# Zur Theorie der Prymschen Funktionen 1. und $N$. Ordnung.

Von

Otto Haupt in Karlsruhe (Baden).

## Inhalt.

Seite



## I. Über die ausgezeichnete Stellung der Prymschen Charakteristiken gegenüber den Nicht-Prymschen.

### § 1.

### Der Prymsche Eindeutigkeitssatz und seine Umkehrung.

Im ersten Teile ihres Werkes „*Theorie der Prymschen Funktionen 1. Ordnung*“ *) beschäftigen sich die Herren Prym und Rost unter anderem mit denjenigen Funktionen $U = U' + iU''$ auf einer gegebenen Riemannschen Fläche $T$ vom Geschlechte $p (\geqq 1)$ bzw. der zugehörigen zerschnittenen, einfach zusammenhängenden Fläche $T'$, welche folgende Eigenschaften besitzen **):

*) Leipzig, Teubner, 1911. Die im Texte gebrauchten Bezeichnungen und Festsetzungen sind dem Prym-Rostschen Werke entnommen.

**) Wegen der eingehenderen Formulierung des Resultates siehe Prym-Rost, l. c.,

1. $U$ ist eine *zu $T$ relativ unverzweigte*, in der Umgebung jedes Punktes von $T$ *reguläre Potentialfunktion**);

2. *Die analytische Fortsetzung von $U$ über die Querschnitte $a_\nu$, $b_\nu$, $c_\nu$,* durch die $T$ in $T'$ verwandelt wird, *erfolgt gemäß den Substitutionen*

$$(\mathrm{S.})\qquad \left.\begin{aligned} U^+ &= A_\nu U^- + \mathfrak{A}_\nu \quad \text{an } a_\nu \\ U^+ &= B_\nu U^- + \mathfrak{B}_\nu \quad \text{an } b_\nu \\ U^+ &= \phantom{A_\nu} U^- \qquad\quad\ \text{an } c_\nu \end{aligned}\right\} \qquad \nu = 1, 2, \cdots, p.$$

Dabei bezeichnet $U^-$ den Wert von $U$ in irgendeinem Punkte $P$ von $T$, $U^+$ denjenigen Funktionswert im nämlichen Punkte $P$, der sich durch analytische Fortsetzung von $P$ aus längs eines den Schnitt $a_\nu$ (bzw. $b_\nu$, $c_\nu$) gerade einmal von der negativen zur positiven Seite überschreitenden, sonst ganz im Innern von $T'$ verlaufenden Weges ergibt. Die $A_\nu$, $B_\nu$, $\mathfrak{A}_\nu$, $\mathfrak{B}_\nu$ sind komplexe Konstanten; damit die geforderten Substitutionen (S.) widerspruchsfrei sind, ist notwendig, daß

$$(1 - B_\nu)\,\mathfrak{A}_\nu - (1 - A_\nu)\,\mathfrak{B}_\nu = 0, \qquad \nu = 1, 2, \cdots, p.$$

3. *Die Faktoren $A_\nu$, $B_\nu$, $\nu = 1, 2, \cdots, p$, sind sämtlich vom absoluten Betrag* 1.

Der kürzeren Ausdrucksweise halber sollen die folgenden Bezeichnungen eingeführt werden: $\mathfrak{A}_\nu$, $\mathfrak{B}_\nu$ heißen additive *Perioden*; im Falle $\mathfrak{A}_\nu = \mathfrak{B}_\nu = 0$ heißt die zum betr. Werte $\nu$ gehörige Substitution (S.) *homogen*. Ein *Faktorenpaar $A_\nu$, $B_\nu$ heißt „uneigentlich"*, sobald $A_\nu = B_\nu = 1$ ist. Die Gesamtheit der Faktoren $A_\nu$, $B_\nu$ ($\nu = 1, 2, \cdots, p$) bezeichnet man als *„Charakteristik"* des Problems. Insbesondere spricht man von einer *„Prymschen Charakteristik"*, wenn die Bedingung 3. erfüllt ist, von der *„ausgezeichneten Charakteristik"*, wenn alle Faktorenpaare $A_\nu$, $B_\nu$ uneigentlich sind. Eine den Bedingungen 1. und 2. genügende Funktion *„gehört zur Charakteristik"*. Dabei handelt es sich also stets um Potentialfunktionen.

Man überzeugt sich leicht davon, daß eine *Charakteristik dann und nur dann eine Prymsche* ist, *wenn die homogenen Substitutionen* (S.), *in reellen und lateralen Teil zerlegt, sämtlich orthogonal* sind.

Eine Folge der Orthogonalität ist der

Eindeutigkeitssatz**): *Zu vorgegebener, nicht ausgezeichneter Prymscher Charakteristik gibt es keine einzige Riemannsche Fläche $T$ vom Geschlechte $p\,(\geqq 1)$ von der Art, daß auf $T$ eine zur Charakteristik gehörige*

I. Teil, S. 182. Die Schnitte $a_\nu$, $b_\nu$ werden in dieser Arbeit etwa als Züge von, abwechselnd zur $x$- bzw. zur $y$-Achse parallelen Strecken vorausgesetzt.

*) Vgl. Weyl, Die Idee der Riemannschen Fläche (Leipzig, Teubner, 1913, S. 38). Im Gegensatz zur *Potentialfunktion* wird im folgenden die Funktion komplexen Argumentes als *analytische Funktion* bezeichnet.

**) Prym-Rost, l. c., I. Teil, S. 151.

*nicht identisch verschwindende (allenthalben endliche) Funktion $U$ existiert, deren zugehörige Substitutionen* (S.) *sämtlich homogen sind.**) *Im Falle der ausgezeichneten Charakteristik hingegen ist die Konstante für jede Fläche $T$ die allgemeinste derartige Funktion.*

Zum Beweise bilde man mit einer zur gegebenen Prymschen Charakteristik gehörigen Potentialfunktion $U = U' + iU''$ das Dirichlet-Integral, erstreckt über die Fläche $T'$,

$$D(U) = \iint\limits_{T'} \left\{ \left(\frac{\partial U'}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U'}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial U''}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U''}{\partial y}\right)^2 \right\} dx\, dy \text{ **)}$$

Nach dem Greenschen Satze ergibt dies unter Benutzung von (S.) und wegen $|A_\nu| = |B_\nu| = 1$, $(\nu = 1, 2, \cdots, p)$

$$\text{(I)} \qquad D(U) = \Pi^* = \sum_{\nu=1}^{\nu=p} \left\{ A_\nu \mathfrak{A}_\nu \bar{\mathfrak{B}}_\nu - B_\nu \mathfrak{B}_\nu \bar{\mathfrak{A}}_\nu \right\}. \text{**)}$$

Dabei bedeuten $\mathfrak{A}_\nu$, $\mathfrak{B}_\nu$ die additiven Perioden bzw. an den Schnitten $a_\nu$, $b_\nu$; $\bar{\mathfrak{A}}_\nu$, $\bar{\mathfrak{B}}_\nu$ die entsprechenden Perioden der zu $U = U' + iU''$ konjugierten Potentialfunktion

$$V = V' + iV'' = \int\limits_{x_0, y_0}^{x, y} \left( -\frac{\partial U}{\partial y} dx + \frac{\partial U}{\partial x} dy \right).$$

$\bar{\mathfrak{A}}_\nu$ bezeichnet die zu $\mathfrak{A}_\nu$ konjugiert-komplexe Größe.

Ist jetzt $U$ multiplikativ, so wird $\mathfrak{A}_\nu = \mathfrak{B}_\nu = 0$, d. h. $\Pi^* = 0$, und es folgt $U =$ Konst.; diese Konstante kann aber nur für

$$A_\nu = B_\nu = 1, \qquad \nu = 1, \cdots, p$$

d. h. nur für den Fall der ausgezeichneten Charakteristik von Null verschieden sein. Die *Prymsche Bedingung* 3., d. h. die Orthogonalität der in reellen und lateralen Teil zerlegten Substitutionen (S.) *reicht* dem gemäß *hin, um die Eindeutigkeit der zur Charakteristik gehörigen Potentialfunktionen g l e i c h z e i t i g für a l l e Riemannschen Flächen vom Geschlechte $p$ zu gewährleisten.****) Die Prymsche Bedingung 3. ist aber hierzu *auch notwendig.* Mit anderen Worten, die Prymschen Charakteristiken sind die *einzigen* Charakteristiken, die einen Eindeutigkeitssatz *unabhängig von der* zugrunde liegenden *Riemannschen Fläche* zulassen. Dies zeigt folgende

---

*) Eine solche Funktion soll im folgenden kurz als eine „*multiplikative*“ bezeichnet werden.

**) Prym-Rost, l. c., I. Teil, S. 166—169, insbesondere Formel (J.), S. 169. Dabei ist wesentlich, daß $U$ an den Schnitten $c_\nu$ die Perioden Null besitzt.

***) Von der ausgezeichneten Charakteristik sieht man hierbei ab.

Umkehrung des Eindeutigkeitssatzes*): *Gegeben sei eine Nicht-Prymsche Charakteristik. Dann gibt es (unendlich viele) Klassen Riemannscher Flächen $T$ vom Geschlechte $p$ mit der Eigenschaft, daß auf $T$ eine zur Charakteristik gehörige allenthalben endliche multiplikative Funktion $W_0$ existiert. $W_0$ ist speziell eine analytische Funktion von $z = x + iy$.***) *Demgegenüber gibt es immer auch unendlich viele Klassen Riemannscher Flächen $T$ vom Geschlechte $p$, in denen zur gegebenen Nicht-Prymschen Charakteristik* **keine** *Funktion $W_0$ existiert.*

Bezeichnet $W_0$ eine zur Charakteristik $A_\nu$, $B_\nu$ ($A_\nu = e^{\alpha_\nu}$, $B_\nu = e^{\beta_\nu}$) gehörige Funktion $W_0$ der verlangten Eigenschaft, dann ist***) $\log W_0 = W$ ein Abelsches Integral 1. Gattung auf $T$ mit den Perioden

$$\begin{aligned} \mathfrak{a}_\nu &= \alpha_\nu + 2i\pi m_\nu = \alpha_\nu' + i(\alpha_\nu'' + 2\pi m_\nu), \\ \mathfrak{b}_\nu &= \beta_\nu + 2i\pi n_\nu = \beta_\nu' + i(\beta_\nu'' + 2\pi n_\nu), \end{aligned} \qquad \nu = 1, 2, \cdots, p.$$

$m_\nu$ und $n_\nu$ bedeuten ganze Zahlen.

