\beta}(x)}{dx} = \frac{1}{2} \frac{d}{dx} [x^\beta J^{\alpha-\beta}(x)]^2 - \beta x^{2\beta-1} [J^{\alpha-\beta}(x)]^2,$$

somit erhält man aus (41):

$$(\alpha-2\beta) x^{2\beta-1} [J^{\alpha-\beta}(x)]^2 + \frac{1}{2} \frac{d}{dx} [x^\beta J^{\alpha-\beta}(x)]^2 \tag{42}$$
$$= x^{2\beta} J^{\alpha-\beta}(x) J^{\alpha-\beta-1}(x).$$

Integrirt man diese Gleichung zwischen 0 und ∞, so verschwindet das Integral aus dem zweiten Gliede, da $\alpha > 0$ und $\beta < \frac{1}{2}$ (nach (38)) und man erhält:

$$(\alpha-2\beta) \int_0^\infty x^{2\beta-1} J^{\alpha-\beta}(x) J^{\alpha-\beta}(x)\, dx = \psi(0). \tag{43}$$

Auf das Integral in (43) lässt sich (33) anwenden, da $1 - 2\beta > 0$, und es folgt, wenn man in (33) $\gamma = \alpha - \beta + 1$ setzt:

$$(44)\qquad \psi(0)=\frac{\Pi(\alpha-1)\,\Pi(-2\beta)}{2^{1-2\beta}\,\Pi(-\beta)\,\Pi(-\beta)\,\Pi(\alpha-2\beta-1)},\quad \left(0\leqq\beta<\tfrac{1}{2}\right).$$

Successive lässt sich aus (44) der Werth von ψ für kleinere und grössere m finden. Durch Induction findet man so:

$$(45)\quad \psi(m)=\frac{\Pi(\alpha-1)\,\Pi\,2(m-\beta)}{2^{1+2m-2\beta}\,(m-\beta)\,\Pi(-\beta)\,\Pi(2m-\beta-1)\,\Pi(\alpha+2m-2\beta-1)},$$
$$\left(m\leqq\beta<m+\tfrac{1}{2}\right).$$

Um die Richtigkeit von (45) zu erweisen, setze man:

$$(46)\qquad \psi_1(m)=\int_0^\infty x^{2(\beta-m)}\,J^{\alpha-\beta}(x)\,J^{\alpha-\beta+2m+1}(x)\,dx,$$

so ergiebt sich vermöge (5a) aus (39) und (46):

$$(47)\ \psi(m)+\psi_1(m)=2(\alpha-\beta+2m)\int_0^\infty x^{2(\beta-m)-1}\,J^{\alpha-\beta}(x)\,J^{\alpha-\beta+2m}(x)\,dx.$$

Das Integral in (47) lässt sich wieder durch (33) finden und man erhält unter der Annahme der Richtigkeit von (45):

$$(48)\qquad \psi_1(m)=\frac{\Pi(\alpha)\,\Pi\,2(m-\beta)}{2^{1+2m-2\beta}\,(m-\beta)\,\Pi(-\beta-1)\,\Pi(2m-\beta)\,\Pi(\alpha+2m-2\beta)},$$
$$\left(m\leqq\beta<m+\tfrac{1}{2}\right).$$

Nun sieht man aus (46) dass

$$(49)\qquad \psi_1(\alpha,\beta\ m)=\psi(\alpha+1,\beta+1,m+1).$$

Mit Hülfe von (49) folgt aus (48):

$$(50)\ \psi(\alpha,\beta,m+1)=\frac{\Pi(\alpha-1)\,\Pi\,2(m-\beta+1)}{2^{3+2m-2\beta}\,(m-\beta+1)\,\Pi(-\beta)\,\Pi(2m-\beta+1)\,\Pi(\alpha+2m-2\beta+1)},$$
$$\left(m+1\leqq\beta<m+\tfrac{3}{2}\right).$$

Setzt man aber in (45) $m+1$ an Stelle von m, so folgt auch (50). Nach der bekannten Kästner'schen Schlussweise folgt somit die Richtigkeit von (45).

