Ueber eine einfache Gruppe von 504 Operationen.

Von

ROBERT FRICKE in Braunschweig.

In Band 41 der Mathem. Annalen pag. 443ff. habe ich eine Untersuchung veröffentlicht, welche den arithmetischen Charakter der Dreiecksfunction $s\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{7}; J\right)$ zum Gegenstande hat. Die Substitutionscoefficienten der Gruppe dieser Dreiecksfunction liessen sich als ganze algebraische Zahlen eines gewissen Körpers sechsten Grades darstellen, der aus dem bei der Siebentheilung des Kreises auftretenden reellen cubischen Körper durch Adjunction einer gewissen Quadratwurzel hervorging.

Bei jeder Gruppe linearer Substitutionen, deren Bildungsgesetz man vermöge ganzer algebraischer Zahlen anzugeben vermag, liegt die Möglichkeit vor, das Untergruppenproblem auf Grund des Princips der Congruenzgruppen mit Nutzen in Untersuchung zu ziehen. Diese Untersuchungsrichtung zu verfolgen, ist bei den neueren Fortschritten der abstracten Gruppentheorie durch Cole, Hölder, Burnside u. a. von Interesse geworden.

Insbesondere soll in den nachfolgenden Zeilen eine concrete Bedeutung derjenigen einfachen Gruppe G_{504} von 504 Operationen entwickelt werden, die schon bei Mathieu*) auftritt, und die vor einigen Jahren von Cole in der Abhandlung „*Simple groups as far as order 660*“ **) wieder gefunden wurde. Angaben über die Structur dieser Gruppe findet man auch in Burnside's Buche „*Theory of groups of finite order*“ ***) pag. 370ff.; auf die Erzeugung der G_{504} ist Burnside in den Mathem. Annalen Bd. 52, pag. 174 zurückgekommen.

*) Nämlich in den Entwicklungen des Cap. II der Abhandlung „*Mémoire sur l'étude des fonctions de plusieurs quantités, etc.*“, Journ. de Mathém. (2) tome 6 (1861); ich verdanke diese Bemerkung einer Mittheilung des Herrn Burkhardt.

**) American Journ. of Mathematics, Bd. 15 (1893) pag. 303ff. Siehe auch die Notiz von Cole „*List of the substitutiongroups of nine letters*“. Quarterly Journal Bd. 26 (1893), wo die G_{504} als Permutationsgruppe von 9 Dingen definirt ist.

***) Cambridge, 1897.

§ 1.

Recapitulation über die Gruppe der Function $s\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{7}; J\right)$.

Man verstehe unter ω die reelle ganze algebraische Zahl

$$\omega = e^{\frac{2\pi i}{7}} + e^{-\frac{2\pi i}{7}},$$

d. i. die grösste unter den drei Wurzeln der cubischen Gleichung:

$$(1) \qquad \omega^3 + \omega^2 - 2\omega - 1 = 0.$$

Die Gruppe Γ der vorhin genannten Dreiecksfunction ist alsdann bei zweckmässigster Lage des Ausgangsdreiecks*) erzeugbar aus den beiden Substitutionen:

$$(2) \quad V_0 = \begin{pmatrix} \omega^2+\omega-1, & 1+\sqrt{\omega-1} \\ -1+\sqrt{\omega-1}, & \omega^2+\omega-1 \end{pmatrix}, \quad V_1 = \begin{pmatrix} 0, & 1 \\ -1, & 0 \end{pmatrix},$$

für welche die drei Relationen gelten:

$$(3) \qquad V_0^7 = 1, \quad V_1^2 = 1, \quad (V_0 V_1)^3 = 1.$$

Der Gruppe Γ liegt also derjenige Körper 6^{ten} Grades zu Grunde, welcher aus dem cubischen Körper der Gleichung (1) durch Adjunction von $\sqrt{\omega - 1}$ hervorgeht.

Die Substitution V_0 ist quadrimodular (von der Determinante 4).

Die Gesammtgruppe Γ besteht aus allen quadrimodularen Substitutionen:

$$(4) \qquad V = \begin{pmatrix} a + b\sqrt{\omega-1}, & c + d\sqrt{\omega-1} \\ -c + d\sqrt{\omega-1}, & a - b\sqrt{\omega-1} \end{pmatrix}$$

mit ganzen Zahlen a, b, c, d des cubischen Körpers (1), *die folgenden Congruenzen genügen:*

$$(5) \qquad \left.\begin{aligned} b(\omega^2+\omega+1) + c + d &\equiv 0 \\ a(\omega^2+\omega+1) + c + d(\omega+1) &\equiv 0 \\ a + b + d(\omega^2+\omega+1) &\equiv 0 \\ a + b(\omega+1) + c(\omega^2+\omega+1) &\equiv 0 \end{aligned}\right\} \text{(mod. 2)}.$$

Diese Congruenzen, welche sich übrigens auf nur zwei unabhängige reduciren, haben zur Folge, dass bei Construction zweier quadrimodularen Substitutionen (4) in den Coefficienten der entspringenden Substitution überall der Factor 2 auftritt, so dass nach Forthebung desselben wieder eine ganzzahlige quadrimodulare Substitution (4) zurückbleibt; dieselbe genügt dann insbesondere auch wieder den Congruenzen (5).

---

*) Vergl. hierüber ausser der schon gen. Arbeit in Bd. 41 der Mathem. Annalen die „*Vorlesungen über automorphe Functionen*" von F. Klein und dem Verf. Bd. I pag. 606 ff. (Leipzig, 1897).

Sind a, b, c, d zugleich durch 2 theilbar, so sind die Congruenzen (5) selbstverständlich erfüllt. Man kann dies dahin aussprechen, dass die „*unimodularen*“ Substitutionen (4) insgesammt in Γ enthalten sind. *Sie bilden eine weiterhin oft zu nennende nicht-ausgezeichnete Untergruppe Γ_{63} des Index 63, und zwar handelt es sich bei der Γ_{63} um die Gruppe des „regulären rechtwinkligen Kreisbogensiebenecks“.* In der That ist die eine der beiden symmetrischen Hälften des Discontinuitätsbereiches der Γ_{63} durch das aus 63 Dreiecken bestehende Kreisbogensiebeneck in Figur 1 dargestellt. Die Werthevertheilung von s ist hier diejenige, dass die Ecke

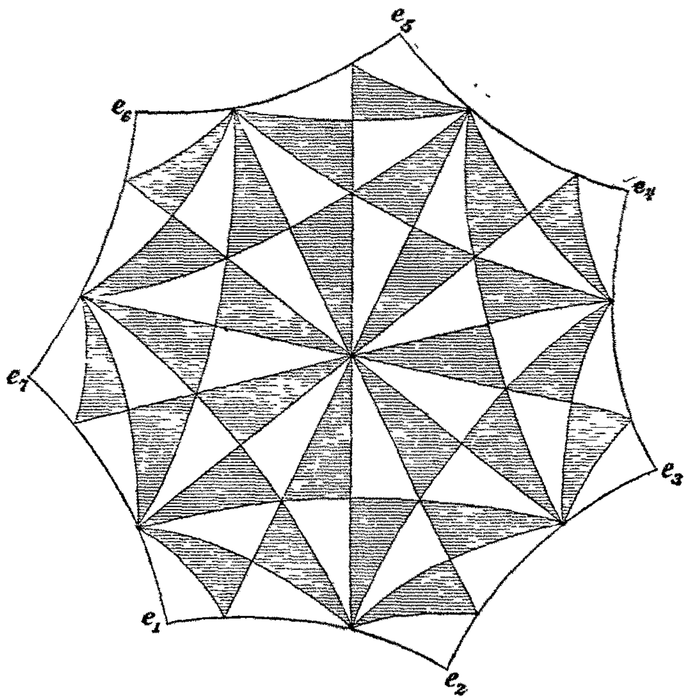


Fig. 1

e_1 bei $s = i$ liegt, die Seite $e_1 e_2$ den Einheitskreis und die Seite $e_1 e_7$ die imaginäre s-Axe trägt, wobei die Richtung von e_1 nach e_7 diejenige gegen $s = + i\infty$ ist. Ein canonisches Polygon für die Γ_{63} lässt sich in der Gestalt des regulären Siebenecks der Winkel $\frac{2\pi}{7}$ darstellen, wie es Fig. 2 (folg. Seite) liefert*). Man bemerke, dass die Randcurven dieses Polygons *nicht* aus Symmetrielinien des Dreiecknetzes gebildet werden. Die Zuordnung der Randcurven geschieht, wie die Figur andeutet, durch sieben Substitutionen $V_1, \ldots, V_7$ von der Periode zwei, welche die Relation befriedigen:

$$V_1 \cdot V_2 \cdot V_3 \cdots V_7 = 1. \tag{6}$$

Die explicite Gestalt dieser Substitutionen ist die folgende:

$$V_1 = \begin{pmatrix} 0, & 1 \\ -1, & 0 \end{pmatrix}, \quad V_2 = \begin{pmatrix} -(\omega^2+2\omega)\sqrt{\omega-1}, & (\omega+1) \\ -(\omega+1), & (\omega^2+2\omega)\sqrt{\omega-1} \end{pmatrix},$$

$$V_3 = \begin{pmatrix} -(2\omega^2+4\omega+1)\sqrt{\omega-1}, & (\omega^2+2\omega+1)+(\omega^2+2\omega)\sqrt{\omega-1} \\ -(\omega^2+2\omega+1)+(\omega^2+2\omega)\sqrt{\omega-1}, & (2\omega^2+4\omega+1)\sqrt{\omega-1} \end{pmatrix},$$

