Augenmerk gerichtet haben, verlangt werden kann. Systeme von gröſseren Basen würden gar keinen Vorzug vor ihm haben.

Anmerkung. Man kann über die Anzahl der Begriffe, welche das Denken der Zahlen erheischt, andere Ansichten haben, als diejenigen, von welchen wir hier ausgegangen sind; doch wird die vorhergehende Methode in jedem Falle zum Vergleiche der verschiedenen Numerations-Systeme dienen können.

---

36.

# Ueber die Krümmung der Flächen, nebst Auflösung eines besondern Falles aus der Perspective der krummen Flächen.

(Von Herrn *Hachette.*)

---

Betrachtet man das Auge des Beschauers als einen Punct, so berührt der Kegel, dessen Scheitel dieser Punct ist, und der einer Fläche von gegebener Gestalt und Lage umschrieben wird, die Fläche in einer Linie, welche man scheinbaren Umriſs nennt. Diese Linie, die bei den Flächen zweiter Ordnung in einer Ebene liegt, bei developpabelen Flächen aber gerade ist, gehört im Allgemeinen zu den Curven doppelter Krümmung. Es kann aber kommen, daſs eine der Gesichtslinien, welche in der Kegelfläche liegt, eine Tangente des scheinbaren Umrisses ist. Diesen besonderen Fall hatte ich vor längerer Zeit in meinem *Cours de Géométrie descriptive à l'école Polytechnique* bemerkt, und sowohl auf geometrischem, als auf analytischem Wege aufgelöst.

## Geometrische Auflösung.

Die Flächen lassen sich in zwei Arten theilen. Die erste umfaſst diejenigen, deren beide Haupt-Krümmungs-Halbmesser sich auf einer und derselben Seite der Berührungs-Ebene befinden; die andere diejenigen, deren Haupt-Krümmungs-Halbmesser sich auf verschiedenen Seiten jener Ebene befinden, oder, nach dem gewöhnlichen Ausdruck, entgegengesetzte Zeichen haben. Eine einzelne Fläche kann auch aus mehreren Zonen zusammengesetzt seyn, deren Krümmungen dieselben Verschiedenheiten haben, und die Auflösung der Aufgabe paſst nur auf Flächen oder Theile von Flächen, deren Haupt-Krümmungs-Halbmesser in jedem Puncte entgegengesetzte Zeichen haben. Unter diesen Flächen unterscheide ich als die einfachste, das durch Umdrehung entstandene Hyperboloïd, welches bekanntlich drei verschiedene Entstehungsarten hat, nemlich zwei vermöge der geraden Linie, und die dritte durch die Umdrehung einer Hyperbel um ihre imaginaire Axe. Ich bestimme die Werthe der Parameter dieses Hyperboloïds so, daſs es eine Fläche in einem gegebenen Puncte berührt.

Von dem durch Umdrehung entstehenden Hyperboloïd, welches mit einer Fläche osculirt.

Die rechtwinkligen Ebenen des Kehlkreises (*cercle de gorge*) und der Meridian-Hyperbel eines, durch Umdrehung entstandenen Hyperboloïds schneiden sich, und für den Durchschnittspunct sind die Haupt-Krümmungs-Halbmesser den Krümmungs-Halbmessern der beiden senkrechten Durchschnitte gleich. Bezeichnet man den Winkel, den die, das Hyperboloïd erzeugende gerade Linie mit der Ebene des Kehlkreises macht, durch $A$, den Halbmesser dieses Kreises durch $R$, und den entgegengesetzten Krümmungs-Halbmesser der Meridian-Hyperbel durch $R'$, so findet zwischen diesen drei Gröſsen folgende Gleichung Statt:

$$R' = R \operatorname{tang}^2 A.$$

Soll das Hyperboloïd mit einer Fläche in einem gegebenen Puncte osculiren, und nimmt man an, daſs dieser Punct mit einem Puncte des Kehlkreises des Hyperboloïds zusammenfällt, so müssen die Radien $R$, $R'$ den Haupt-Krümmungs-Halbmessern der Fläche gleich seyn.

Gesetzt, diese beiden Bedingungen würden erfüllt, so werden die beiden geraden Linien im Hyperboloïd die gegebene Fläche in der zweiten Ordnung berühren, und jede Ebene, durch die eine oder die andere gerade Linie, wird die Fläche in einer Linie schneiden, welche im Durchschnitt beider Geraden einen Wendungspunct hat.

Bekanntlich schneiden sich zwei auf einander folgende Berührungs-Ebenen einer, durch die gerade Linie erzeugten Fläche in dieser geraden Linie, weil die beiden unendlich nahen Berührungspuncte auf dieser Linie selbst angenommen werden. Das Nemliche wird also auch bei dem durch Umdrehung entstandenen Hyperboloïd der Fall seyn, und stellt man sich die beiden auf einander folgenden Berührungs-Ebenen durch die beiden, dem Hyperboloïd und der gegebenen Fläche gemeinschaftlichen Elemente der geraden Linie gelegt vor, so werden diese Ebenen auch die Fläche berühren, und sich in der geraden Linie des Hyperboloïds schneiden.