Demnach läßt sich die Frage zurückführen auf das Problem, ein Abelsches Integral 1. Gattung $W(z)$ vom Geschlechte $p$ zu konstruieren, dessen Perioden (bis auf ganzzahlige Vielfache von $2\pi i$) gegeben sind.***) Diese Aufgabe ist bereits mehrfach Gegenstand von Untersuchungen gewesen.†) Es dürfte nicht ohne Interesse sein, daß die geforderte Konstruktion im vorliegenden Falle auf dem von Riemann angegebenen Wege vollständig durchgeführt werden kann; dies soll im folgenden gezeigt werden, zumal die Überlegungen gleichzeitig eine Grundlage für die Untersuchungen der §§ 2 und 3 bilden.

$W(z)$ bildet das durch Ziehen der $2p$ Rückkehrschnitte $a_\nu, b_\nu$ ($\nu = 1, \cdots, p$) aus $T$ entstehende, abgeschlossene Gebiet $\overline{T}$ vom Zusammenhange $p$ konform ab auf ein $p$fach zusammenhängendes, ganz im Endlichen gelegenes, abgeschlossenes Gebiet $S$.††) $S$ besitzt im allgemeinen $2p - 2$ einfache Verzweigungspunkte.†††) Die Begrenzungskurven von $S$ bzw. ihre Punkte lassen sich, entsprechend dem + und — Ufer eines Schnittes $a_\nu (b_\nu)$ einander paarweise zuordnen. Je zwei zugeordnete Begrenzungsstücke

---

*) Die Fragestellung, welche zu dieser Umkehrung führte, entstammt Unterhaltungen mit den Herren Prym und Rost. Ein Beweis für den Fall $p = 1$ ist (ebenfalls unter Heranziehung der Abelschen Integrale 1. Gattung) zuerst von Herrn Prym geführt worden. Zwecks Erledigung des allgemeinen Falles verwies Herr Hilb auf die unten zitierten Bemerkungen von Riemann und Klein.

**) Daß man $W_0$ analytisch annimmt, wird durch die Beweismethode bedingt.

***) Appell, Sur les intégrales etc. (Acta math. 13).

†) Riemann, Gesammelte Werke, 1. Bd. (2. Aufl.), S. 120. Klein, Vorlesungen über Riemannsche Flächen (Leipzig 1906).

††) Unter Gebiet wird im folgenden stets ein abgeschlossenes Gebiet verstanden.

†††) Riemann, l. c.

(bzw. Punkte) gehen durch Parallelverschiebung um die zugehörige Periode $\mathfrak{a}_\nu (\mathfrak{b}_\nu)$ ineinander über und mögen deshalb *parallel (bzw. entsprechend)* genannt werden. Je zwei Paare paralleler Begrenzungsstücke gehören zusammen und bilden einen in sich geschlossenen *parallelogrammatischen Rahmen.**) Schließlich ist $z = z(W)$ eine in $S$ eindeutige, von Polen abgesehen regulär-analytische Funktion von $W$; $z(W)$ ist in $S$ $2p$fach periodisch im folgenden Sinne: die Funktionselemente, die zu entsprechenden Punkten paralleler Begrenzungsstücke gehören, sind identisch.

Zur Konstruktion von $W_0$ bzw. der gesuchten Riemannschen Fläche bestimmt man zunächst ein Gebiet $S$, das zu den gegebenen $\mathfrak{a}_\nu$, $\mathfrak{b}_\nu$ gehört.

Eine Bedingung, der die oben eingeführten Zahlen $m_\nu$, $n_\nu$ genügen müssen, liefert, wie aus (I) hervorgeht, das Dirichlet-Integral**) für das Abelsche Integral $W = W' + iW''$

$$(\mathrm{Ia}) \qquad D(W) = \iint\limits_{T'} \left\{ \left(\frac{\partial W'}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial W'}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial W''}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial W''}{\partial y}\right)^2 \right\} dx\,dy$$

$$= 2 \sum_{\nu=1}^{p} [\alpha_\nu'(\beta_\nu'' + 2\pi n_\nu) - \beta_\nu'(\alpha_\nu'' + 2\pi m_\nu)] > 0.$$

Geometrisch gedeutet***): der Flächeninhalt des durch $W$ gelieferten Bildbereiches $S$ von $T'$ muß positiv sein. Der Term unter dem Summenzeichen rechter Hand in (Ia) liefert den Inhalt eines Parallelogramms mit den Seiten $\mathfrak{a}_\nu$ und $\mathfrak{b}_\nu$ in der $W$-Ebene. Man bildet das Parallelogramm in der Weise†), daß man zuerst den Vektor $\mathfrak{a}_\nu$ irgendwie in der Ebene annimmt und an seinem Endpunkt den Anfangspunkt des Vektors $\mathfrak{b}_\nu$ anlegt, an dessen Endpunkt den Anfangspunkt von $-\mathfrak{a}_\nu$ usw.; dadurch sei zugleich der *positive Umlaufsinn* des Parallelogramms festgelegt *(orientiertes Parallelogramm).* Der obengenannte Term ist nun positiv oder negativ, je nachdem der durch das Parallelogramm begrenzte, den unendlich fernen Punkt nicht enthaltende Teil der $W$-Ebene zur Linken oder zur Rechten liegt, wenn die Begrenzung im positiven Sinn durchlaufen wird. Die Prymsche Bedingung liefert insbesondere solche Zahlensysteme $\mathfrak{a}_\nu$, $\mathfrak{b}_\nu$, für welche das zum betreffenden Rahmen gehörige Gebiet immer den Flächeninhalt Null hat.

Die gegebene Nicht-Prymsche Charakteristik sei

$$A_\nu = e^{\alpha_\nu' + i\alpha_\nu''}, \quad B_\nu = e^{\beta_\nu' + i\beta_\nu''}, \qquad \nu = 1, \cdots . p.$$

*) Die Bezeichnungen nach Klein, l. c., S. 78ff.

**) Z. B. Prym-Rost, l. c., II. Teil, S. 87.

***) Klein, a. a. O.

†) Entsprechend dem festgesetzten positiven Umlaufsinn der Querschnittpaare $a_\nu$, $b_\nu$ von $T'$ (Prym-Rost, l. c., I. Teil, S. 93).

Für mindestens ein $\nu$, etwa $\nu = p$, ist $\alpha_p' \neq 0$ oder $\beta_p' \neq 0$ oder beides erfüllt. Um die Vorstellung zu fixieren, werde $\alpha_p' \neq 0$ angenommen. Im übrigen seien die $\alpha, \beta$ so numeriert, daß $\alpha_\mu' = \beta_\mu' = 0$, $\mu = 1, 2, \cdots, \varrho$ ($\varrho \leq p-1$), während $\alpha_\mu'$ und $\beta_\mu'$ für $\mu > \varrho$ nicht gleichzeitig verschwinden. Im Falle $\alpha_\nu' = \beta_\nu' = 0$ sind Überschneidungen für die zugehörigen Rahmen in der schlichten Ebene nicht zu vermeiden, während das für die Indizes $\mu = \varrho + 1, \cdots, p$ stets gelingt und zwar durch passende Wahl der Vielfachen $m_\mu$, $n_\mu$ von $2\pi i$, über die man ja noch verfügen kann.

Demgemäß wird man die ganzen Zahlen $m_\mu$, $n_\mu$ so wählen, daß

$$\alpha_\mu' \beta_\mu'' - \beta_\mu' \alpha_\mu'' > 2\pi(\beta_\mu' m_\mu - \alpha_\mu' n_\mu), \quad \mu = \varrho + 1, \varrho + 2, \cdots, p,$$

d. h. daß der Inhalt des orientierten Parallelogramms positiv wird. Speziell sei $m_p = 0$ und es möge, um einen konkreten Fall zu betrachten, die eben ausgesprochene Bedingung für hinreichend große positive $n_p$ erfüllt sein.

Hingegen richtet man für $\mu = 1, \cdots, \varrho$ die $m_\mu$, $n_\mu$ so ein, daß

$$0 < \mathfrak{a}_\mu'' = \alpha_\mu'' + 2\pi m_\mu \leq 2\pi,$$
$$0 < \mathfrak{b}_\mu'' = \beta_\mu'' + 2\pi n_\mu \leq 2\pi.$$

Dies ist stets möglich. Ferner gibt es zu jedem $\mu$ ($\mu = 1, \cdots, \varrho$) zwei reelle positive Zahlen $\mathfrak{c}_\mu''$, $\mathfrak{d}_\mu''$ von folgender Eigenschaft:

$$0 < \mathfrak{c}_\mu'' \begin{matrix} < \mathfrak{a}_\mu'' \\ < \mathfrak{b}_\mu'' \end{matrix},$$

$$0 \begin{matrix} < \mathfrak{a}_\mu'' \\ < \mathfrak{b}_\mu'' \end{matrix} < \mathfrak{d}_\mu'' < (\mathfrak{a}_\mu'' + \mathfrak{b}_\mu''),$$

$$\mu = 1, 2, \cdots, \varrho.$$

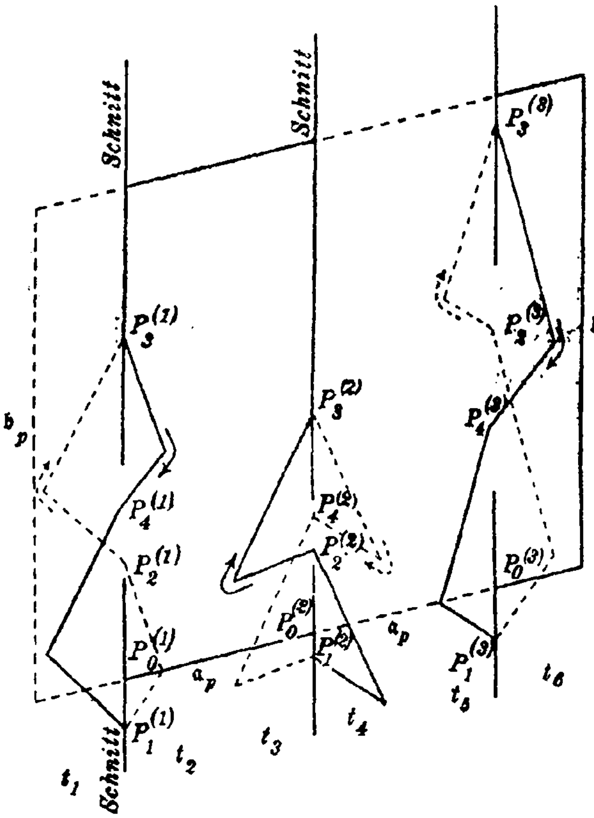


Fig. 1.