*) Die Bedeutung der in Fig. 2, sowie in den weiter folgenden Figuren stark ausgezogenen Linien wird später erläutert werden.

$$V_4 = \begin{pmatrix} -(2\omega^2+5\omega+2)\sqrt{\omega-1}, & (\omega^2+3\omega+2)+(2\omega^2+4\omega+1)\sqrt{\omega-1} \\ -(\omega^2+3\omega+2)+(2\omega^2+4\omega+1)\sqrt{\omega-1}, & (2\omega^2+5\omega+2)\sqrt{\omega-1} \end{pmatrix},$$

$$V_5 = \begin{pmatrix} -(2\omega^2+4\omega+1)\sqrt{\omega-1}, & (\omega^2+3\omega+2)+(2\omega^2+5\omega+2)\sqrt{\omega-1} \\ -(\omega^2+3\omega+2)+(2\omega^2+5\omega+2)\sqrt{\omega-1}, & (2\omega^2+4\omega+1)\sqrt{\omega-1} \end{pmatrix},$$

$$V_6 = \begin{pmatrix} -(\omega^2+2\omega)\sqrt{\omega-1}, & (\omega^2+2\omega+1)+(2\omega^2+4\omega+1)\sqrt{\omega-1} \\ -(\omega^2+2\omega+1)+(2\omega^2+4\omega+1)\sqrt{\omega-1}, & (\omega^2+2\omega)\sqrt{\omega-1} \end{pmatrix},$$

$$V_7 = \begin{pmatrix} 0, & (\omega+1)+(\omega^2+2\omega)\sqrt{\omega-1} \\ -(\omega+1)+(\omega^2+2\omega)\sqrt{\omega-1}, & 0 \end{pmatrix}.$$

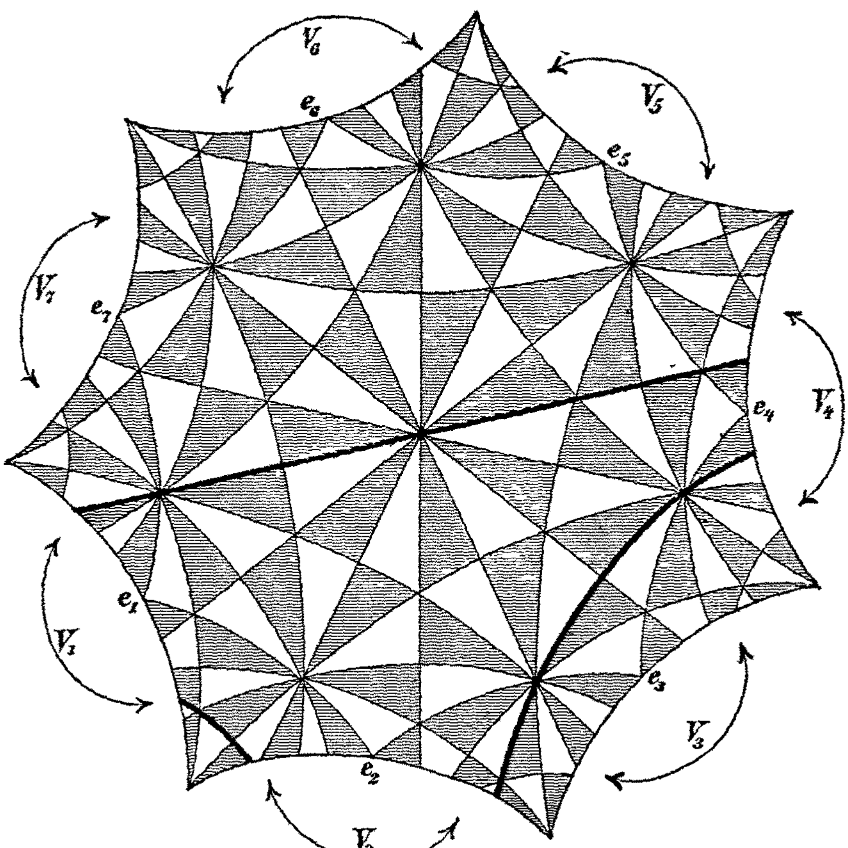


Fig. 2.

Die elliptische Substitution V_8, welche Drehung des in Fig. 2 gegebenen Discontinuitätsbereiches der Γ_{63} um das Centrum durch den Winkel $\frac{2\pi}{7}$ vollzieht, hat die Gestalt:

$$(7)\quad V_8 = \begin{pmatrix} (\omega^2+\omega-1)-(\omega+1)\sqrt{\omega-1}, & (\omega^2+\omega-1)+(\omega+1)\sqrt{\omega-1} \\ -(\omega^2+\omega-1)+(\omega+1)\sqrt{\omega-1}, & (\omega^2+\omega-1)+(\omega+1)\sqrt{\omega-1} \end{pmatrix}$$

Dieselbe ist quadrimodular und genügt den Congruenzen:

(8) $$a \equiv c, \quad b \equiv d \pmod{2};$$

man zeigt leicht, dass bei allen den Bedingungen (8) genügenden quadrimodularen Substitutionen auch die Congruenzen (5) stets erfüllt sind.

Alle die Bedingungen (8) *befriedigenden quadrimodularen Substitutionen bilden eine Gruppe, welche als Untergruppe* Γ_9 *des Index* 9 *in* Γ *enthalten ist.* Die Γ_9 entspringt aus der Γ_{63} durch Zusatz von V_8, und sie ist die umfassendste in Γ enthaltene Untergruppe, innerhalb deren Γ_{63} ausgezeichnet enthalten ist. Aus Figur 2 geht leicht hervor, *dass die* Γ_9 *die Gruppe „erster" Art des Kreisbogendreiecks der Winkel* $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{7}, \frac{\pi}{7}$ *ist.* Man bemerke, dass die durch Spiegelungen erweiterte Gruppe dieses Kreisbogensiebenecks *nicht* mehr in der gleichfalls erweiterten Gesammtgruppe $\bar{\Gamma}$ enthalten ist.

§ 2.

Arithmetische Definition einer ausgezeichneten Untergruppe Γ_{504}.

Gegenstand der nächsten Untersuchung ist nunmehr *die umfassendste in der* Γ_{63} *enthaltene Untergruppe* Γ_μ, welche die Eigenschaft besitzt, *in der Gesammtgruppe* Γ *ausgezeichnet zu sein.* Die in Γ_μ enthaltenen Substitutionen von der Gestalt (4) § 1 müssen der Forderung genügen, dass mit der einzelnen unter ihnen V stets auch $V_0 V V_0^{-1}$ in Γ_μ und also auch in Γ_{63} enthalten ist. Schreiben wir aber:

(1) $$V_0 V V_0^{-1} = \begin{pmatrix} a' + b'\sqrt{\omega - 1}, & c' + d'\sqrt{\omega - 1} \\ -c' + d'\sqrt{\omega - 1}, & a' - b'\sqrt{\omega - 1} \end{pmatrix}$$

„unimodular", so berechnet man leicht:

(2) $$\begin{cases} a' = a, \quad b' = \frac{1}{2}\left(b\omega + (c-d)(\omega^2 + \omega - 1)\right), \\ c' = \frac{1}{2}\left(-b(\omega^2 - 2) + c(\omega + 1) - d(\omega - 1)\right), \\ d' = \frac{1}{2}\left(b(\omega^2 + \omega - 1) + c + d\right). \end{cases}$$