Hieraus folgt, daſs, wenn man durch einen Punct im Raume zwei Ebenen gelegt hat, welche nach einander eine Fläche berühren, der geradlinige Durchschnitt dieser Ebenen und die gerade Linie, deren Richtung durch die beiden unendlich nahen Berührungspuncte bestimmt wird, nur eine und dieselbe gerade Linie sind, sobald diese gerade Linie dem osculirenden Hyperboloïd angehört, welches durch die beiden Berührungspuncte gehet.

Hierauf beruht folgende Auflösung der oben erwähnten Aufgabe aus der Perspective.

### Aufgabe.

Auf dem scheinbaren Umrisse einer Fläche den Punct zu finden, in welchem die Tangente an den Umrifs durch das Auge des Beschauers gehet.

Wir nehmen an, dafs man für jeden Punct des scheinbaren Umrisses die Ebene eines der normalen Haupt-Durchschnitte und die beiden Haupt-Krümmungs-Halbmesser, welche nach der Voraussetzung entgegengesetzte Zeichen haben, kenne.

Es sey $m$ (Fig. 5.) ein beliebiger Punct des scheinbaren Umrisses, $RmS$ ein Perpendikel auf die Fläche in diesem Punct, $nmp$ der senkrechte Haupt-Durchschnitt, dessen Krümmungskreis mit dem Haupt-Krümmungs-Halbmesser $mO$, $tmv$ ist; endlich sey $mO'$ der zweite, dem ersten Radius $mO$ entgegengesetzte Haupt-Krümmungs-Halbmesser für denselben Punct $m$.

Man stelle sich ein durch Umdrehung entstehendes Hyperboloïd vor, welches zum Kehlkreise den Kreis $tmv$, und zur erzeugenden geraden Linie die Gesichtslinien $m\oe$ durch den Punct $m$ und durch das Auge $\oe$ des Beschauers hat.

Bezeichnet man die Haupt-Krümmungs-Halbmesser $mO$, $mO'$ durch $R$ und $R'$, die Kaupt-Krümmungs-Halbmesser des Hyperboloïds im Puncte $m$ durch $R$ und $R''$, und den Winkel, den die Gesichtslinie $m\oe$ mit der Ebene des Kreises $tmv$ macht, durch $A$, so ist

$$R'' = R \operatorname{tang}^2 A.$$

Da das durch Umdrehung entstandene Hyperboloïd im Puncte $m$ zu einem seiner Haupt-Krümmungs-Halbmesser die gerade Linie $mO$ hat, welche zugleich einer der Haupt-Krümmungs-Halbmesser der Fläche ist, so ist klar, dafs dieses Hyperboloïd mit der Fläche osculiren würde, wenn $R'' = R'$ wäre, weil beide Flächen alsdann im Puncte $m$ die nemlichen Haupt-Krümmungs-Halbmesser $R$ und $R'$ haben würden. Daraus folgt, dafs, wenn man die bekannte Länge $R''$ oder $R \,.\, \operatorname{tang}^2 A$ auf die Normale $RS$, von $O'$ aus, gegen den Punct $m$ hin, bis $\mu$ trägt, dafs alsdann dieser Punct $\mu$ sich entweder aufserhalb oder innerhalb des Berührungskreises $tmv$ befinden wird, je nachdem $R''$ kleiner oder gröfser als

$R'$ ist. Ebenso wird man für einen anderen Punct $m'$ des scheinbaren Umrisses auf der Normale $R'S'$ einen, dem Puncte $\mu$ analogen Punct $\mu'$ finden. Diese Puncte $\mu$, $\mu'$ ...... bilden eine Curve, welche der geometrische Ort des verlangten Puncts ist. Der Durchschnitt dieser Curve mit dem scheinbaren Umrisse bestimmt den Punct des Umrisses, für welchen eine Tangente an den Umriſs durch das Auge des Beschauers gehet. Wendet man diese Auflösung z. B. auf auf einen Rundstab an, so wird man finden, daſs der Haupt-Krümmungs-Halbmesser $R$ für alle Puncte dieser Fläche constant ist.

Es läſst sich durch diese Auflösung die Perspective des Piedestals, welches Tafel IX. des *Traité de Géométrie descriptive* von *Hachette* (Ausgabe vom Jahre 1822, Seite 239.) gezeichnet ist, vervollständigen. Da man schon den scheinbaren Umriſs $\alpha\beta\gamma\delta$ (Fig. 6.) und $\alpha'\beta'\gamma'$ (Fig. 7.) hat, so ist schon die Curve construirt, welche der geometrische Ort des verlangten Puncts ist. Diese Curve hat mehrere Zweige, von welchen auf der Zeichnung nur diejenigen sich befinden, welche den scheinbaren Umriſs schneiden.