Nunmehr ergibt sich ein Gebiet $S$*) folgendermaßen: Der Vektor $\mathfrak{a}_p = \alpha_p' + i(\alpha_p'' + 2\pi m_p)$ wird in der $W$-Ebene beliebig festgelegt. Man teile $\mathfrak{a}_p$ in $2\varrho$ gleiche Teile und ziehe durch die Teilpunkte $\overline{P}_0^{(\lambda)}$ ($\lambda = 1, \cdots, 2\varrho - 1$) sowie durch den Anfangs- und Endpunkt von $\mathfrak{a}_p$ Parallelen zur $iW''$-Achse; hierdurch werden in der $W$-Ebene die $2\varrho$ Parallelstreifen $t_\lambda$ ($\lambda = 1, \cdots, 2\varrho$) gebildet. Man greift jetzt die Teilpunkte

$$\overline{P}_0^{(1)}, \ \overline{P}_0^{(3)}, \ \cdots, \ \overline{P}_0^{(2\mu-1)}, \ \cdots, \ \overline{P}_0^{(2\varrho-1)}$$

*) Vgl. die obenstehende Figur 1, die sich auf den Fall $\varrho = 3$ bezieht.

heraus, nennt sie $P_0^{(\mu)}$ $(\mu = 1, \cdots, \varrho)$ und trägt von $P_0^{(\mu)}$ aus die Vektoren $\pm i\frac{\mathfrak{c}_\mu''}{2}$, $i\left(\mathfrak{d}_\mu'' - \frac{\mathfrak{c}_\mu''}{4}\right)$, $-i\frac{\mathfrak{c}_\mu''}{4}$ $(\mu = 1, \cdots, \varrho)$ ab.

Längs der durch Abtragen von $\pm i\frac{\mathfrak{c}_\mu''}{2}$ entstandenen Strecken von der Länge $\mathfrak{c}_\mu''$ wird die $W$-Ebene aufgeschnitten und ebenso längs der durch die Endpunkte $R_\mu$ von $i\left(\mathfrak{d}_\mu'' - \frac{1}{4}\mathfrak{c}_\mu''\right)$ $(\mu = 1, \cdots, \varrho)$ begrenzten, mit der $+iW''$-Achse gleichgerichteten Halbstrahlen.

Den Endpunkt von $-i\frac{\mathfrak{c}_\mu''}{4}$, deren Anfangspunkt $P_0^{(\mu)}$ ist, bezeichne man mit $P_1^{(\mu)}$, entsprechend mit $P_2^{(\mu)}$ bzw. $P_4^{(\mu)}$, $P_3^{(\mu)}$ die Endpunkte der Strecken $i\mathfrak{a}_\mu''$, $i\mathfrak{b}_\mu''$, $i(\mathfrak{a}_\mu'' + \mathfrak{b}_\mu'')$, $(\mu = 1, \cdots, \varrho)$, die von $P_1^{(\mu)}$ aus, als Anfangspunkt, abgetragen werden. Zufolge der Definition von $\mathfrak{c}_\mu''$ und $\mathfrak{d}_\mu''$ liegen die Punkte $P_1^{(\mu)}$ und $P_3^{(\mu)}$ sämtlich auf den oben angebrachten Schnitten, von den Punkten $P_2^{(\mu)}$ und $P_4^{(\mu)}$ $(\mu = 1, \cdots, \varrho)$ hingegen kein einziger.

Führt man die ganze Konstruktion für eine zweite $W$-Ebene aus, legt beide Ebenen in gleichbezeichneten Punkten und Schnitten übereinander und heftet überdies in letzteren die Schnittufer kreuzweise aneinander, so ergibt sich eine geschlossene zweiblätterige Riemannsche Fläche $Q$. Der Strecke $\mathfrak{a}_p$ entsprechen auf $Q$ zwei kongruente „übereinanderliegende" Strecken. Man behält nur diejenige bei, für welche die in $t_1$ liegende Teilstrecke im unteren Blatte verläuft. $Q$ dient als Träger für die 1. den Periodenpaaren $\mathfrak{a}_\mu$, $\mathfrak{b}_\mu$ $(\mu = 1, 2, \cdots, \varrho)$, 2. dem Paare $\mathfrak{a}_p$, $\mathfrak{b}_p$ entsprechenden parallelogrammatischen Rahmen, die jetzt fixiert werden sollen.

1. Man beginne mit $\nu = 1$ und verbinde die im oberen Blatt gelegenen Punkte $P_3^{(1)}$ und $P_4^{(1)}$ durch ein, von den Endpunkten $P_3^{(1)}$ und $P_4^{(1)}$ abgesehen, ganz im oberen Blatt und innerhalb $t_2$ verlaufendes Streckenpaar, das überdies keinen Punkt mit $\mathfrak{a}_p$ gemeinsam hat. Als positiver Richtungssinn des Streckenzuges gilt die Fortschreitungsrichtung von $P_3^{(1)}$ nach $P_4^{(1)}$ zu. Kongruent mit $\overline{P_3^{(1)} P_4^{(1)}}$ wird im unteren Blatt $\overline{P_2^{(1)} P_1^{(1)}}$ gezeichnet, wobei $P_2^{(1)}$ dem $P_3^{(1)}$, $P_1^{(1)}$ dem $P_4^{(1)}$ entsprechen muß. Des weiteren wird $P_2^{(1)}$ mit $P_3^{(1)}$ durch ein ganz im unteren Blatt und ganz in $t_1$ verlaufendes Streckenpaar verbunden, das überdies mit $\mathfrak{a}_p$ keinen Punkt gemein hat. Entsprechend sind $P_1^{(1)}$ und $P_4^{(1)}$ zu verbinden. Der positive Richtungssinn des entstandenen parallelogrammatischen Rahmens $P_1^{(1)} P_2^{(1)} P_3^{(1)} P_4^{(1)}$ ist durch den positiven Richtungssinn von $\overrightarrow{P_3^{(1)} P_4^{(1)}}$ festgelegt.

Die gleiche Konstruktion wird für alle den ungeraden Zahlen $\mu$ in der Reihe $\mu = 1, \cdots, \varrho$ entsprechenden Punktquadrupel $P_j^{(\mu)}$ $(j = 1, \cdots, 4)$ ausgeführt. Die Konstruktionsvorschrift für die geraden $\mu$ unterscheidet sich von der angegebenen nur dadurch, daß in ihr durchgängig die Worte

„oberes“ und „unteres“ Blatt vertauscht erscheinen. Keiner der Streckenzüge $P_1^{(\mu)} P_2^{(\mu)} P_3^{(\mu)} P_4^{(\mu)}$, $(\mu = 1, \cdots, \varrho)$ hat mit $\mathfrak{a}_p$ einen Punkt gemein.

2. Die Strecke $\mathfrak{a}_p$ mache man zur einen Seite des zum Periodenpaar $\mathfrak{a}_p$, $\mathfrak{b}_p$ gehörigen orientierten Rahmens $\mathfrak{P}_p$; die Seite $\mathfrak{b}_p = \beta_p' + i(\beta_p'' + 2\pi n_p)$ wird, durch passende Verfügung über $n_p$ in Rücksicht auf die ihr bereits auferlegten Einschränkungen, so angenommen: $\mathfrak{P}_p$, ins obere Blatt projiziert, schneidet, von der zuerst fixierten Seite $\mathfrak{a}_p$ abgesehen, keinen der Streckenzüge $P_1^{(\mu)} P_2^{(\mu)} P_3^{(\mu)} P_4^{(\mu)}$ $(\mu = 1, \cdots, \varrho)$, letztere ebenfalls ins obere Blatt projiziert gedacht. Das ist immer möglich.

Die so entstandenen $(\varrho + 1)$ parallelogrammatischen Rahmen begrenzen ein Gebiet $Q_1$ von folgender Eigenschaft: Das Innere von $Q_1$ liegt zur Linken der positiv durchlaufenen Begrenzungskurven und enthält keinen unendlich fernen Punkt von $Q$. $Q_1$ besitzt im Innern und auf der Begrenzung insgesamt $2\varrho$ einfache Verzweigungspunkte und ist $(\varrho + 1)$-fach zusammenhängend. Die letzte Tatsache ergibt sich daraus, daß das Gebiet entsteht durch sukzessives Aneinanderheften einfach zusammenhängender Gebiete; und zwar erfolgt das Aneinanderheften jeweils längs zweier vollständig getrennter Begrenzungsstücke zugleich.

3. Die noch übrigen Periodenpaare $\mathfrak{a}_{\varrho+1}$, $\mathfrak{b}_{\varrho+1}$; $\cdots$, $\mathfrak{a}_{p-1}$, $\mathfrak{b}_{p-1}$ führen infolge der getroffenen Wahl der $m_{\varrho+1}$, $n_{\varrho+1}$; $\cdots$ zu schlichten orientierten Parallelogrammen $\mathfrak{P}_{\varrho+1}$, $\cdots$ von positivem Flächeninhalt. Man versieht $\mathfrak{P}_{\varrho+1}$ und $Q_1$ je mit einem geradlinigen Schnitt, die beide weder mit einer Begrenzungskurve noch mit einem Verzweigungsschnitte von $\mathfrak{P}_{\varrho+1}$ und $Q_1$ einen Punkt gemein haben und von gleicher Länge sind. Kreuzweises Verschmelzen dieser Ufer liefert das $(\varrho + 2)$-fach zusammenhängende Gebiet $Q_2$. Durch entsprechende sukzessive Verwendung von $\mathfrak{P}_{\varrho+2}$, $\cdots$ entsteht das $p$fach zusammenhängende Gebiet $S$ mit $2p - 2$, einfachen Verzweigungspunkten. $S$ ist Überlagerungsfläche eines ganz im Endlichen gelegenen Gebietes der $W$-Ebene und definiert durch seine jeweiligen Ortsuniformisierenden und seine Begrenzung eine Riemannsche Fläche $S$ (im weiteren Sinne).

Mit Hilfe des Dirichletschen Prinzips konstruiert man auf dieser Fläche eine Funktion $Z$ der komplexen Veränderlichen $W$ von folgender Eigenschaft*):

1. $Z$ ist, von einer endlichen Anzahl von Polen abgesehen, innerhalb $S$ und auf dessen Begrenzung regulär analytisch;
2. $Z$ besitzt innerhalb $S$ mindestens einen Pol;
3. je zwei Funktionselemente $Z(W)$, die zu entsprechenden Punkten paralleler Begrenzungslinien gehören, stimmen überein.