Damit die drei Zahlen b', c', d' ganz werden, ist hiernach hinreichend und nothwendig, dass die Congruenz erfüllt ist:

(3) $$b(\omega^2 + \omega + 1) + c + d \equiv 0, \pmod{2}.$$

Man wird hier und bei weiter folgenden Rechnungen einige Sätze über den Zahlmodul 2 im cubischen Körper der Gleichung (1) § 1 benutzen müssen. Merken wir insbesondere Folgendes an: Die Zahl 2 ist im genannten Körper eine Primzahl der Norm 8. Die 8 modulo 2 incongruenten Reste:

$$0,\ 1,\ \omega,\ \omega^2,\ \omega+1,\ \omega^2+1,\ \omega^2+\omega,\ \omega^2+\omega+1$$

sind sämmtlich mit Quadraten congruent; insbesondere ist:

$$(\omega^2)^2 \equiv \omega^2+\omega+1,\quad (\omega+1)^2 \equiv \omega^2+1,\quad (\omega^2+1)^2 = \omega^2+\omega,$$
$$(\omega^2+\omega)^2 \equiv \omega+1,\quad (\omega^2+\omega+1)^2 \equiv \omega.$$

Auch die folgenden Congruenzen wird man zu benutzen haben:

$$\omega(\omega^2+\omega) \equiv 1,\quad \omega^2(\omega+1) \equiv 1,\quad (\omega^2+1)(\omega^2+\omega+1) \equiv 1. -$$

Um nun die Bedeutung der Congruenz (3) näher zu erfassen, combiniren wir irgend zwei Substitutionen V, V' der Γ_{63}; man gewinne $V . V' = V''$ oder explicite:

$$(4)\qquad \begin{cases} a'' = aa' + bb'(\omega-1) - cc' + dd'(\omega-1), \\ b'' = ab' + ba' + cd' - dc', \\ c'' = ac' + bd'(\omega-1) + ca' - db'(\omega-1), \\ d'' = ad' + bc' - cb' + da'. \end{cases}$$

Genügen V und V' der Congruenz (3), so findet man mod. 2:

$$\begin{aligned} b''(\omega^2+\omega+1) + c'' + d'' \equiv\ & b[a'(\omega^2+\omega+1) + d'(\omega+1) + c'] \\ & + c[d'(\omega^2+\omega+1) + a' + b'] \\ & + d[c'(\omega^2+\omega+1) + b'(\omega+1) + a']. \end{aligned}$$

Ersetzt man im ersten Gliede rechter Hand b auf Grund von

$$b \equiv b(\omega^2+\omega+1)(\omega^2+1) \equiv (c+d)(\omega^2+1),$$

so ergiebt sich, wenn man rechts die Glieder mit c und d zusammenfasst:

$$\begin{aligned} b''(\omega^2+\omega+1) + c'' + d'' \equiv\ & c[b' + c'(\omega^2+1) + d'(\omega^2+1)] \\ & + d[b'(\omega+1) + c'\omega + d'\omega], \end{aligned}$$

und also folgt, da auch V' die Congruenz (3) befriedigt:

$$b''(\omega^2+\omega+1) + c'' + d'' \equiv 0,$$

d. h. auch für $V'' = V . V'$ besteht diese Congruenz. Hiermit ist bewiesen: *Alle Substitutionen der unimodularen Gruppe Γ_{63} für welche die Congruenz:*

$$(3)\qquad b(\omega^2+\omega+1) + c + d \equiv 0 \pmod{2}$$

erfüllt ist, bilden eine in der Γ_{63} enthaltene Untergruppe Γ_ν.

Die so gewonnene Γ_ν enthält die oben postulirte innerhalb Γ ausgezeichnete Γ_μ; denn die Congruenz (3) war eine für Γ_μ nothwendige Bedingung. Es lässt sich nun aber zeigen, dass die Γ_μ geradezu mit der Γ_ν identisch ist, d. i. dass bereits die Gruppe Γ_ν innerhalb der Gesammtgruppe Γ ausgezeichnet ist. Da Γ aus V_0 und V_1 erzeugt werden kann, so wird diese Behauptung bewiesen sein, wenn sich zeigen lässt, dass mit V stets sowohl $V_0 V V_0^{-1}$ als auch $V_1 V V_1^{-1}$ in Γ_ν enthalten ist. Für die letztere Substitution geht dies unmittelbar aus der Thatsache hervor, dass die Transformation von V durch V_1 nur einen Zeichenwechsel von b und d bei unveränderten a und c bewirkt. Die Substitution $V_0 V V_0^{-1}$ ist in (1) und (2) explicit angegeben. Sie ist ganzzahlig und unimodular; und wir finden:

$$\begin{aligned} 2[b'(\omega^2+\omega+1)+c'+d'] = {} & b(\omega^3+\omega^2+\omega)+(c-d)(\omega^4+2\omega^3+\omega^2-1) \\ & -b(\omega^2-2)+c(\omega+1)-d(\omega-1) \\ & +b(\omega^2+\omega-1)+c+d. \end{aligned}$$

Diese Gleichung liefert bei Reduction modulo 4:

$$2[b'(\omega^2+\omega+1)+c'+d'] \equiv 2[b+(c+d)(\omega^2+1)], \quad (\text{mod. } 4);$$

und da hier wegen (3) die rechte Seite durch 4 theilbar ist, so gilt diese Congruenz (3) auch für $V_0 V V_0^{-1}$, d. h. diese Substitution ist in der Γ_ν enthalten.

Hiermit ist bewiesen: *Die durch* (3) *definirte unimodulare Congruenzgruppe* 2^ter^ *Stufe ist die gesuchte umfassendste in der* Γ_{63} *enthaltene und in der Gesammtgruppe* Γ *ausgezeichnete Untergruppe* Γ_μ. —

Es soll jetzt der Index der Γ_μ innerhalb der Γ_{63} bestimmt werden. Man verstehe zu diesem Zwecke unter S und T die folgenden aus den Zahlen a, b, c, d der einzelnen unimodularen Substitution V gebildeten Verbindungen:

(5) $S = b(\omega^2+\omega+1)+c+d, \quad T = a+b(\omega+1)+c(\omega^2+\omega+1).$

Da a, b, c, d mod. 2 die Congruenz befriedigen:

$$a^2+c^2+(b^2+d^2)(\omega+1) \equiv 1,$$

so ergiebt sich gleichfalls modulo 2:

$$T^2 = a^2+b^2(\omega^2+1)+c^2\omega \equiv 1+b^2(\omega^2+\omega)+c^2(\omega+1)+d^2(\omega+1),$$

$$T^2 \equiv 1+(\omega+1)S^2, \quad (\text{mod. } 2).$$

Da nun aus $T'^2 \equiv T^2$ immer auch $T' \equiv T$ (mod. 2) folgt, so ergiebt sich der Satz: Haben zwei Substitutionen der Γ_{63} congruente Zahlen S modulo 2, so haben sie auch congruente T.

Sind jetzt V, V' irgend zwei Operationen aus Γ_{63}, so setze man $V'' = V . V'$ und wird ohne Mühe aus dem Schema (4) berechnen:

(6) $$S'' \equiv ST' + S'T, \quad (\text{mod. } 2).$$

Es ergiebt sich hieraus, dass, wenn V und V' congruente S haben, V'' der Γ_μ angehört.

Nun trifft es sich, dass die Zahlen S der in § 1 angegebenen sieben Substitutionen $V_1, V_2, \ldots, V_7$ gerade den sieben mod. 2 incongruenten und gegen 2 primen Resten congruent sind. Setzen wir also die Identität 1 mit $S \equiv 0$ noch hinzu, *so gewinnen wir in* $1, V_1, V_2, \ldots, V_7$ *ein Repräsentantensystem der* Γ_μ *als Untergruppe der* Γ_{63}; *die* Γ_μ *hat hiernach innerhalb der* Γ_{63} *den Index* 8, *innerhalb der Gesammtgruppe den Index* $\mu = 8 . 63 = 504$.

§ 3.

Discontinuitätsbereich der Γ_{504} und Structur der complementären Gruppe G_{504}.