In der horizontalen Projection (Fig. 6.) sieht man vier Zweige, die gegen die Gerade $AF\omega$ symmetrisch liegen. Die beiden Zweige $A\varepsilon$, $A\varphi$ schneiden die Projection des scheinbaren Umrisses in den Puncten $\varepsilon$ und $\varphi$. Ihre Verlängerungen über die Gerade $GH$ hinaus (durch eine punctirte Linie bezeichnet) haben weiter keinen Nutzen. Ebenso die beiden Zweige $A\delta$, $A\gamma$, welche die Puncte $\gamma$ und $\delta$ bestimmen, und die nur deshalb über $GH$ hinaus verlängert sind, um die Gestalt der Curve zu zeigen.

Die verticale Projection (Fig. 7.) zeigt die Zweige $\varepsilon'\,\varepsilon''$, $\gamma'\,\gamma''$, welche die verticale Projection $\alpha'\beta'\gamma'$ des scheinbaren Umrisses in den Puncten $\varepsilon'$, $\gamma'$ schneiden; der erste Punct $\varepsilon'$ entspricht den beiden Puncten $\varepsilon$, $\varphi$ (Fig. 6.) der horizontalen Projection des scheinbaren Umrisses, der zweite $\gamma'$ den Puncten $\delta$, $\gamma$ der nemlichen Projection.

Die meridionelle erzeugende Linie des Piedestals ist eine Ellipse, von welcher man für jeden Punct einen Durchmesser und seinen conjugirten Durchmesser, folglich den Krümmungs-Halbmesser, der auch zugleich der Haupt-Krümmungs-Halbmesser der Fläche ist, kennt. Verlängert man die Normale, in welcher jener Halbmesser genommen wird, bis zur Umdrehungsaxe, so ist der Theil dieser Normale, zwischen der meridionellen Ellipse und der Umdrehungsaxe, der zweite Haupt-Krümmungs-Halbmesser. Der Ausdruck des Krümmungs-Halbmessers einer Ellipse, für den Punct $M$ (Fig. 4.) ist, $\frac{(ab)^2}{MP}$, wo $ab$ der, mit der Tangente $a'b'$, im Puncte $M$ parallele Durchmesser, und $MP$ ein Perpendikel aus dem Puncte $M$ auf diesen Durchmesser ist.

Kennt man die Haupt-Krümmungs-Halbmesser des Piedestals für jeden Punct des scheinbaren Umrisses, so hat die Construction des geometrischen Ortes der gesuchten Puncte weiter keine Schwierigkeit.

---

## 37.

# Von der Form länglicher Räder, durch welche sich die Ungleichheit der Wirkung der Kurbeln vermindern läfst.

(Vom Herausgeber.)

---

### 1.

Wenn eine drehende Bewegung in eine hin- und hergehende verwandelt werden soll, und umgekehrt, bedient man sich gewöhnlich der Kurbeln. Die Kurbel hat aber den Uebelstand, dafs, wenn die Kraft, welche die drehende Bewegung hervorbringt, und folglich die Bewegung selbst, unveränderlich ist, die Wirkung der Kurbel nicht ebenfalls unveränderlich grofs, sondern abwechselnd stärker und schwächer ist, weshalb man dann ein Schwungrad anbringt, um die Ungleichheit und den daraus entstehenden Kraftverlust zu vermindern. Wenn z. B. an dem Rade $AM$ (Fig. 9.) eine unveränderliche Kraft $P$ wirkt, und $Q$ stellt die Kraft vor, welche dadurch die Kurbel $MB$ in Richtungen erhält, die beständig mit $BD$ parallel sind, so ist $Q$, nicht wie $P$, immer gleich grofs, sondern es ist am kleinsten, wenn die Kurbel die Lage $MB$, senkrecht auf $BD$ hat, und am gröfsten, und sogar unendlich grofs, wenn die Kurbel die Richtung $MB_2$, parallel mit $BD$ hat; denn in der Richtung $MB$ der Kurbel wirkt $Q$ an dem Hebelsarm $MB$, in der Lage $MB_1$ nur an dem Hebelsarm $B_1E$, der kleiner ist, als $MB$, und in der Lage $MB_2$ an dem Hebelsarm Null. Wenn also kein Schwungrad vorhanden wäre, oder die Trägheit der Masse der Maschine käme nicht weiter in Betracht, und $Q$ wäre der Widerstand, den die Kurbel in Richtungen, die beständig mit $BD$ parallel sind, zu überwinden hat, so müfste $P$ so grofs seyn, dafs es der Kurbel auch noch in der Lage $MB$, senkrecht auf $BD$, die Kraft $Q$ giebt. Die Kraft $P$ wäre aber alsdann für alle andere Lagen der