*) Wegen der Einzelheiten des Existenzbeweises siehe § 7 a).

In bekannter Weise zeigt man: Die Anzahl der Stellen auf $S$, in denen $Z$ irgendeinen festen Wert annimmt, ist stets dieselbe. $\frac{dW}{dZ}$ ist, als Funktion von $Z$ betrachtet, eine algebraische Funktion vom Geschlecht $p$ und definiert demgemäß eine geschlossene Riemannsche Fläche vom Geschlecht $p$; auf $T$ ist $W(Z)$ ein Abelsches Integral erster Gattung der gewünschten Beschaffenheit. Auf $T$ existiert demgemäß eine allenthalben endliche multiplikative Funktion $W_0$, die zur vorgegebenen Nicht-Prymschen Charakteristik gehört.

Das Riemannsche Gebiet $S$ definiert bekanntlich*) durch seine Verzweigungsart (genauer: durch die Lage von $2p-3$ seiner Verzweigungspunkte) und durch die Werte von $p$ der Periodizitätsmoduln $\mathfrak{a}_\nu$, $\mathfrak{b}_\nu$ eine Klasse algebraischer Funktionen vom Geschlechte $p$; und auf *jeder* Riemannschen Fläche der Klasse existiert (bei geeigneter Zerschneidung) zur gegebenen Nicht-Prymschen Charakteristik eine multiplikative Funktion.

Man gelangt zu anderen Klassen algebraischer Funktionen bzw. Riemannscher Flächen, sobald man etwa, unter Festhaltung der $2p-2$ Verzweigungspunkte von $S$ und der übrigen Periodizitätsmoduln $\mathfrak{a}_\nu$, $\mathfrak{b}_\nu$, nur $\mathfrak{b}_p$ andere Werte erteilt; dies hat so zu geschehen, daß wiederum Gebiete $S$ entstehen. Beträgt die Änderung ein Vielfaches von $2\pi i$ — und solche Änderungen sind in beliebiger Anzahl möglich —, so gehört auch auf jeder Fläche $T$ der neuen Klasse zur fraglichen Nicht-Prymschen Charakteristik eine multiplikative Funktion.

Umgekehrt gibt es (unendlich viele) Klassen, in denen eine Nicht-Prymsche Charakteristik sicher keine allenthalben endlichen, multiplikativen Funktionen besitzt. Tatsächlich bilden ja alle überhaupt möglichen zur Charakteristik gehörigen Gebiete $S$ nur eine $(2p-3)$-parametrige Teilschar der $(3p-3)$-parametrigen Mannigfaltigkeit von allgemeinen Gebieten $S$ bzw. von Klassen algebraischer Funktionen.

Damit ist die behauptete Umkehrung des Eindeutigkeitssatzes in ihrem ganzen Umfange bewiesen.

## § 2.

## Ein weiteres Charakteristikum für die Prymschen Funktionen 1. Ordnung.

Neben dem Eindeutigkeitssatz bedienen sich die Herren Prym und Rost eines zweiten, für die Theorie fundamentalen Theorems**), das sich so formulieren läßt:

*) Riemann, l. c., S. 121.

**) Prym-Rost, l. c., I. Teil, S. 170—178.

*Sind bei gegebener Prymscher oder ausgezeichneter Charakteristik die additiven Perioden $\mathfrak{C}_\nu$ an den Schnitten $c_\nu$ und die zu uneigentlichen Faktorenpaaren gehörigen Perioden $\mathfrak{A}_\nu$ sämtlich Null, so wird für jede beliebige Riemannsche Fläche $T$ durch eine willkürliche Konstante $C$ die allgemeinste zur Charakteristik gehörige, auf der ganzen Fläche $T$ regulär-analytische Funktion repräsentiert.* Die Richtigkeit ergibt sich ebenfalls an der Hand der Formel (I) in § 1.*)

Das Theorem ist in gewissem Sinne eine Verallgemeinerung des Eindeutigkeitssatzes des § 1. Letzterer reicht weiter, insofern seine Gültigkeit nicht auf analytische Funktionen beschränkt ist, sondern sich auf Potentialfunktionen erstreckt.**) Demgegenüber gilt der erstere Satz für allgemeinere Randbedingungen. Beiden gemeinsam ist, völlig unabhängig von dem speziellen Charakter der jeweils vorliegenden Riemannschen Fläche zu gelten. Es liegt daher nahe zu untersuchen, ob die Prymsche Modulbedingung für die Gültigkeit auch des obigen Theorems nicht nur hinreichend, sondern notwendig ist. In der Tat gilt folgende, den in § 1 gewonnenen Satz als speziellen Fall enthaltende,

Umkehrung: *Sind bei gegebener Nicht-Prymscher Charakteristik die additiven Perioden $\mathfrak{C}_\nu$ und die zu uneigentlichen Faktorenpaaren gehörigen Größen $\mathfrak{A}_\nu$ sämtlich gleich Null angenommen, so existiert mindestens auf einer Riemannschen Fläche $T$ vom Geschlecht $p$ eine zu den so definierten Randbedingungen gehörige, auf ganz $T$ regulär-analytische Funktion $W$, die keine Konstante ist.*

Den Beweis führt man wieder durch Konstruktion eines (den gegebenen Randbedingungen entsprechenden) Fundamentalbereiches.

Eine Funktion $W$ der in Rede stehenden Art bildet die Fläche $\overline{T}$ (vgl. § 1) umkehrbar-eindeutig und konform ab auf ein $p$fach zusammenhängendes, von $p$ in sich geschlossenen *parallelogrammatischen Rahmen* begrenztes, ganz im Endlichen gelegenes Gebiet. Die Bezeichnung „*parallelogrammatisch*" ist dabei in weiterem Sinne als früher gebraucht; in der Tat sind jetzt zwei „*gegenüberliegende*" oder „*entsprechende*" Seiten (bzw. Punkte) eines solchen Rahmens im allgemeinen nicht mehr vermöge einer Translation, sondern vermöge linearer Transformationen der Form

$$W^+ = A W^- + \mathfrak{A} \qquad (A \neq 1)$$

einander zugeordnet.

Jedes Bedingungenpaar, welches einen in sich geschlossenen Rahmen liefert und *dessen Faktoren zunächst beide eigentlich* sein sollen, ist definiert durch die Beziehungen

*) Prym-Rost, l. c., I. Teil, S. 170—173.

**) Vgl. S. 27, Fußnote **).

$$W^+ = AW^- + \mathfrak{A}, \quad W^+ = BW^- + \mathfrak{B}, \quad (1-A)\mathfrak{B} - (1-B)\mathfrak{A} = 0,$$
$$A = e^{\alpha' + i\alpha''}, \quad B = e^{\beta' + i\beta''};$$

über $\alpha''$, $\beta''$, die nur bis auf Vielfache von $2\pi$ bestimmt sind, behält man sich weitere Verfügung bez. dieser Vielfachen vor. Setzt man demgemäß

$$\widetilde{W} = W - W_0, \quad W_0 = \frac{\mathfrak{A}}{1-A} = \frac{\mathfrak{B}}{1-B},$$

so schreiben sich die Substitutionen in der Gestalt

$$\widetilde{W}^+ = A\widetilde{W}^-, \quad \widetilde{W}^+ = B\widetilde{W}^-.$$

Bildet man die $\widetilde{W}$-Ebene vermöge

$$U = \log \widetilde{W}$$

konform auf eine $U$-Ebene ab, so erhält man entsprechend das Substitutionenpaar

$$U^+ = U^- + \alpha' + i\alpha'', \quad U^+ = U^- + \beta' + i\beta''.$$

Die Prymschen Faktorenpaare spielen demnach im vorliegenden Falle die nämliche Rolle wie in § 1 die Paare rein imaginärer Perioden des Abelschen Integrals. Man wird deshalb auch hier versuchen, mit den von Nicht-Prymschen Faktorenpaaren gelieferten parallelogrammatischen Rahmen positiven Flächeninhalts gewisse, Prymschen Faktorenpaaren entsprechende, Rahmen nach der Methode des § 1 zu verschmelzen.

*Es gibt*, wie die logarithmische Abbildung lehrt, *in der W-Ebene zu einem gegebenen Nicht-Prymschen Faktorenpaare stets parallelogrammatische Rahmen, die Flächenstücke positiven Inhalts umspannen.* Um dies zu präzisieren, muß man jeden Rahmen *orientieren*, d. h. ihm einen bestimmten Umlaufsinn beilegen. Den über den positiven Umlaufsinn des Schnittpaares $a, b$ auf $\overline{T}$ getroffenen Festsetzungen*) entspricht der folgende (positive) Umlaufsinn eines Rahmens der $W$- bzw. $U$-Ebene: Man geht von einem Punkte $W_1$ aus längs eines Weges zunächst nach $W_a = \frac{W_1 - W_0}{A}$, von $W_a$ nach $W_{ab} = \frac{W_1 - W_0}{AB}$, von da nach $W_b = \frac{W_1 - W_0}{B}$, schließlich nach $W_1$ zurück. Das Innere des durch den Rahmen bestimmten Gebietes liegt bei Durchlaufung im positiven Sinn zur linken Hand. Der zugehörige Flächeninhalt ist positiv, wenn das Innere den Punkt $W_0$ und den unendlich fernen Punkt der $W$-Ebene nicht enthält.

Die Überlegungen gelten unverändert für den Fall, daß einer der Faktoren $A$, $B$ den Wert 1 hat; es ist dann eben $\mathfrak{A} = 0$ bzw. $\mathfrak{B} = 0$.

Nach diesen Vorbemerkungen teile man die $p$ Substitutionenpaare, aus denen die vorgelegte Charakteristik sich zusammensetzt, in drei Klassen:

*) Prym-Rost. l. c., I. Teil, S. 93.