Das Resultat der bisherigen Untersuchungen lässt sich nun folgendermassen zusammenfassen:

Ist weder $\alpha-\beta$ noch $\gamma-1$ eine negative ganze Zahl und sowohl α als auch $\gamma-\alpha-\beta+1$ grösser als Null, so ist:

$$(51)\qquad \int_0^\infty \frac{J^{\alpha-\beta}(x)\,J^{\gamma-1}(xz)}{x^{\gamma-\alpha-\beta}}\,dx$$

$$=\frac{\Pi(\alpha-1)}{2^{\gamma-\alpha-\beta}\,\Pi(-\beta)\,\Pi(\gamma-1)}\quad z^{\gamma-1}\quad F(\alpha,\beta,\gamma,z^2)\qquad (z<1),$$

$$(52)\qquad \int_0^\infty \frac{J^{\alpha-\beta}(x)\,J^{\gamma-1}(xz)}{x^{\gamma-\alpha-\beta}}\,dx$$

$$=\frac{\Pi(\alpha-1)}{2^{\gamma-\alpha-\beta}\,\Pi(\gamma-\alpha-1)\,\Pi(\alpha-\beta)}\,z^{\gamma-2\alpha-1}\,F\left(\alpha,\alpha-\gamma+1,\alpha-\beta+1\,\frac{1}{z^2}\right)\,(z>1)$$

mit Ausnahme der drei singulären Punkte $z=0,\ 1,\ \infty$.

Für $z=0$ bleibt (51) giltig, mit Ausnahme des Falles

$$\gamma=1$$

und gleichzeitig

$$\alpha+\beta>\frac{3}{2}.$$

Für $z=\infty$ hat in jedem Fall das Integral den Werth Null.

Für $z=1$ bleiben (51) und (52) giltig und gehen in einander über, sobald

$$\gamma-\alpha-\beta>0.$$

Ist

$$\gamma-\alpha-\beta\leqq 0$$

so wird im allgemeinen das Integral für $z=1$ unendlich gross; nur wenn alsdann

$$\gamma-\alpha+\beta=2m,$$

wo m eine positive oder negative ganze Zahl mit Einschluss der Null bedeutet, ist

$$(53)\qquad \int_0^\infty \frac{J^{\alpha-\beta}(x)\,J^{\gamma-1}(x)}{x^{\gamma-\alpha-\beta}}\,dx=\frac{\Pi(\alpha-1)\,\Pi(\gamma-\alpha-\beta-1)}{2^{\gamma-\alpha-\beta}\,\Pi(-\beta)\,\Pi(\gamma-\alpha-1)\,\Pi(\gamma-\beta-1)},$$

$$(\gamma-\alpha-\beta<0)$$

und

$$(54)\qquad \int_0^\infty \frac{J^{\alpha-\beta}(x)\,J^{\gamma-1}(x)}{x^{\gamma-\alpha-\beta}}\,dx\begin{cases}=(-1)^{\beta-1}\cdot\frac{1}{2},\ (\beta>0,\ \gamma-\alpha-\beta=0),\\ =(-1)^{-\beta}\cdot\frac{1}{2},\ (\beta\leqq 0,\ \gamma-\alpha-\beta=0).\end{cases}$$

Durch Specialisirung von α, β und γ ergeben sich aus den Formeln (51)—(54) viele theils schon bekannte Integralformeln.

Setzt man:

$$\alpha=\frac{n+m}{2},\quad \beta=\frac{n-m}{2},\quad \gamma=n+1$$

so erhält man:

$$
(55) \qquad \int_0^\infty \frac{J^m(x)\, J^n(xz)}{x}\, dx
$$

$$
= \begin{cases}
\dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{\Pi\left(\dfrac{m+n}{2}-1\right)}{\Pi\dfrac{m-n}{2}\,\Pi n}\, z^n\, F\left(\dfrac{m+n}{2},\ \dfrac{n-m}{2},\ n+1,\ z^2\right), & (z<1), \\[2ex]
\dfrac{1}{(m+n)\,\Pi\dfrac{m-n}{2}\,\Pi\dfrac{n-m}{2}} = \dfrac{2}{\pi}\,\dfrac{\sin\dfrac{m-n}{2}\pi}{m^2-n^2}, & (z=1), \\[2ex]
\dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{\Pi\left(\dfrac{m+n}{2}-1\right)}{\Pi\left(\dfrac{n-m}{2}\right)\Pi m}\, z^{-m} F\left(\dfrac{m+n}{2},\ \dfrac{m-n}{2},\ m+1,\ \dfrac{1}{z^2}\right), & (z>1),
\end{cases}
$$

unter der Voraussetzung $m+n>0$. Ist speciell $m-n$ eine positive gerade Zahl, so ist:

$$
(56) \qquad \int_0^\infty \frac{J^m(x)\, J^n(xz)}{x}\, dx
$$

$$
= \begin{cases}
\dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{\Pi\left(\dfrac{m+n}{2}-1\right)}{\Pi\left(\dfrac{m-n}{2}\right)\Pi n}\, z^n \cdot F\left(\dfrac{m+n}{2},\ \dfrac{n-m}{2},\ n+1,\ z^2\right), & (z<1), \\[2ex]
0 & ,\ (z \geqq 1),
\end{cases}
$$

und ist $m=n$, so folgt

$$
(57) \qquad \int_0^\infty \frac{J^n(x)\, J^n(xz)}{x}\, dx = \begin{cases}
\dfrac{1}{2n} \cdot z^n, & (z \leqq 1), \\[2ex]
\dfrac{1}{2n} \cdot \dfrac{1}{z^n}, & (z \geqq 1).
\end{cases}
$$

Setzt man:

$$
\alpha = \frac{n}{2}, \quad \beta = -\frac{n}{2}, \quad \gamma = \frac{1}{2},
$$

so folgt, bei Berücksichtigung von

$$
(58) \qquad J^{-\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cdot \cos x,
$$

$$
(59) \qquad J^{+\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cdot \sin x,
$$

aus (51) und (52):

$$
\int_0^\infty \frac{J^n(x)\cos(xz)}{x}\, dx
$$

$$
(n>0)
$$

$$
= \begin{cases}
\dfrac{1}{n}\, F\left(\dfrac{n}{2},\ -\dfrac{n}{2},\ \dfrac{1}{2},\ z^2\right), & (z \leqq 1), \\[2ex]
\dfrac{\sqrt{\pi}\,\Pi\dfrac{n}{2}}{n\Pi\left(-\dfrac{n}{2}-\dfrac{1}{2}\right)\Pi n} \cdot \dfrac{1}{z^n} \cdot F\left(\dfrac{n}{2},\ \dfrac{n+1}{2},\ n+1,\ \dfrac{1}{z^2}\right), & (z \geqq 1).
\end{cases}
$$

Es ist

$$\Pi\left(-\frac{n}{2}-\frac{1}{2}\right)\Pi\left(+\frac{n}{2}-\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi}{\cos\frac{n\pi}{2}}$$

und

$$\frac{\Pi\frac{n}{2}\,\Pi\left(\frac{n}{2}-\frac{1}{2}\right)}{\Pi n}=\frac{\sqrt{\pi}}{2^n},$$

folglich

(60)
$$\int_0^\infty \frac{J^n(x)\cos(xz)}{x}\,dx$$
$$(n>0)$$
$$=\begin{cases}\frac{1}{n}\,F\left(\frac{n}{2},-\frac{n}{2},\frac{1}{2},z^2\right), & (z^2\leqq 1),\\ \frac{\cos n\frac{\pi}{2}}{n}\cdot\frac{1}{(2z)^n}\,F\left(\frac{n}{2},\frac{n+1}{2},n+1,\frac{1}{z^2}\right), & (z\geqq 1).\end{cases}$$

Ist n eine ungerade ganze Zahl, so verschwindet das Integral für $z\geqq 1$. Setzt man für $z^2\leqq 1$:

$$z=\sin w\qquad\left(-\frac{\pi}{2}\leqq\omega\leqq\frac{\pi}{2}\right),$$

so folgt aus (60) mit Rücksicht auf eine bekannte Gauss'sche Formel*):

(61)
$$\int_0^\infty J^n(x)\cos(x\sin\omega)\frac{dx}{x}=\frac{\cos n\omega}{n},\quad\left(\begin{matrix}-\frac{\pi}{2}\leqq\omega\leqq\frac{\pi}{2}\\ n>0\end{matrix}\right).$$

Vermittelst (59) ergiebt sich entsprechend für

$$\alpha=\frac{n+1}{2},\quad\beta=-\frac{n-1}{2},\quad\gamma=\frac{3}{2}:$$

(62)
$$\int_0^\infty \frac{J^n(x)\sin xz}{x}\,dx$$
$$(n>-1)$$
$$=\begin{cases}z\,F\left(\frac{n+1}{2},-\frac{n-1}{2},\frac{3}{2},z^2\right) & (z^2\leqq 1),\\ \frac{\sin n\frac{\pi}{2}}{n}\cdot\frac{1}{(2z)^n}\cdot F\left(\frac{n}{2},\frac{n+1}{2},n+1,\frac{1}{z^2}\right), & (z\geqq 1).\end{cases}$$