Sehen wir die Substitutionen der ausgezeichneten Γ_{504} als mit der identischen Substitution 1 äquivalent und nicht wesentlich von ihr verschieden an, so reducirt sich die Gesammtgruppe auf eine endliche Gruppe G_{504} der Ordnung 504, welche als die zur Γ_{504} gehörige *„complementäre Gruppe"* bezeichnet wird. Die Γ_{63} reducirt sich hierbei auf eine G_8, als deren Operationen $1, V_1, V_2, \ldots, V_7$ angesehen werden können. Da zufolge (6) § 2 die beiden Substitutionen $V_i V_k$ und $V_k V_i$ modulo 2 congruente S haben und also äquivalent bezüglich Γ_{504} sind, was durch

$$V_i V_k \backsim V_k V_i$$

ausgedrückt werden mag, *so ist die eben genannte G_8 eine Abel'sche Gruppe, die übrigens ausser der Identität lauter Operationen der Periode 2 enthält.*

Sind i, k irgend zwei verschiedene unter den Zahlen $1, 2, \ldots, 7$, so wird $V_i \cdot V_k \backsim V_l$ sein, wo l eine bestimmte dritte dieser Zahlen ist. Für die Aufstellung des Discontinuitätsbereiches der Γ_{504} ist es wichtig, die explicite Gestalt dieser Formeln $V_i \cdot V_k \backsim V_l$ kennen zu lernen. Da die $V_1, V_2, \ldots, V_7$ durch Transformation vermöge V_8 (cf. (7) § 1) cyklisch permutirt werden, so folgt aus $V_i V_k \backsim V_l$ stets

$$V_{i+\nu} \cdot V_{k+\nu} \backsim V_{l+\nu}$$

mit $\nu = 1, 2, \ldots, 6$, wo man nur die Indices nöthigenfalls mod. 7 zu reduciren hat. Es ist also ausreichend, wenn wir die sechs Formeln $V_1 \cdot V_k \backsim V_l$ aufstellen.

Es ist nun zunächst unmöglich, dass $V_1 \cdot V_2 \backsim V_3$ ist; denn es würde $V_1 V_2 V_3 \backsim 1$, und also auch $V_4 V_5 V_6 \backsim 1$, d. i. vermöge (6) § 1 $V_7 \backsim 1$ werden. Durch die gleiche Ueberlegung folgt, dass nur entweder $V_1 \cdot V_2 \backsim V_4$ oder $V_1 \cdot V_2 \backsim V_6$ sein kann. Formel (6) § 2 lehrt, dass $V_1 \cdot V_2 \backsim V_4$ ist; auf die Bedeutung von $V_1 \cdot V_2 \backsim V_6$ kommen wir unten zurück. Aus $V_1 \cdot V_2 \backsim V_4$ findet man durch wiederholte Transformation vermöge V_8, dass insgesammt gilt:

$$(1) \qquad \begin{cases} V_1 \cdot V_2 \backsim V_4, & V_1 \cdot V_3 \backsim V_7, & V_1 \cdot V_4 \backsim V_2, \\ V_1 \cdot V_5 \backsim V_6, & V_1 \cdot V_6 \backsim V_5, & V_1 \cdot V_7 \backsim V_3. \end{cases}$$

Um nun einen *Discontinuitätsbereich der* Γ_{504} zu gewinnen, haben wir das in Fig. 2 gegebene Siebeneck der Winkel $\frac{2\pi}{7}$ durch Ausübung der Substitutionen $V_1, V_2, \ldots, V_7$ rings mit sieben weiteren Siebenecken zu umgeben. Es entsteht so der in Fig. 3 abgebildete Bereich; jedes der acht Siebenecke besteht hier aus einem inneren (schraffirten) rechtwinkligen Siebenecke und sieben sich anlagernden Dreiecken,

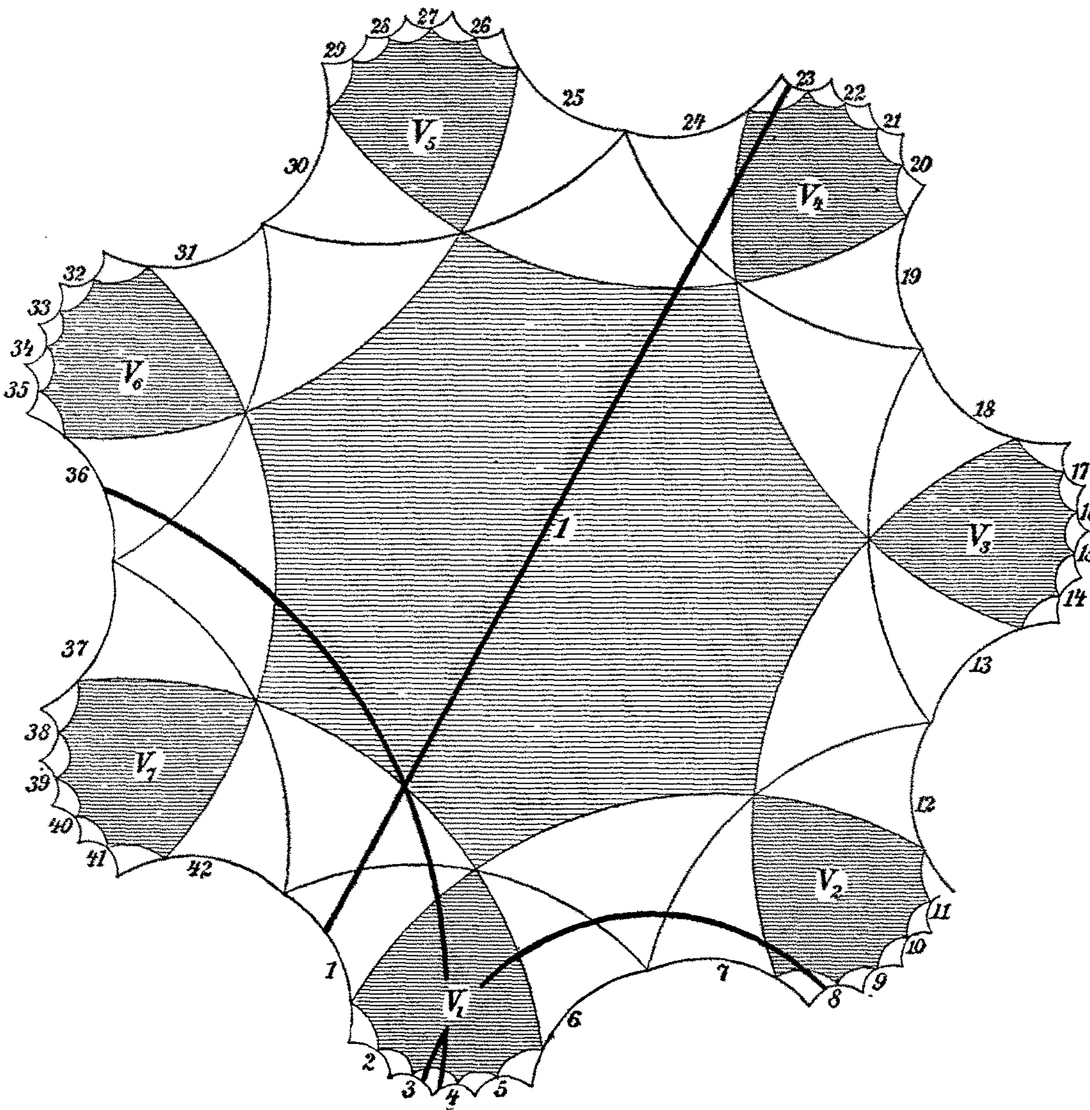
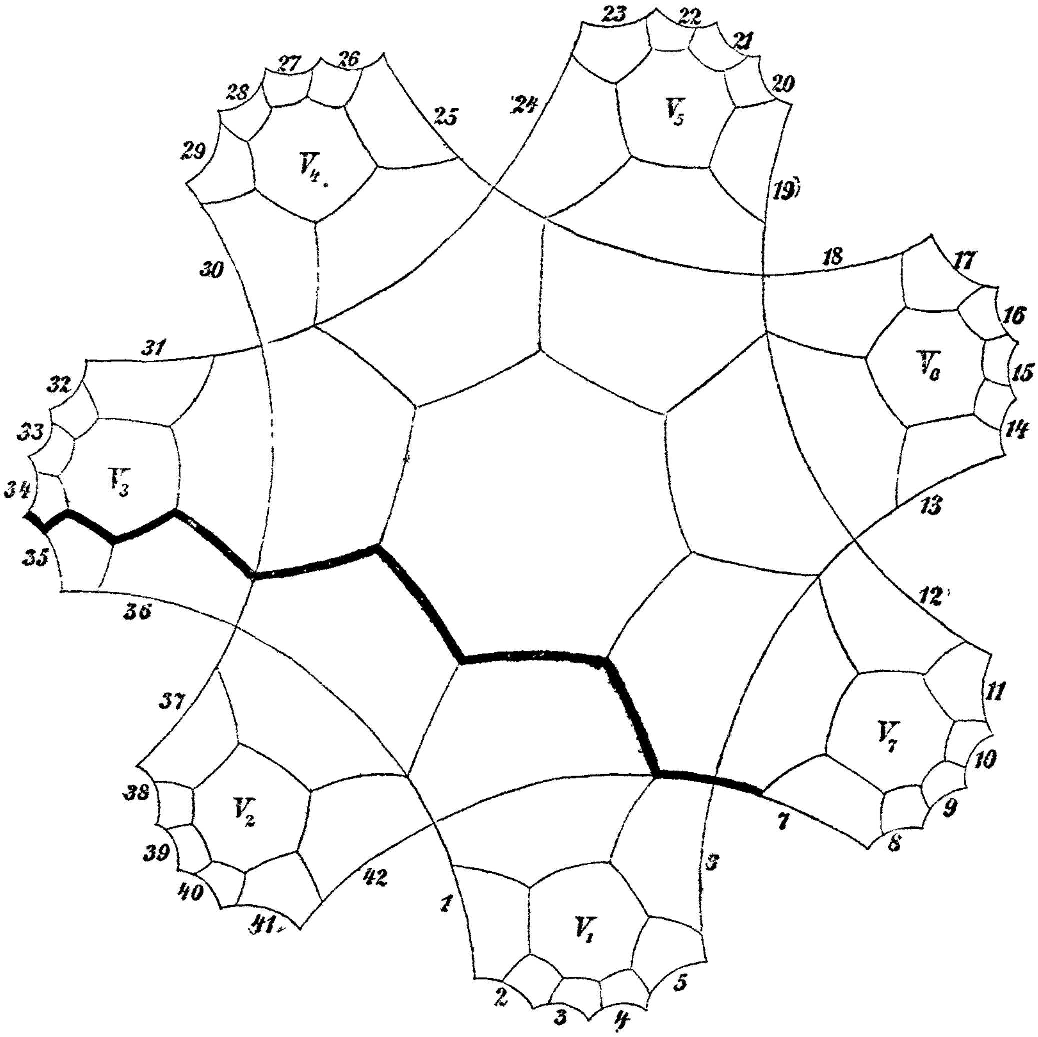