1. *Prymsche Substitutionenpaare*

$$W^+ = A_\lambda W^- + \mathfrak{A}_\lambda, \quad W^+ = B_\lambda W^- + \mathfrak{B}_\lambda,$$

$$\lambda = 1, 2, \cdots, l \ (0 \leqq l \leqq p-1) \left[W_0^{(\lambda)} = \frac{\mathfrak{A}_\lambda}{1-A_\lambda} = \frac{\mathfrak{B}_\lambda}{1-B_\lambda}\right].$$

2. *Uneigentliche Substitutionenpaare*

$$W^+ = W^- + \mathfrak{A}_\mu, \quad W^+ = W^- + \mathfrak{B}_\mu,$$

$$\mu = l+1, \cdots, l+m \ (0 \leqq m \leqq p-1-l).$$

3. *Nicht-Prymsche Substitutionenpaare*

$$W^+ = A_\nu W^- + \mathfrak{A}_\nu, \quad W^+ = B_\nu W^- + \mathfrak{B}_\nu,$$

$$\nu = l+m+1, \cdots, p \left[W_0^{(\nu)} = \frac{\mathfrak{A}_\nu}{1-A_\nu} = \frac{\mathfrak{B}_\nu}{1-B_\nu}\right].$$

Um den gesuchten Fundamentalbereich zu bilden, greife man zunächst das $p$. Paar von Substitutionen heraus, das der Voraussetzung zufolge sicher ein Nicht-Prymsches ist. In der Bildebene $U = \log(W - W_0^{(p)})$ bestimme man einen parallelogrammatischen Rahmen $\mathfrak{R}_p$, dessen Seiten Strecken von gleicher Länge und Richtung wie $\alpha_p' + i\alpha_p''$, $\beta_p' + i\beta_p''$ sind. Hierbei sei etwa $\alpha_p' \neq 0$. Über die noch arbiträren Vielfachen von $2\pi$ in $\alpha_p''$, $\beta_p''$ sei so verfügt, daß $0 \leqq \alpha_p'' < 2\pi$ und daß der im oben festgelegten Sinn orientierte Rahmen (in der $U$- oder in der $W$-Ebene) positiven Flächeninhalt besitzt.

Sodann teile man $\mathfrak{R}_p$ in $l+m+2$ Teile und zwar durch $l+m+1$ Parallelen zur imaginären Achse der $U$-Ebene, die weder durch einen Eckpunkt des Parallelogramms gehen, noch eine der Seiten $\beta_p' + i\beta_p''$ treffen; $\beta_p''$ kann, unter Berücksichtigung der bereits gemachten Festsetzungen, so gewählt werden, daß die durch $\mathfrak{R}_p$ auf den eben gezogenen Parallelen begrenzten Strecken größere Länge als $5\pi$ besitzen. Die so entstandenen $l+m$ Teile, welche nicht durch eine der Seiten $\beta_p' + i\beta_p''$ begrenzt werden, seien $t_j$ $(j = 1, \cdots, l+m)$.

Jedem der $t_j$ entspricht in der $W$-Ebene ein durch zwei konzentrische Kreisbogen (mit $W_0^{(p)}$ als Zentrum) und zwei andere, einander entsprechende Kurvenbogen (ev. auch Strecken) gebildeter Rahmen. Das Bild des ganzen Parallelogramms der $U$-Ebene ist schlicht, einfach zusammenhängend, aber mehrblätterig über der $W$-Ebene ausgebreitet.

1. *Je einer der Teile $t_\lambda$ $(\lambda = 1, \cdots, l)$ läßt sich mit je einem durch ein Prymsches Substitutionenpaar gelieferten Rahmen im wesentlichen nach der gleichen Methode wie in* § 1 *verschmelzen.*

Am einfachsten sieht man dies so ein: Es ergeben sich aus

$$W^+ = A_p W^- + \mathfrak{A}_p, \quad W^+ = B_p W^- + \mathfrak{B}_p \text{ und } U_p = \log(W - W_0^{(p)});$$

vermöge der Abbildung $U_\lambda = \log(W - W_0^{(\lambda)})$, die neuen Beziehungen

$$U_\lambda^+ = U_\lambda^- + \alpha_p' + i\alpha_p'' + \log\left(1 + \frac{(A_p - 1)\,W_0^{(\lambda)} + \mathfrak{A}_p}{A_p(W^- - W_0^{(\lambda)})}\right), \text{ usw.},$$

und

$$U_\lambda = U_p + \log\left(1 + \frac{W_0^{(p)} - W_0^{(\lambda)}}{W - W_0^{(p)}}\right).$$

Dabei ist

$$U_\lambda^+ = \log(W^+ - W_0^{(\lambda)}), \quad U_\lambda^- = \log(W^- - W_0^{(\lambda)}), \quad \alpha_p' \neq 0.$$

Zu jeder (beliebig kleinen) positiven Größe $\delta$ existiert demnach eine positive Größe $R_\lambda(\delta)$, so beschaffen, daß an Stelle der Transformationen der $W$-Ebene

$$W^+ = A_p W^- + \mathfrak{A}_p, \text{ usw.}$$

die Transformationen der $U_\lambda$-Ebene

$$U_\lambda^+ = U_\lambda^- + \alpha_p' + i\alpha_p'' + \eta, \quad U_\lambda^+ = U_\lambda^- + \beta_p' + i\beta_p'' + \vartheta$$

treten, wobei $|\eta| < \delta$, $|\vartheta| < \delta$ und überdies in $U_\lambda = U_p + \zeta$ auch $|\zeta| < \delta$ ist, sobald $|W^-| > R_\lambda(\delta)$ (der Arcus von $\eta$, $\vartheta$ und $\zeta$ kann ja, für hinreichend große $|W^-|$, stets beliebig klein gewählt werden). Durch geeignete Parallelverschiebung des oben gewonnenen Rahmens $\mathfrak{R}_p$ in der $U_p$-Ebene läßt sich stets erreichen, daß für alle Punkte im Innern und auf der Begrenzung des entsprechenden Rahmens der $W$-Ebene $|W| > R_\lambda(\delta)$ ist.

Mit $R(\delta)$ bezeichne man das Maximum der Zahlen $R_\lambda(\delta)$ $(\lambda = 1, \cdots, l)$. Man nehme $\delta$ so klein, daß auch die Bilder der $t_\lambda$ in den $U_\lambda$-Ebenen die oben durch passende Wahl von $\beta_p''$ garantierten Eigenschaften der $t_\lambda$ aufweisen, sobald $|W^-| > R(\delta)$; insbesondere sollen die Bilder der $t_\lambda$ in ihrem Innern zur imaginären Achse der $U_\lambda$-Ebene parallele Strecken von größerer Länge als $5\pi$ aufnehmen können. Dies vorausgesetzt, läßt sich, unter Zuhilfenahme der Abbildung $U_1 = \log(W - W_0^{(1)})$, auf $t_1$ und das Substitutionenpaar $W^+ = A_1 W^- + \mathfrak{A}_1$ usw. die (S. 30, Ziff. 1) gegebene Konstruktion anwenden. Ebenso verfährt man sukzessive für $\lambda = 2, 3, \cdots, l$ und erhält schließlich ein $(l+1)$-fach zusammenhängendes, der $W$-Ebene überlagertes Gebiet $Q_1$, welches zur Linken der verwendeten orientierten Rahmen, und zwar ganz im Endlichen, gelegen ist und von ihnen vollständig begrenzt wird.

2. Die *uneigentlichen Substitutionenpaare* erfordern gesonderte Betrachtung nur, soweit sie zu orientierten Parallelogrammen: a) *verschwindenden*, b) *negativen Flächeninhalts* Anlaß geben.

a) Der *Flächeninhalt* ist dann und nur dann *Null*, wenn *entweder* die Perioden $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ beide den gleichen Arcus $(0 \leq \operatorname{arc}\mathfrak{A} < 2\pi,\ 0 \leq \operatorname{arc}\mathfrak{B} < 2\pi)$ besitzen, *oder* wenigstens eine von beiden, etwa $\mathfrak{A}$, Null ist. Um hier die Konstruktion zu ermöglichen, ersetze man in der $W$-Ebene einen der beiden

Kurvenbogen, welcher zur Begrenzung eines der $t_\mu$ ($\mu = l+1, \cdots, l+m$) und gleichzeitig zur Begrenzung von $\mathfrak{R}_p$ gehört, durch einen Linienzug, gebildet aus Kreisbogen (mit $W_0^{(p)}$ als Zentrum) und Strecken; letztere sollen, genügend verlängert, durch $W_0^{(p)}$ gehen und mindestens eine, $s_\mu$, soll nicht den gleichen Arcus wie $\mathfrak{B}_\mu$ besitzen. Bei Durchlaufung des Linienzuges sollen $|W - W_0^{(p)}|$ und arc $(W - W_0^{(p)})$ sich monoton ändern. Zugleich läßt sich $\mathfrak{R}_p$, unter Berücksichtigung der bereits getroffenen Festsetzungen, so wählen, daß der absolute Betrag der Strecke $s_\mu$ größer als $2(|\mathfrak{A}_\mu| + |\mathfrak{B}_\mu|)$ gemacht werden kann, während ein über $s_\mu$ errichteter Halbkreis ganz dem Innern von $t_\mu$ angehört.

Nunmehr ist die Methode des § 1 (Ziff. 1), unwesentlich modifiziert, wiederum anwendbar, sobald der erstere Fall vorliegt, d. h. $\mathfrak{A}_\mu$, $\mathfrak{B}_\mu$ beide von Null verschieden sind.

Liegt hingegen der zweite Fall vor, ist also für einen Wert von $\mu$ eine der Perioden, etwa $\mathfrak{A}_\mu$, Null, so legt man den einen Endpunkt der nach Größe und Richtung gegebenen Strecke $\mathfrak{B}_\mu$ in den Mittelpunkt von $s_\mu$; zugleich richtet man es ein, daß alle übrigen Punkte von $\mathfrak{B}_\mu$ innere Punkte von $t_\mu$ sind. Um den zweiten Endpunkt von $\mathfrak{B}_\mu$ wird sodann ein Kreis $K_1^{(\mu)}$ vom Radius $r_\mu < \frac{1}{2} |\mathfrak{B}_\mu|$ geschlagen, dessen Peripherie ebenfalls nur aus inneren Punkten von $t_\mu$ besteht. Mit $r_\mu$ wird außerdem ein Kreis $K_2^{(\mu)}$ um den ersten Endpunkt von $\mathfrak{B}_\mu$ geschlagen. Man versieht die $W$- Ebene mit zwei völlig getrennt verlaufenden Schnitten, deren jeder

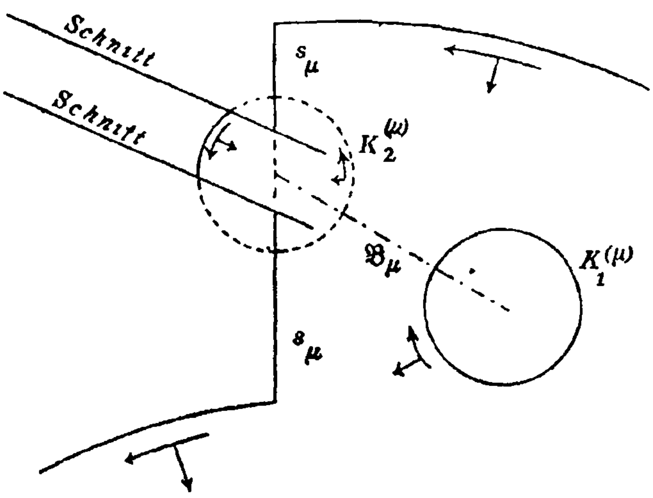


Fig. 2.