Ist n eine gerade ganze Zahl, so verschwindet das Integral für $z\geqq 1$. Macht man für $z^2\leqq 1$ dieselbe Substitution wie oben, so folgt:

(63)
$$\int_0^\infty J^n(x)\sin(x\sin\omega)\frac{dx}{x}=\frac{\sin n\omega}{n},\quad\left(\begin{matrix}-\frac{\pi}{2}\leqq\omega\leqq\frac{\pi}{2}\\ n>-1\end{matrix}\right).$$

*) Gauss' Werke, Bd. III, pag. 127. Form. XX.

Mit Rücksicht auf die Kummer'sche Gleichung:*)

$$F(\alpha,\beta,2\beta,x)=2^{2\alpha}(1+\sqrt{1-x})^{-2\alpha}F\left\{\alpha,\,\alpha-\beta+\frac{1}{2},\,\beta+\frac{1}{2},\,\left(\frac{1-\sqrt{1-x}}{1+\sqrt{1-x}}\right)^2\right\}$$

ist:

$$(64)\quad F\left(\frac{n}{2},\,\frac{n+1}{2},\,n+1,\,\frac{1}{z^2}\right)=\left(\frac{z+\sqrt{z^2-1}}{2z}\right)^{-n}=\{2z\,(z-\sqrt{z^2-1}\}^n,$$

$$(z\geqq 1).$$

Somit ergiebt sich aus (60) und (62):

$$(65)\quad \int_0^\infty J^n(x)\cos xz\,\frac{dx}{x}=\frac{1}{n}\cos\frac{n\pi}{2}\cdot(z-\sqrt{z^2-1})^n,\qquad \binom{z\geqq 1}{n>0},$$

$$(66)\quad \int_0^\infty J^n(x)\sin xz\,\frac{dx}{x}=\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi}{2}\cdot(z-\sqrt{z^2-1})^n,\qquad \binom{z\geqq 1}{n>-1}.$$

Setzt man:

$$\gamma=\alpha;\quad \beta=1-\mu$$

so ist:

$$(67)\quad \int_0^\infty \frac{J^{\alpha+\mu-1}(x)\,J^{\alpha-1}(xz)}{x^{\mu-1}}\,dx=\begin{cases}\dfrac{1}{2^{\mu-1}\,\Pi(\mu-1)}\cdot z^{\alpha-1}\cdot(1-z^2)^{\mu-1}, & (z<1),\\ 0 & ,\ (z>1).\end{cases}$$

$$(\alpha>0;\ \mu>0)$$

Ist speciell

$$\alpha=1,\quad \mu=\frac{1}{2},$$

so folgt:

$$(68)\qquad \int_0^\infty \sin x\,J^0(xz)\,dx=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{1-z^2}}, & (z^2<1),\\ 0\quad, & (z^2>1),\end{cases}$$

und ist

$$\alpha=\frac{1}{2},\quad \mu=\frac{1}{2},$$

so erhält man:

---

*) Crelle Journ. f. M. Bd. 15, pag. 77, Formel 43. (NB) In der Formel ist ein Druckfehler; statt $\beta+\frac{1}{2}$ steht dort $\alpha-\beta+\frac{1}{2}$.

$$(69)\qquad \int_0^\infty J^0(x)\cos(xz)\,dx = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{1-z^2}}, & (z^2<1),\\ 0\quad, & (z^2>1). \end{cases}$$

Diese Formeln lassen sich auch schreiben:

$$(70)\qquad \left.\begin{aligned} &\int_0^\infty \cos(ax)\,J^0(bx)\,dx = \frac{1}{\sqrt{b^2-a^2}}\\ &\int_0^\infty \sin(ax)\,J^0(bx)\,dx = 0 \end{aligned}\right\}\ b^2>a^2,$$

und

$$(71)\qquad \left.\begin{aligned} &\int_0^\infty \cos(ax)\,J^0(bx)\,dx = 0\\ &\int_0^\infty \sin(ax)\,J^0(bx)\,dx = \frac{1}{\sqrt{a^2-b^2}} \end{aligned}\right\}\ a^2>b^2.$$

Diese vier Formeln sind zuerst von Herrn H. Weber*) aufgestellt worden.