Fig. 3.

1—23	8— 3	15—20	22—12	29— 7	36— 4
2—39	9—14	16— 6	23— 1	30—40	37—17
3— 8	10—42	17—37	24—34	31—11	38—33
4—36	11—31	18—28	25— 5	32—27	39— 2
5—25	12—22	19—41	26—21	33—38	40—30
6—16	13—35	20—15	27—32	34—24	41—19
7—29	14— 9	21—26	28—18	35—13	42—10

welche mit einem zu jenem symmetrischen rechtwinkligen Siebenecke äquivalent sind. Im Inneren des schraffirten Theiles ist die zugehörige Substitution angemerkt. Zum definitiven Discontinuitätsbereich der Γ_{504} würde man jetzt dadurch gelangen, dass man in jedes schraffirte rechtwinklige Siebeneck 63 Dreiecke der Winkel $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{7}$, in jedes (nicht-schraffirte) Dreieck 9 solche einträgt, welche letztere übrigens zum Theil von den Randcurven unseres Bereiches durchschnitten sein würden. In das rechtwinklige Siebeneck 1 hat man hierbei das Netz der Fig. 1 einzulagern und von hieraus nach dem Symmetriegesetz

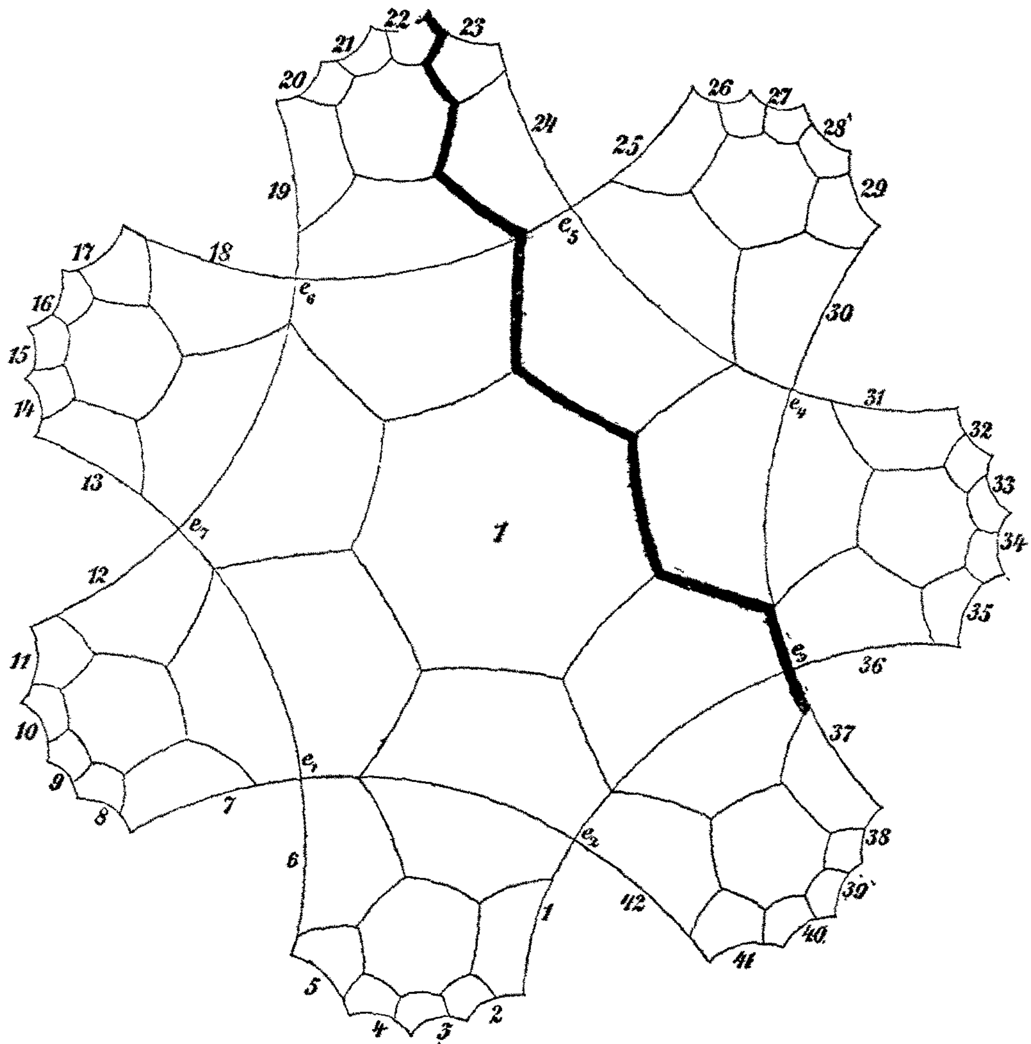


1—17	8— 3	15—38	22—24	29—31	36—10
2—39	9—32	16—18	23—25	30— 4	37—11
3—26	10—12	17—19	24—40	31— 5	38—33
4— 6	11—13	18—34	25—41	32—27	39—20
5— 7	12—28	19—35	26—21	33—14	40—42
6—22	13—29	20—15	27— 8	34—36	41— 1
7—23	14— 9	21— 2	28—30	35—37	42—16

Fig. 4.

fortzufahren. Würde man das zu Fig. 1 symmetrische Netz eintragen, so würde man, um ein regulär symmetrisches Netz von 504 Doppeldreiecken zu gewinnen, die gleich anzustellende Betrachtung nicht an $V_1 \cdot V_2 \sim V_4$, sondern an die andere oben genannte Relation $V_1 \cdot V_2 \sim V_6$ anknüpfen müssen.

Die Zuordnung der mit den Nummern 1 bis 42 versehenen Randcurven unseres Bereiches ist gegenüber der Drehung V_8 um das Centrum der Figur invariant und übrigens eine derartige, dass auf der aus dem Bereich herzustellenden geschlossenen Fläche jedes der acht Siebenecke rings von den übrigen sieben umschlossen erscheint. Die in Figur 3



1—41	8—27	15—20	22— 6	29—13	36—34
2—21	9—14	16—42	23— 7	30—28	37—35
3— 8	10—36	17— 1	24—22	31—29	38—15
4—30	11—37	18—16	25—23	32— 9	39— 2
5—31	12—10	19—17	26— 3	33—38	40—24
6— 4	13—11	20—39	27—32	34—18	41—25
7— 5	14—33	21—26	28—12	35—19	42—40

Fig. 4.

tabellarisch angegebene Zuordnung ist nun eine einfache Folge der Relationen (1). So wird z. B. die Randcurve 1 durch $V_4 \cdot V_2 \cdot V_1$ in die Curve 23 transformirt, die Curve 2 durch $V_7 \cdot V_3 \cdot V_1$ in die Curve 39 u. s. w.