$s_\mu$ sowohl als $K_2^{(\mu)}$ je nur in einem einzigen Punkt schneidet (— diese Schnittpunkte sollen sämtlich voneinander verschieden sein —), im übrigen mit $\mathfrak{R}_p$ nur innere Punkte von $K_2^{(\mu)}$ gemein hat. Die nämliche Konstruktion wird für eine zweite $W$-Ebene durchgeführt; beide Blätter werden (ähnlich wie in § 1) miteinander verschmolzen (vgl. Fig. 2). Derjenige Teil der

Begrenzung, welcher dem betrachteten, uneigentlichen Substitutionenpaare entspricht, besteht dann aus den beiden Kreisen $K_1^{(\mu)}$ und $K_2^{(\mu)}$.

b) Ist für einen Wert von $\mu$ der *Inhalt des* durch $\mathfrak{A}_\mu$, $\mathfrak{B}_\mu$ gelieferten, orientierten *Rahmens* $\mathfrak{P}_\mu$ *negativ*, so konstruiere man diesen zunächst. Sodann denke man sich $\mathfrak{R}_p$ so angenommen, daß $t_\mu$ einen Kreis vom Radius $|\mathfrak{A}_\mu| + |\mathfrak{B}_\mu|$ ganz im Innern enthält. Dies ist unter Berücksichtigung der bereits gemachten Annahmen stets möglich. Das obige Parallelogramm $\mathfrak{P}_\mu$ findet im Innern dieses Kreises völlig Platz, womit die Konstruktion gegeben ist.

3. Die Hinzunahme der übrigen etwa vorhandenen *uneigentlichen Substitutionenpaare*, deren zugehörige orientierten Parallelogramme *positiven Flächeninhalt* haben, *sowie* der *weiteren Nicht-Prymschen Faktorenpaare* erfolgt nach der Methode des § 1, (S. 31, Ziff. 3).

Für das so gewonnene, der $W$-Ebene überlagerte, ganz im Endlichen gelegene Gebiet $Q$ konstruiert man mit Hilfe des Dirichletschen Prinzips*) eine Funktion $Z(W)$, welche sämtliche in § 1, S. 31 geforderten Eigenschaften 1., 2., 3. besitzt. Aus der Existenz dieser Funktion folgt die Behauptung. Die weiteren, hier anschließenden, Fragen (vgl. § 1 Schluß) bleiben an dieser Stelle unerörtert.

## § 3.

## Der Hurwitzsche Eindeutigkeitssatz und seine Umkehrung.

Die Prymschen Probleme sind als spezielle Fälle des sogenannten Riemannschen Problems anzusehen, insoferne nämlich alle in Betracht kommenden Funktionen zur gegebenen Riemannschen Fläche relativ unverzweigt sein sollten. Die Prymschen Probleme haben nur für $p \geqq 1$ einen Sinn. Geht man auf die allgemeine Riemannsche Fragestellung zurück und beschränkt die Betrachtung von vorneherein auf Probleme 1. Ordnung und auf analytische Funktionen, so ergibt sich nachstehende, von Hurwitz**) eingehend behandelte Aufgabe: *Gegeben sei die Riemannsche Fläche $T$ vom Geschlecht $p$ und auf ihr eine endliche Anzahl $n$ von Punkten $\Sigma_1, \cdots, \Sigma_n$* (die sogenannten *Stigmata*). *Des weiteren sei $T$ durch die $3p+n$ Schnitte $a_\nu, b_\nu, c_\nu$, $(\nu=1,\cdots,p)$ und $l_\sigma$ $(\sigma=1,\cdots,n)$ in die einfach zusammenhängende Fläche $T''$ verwandelt.* Dabei sind die $a_\nu, b_\nu, c_\nu$ die in § 1 eingeführten Schnitte, $l_\sigma$ $(\sigma=1,\cdots,n)$ von $P_0$ ausgehende nach $\Sigma_\sigma$ gezogene Schnitte, die — außer $P_0$ — weder mit den $a_\nu, b_\nu, c_\nu$ noch untereinander Punkte gemeinsam haben. *Gesucht werden Funktionen $F(z)$ der komplexen Veränderlichen $z$, die*

*) Vgl. wegen der Einzelheiten § 7 a).

**) Hurwitz, A., Algebraische Gebilde mit eindeutigen Transformationen in sich (Math. Ann. 41 (1893)), insbes. S. 431.

1) *von Polunstetigkeiten und von den Stellen $\Sigma_\sigma$ $(\sigma = 1, \cdots, n)$ abgesehen, auf $T$ regulär analytisch, auf $T''$ überdies eindeutig sind.*

2) *bei analytischer Fortsetzung über einen der Schnitte $a_\nu$, $b_\nu$, $c_\nu$, $l_\sigma$ $(\nu = 1, \cdots, p;\ \sigma = 1, \cdots, n)$ hinüber bzw. die Substitutionen erleiden*

$$\left.\begin{array}{lll} F^+ = A_\nu F^- + \mathfrak{A}_\nu & \text{an } a_\nu \\ F^+ = B_\nu F^- + \mathfrak{B}_\nu & \text{an } b_\nu \\ F^+ = \phantom{A_\nu} F^- + \mathfrak{C}_\nu & \text{an } c_\nu \\ F^+ = L_\sigma F^- + \mathfrak{L}_\sigma & \text{an } l_\sigma \end{array}\right\} \quad \nu = 1, \cdots, p;\ \sigma = 1, \cdots, n.$$

3) *folgende Eigenschaft besitzen: In der Umgebung von $\Sigma_\sigma$ bleibt $t_\sigma^{-\delta_\sigma}\left(F - \frac{\mathfrak{L}_\sigma}{1 - L_\sigma}\right)$ endlich, eindeutig und von Null verschieden, wenn $\delta_\sigma$ eine passend gewählte Konstante bedeutet und $t_\sigma$ eine zu $\Sigma_\sigma$ gehörige Ortsuniformisierende*) ist.*

Ebenso wie in § 1 ist an den Schnitten $c_\nu$ der Faktor $C_\nu = 1$ zu setzen. Da nämlich $F$ für jedes $\nu = 1, \cdots, p$ im gemeinsamen Punkt $P_\nu$ von $a_\nu$, $b_\nu$, $c_\nu$ relativ zur Fläche $T$ unverzweigt und endlich sein soll und da keiner der Schnitte einen Verzweigungspunkt enthält, so ist in $P_\nu$ auch $\frac{dF}{dz}$ regulär. Daraus folgt aber $A_\nu B_\nu C_\nu A_\nu^{-1} B_\nu^{-1} = 1$ d. h. $C_\nu = 1$. Ebenso ergibt sich

$$L_1 L_2 \cdots L_n = 1,$$

ferner

$$\mathfrak{A}_\nu(1 - B_\nu) - \mathfrak{B}_\nu(1 - A_\nu) = \mathfrak{C}_\nu, \qquad \nu = 1, \cdots, p,$$

$$\sum_{\nu=1}^{p} \mathfrak{C}_\nu + \sum_{\varrho=1}^{n-1} \mathfrak{L}_\varrho \left(\prod_{\mu=\varrho+1}^{n} L_\mu\right) + \mathfrak{L}_n = 0.$$

Für $L_\sigma = 1$ $(\sigma = 1, \cdots, p)$ hat man in den $\Sigma_\sigma$ höchstens logarithmische Unstetigkeiten, ein Fall, der im folgenden außer Betracht bleibt. Die Gesamtheit der $A_\nu$, $B_\nu$, $L_\sigma$ heiße wieder die *Charakteristik des Problems.* Entsprechend wird eine Funktion, die den *homogenen* Randbedingungen 2) genügt und die Bedingungen 1) und 3) erfüllt, *multiplikativ* genannt.

An Stelle des Prymschen Eindeutigkeitssatzes tritt im vorliegenden Fall, *wenigstens soweit es sich um analytische Funktionen handelt,* der Eindeutigkeitssatz von Hurwitz. Dieser gibt die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, daß zur Charakteristik eine allenthalben endliche, analytische, *multiplikative* Funktion auf vorgegebener Fläche $T$ existiert. Unter einer *allenthalben endlichen Funktion* versteht man nach Hurwitz eine solche, die *innerhalb von $T''$ und auf dessen Begrenzung keine Pole besitzt, insbesondere also in jedem der Punkte $\Sigma_\sigma$ $(\sigma = 1, \cdots, n)$ von endlicher, nicht negativer Ordnung* verschwindet. *Die Ordnung des Verschwindens* ist

*) Weyl, l. c., S. 34.

*für die Stigmata folgendermaßen definiert:* Setzt man $L_\sigma = e^{-2\pi i \varkappa_\sigma}$ $(\sigma = 1, \cdots, n)$, wobei $0 \leqq \Re(\varkappa_\sigma) < 1$ [$\Re(\varkappa_\sigma)$ bedeutet den reellen Teil von $\varkappa_\sigma$], so wird der Eigenschaft 3) zufolge $d_\sigma = \delta_\sigma + \varkappa_\sigma$ für eine multiplikative zur Charakteristik gehörige Funktion eine reelle ganze Zahl sein. $d_\sigma$ ist die Ordnungszahl des Verschwindens im Punkt $\Sigma_\sigma$.