Aus (51)–(54) lassen sich auch einige auf die Kugelfunctionen P und Q bezügliche Integralformeln ableiten.

Es ist:**)

$$P^{2n}(x) = (-1)^n\frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots\ 2n}F\left(n+\tfrac{1}{2},\ -n,\ \tfrac{1}{2},\ x^2\right),$$

$$P^{2n+1}(x) = (-1)^n\frac{3\cdot 5\cdots(2n+1)}{2\cdot 4\cdots\ 2n}\,x\cdot F\left(n+\tfrac{3}{2},\ -n,\ \tfrac{3}{2},\ x^2\right),$$

$$P^n(\cos\vartheta) = F\left(n+1,\ -n,\ 1,\ \sin^2\frac{\vartheta}{2}\right),$$

$$P^n(\cos\vartheta) = (-1)^n F\left(n+1,\ -n,\ 1,\ \cos^2\frac{\vartheta}{2}\right).$$

Hieraus folgt:

$$(72)\qquad \int_0^\infty J^{2n+\frac{1}{2}}(x)\cos xz\,\frac{dx}{\sqrt{x}} = \begin{cases} (-1)^n\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}\cdot P^{2n}(z), & (z^2<1),\\ (-1)^n\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}\cdot\dfrac{1}{2}\quad, & (z^2=1),\\ 0\quad, & (z^2>1); \end{cases}$$

*) Crelle, Journ. f. M. Bd. 75, pag. 77.

**) Heine, Handbuch d. Kugelfunct. I, §§ 4, 5.

$$(73)\quad \int_0^\infty J^{2n+\frac{3}{2}}(x)\sin xz\frac{dx}{\sqrt{x}} = \begin{cases} (-1)^n\sqrt{\frac{\pi}{2}}\cdot P^{2n+1}(z), & (z^2 < 1), \\ (-1)^n\sqrt{\frac{\pi}{2}}\cdot\frac{1}{2}, & (z^2 = 1), \\ 0, & (z^2 > 1); \end{cases}$$

$$(74)\quad \int_0^\infty J^{2n+1}(x)J^0\left(x\sin\frac{\vartheta}{2}\right)dx = \begin{cases} P^n(\cos\vartheta), & \left(\sin^2\frac{\vartheta}{2} < 1\right), \\ (-1)^n\cdot\frac{1}{2}, & (\vartheta^2 = \pi), \\ 0, & \left(\sin^2\frac{\vartheta}{2} > 1\right), \end{cases}$$

$$(75)\quad \int_0^\infty J^{2n+1}(x)J^0\left(x\cos\frac{\vartheta}{2}\right)dx = \begin{cases} (-1)^n P^n(\cos\vartheta), & \left(\cos^2\frac{\vartheta}{2} < 1\right), \\ (-1)^n\cdot\frac{1}{2}, & (\vartheta = 0), \\ 0, & \left(\cos^2\frac{\vartheta}{2} > 1\right). \end{cases}$$

Aus (74) und (75) lassen sich auf einfache Weise die von Dirichlet und Mehler angegebenen Integralformeln der Kugelfunctionen ableiten. Setzt man in (74) für $J^0\left(x\sin\frac{\vartheta}{2}\right)$ den bekannten Integralausdruck und kehrt die Integrationsordnung um, so folgt:

$$(76)\quad \int_0^\infty J^{2n+1}(x)J^0\left(x\sin\frac{\vartheta}{2}\right)dx$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\omega\int_0^\infty J^{2n+1}(x)\cos\left(x\sin\frac{\vartheta}{2}\sin\omega\right)dx.$$

Auf das innere Integral wird man geführt, wenn man in (51) setzt:

$$\alpha = n+1,\quad \beta = -n,\quad \gamma = \frac{1}{2}.$$

Man erkennt hieraus, dass dasselbe endlich ist, sobald

$$\sin\frac{\vartheta}{2}\cdot\sin\omega < 1;$$

dagegen unendlich wird für

$$\sin\frac{\vartheta}{2}\cdot\sin\omega = 1.$$

Damit also die Umkehrung der Integrationsordnung in (76) zulässig sei, muss sein

$$\vartheta < \pi.$$

Unter dieser Voraussetzung ist, wie sich sofort durch Differentiation aus (63) ergiebt:

$$(77)\qquad \int_0^\infty J^{2n+1}(x)\cos\left(x\sin\frac{\vartheta}{2}\sin\omega\right)dx = \frac{\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\varphi}{\cos\frac{1}{2}\varphi},$$

wenn man setzt

$$(78)\qquad \sin\frac{\vartheta}{2}\cdot\sin\omega = \sin\frac{\varphi}{2}.$$

Somit erhält man aus (76):

$$(79)\qquad P^n(\cos\vartheta) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\omega\,\frac{\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\varphi}{\cos\frac{\varphi}{2}}.$$