In Fig. 4 ist der Discontinuitätsbereich der Γ_{504} in Gestalt von zwei Systemen von je 8 rechtwinkligen Siebenecken gegeben, welche eine weitere Eintheilung in kleinere Siebenecke tragen, von der noch die Rede sein wird. Das in Fig. 4 rechts gezeichnete Netz besteht aus dem in Fig. 3 mit 1 bezeichneten schraffirten Siebeneck und 7 sich herumlagernden symmetrischen Siebenecken. Die schraffirten Siebenecken $V_1, V_2, \ldots, V_7$ der Fig. 3 tragen auf der linken Seite der Fig. 4 eben diese Benennung. Das Centrum des letzteren Netzes rührt von dem durch (2, 3), (8, 9), (14, 15), (20, 21), (26, 27), (32, 33), (38, 39) zu bezeichnenden Eckencyklus der Fig. 3 her. Jede Randcurve des einen Netzes in Fig. 4 ist einer bestimmten des anderen Netzes zugeordnet, worüber das Nähere aus den den beiden Netzen angehängten Tabellen zu entnehmen ist. In Fig. 4 sind übrigens nun weiter noch diejenigen Seiten des ursprünglichen Dreiecksnetzes eingetragen, welche die Scheitelpunkte der Winkel $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}$ verbinden. Wir kommen auf das dadurch entspringende Netz von 72 Siebenecken der Winkel $\frac{2\pi}{3}$ gleich nochmals zurück. —

Der Discontinuitätsbereich der Γ_{504} setzt uns jetzt vermöge seiner Transformationen in sich in den Stand, weitere Angaben über die *Structur der* G_{504} zu machen. Die Eckpunkte des Netzes der 2.504 Dreiecke bezeichnen wir allgemein als Punkte P_2, P_3, P_7, je nachdem sie von 4, 6 oder 14 Dreiecken umringt sind; *man hat* 252 *Punkte* P_2, 168 *Punkte* P_3 *und* 72 *Punkte* P_7.

Bei der Drehung V_8 der rechts liegenden Hälfte der Fig. 4 um ihr Centrum dreht sich die linke Hälfte in derselben Art. Die Anschauung der Figur lehrt, dass hierbei nur die beiden Centren P_7 fest bleiben. *Die* G_{504} *hat hiernach* 36 *gleichberechtigte cyklische Untergruppen* G_7, *deren einzelne zwei Fixpunkte* P_7 *besitzen.*

In Fig. 4 sind rechts und links zwei Zickzacklinien stark ausgezogen, welche sich auf der geschlossenen Fläche zu einem regulären geschlossenen Zuge von 2.9 Bogenstücken zusammensetzen. Man erkennt die Existenz einer cyklischen G_9, deren Erzeugende das einzelne der 18 Bogenstücke in das übernächste transformirt. Da das einzelne Bogenstück an zwei solchen geschlossenen Zickzacklinien theilhat, so zählt man leicht ab, dass es deren insgesammt 28 giebt. Gegenüber der eben genannten G_9 permutiren sich die Punkte P_3 im allgemeinen zu neun. Doch giebt es zwei Systeme zu je drei Punkten P_3, welche sich gegenüber der G_9 nur zu 3 cyklisch permutiren, und die demnach einzeln Fixpunkte der in G_9 enthaltenen G_3 sind; die Existenz dieser sechs Fixpunkte kann man mit Fig. 4 direct feststellen. Da insgesammt 168 Punkte P_3 vorkommen, so giebt es 28 G_3. Man hat das Resultat: *Es giebt in der* G_{504} 28 *den oben genannten Zickzacklinien ein-eindeutig zugeordnete cyklische* G_9 *und in ihnen* 28 *cyklische* G_3, *deren einzelne sechs Punkte* P_3 *zu Fixpunkten hat.*

Die einzige Substitution erster Art, welche ein einzelnes rechtwinkliges Kreisbogensiebeneck in sich transformirt, ist eine Drehung von der Periode 7 um das Centrum. Die einzelne der Substitutionen $V_1, V_2, \ldots, V_7$ wird demnach die 2.8 rechtwinkligen Siebenecke zu Paaren permutiren und aus diesem Grunde keinen Fixpunkt P_2 im „Innern" eines der Siebenecke haben. Die Eckpunkte des gedachten Siebenecknetzes sind 28 Punkte P_2, so dass auf die einzelne der 7 Substitutionen $V_1, V_2, \ldots, V_7$ 4 Fixpunkte entfallen. Da wir insgesammt 252 Punkte P_2 haben, so folgt: *Es giebt in der G_{504} insgesammt 63 gleichberechtigte cyklische G_2, deren einzelne vier Fixpunkte P_2 hat.*

Hiermit sind die gesammten

$$36 \cdot 6 + 28 \cdot 8 + 63 + 1 = 504$$

Operationen der G_{504} aufgezählt.

An nicht-cyklischen Untergruppen nennen wir zunächst *drei Classen von Diedergruppen, nämlich 28 gleichberechtigte G_{18}, 36 gleichberechtigte G_{14} und 84 gleichberechtigte G_6, die in ersteren G_{18} enthalten sind.* Die einzelne G_9 als eine unter 28 gleichberechtigten Gruppen wird nämlich durch $504 : 28 = 18$ Substitutionen in sich transformirt, die eine G_{18} bilden. Dieselbe enthält neben der G_9 noch 9 Substitutionen der Periode 2, welche die einzelne Substitution der G_9 in ihre inverse transformiren. Die G_{18} ist hiernach eine Diedergruppe. Ebenso behandelt man die G_{14}, während sich die G_6 als Untergruppen der G_{18} ergeben.

Die einzelne G_2 als eine unter 63 gleichberechtigten Gruppen ist ausgezeichnet in einer G_8 enthalten, in welcher wir bereits eine Abel'sche Gruppe mit 7 Substitutionen der Periode 2 erkannten. Da die einzelne G_2 nur in einer G_8 enthalten ist, *so giebt es in der G_{504} 9 gleichberechtigte Abel'sche Gruppen G_8 mit je 7 Substitutionen der Periode 2 ausser der Identität.* Die einzelne G_8 als eine unter 9 ist ausgezeichnet in einer G_{56} enthalten, *welche neben der G_8 noch 8 innerhalb der G_{56} einander gleichberechtigte G_7 enthält; insgesammt giebt es 9 gleichberechtigte G_{56} dieser Art.*

In der einzelnen G_8 zählt man 7 Vierergruppen G_4 ab, die innerhalb der zugehörigen G_{56} gleichberechtigt sind. So enthält z. B. die obige G_8 der Substitutionen $1, V_1, \ldots, V_7$ folgende 7 Vierergruppen:

$$(V_1, V_2, V_4, 1),\ (V_2, V_3, V_5, 1),\ (V_3, V_4, V_6, 1),\ (V_4, V_5, V_7, 1),$$
$$(V_5, V_6, V_1, 1),\ (V_6, V_7, V_2, 1),\ (V_7, V_1, V_3, 1).$$

Alle 9 G_8 liefern demnach 63 G_4: *Es giebt in der G_{504} insgesammt 63 Vierergruppen G_4, die mit einander gleichberechtigt sind**).

*) Vergl. hierzu die Angaben über die Structur der G_{504} bei Burnside a. a. O. pag. 372.

Es gilt nun der Satz, *dass ausser den bisher genannten Untergruppen weitere in der G_{504} nicht enthalten sind.* Man beweist dies vermöge eines von C. Jordan*) angegebenen und bereits von J. Gierster**) bei der Gruppe der Modulargleichung verwendeten Verfahrens, welches auf der Lösung einer gewissen diophantischen Gleichung sammt nachheriger Discussion der Lösungen beruht***).