Der *Hurwitzsche Eindeutigkeitssatz* läßt sich nun*) so aussprechen: *Damit auf einer Riemannschen Fläche $T$ eine allenthalben endliche multiplikative Funktion $F$ zu einer gegebenen Charakteristik existiert, ist $\alpha$) notwendig, daß alle Faktoren $L_\sigma$ $(\sigma = 1, \cdots, n)$ reell sind, $\beta$) hinreichend, daß $\alpha$) erfüllt ist und die gegebene Charakteristik übereinstimmt mit dem System der Faktoren einer Funktion $e^W$, wo $W$ ein Integral dritter Gattung der Fläche $T$ bedeutet, dessen Perioden an den Schnitten $l_\sigma$ sämtlich reell sind.*

Die Bedingung $\alpha$) ist invariant gegenüber der Gruppe der Analysis situs; mit andern Worten: *zu einer Charakteristik, deren Faktoren $L_\sigma$ nicht sämtlich reell sind, gibt es keine einzige Fläche $T$, auf welcher eine allenthalben endliche Funktion $F$ existiert, wie im übrigen auch die Querschnitte und Stigmata gewählt sind.***)

*Folgende Umkehrung ist richtig:* sieht man von dem (in § 1 erledigten) Fall $L_\sigma = 1$ $(\sigma = 1, \cdots, n)$ ab, so *gibt es zu jeder Charakteristik mit durchweg reellen Faktoren $L_\sigma$ immer Flächen $T$, auf denen, bei passender Wahl der Stigmata, allenthalben endliche, multiplikative Funktionen existieren.*

Der Beweis wird — analog wie in §§ 1, 2 — geführt durch Konstruktion eines Abelschen Integrals 3. Gattung vom Geschlecht $p$ mit, bis auf ganze Vielfache von $2\pi i$ festgelegten Perioden $\mathfrak{A}_\nu$, $\mathfrak{B}_\nu$ $(\nu = 1, \cdots, p)$ und mit gegebenen Perioden $\mathfrak{L}_\sigma$ $(\sigma = 1, \cdots, n)$ welch letztere sämtlich rein imaginär, von Null verschieden und durch die Bedingung $\sum_{\sigma=1}^{\sigma=n} \mathfrak{L}_\sigma = 0$ verknüpft sind.***)

Zuerst verschafft man sich ein der $W$-Ebene überlagertes Gebiet, welches die charakteristischen Eigenschaften des Bildes $S$ einer Riemannschen Fläche $T$ bzw. der zerschnittenen Fläche $T''$ aufweist und zwar des

---

*) Wobei der triviale Fall $p = 0$ unberücksichtigt bleiben mag. Vgl. indessen Hurwitz, l. c., S. 433, Fußnote.

**) Im Falle $L_\sigma = 1$ $(\sigma = 1, \cdots, n)$ tritt an Stelle von $\alpha$) die Prymsche Modulbedingung. Bezeichnet man auch im Falle $L_\sigma \neq 1$ eine Charakteristik als *Prymsche*, sobald sämtliche Faktoren $A_\nu$, $B_\nu$, $L_\sigma$ vom absoluten Betrag 1 sind, so folgt: Die Prymschen Charakteristiken erfüllen die Bedingung $\alpha$) nicht, erschöpfen aber auch nicht die Gesamtheit der Charakteristiken, für die $\alpha$) nicht befriedigt ist.

***) Statt des Integrals dritter Gattung kann man auch direkt die gesuchte multiplikative allenthalben endliche Funktion $F$ bzw. das durch sie vermittelte Bild von $T''$ betrachten. Der im Text eingeschlagene Weg erscheint etwas einfacher, da hierbei das Auftreten von festen Ecken und Spitzen umgangen wird.

Bildes, vermittelt durch ein Integral 3. Gattung der gewünschten Beschaffenheit.*) *Man kann sich* auch hier *auf Gebiete beschränken, die ganz im Endlichen gelegen sind.* Das gesuchte Integral $W(z)$ gestattet nämlich in der Umgebung eines Stigmas $\Sigma_\sigma$ bzw. $z = z_\sigma$ $(\sigma = 1, \cdots, n)$ der zugehörigen Fläche $T$ die Darstellung

$$W(z) = \mathfrak{L}_\sigma \log (t_\sigma) + \mathfrak{P}(t_\sigma) = \mathfrak{L}_\sigma \log [w_\sigma(t_\sigma)].$$

Dabei ist $t_\sigma$ die zum Stigma $z = z_\sigma$ gehörige Ortsuniformisierende auf $T$, ferner

$$w_\sigma(t_\sigma) = t_\sigma \overline{\mathfrak{P}}(t_\sigma), \text{ wobei } \overline{\mathfrak{P}}(t_\sigma) = e^{\frac{1}{\mathfrak{L}_\sigma}\mathfrak{P}(t_\sigma)},$$

eine in der Umgebung von $z = z_\sigma$ regulär analytische, für $t_\sigma = 0$ von 1. Ordnung verschwindende Funktion in $t_\sigma$; das Verhalten von $W(z)$ in der eben bezeichneten Umgebung von $z_\sigma$ ist durch $w_\sigma(t_\sigma)$ völlig bestimmt. Während nun $W(z)$ die Umgebung von $\Sigma_\sigma$ auf einen, bis zum unendlichen fernen Punkt $W_\infty$ der $W$-Ebene sich erstreckenden *Parallelstreifen* $\mathfrak{p}_\sigma$ ein-eindeutig und konform abbildet**), erscheint die gleiche Umgebung vermöge $w_\sigma = w_\sigma(t_\sigma)$ ein-eindeutig und konform bezogen auf ein ganz im Endlichen gelegenes, den Punkt $w_\sigma = 0$ im Innern enthaltendes, einfach zusammenhängendes, Gebiet $G_\sigma$ der $W_\sigma$-Ebene. Die inverse Funktion $t_\sigma(w_\sigma)$ bzw. $z(w_\sigma)$ ist in $G_\sigma$ regulär analytisch.

Die oben gemachte Bemerkung, daß durch $w_\sigma(t_\sigma)$ auch $W(z)$ in der Umgebung des Punktes $\Sigma_\sigma$ völlig bestimmt ist, besagt also: die Umgebung von $W_\infty$, soweit sie in $\mathfrak{p}_\sigma$ enthalten ist, läßt sich — für die gegenwärtigen Zwecke — ersetzen durch das ganz im Endlichen gelegene Gebiet $G_\sigma$.

Auf Grund dieser Vorbemerkung erhält man

1) *ein Teilgebiet* $S_1$ *des zu konstruierenden Bildbereiches* $S$ folgendermaßen: man markiere in einer $z$-Ebene $n$ im Endlichen gelegene, voneinander verschiedene Punkte $z_\sigma$ $(\sigma = 1, \cdots, n)$ (Stigmata) und bilde mit den gegebenen (rein imaginären) Größen $\mathfrak{L}_\sigma$ $(\sigma = 1, \cdots, n)$ die Funktion

$$W(z) = \log \left[ \prod_{\sigma=1}^{\sigma=n} (z - z_\sigma)^{\mathfrak{L}_\sigma} \right].$$

Wegen $\sum_{\sigma=1}^{n} \mathfrak{L}_\sigma = 0$ gehört der $P_\infty$ der $z$-Ebene nicht zu den Stigmata. Um die Stigmata $z_\sigma$ schlage man Kreise $\mathsf{K}_\sigma$ mit so kleinen Radien $r_\sigma$, daß die $\mathsf{K}_\sigma$ völlig getrennt verlaufen und daß in ihrem Innern, sowie auf ihrer Begrenzung, $\frac{dw_\sigma}{dz} \neq 0$ ist, wenn

*) Vgl. Klein, Vorlesungen über Riemannsche Flächen, I. Teil, S. 85 ff.

**) Klein, l. c.

$$w_\sigma = \prod_{\varrho=1}^{\varrho=n} (z - z_\varrho)^{\frac{\mathfrak{L}_\varrho}{\mathfrak{L}_\sigma}}$$

gesetzt wird.

Von einem ganz außerhalb der $\mathsf{K}_\sigma$ aber im Endlichen gelegenen Punkt $P_0$ der $z$-Ebene wird nach $\mathsf{K}_\sigma$ $(\sigma = 1, \cdots, n)$ der Querschnitt $l_\sigma$ gezogen. $l_\sigma$ hat mit $\mathsf{K}_\sigma$ nur einen Punkt gemein, mit den übrigen Kreisen $\mathsf{K}_\sigma$ keinen einzigen, mit den übrigen Schnitten $l_\varrho$ $(\varrho = 1, \cdots, \sigma - 1, \sigma + 1, \cdots, n)$ nur den Punkt $P_0$. Die $\mathsf{K}_\sigma$ und die $l_\sigma$ bilden die volle Begrenzung eines einfach zusammenhängenden Gebietes der $z$-Ebene. Dessen Bild $\bar{S}_1'$ in der $W$ Ebene, vermittelt durch

$$W = \log \left[ \prod_{\varrho=1}^{\varrho=n} (z - z_\varrho)^{\mathfrak{L}_\varrho} \right],$$

ist wiederum einfach zusammenhängend und Überlagerungsfläche eines ganz im Endlichen gelegenen Teiles der $W$-Ebene. Je kleiner die Radien $r_\sigma$ gewählt sind, um so näher erstreckt sich $\bar{S}_1'$ in der $W$-Ebene an $W_\infty$ heran.

Des näheren „*entsprechen*“ die beiden „*parallelen*“ Bildkurven eines Schnittes $l_\sigma$ einander punktweise in der Art, daß — beide in die $W$-Ebene projiziert gedacht — die eine von ihnen aus der andern durch die (reelle) Parallelverschiebung $2\pi i \mathfrak{L}_\sigma$ hervorgeht. Der *Umlaufsinn der Begrenzung* ist wiederum so gewählt, daß bei positiver Durchlaufung das Gebietsinnere zur Linken liegt.

Um auch für das Innere der Kreise $\mathsf{K}_\sigma$ im Endlichen gelegene Bildbereiche zu erhalten, schlage man um die $\Sigma_\sigma$ $(\sigma = 1, \cdots, n)$ Kreise $\bar{\mathsf{K}}_\sigma$ mit solchen Radien $\bar{r}_\sigma (\bar{r}_\sigma > r_\sigma)$, daß auch die $\bar{r}_\sigma$ die oben von den $r_\sigma$ geforderten Eigenschaften aufweisen und daß $\bar{\mathsf{K}}_\sigma$ den Querschnitt $l_\sigma$ nur in einem einzigen Punkte trifft. Das Innere des Kreises $\bar{\mathsf{K}}_\sigma$ (und damit auch des Kreises $\mathsf{K}_\sigma$) der $z$-Ebene wird dann vermöge

$$w_\sigma = \prod_{\varrho=1}^{\varrho=n} (z - z_\varrho)^{\frac{\mathfrak{L}_\varrho}{\mathfrak{L}_\sigma}}$$

ein-eindeutig und konform abgebildet auf ein ganz im Endlichen gelegenes, einfach zusammenhängendes, den Punkt $w_\sigma = 0$ enthaltendes Gebiet $G_\sigma$ einer $w_\sigma$-Ebene. Dem von $\mathsf{K}_\sigma$ und $\bar{\mathsf{K}}_\sigma$ gebildeten Kreisring der $z$-Ebene entspricht ein Ringgebiet $R_\sigma$ der $w_\sigma$-Ebene. Durch das im Innern von $R_\sigma$ gelegene Stück der Bildkurve von $l_\sigma$ wird $R_\sigma$ in ein einfach zusammenhängendes Gebiet $R_\sigma'$ zerschnitten. Vermöge

$$W_\sigma = \mathfrak{L}_\sigma \log w_\sigma$$

entspricht schließlich dem $R'_\sigma$ ein-eindeutig und konform ein einfach zusammenhängendes, ganz zu $\bar{S}_1$ gehöriges „Viereck" $V'_\sigma$; zwei seiner Seiten gehören der Begrenzung von $\bar{S}_1$ an und sind parallel. $\log w_\sigma$ ist in $R'_\sigma$ regulär analytisch; die Ableitung nach $z$ verschwindet an keiner Stelle.