Führt man φ als Integrationsvariabele ein, so erhält man:

$$P^n(\cos\vartheta) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\vartheta}\frac{\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\varphi\,d\varphi}{2\sqrt{\sin^2\frac{\vartheta}{2}-\sin^2\frac{\varphi}{2}}},$$

$$(80)\qquad P^n(\cos\vartheta) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\vartheta}\frac{\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\varphi\,d\varphi}{\sqrt{2(\cos\varphi-\cos\vartheta)}}.\qquad (0<\vartheta<\pi)$$

Setzt man

$$\cos\frac{\vartheta}{2}\cdot\sin\omega = \sin\frac{\varphi}{2},$$

so folgt auf demselben Wege aus (75):

$$(-1)^n P^n(\cos\vartheta) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi-\vartheta}\frac{\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\varphi\,d\varphi}{2\sqrt{\cos^2\frac{\vartheta}{2}-\sin^2\frac{\varphi}{2}}},$$

$$(81)\qquad P^n(\cos\vartheta) = \frac{2}{\pi}\int_{\vartheta}^{\pi}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\varphi\,d\varphi}{\sqrt{2(\cos\vartheta-\cos\varphi)}};\quad (0<\vartheta<\pi).$$

Die Formeln (80) und (81) rühren von Mehler*) her. Addirt man

*) Mathem. Annalen Bd. V, pag. 141.

(80) und (81) und subtrahirt man dieselben, nachdem man n mit $n-1$ vertauscht hat, so ergeben sich die Formeln:

$$\pi P^n(\cos\vartheta) = \int_0^\vartheta \frac{\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\varphi\, d\varphi}{\sqrt{2(\cos\varphi - \cos\vartheta)}} + \int_\vartheta^\pi \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\varphi\, d\varphi}{\sqrt{2(\cos\vartheta - \cos\varphi)}},$$

$$(n \geqq 1) \quad 0 = \int_0^\vartheta \frac{\cos\left(n-\frac{1}{2}\right)\varphi\, d\varphi}{\sqrt{2(\cos\varphi - \cos\vartheta)}} - \int_\vartheta^\pi \frac{\sin\left(n-\frac{1}{2}\right)\varphi\, d\varphi}{\sqrt{2(\cos\vartheta - \cos\varphi)}}.$$

Durch Addition und Subtraction folgen hieraus die beiden Dirichlet'schen Formeln:*)

$$(82) \begin{cases} \frac{\pi}{2} P^n(\cos\vartheta) = \displaystyle\int_0^\vartheta \frac{\cos n\varphi \cos\frac{\varphi}{2}\, d\varphi}{\sqrt{2(\cos\varphi - \cos\vartheta)}} + \int_\vartheta^\pi \frac{\cos n\varphi \sin\frac{\varphi}{2}\, d\varphi}{\sqrt{2(\cos\vartheta - \cos\varphi)}}, \\ \frac{\pi}{2} P^n(\cos\vartheta) = -\displaystyle\int_0^\vartheta \frac{\sin n\varphi \sin\frac{\varphi}{2}\, d\varphi}{\sqrt{2(\cos\varphi - \cos\vartheta)}} + \int_\vartheta^\pi \frac{\sin n\varphi \cos\frac{\varphi}{2}\, d\varphi}{\sqrt{2(\cos\vartheta - \cos\varphi)}}. \end{cases}$$

Die Formeln (82) verlieren für $n=0$ ihre Giltigkeit, während (80) und (81) für diesen Fall auch giltig sind.