Aus der Vollständigkeit der Aufzählung der Untergruppen entnehmen wir das Resultat: *Die G_{504} ist eine einfache Gruppe.* —

Wir betrachten endlich die *Symmetrielinien* des Netzes der 2.504 Dreiecke und constatiren etwa zuvörderst, dass dieselben nur eine einzige Classe bilden werden. Die Seite $\overline{e_1 e_2}$ des rechtwinkligen Siebenecks (Fig. 1) besteht aus 3 Dreiecksseiten. Die Substitution $V_1 V_2$ ist die Erzeugende derjenigen cyklischen hyperbolischen Gruppe, welche die durch e_1 und e_2 hindurchziehende Symmetrielinie des Dreiecksnetzes der Function $s\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{7}; J\right)$ in sich verschiebt. Die zwischen den Punkten e_2 und $V_1 V_2(e_2)$ gelegene Strecke der Symmetrielinie ist mit zwei Siebeneckseiten äquivalent und besteht dieserhalb aus 6 Dreiecksseiten. Da $(V_1 V_2)^2 \backsim 1$ ist, so besteht die einzelne Symmetrielinie unseres geschlossen gedachten Netzes der 2.504 Dreiecke aus 12 Dreiecksseiten. Man zählt daraufhin leicht ab: *Das reguläre Netz der* 2.504 *Dreiecke besitzt* 126 *gleichberechtigte Symmetrielinien, die zwei-ein-deutig den* 63 *Gruppen G_2 zugeordnet sind.* Man kann die bei dieser Zuordnung entspringenden Symmetrielinienpaare zu den Abel'schen G_8 in einen interessanten Zusammenhang setzen, was indes hier nicht ausgeführt wird. —

Ein wichtiger Satz entspringt vermöge der Symmetrielinien aus Fig. 3. Die daselbst vermerkte Zuordnung der Randcurven ist eine solche, dass sich für je zwei auf einander bezogene Randcurven eine bestimmte sie verbindende und im geschlossenen Dreiecksnetz selbst geschlossene Symmetrielinie finden lässt. Für die Randcurvenpaare (1, 23), (3, 8), (4, 36) sind diese Symmetrielinien in Fig. 3 stark ausgezogen; man übersieht leicht, dass ihre Existenz damit in jedem Falle bewiesen ist.

Da in Fig. 3 die Kreisbogendreiecke selbst nicht gezeichnet sind, so ist die Rolle der drei stark markirten Curven als Symmetrielinien nicht unmittelbar anschaulich. Man übertrage demnach den Verlauf der einzelnen Linie auf das Siebeneck der Fig. 2, wo sie sich auf drei solche Bogenstücke auseinanderlegt, wie sie in Fig. 2 stark ausgezogen

*) In Crelle's Journal Bd. 84, pag. 89 ff. (1877).

**) In den Mathem. Annalen Bd. 18, pag. 359 (1881).

***) Siehe auch. Klein-Fricke, *Vorles. über Modulfunctionen,* Bd. I (Leipzig 1890) pag. 483.

sind. Auch durch Abzählung der Dreiecksseiten überzeugt man sich hierbei sofort, dass die fragliche Symmetrielinie auf der geschlossenen Fläche selbst geschlossen ist.

In der s-Halbebene ist insbesondere die imaginäre Axe eine Symmetrielinie. Zu ihr gehört als hyperbolische Erzeugende:

$$V_7 V_1 = \begin{pmatrix} \omega + 1 + (\omega^2 + 2\omega)\sqrt{\omega - 1}, & 0 \\ 0, & \omega + 1 - (\omega^2 + 2\omega)\sqrt{\omega - 1} \end{pmatrix}, \tag{2}$$

die sich, wie ein Blick auf das Dreiecknetz lehrt, in den Erzeugenden V_0, V_1 der Gesammtgruppe Γ so darstellt:

$$V_7 V_1 = V_0^3 V_1 V_0^{-2} V_1 V_0^3 V_1. \tag{3}$$

Das Resultat der voraufgesandten Ueberlegung kann man also dahin aussprechen, *dass die sämmtlichen vom Polygon der Fig.* 3 *gelieferten Erzeugenden der* Γ_{504} *mit:*

$$(V_0^3 V_1 V_0^{-2} V_1 V_0^3 V_1)^2 \tag{4}$$

innerhalb der Gesammtgruppe gleichberechtigt sind.

Dieses Ergebniss lässt sich in eine bemerkenswerthe abstracte Gestalt kleiden. Weiss man von zwei irgendwie definirten Operationen U_0, U_1, dass man aus ihnen eine Gruppe erzeugen kann, und gelten für U_0, U_1 nur die drei Relationen:

$$U_0^7 = 1, \quad U_1^2 = 1, \quad (U_0 U_1)^3 = 1, \tag{5}$$

so ist die entspringende Gruppe isomorph mit Γ. Ist auch noch:

$$(U_0^3 U_1 U_0^{-2} U_1 U_0^3 U_1)^2 = 1, \tag{6}$$

so sind die sämmtlichen mit der hier links stehenden Operation gleichberechtigten Operationen, die alle in der „ausgezeichneten“ Γ_{504} enthalten sind, mit 1 gleich; und andererseits werden die Erzeugenden der Γ_{504} und damit alle und nur die Operationen der Γ_{504} gleich 1. Da sich hiernach die Γ auf die G_{504} reducirt, so folgt: *Erfüllen* U_0, U_1 *die vier Relationen* (5), (6) *und keine andere, so entspringt aus* U_0, U_1 *eine endliche mit der* G_{504} *isomorphe Gruppe**).

---

*) Dieses Theorem ist der Gegenstand der schon genannten Abhandlung von Burnside in den Mathem. Annalen Bd. 52 pag. 174.

§ 4.

Von den automorphen Functionen der Gruppe Γ_{504}.

Die umfassendsten Untergruppen der G_{504} sind die neun gleichberechtigten G_{56}. Ihnen entsprechen in der Gruppe Γ der s-Function $s\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{7}; J\right)$ *neun gleichberechtigte Untergruppen* Γ_9 *des Index* 9. Einen Discontinuitätsbereich einer einzelnen Γ_9 gewinnt man, indem man aus dem Siebeneck der Fig. 2 einen Ausschnitt des Centriwinkels $\frac{2\pi}{7}$ etwa dadurch herausschneidet, dass man vom Centrum nach zwei consecutiven Ecken geradlinige Schnitte legt. Diese beiden Schnitte sind dann durch die Substitution V_8 auf einander bezogen; wir werden also etwa V_8 und V_1 mit den Relationen:

$$(1) \qquad V_8^7 = 1, \quad V_1^2 = 1, \quad (V_8 V_1)^7 = 1$$

als Erzeugende der Γ_9 wählen dürfen.

Die Γ_9 ist nun *vom Geschlechte* $p = 0$, und es sei $u(s)$ eine zugehörige Hauptfunction, die wir gleich noch näher fixiren. Die Hauptfunction $J(s)$ der Gesammtgruppe Γ ist so gewählt, dass sie in den Eckpunkten P_2, P_3, P_7 bez. die Werthe 1, 0 und ∞ annimmt. Ueber der J-Ebene lagert die Ebene der complexen Variabelen u in Gestalt einer 9-blättrigen Riemann'schen Fläche, deren Verzweigung im bezeichneten Discontinuitätsbereich der Γ_9 direct anschaulich ist. Es entspringt der wichtige Satz: *Zwischen J und u besteht eine algebraische Gleichung für J vom ersten, für u vom neunten Grade. Diese Gleichung neunten Grades besitzt keine Resolvente von geringerem als neunten Grade; ihre Monodromiegruppe ist mit unserer G_{504} isomorph.*

Die Gleichung neunten Grades, zu der wir hier geführt werden, ist nun bereits vor längerer Zeit durch E. Goursat*) aufgestellt. Man bemerke, dass der Discontinuitätsbereich der Γ_9 aus zwei einander symmetrischen Kreisbogendreiecken der Winkel $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{7}, \frac{\pi}{7}$ aufgebaut werden kann. Man drückt dies Sachverhältniss dahin aus, dass die Gruppen der Kreisbogendreiecke der Winkel $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{7}$ und $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{7}, \frac{\pi}{7}$ bei geeigneter Lagerung der Ausgangsdreiecke *commensurabel* **) werden; die Lagerung ist insbesondere eine solche, dass die Symmetrie-

*) Siehe dessen „*Recherches sur l'équation de Kummer*“ in den Acta soc. scient. Fennicae Bd. 15 (Helsingfors, 1888), insbes. pag. 90 ff.

**) Commensurabel heissen zwei Gruppen, wenn sie eine Untergruppe gemeinsam haben, die in jeder von ihnen einen endlichen Index besitzt; im vorliegenden Falle ist die eine der beiden Gruppen direct in der anderen enthalten.

linien der beiderseitigen in Deckung befindlichen Dreiecksnetze durchaus getrennt von einander verlaufen.

Ueber Commensurabilität von Dreiecksgruppen hat nun Goursat a. a. O. allgemein Untersuchungen angestellt, und er findet insbesondere für den hier in Rede stehenden Fall die algebraische Relation:

$$(2)\qquad \begin{aligned} J : J - 1 : 1 = {} & 16(3u^3 + 10u^2 + 8u + 4)^3 \\ & : (63u^4 + 140u^3 + 168u^2 + 96u + 32)^2 \\ & : 9u^7(48u^2 + 39u + 24). \end{aligned}$$

Man hat also hier die oben postulirte Gleichung 9ten Grades direct vor sich und erkennt andrerseits, *dass die Commensurabilität der zu den Kreisbogendreiecken* $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{7}\right)$ *und* $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{7}, \frac{\pi}{7}\right)$ *gehörenden Gruppen durch eine* 1-9-*deutige algebraische Beziehung zum Ausdruck kommt, deren Monodromiegruppe mit unserer einfachen* G_{504} *isomorph ist.*

Wir können jetzt aber leicht nachträglich die Werthevertheilung von $u(s)$ im Discontinuitätsbereich der Γ_9 angeben. Bezeichnen wir das Centrum der Fig. 2, d. i. den Fixpunkt von V_8, durch e_8, so können wir in Fig. 2 auch vermittelst der Geraden $\overline{e_1 e_8}$ und $\overline{e_2 e_8}$ einen Discontinuitätsbereich der Γ_9 ausschneiden. Die Symmetrielinie $\widehat{e_1 e_2}$ desselben ist das Bild der reellen u-Axe, und zwar derart, dass im Punkte P_7 dieser Linie $u = 0$, bei e_1 und e_2 $u = \infty$ und im Punkte P_3 ein negativer Werth u vorliegt. Wir schliessen von hieraus weiter durch Auflösung von $48u^2 + 39u + 24 = 0$, dass in den beiden anderen Ecken unseres Bereiches die Werthe $u = \frac{-13 \pm i7\sqrt{7}}{32}$ zutreffen, wobei das obere Zeichen für den Punkt e_8 gilt.

Um ein Functionssystem für die Γ_{504}, *die dem Geschlechte* $p = 7$ *angehört*, zu gewinnen, könnte man die neun mit $u(s)$ gleichberechtigten Functionen neben einander stellen, die alsdann gegenüber den Operationen der Gesammtgruppe eine Permutationsgruppe G_{504} bilden werden. Um der oben erkannten Structur der G_{504} Rechnung zu tragen, werden wir indessen hier einen anderen Weg gehen.

Zum Geschlechte $p = 0$ gehören auch noch die neun gleichberechtigten Γ_{63}, welche den Abel'schen G_8 correspondiren. Den Discontinuitätsbereich einer einzelnen Γ_{63} hatten wir in Fig. 2 gezeichnet. Wir erkennen: *Eine Hauptfunction* $\tau(s)$ *dieser* Γ_{63} *gewinnen wir von* $u(s)$ *aus durch Ausziehen einer siebenten Wurzel:*

$$(3)\qquad \tau(s) = \sqrt[7]{\frac{32u + 13 - i7\sqrt{7}}{32u + 13 + i7\sqrt{7}}}.$$

Der Nullpunkt von $\tau(s)$ liegt im Centrum e_8 des Bereiches, der Punkt $\tau = \infty$ in den sieben Ecken desselben, die einen Cyclus bilden; der

Kranz der sieben Kreisbogen $\widehat{e_1 e_2}$, $\widehat{e_2 e_3}$, ... liefert in der τ-Ebene den Einheitskreis. Wir wählen die siebente Wurzel in (3) so, dass in der Ecke $e_\varkappa$ der Werth $\tau = \varepsilon_\varkappa = e^{\frac{2\varkappa\pi i}{7}}$ zutrifft.

Wir gehen nun zu den sieben in jener G_{56} enthaltenen gleichberechtigten *Vierergruppen* G_4 vor. Ihnen entsprechen Gruppen Γ_{126} des Index 126 und des Geschlechtes $p = 1$. Eine unter jenen Vierergruppen hatte die Operationen $1, V_1, V_2, V_4$. Die zugehörige Γ_{126} besitzt einen Discontinuitätsbereich, der schematisch in Fig. 5 dargestellt ist. Wir erkennen sofort: *Zu einem vollen Functionssystem der hier vorliegenden* Γ_{126} *gelangt man von* $\tau(s)$ *aus durch Ausziehen einer Quadratwurzel; in der That hat man neben* $\tau(s)$ *die Function zu stellen:*

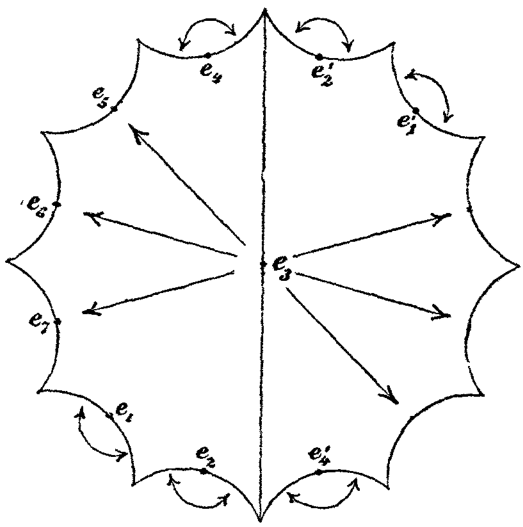


Fig. 5.

$$\text{(4)} \qquad \sigma(s) = \sqrt{(\tau-1)(\tau-\varepsilon^3)(\tau-\varepsilon^5)(\tau-\varepsilon^6)}$$
$$= \sqrt{\tau^4 - \frac{1-i\sqrt{7}}{2}\tau^3 - \tau^2 - \frac{1+i\sqrt{7}}{2}\tau + 1}.$$

Es handelt sich hier um ein elliptisches Gebilde mit der rationalen Invariante $J = \frac{28}{27}$.

Mit $\sigma(s)$ sind innerhalb der Γ_{63} noch die Functionen $\sigma_1(s)$, $\sigma_2(s)$, ..., $\sigma_6(s)$ gleichberechtigt, wobei allgemein sein soll:

$$\text{(5)} \qquad \sigma_\varkappa(s) = \sqrt{\varepsilon^{4\varkappa}\tau^4 - \frac{1-i\sqrt{7}}{2}\varepsilon^{3\varkappa}\tau^3 - \varepsilon^{2\varkappa}\tau^2 + \frac{-1-i\sqrt{7}}{2}\varepsilon^\varkappa\tau + 1}.$$

Innerhalb der G_4 sind nun *drei* G_2 enthalten, denen drei Γ_{252} des Geschlechtes $p = 3$ correspondiren. *Zu einem Functionssystem einer dieser* Γ_{252} *gelangen wir einfach, indem wir zu* $\tau(s)$, $\sigma(s)$ *eine der Quadratwurzeln* (5) *hinzufügen;* so treffen wir z. B. die aus $1, V_1$ bestehende G_2 mit dem System $\tau(s)$, $\sigma(s)$, $\sigma_1(s)$ da letztere Function zur Vierergruppe $(V_1, V_3, V_7, 1)$ gehört.

Endlich führt der Zusatz einer dritten, jedoch von $\sigma_3(s)$ *verschiedenen Quadratwurzel* (5) *von* τ, σ, σ_1 *aus zu einem vollen Functionssysteme der Gruppe* Γ_{504} *selbst hin.* Es ist in der That nur noch die zu $\sigma_3(s)$ gehörende Vierergruppe $(V_1, V_5, V_6, 1)$, welche die Substitution V_1 enthält.

Es ist unzweifelhaft eine interessante Aufgabe, die verschiedenen hier auftretenden algebraischen Gebilde, die theils einander übergeordnet theils gleichberechtigt sind, sowohl einzeln als in ihren gegenseitigen Beziehungen noch näher zu untersuchen. Doch wird dies hier einstweilen nicht unternommen.

Uebrigens soll noch bemerkt werden, dass eine algebraische Behandlung der G_{504} mit invariantentheoretischen Hülfsmitteln, wie sie bei der G_{168} und G_{360} in so eleganter Weise zum Ziele führte, bei der G_{504} wenig aussichtsreich erscheint. Nach einem von A. Wiman*) bewiesenen Satze giebt es nämlich keine Collineationsgruppe in 6 oder gar noch weniger homogenen Variabelen, welche mit der G_{504} isomorph wäre.

Braunschweig, October 1898.

*) Göttinger Nachrichten vom Jahre 1897 pag. 55.