Für ein reelles $x < 1$ bestehen die Gleichungen:

$$Q^{2n}(x) = (-1)^n \frac{2\cdot 4\cdots 2n}{1\cdot 3\cdots(2n-1)} \cdot x \cdot F\left(n+1, \frac{1}{2}-n, \frac{3}{2}, x^2\right),$$

$$Q^{2n+1}(x) = (-1)^{n+1} \frac{2\cdot 4\cdots 2n}{3\cdot 5\cdots(2n+1)} F\left(n+1, -\frac{1}{2}-n, \frac{1}{2}, x^2\right),$$

ferner für $x > 1$

$$Q^n(x) = \frac{n!}{3\cdot 5\cdots(2n+1)} \cdot \frac{1}{x^{n+1}} F\left(\frac{n}{2}+1, \frac{n}{2}+\frac{1}{2}, n+\frac{3}{2}, \frac{1}{x^2}\right), \text{**})$$

während für $x=1$ Q^n unendlich wird.

Setzt man demgemäss in (51) und (52)

$$\alpha = n+1, \quad \beta = \frac{1}{2}-n, \quad \gamma = \frac{3}{2},$$

resp.

$$\alpha = n+1, \quad \beta = -\frac{1}{2}-n, \quad \gamma = \frac{1}{2},$$

*) Crelle, Journal f. Math. Bd. 17, pag. 41.

**) Heine, Handbuch der Kugelf. I, §§ 17, 29.

so ergiebt sich nach einigen einfachen Reductionen:

$$\int\limits_0^\infty J^{2n+\frac{1}{2}}(x)\sin xz\frac{dx}{\sqrt{x}}=(-1)^n\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,Q^{2n}(z),\tag{83}$$

$$\int\limits_0^\infty J^{2n+\frac{3}{2}}(x)\cos xz\frac{dx}{\sqrt{x}}=(-1)^{n+1}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,Q^{2n+1}(z).\tag{84}$$

Diese Formeln gelten für jedes reelle z und sind eine Ergänzung der Formeln (72) und (73).

Als letzte Anwendung der allgemeinen Formeln setze man

$$s=-m,\qquad \gamma=\alpha-m,$$

wo m eine positive ganze Zahl mit Einschluss der Null bedeutet. Aus (51), (52) und (54) folgt alsdann:

$$\int\limits_0^\infty J^{\alpha+m}(x)\,J^{\alpha-m-1}(xz)\,dx=\tag{85}$$

$$=\begin{cases}\dfrac{\Pi(\alpha-1)}{\Pi m\,\Pi(\alpha-m-1)}\,z^{\alpha-m-1}F(\alpha,-m,\alpha-m,z^2), & (z<1),\\ (-1^m\,\dfrac{1}{2} & (z=1),\\ 0 & (z>1).\end{cases}$$

Setzt man in (85) $m=0$ und dividirt durch $z^{\alpha-1}$, so erhält man den discontinuirlichen Factor

$$\frac{1}{z^{\alpha-1}}\int\limits_0^\infty J^\alpha(x)\,J^{\alpha-1}(xz)\,dx=\begin{cases}1, & (z^2<1),\\ \frac{1}{2}, & (z^2=1),\\ 0, & (z^2>1).\end{cases}\tag{86}$$

Setzt man hierin im speciellen $\alpha=1$, so erhält man den Weber'schen discontinuirlichen Factor:*)

$$\int\limits_0^\infty J^1(x)\,J^0(xz)\,dx=\begin{cases}1, & (z^2<1),\\ \frac{1}{2}, & (z^2=1),\\ 0, & (z^2>1).\end{cases}\tag{87}$$

Für $\alpha=\frac{1}{2}$, ergiebt sich der bekannte Dirichlet'sche discontinuirliche Factor:

*) Crelle, Journal f. Math. Bd. 75, pag. 80.

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin x \cos xz}{x}\,dx = \begin{cases} 1, & (z^2 < 1), \\ \frac{1}{2}, & (z^2 = 1), \\ 0, & (z^2 > 1), \end{cases} \tag{88}$$

Als Ergänzung des Integrales in (88) sei noch erwähnt der Fall

$$\alpha = 1, \quad \beta = \frac{1}{2}, \quad \gamma = \frac{3}{2}.$$

Diese Substitution ergiebt aus (51) und (52):

$$\int_0^\infty \frac{\sin x \sin xz}{x}\,dx = \begin{cases} \frac{1}{2}\cdot\log\frac{1+z}{1-z}, & (z < 1), \\ \frac{1}{2}\cdot\log\frac{z+1}{z-1}, & (z > 1). \end{cases} \tag{89}$$

Für $z = 1$ wird das Integral unendlich.

Berlin, im Februar 1887.