Die Gebiete $\bar{S}_1, G_1, \cdots, G_n$ zusammen bilden das gesuchte Teilgebiet $S_1$ in dem Sinne, daß hierbei die beiden, einander punktweise entsprechenden Gebiete $R'_\sigma$ und $V'_\sigma$ als völlig äquivalent anzusehen sind: statt $R'_\sigma$ kann man $V_\sigma'$ als zu $S_1$ gehörig betrachten und umgekehrt.

2) *Aus den übrigen*, bis auf Vielfache von $2\pi i$ gegebenen, *Perioden* $\mathfrak{A}_\nu, \mathfrak{B}_\nu$ $(\nu=1,\cdots,p)$ läßt sich, wie in § 1, ein $p$-fach zusammenhängendes Gebiet $S_2$ positiven Flächeninhalts konstruieren, das mit $\bar{S}_1$ in der mehrfach angegebenen Weise zu einem Gebiet $\bar{S}$ verschmolzen wird. Nimmt man zu $\bar{S}$ noch die Gebiete $G_1, \cdots, G_n$ hinzu, so entsteht der gewünschte Bildbereich $S$. Dabei war vorausgesetzt, daß die Perioden $\mathfrak{A}_\nu, \mathfrak{B}_\nu$ nicht sämtlich rein imaginär seien. Ist letzteres der Fall, so tritt an Stelle des in § 1 verwendeten Rahmens $\mathfrak{P}_p$ ein geeignet gewähltes Teilgebiet von $\bar{S}_1$. Durch passende Wahl eines Schnittes $l_\sigma$ in der $z$-Ebene, sowie der $r_\sigma$ im Rahmen der bereits gemachten Festsetzungen, kann stets erreicht werden, daß die weiteren Konstruktionen des § 1 unverändert ausführbar sind.

Im Gebiet $S$ existiert nach dem Dirichletschen Prinzip*) eine Funktion $z$ der komplexen Veränderlichen $W = W' + iW''$ bzw. $w_\sigma$ von den folgenden Eigenschaften:

1) $z$ ist, von einer endlichen Anzahl von Polen abgesehen, innerhalb $S$ und auf dessen Begrenzung eine regulär analytische Funktion.

2) $z$ besitzt im Innern von $S$ mindestens einen Pol, im Innern der $G_1, \cdots, G_n$ keinen einzigen.

3) Je zwei Funktionselemente von $z$, die zu entsprechenden Punkten paralleler Begrenzungsstücke von $S$ gehören, sind identisch.

4) Die Funktionswerte in Punkten von $R'_\sigma$ bzw. $V'_\sigma$, die einander vermöge $W_\sigma = \mathfrak{L}_\sigma \log w_\sigma$ entsprechen, sind gleich.

Daraus folgt die Existenz von $\lim\limits_{W_\sigma=\infty} z(W_\sigma) = z(w_\sigma=0)$.

Die inverse Funktion von $z(W)$ führt zum gesuchten Integral 3. Gattung. Zum Beweise betrachte man eine Folge von Gebieten $\bar{S}^{(0)}, \bar{S}^{(1)}, \cdots, \bar{S}^{(n)}, \cdots$. $\bar{S}^{(0)}$ ist das ursprünglich konstruierte Gebiet $\bar{S}$. Allgemein unterscheidet sich die Konstruktion der Gebiete $\bar{S}^{(m+1)}$ und $\bar{S}^{(m)}$ $(m=0,1,\cdots)$ dadurch, daß an Stelle der Kreise $\mathsf{K}_\sigma^{(m)}, \bar{\mathsf{K}}_\sigma^{(m)}$ bzw. der Radien $r_\sigma^{(m)}, \bar{r}_\sigma^{(m)}$ Kreise

*) Wegen der Einzelheiten des Existenzbeweises vgl. § 7 b).

$K_\sigma^{(m+1)}$ usw. mit den kleineren Radien $r_\sigma^{(m+1)} < r_\sigma^{(m)}$, $\bar{r}_\sigma^{(m+1)} < \bar{r}_\sigma^{(m)}$ $(r_\sigma^{(m+1)} < \bar{r}_\sigma^{(m+1)})$ treten. Endlich sei

$$\lim_{m=\infty} r_\sigma^{(m)} = \lim_{m=\infty} \bar{r}_\sigma^{(m)} = 0.$$

$\bar{S}^{(m+1)}$ enthält $\bar{S}^{(m)}$ ganz im Innern.

Aus den Eigenschaften 1)—4) der Funktion $z$ folgt nun

1′) $z$ besitzt die Eigenschaften 1)—3) in jedem der Bereiche $\bar{S}^{(m)}$ $(m=0,1,\cdots)$.

2′) Zu jeder beliebig kleinen positiven Größe $\eta$ gibt es eine natürliche Zahl $M$ von der Art, daß die Funktion $z(W)$ alle Werte $z_0$, die den Ungleichungen $|z_0 - z(w_\sigma = 0)| \geqq \eta$ $(\sigma = 1,\cdots,n)$ genügen, innerhalb $\bar{S}^{(m)}$ ebenso oft annimmt, als $z(W)$ (innerhalb $\bar{S}^{(0)}$) polarunstetig wird, für alle $m \geqq M$.

3′) Es gibt eine natürliche Zahl $N$ von der Art, daß alle in $\bar{S}^{(N)}$ gelegenen Nullstellen von $\frac{dz}{dW}$ zugleich die sämtlichen innerhalb $\bar{S}^{(m)}$ gelegenen Nullstellen von $\frac{dz}{dW}$ liefern, sobald $m \geqq N$.

Aus den Eigenschaften 1) mit 4) bzw. 1′) mit 3′) folgt: die durch $z = z(W)$ vermittelten, der $z$-Ebene überlagerten Bilder der Gebiete $\bar{S}^{(m)}$ bilden eine Kette von Gebieten $T^{(m)}$, von denen jedes in allen folgenden enthalten ist. Der durch die Kette definierte Kern*) ist die gesuchte Riemannsche Fläche $T$.

Die weiteren hier anschließenden Fragestellungen (vgl. § 1 Ende) bleiben an dieser Stelle unerörtert, ebenso die weiteren Möglichkeiten, den Hurwitzschen Eindeutigkeitssatz umzukehren.

## II. Existenzbeweise.

### § 4.

### Bemerkung zum Existenzbeweis der Prymschen Potentialfunktionen 1. Ordnung.

Die Existenz der zu einer Prymschen Charakteristik 1. Ordnung gehörigen Potentialfunktionen mit gegebenen additiven Perioden bzw. Pol- und logarithmischen Unstetigkeiten wird von den Herren Prym und Rost unter Heranziehung des Prymschen Modulsatzes nach der Methode der sukzessiven Influenzen bewiesen; die Eindeutigkeit ist Folge des Eindeutigkeitssatzes.**) Der Existenzbeweis läßt sich auch auf das Dirichletsche

*) Carathéodory, Konforme Abbildung (Math. Ann. 72, S. 124).

**) Prym-Rost, l. c., I. Teil, S. 98 ff. (5. Abschnitt.)

Prinzip gründen, was im folgenden skizziert werden soll.*) Die Betrachtung beschränkt sich *zunächst* auf die in $T$ *allenthalben endlichen Potentialfunktionen.*

Sei eine Prymsche Charakteristik gegeben und zu jedem der Schnitte $a_\nu, b_\nu, c_\nu$ $(\nu = 1, \cdots, p)$ eine additive Periode $\mathfrak{A}_\nu$ bzw. $\mathfrak{B}_\nu, \mathfrak{C}_\nu$. Die Randbedingungen, in reellen und lateralen Teil zerlegt, lauten**) am Schnitte $a_\nu$:

$$(S)\quad \left.\begin{aligned} &(U')^+ = A_\nu'(U')^- - A_\nu''(U'')^- + \mathfrak{A}_\nu', \quad (U'')^+ = A_\nu''(U')^- + A_\nu'(U'')^- + \mathfrak{A}_\nu'' \\ &\left(\frac{\partial U'}{\partial x}\right)^+ = A_\nu'\left(\frac{\partial U'}{\partial x}\right)^- - A_\nu''\left(\frac{\partial U''}{\partial x}\right)^-, \quad \left(\frac{\partial U''}{\partial x}\right)^+ = A_\nu''\left(\frac{\partial U'}{\partial x}\right)^- + A_\nu'\left(\frac{\partial U''}{\partial x}\right)^- \\ &\left(\frac{\partial U'}{\partial y}\right)^+ = A_\nu'\left(\frac{\partial U'}{\partial y}\right)^- - A_\nu''\left(\frac{\partial U''}{\partial y}\right)^-, \quad \left(\frac{\partial U''}{\partial y}\right)^+ = A_\nu''\left(\frac{\partial U'}{\partial y}\right)^- + A_\nu'\left(\frac{\partial U''}{\partial y}\right)^- \end{aligned}\right\} (A_\nu')^2 + (A_\nu'')^2 = 1.$$

Entsprechendes gilt für $b_\nu$, $c_\nu$ $(\nu = 1, \cdots, p)$.

Damit die Randbedingungen widerspruchsfrei sind, ist***) notwendig, daß

$$(S')\quad \begin{aligned} &(1 - B_\nu')\mathfrak{A}_\nu' - B_\nu''\mathfrak{A}_\nu'' - (1 - A_\nu')\mathfrak{B}_\nu' + A_\nu''\mathfrak{B}_\nu'' = \mathfrak{C}_\nu', \\ &(1 - B_\nu')\mathfrak{A}_\nu'' + B_\nu''\mathfrak{A}_\nu' - (1 - A_\nu')\mathfrak{B}_\nu'' - A_\nu''\mathfrak{B}_\nu' = \mathfrak{C}_\nu'', \end{aligned} \qquad \nu = 1, 2, \cdots, p.$$

$$\sum_{\nu=1}^{p} \mathfrak{C}_\nu' = 0, \qquad \sum_{\nu=1}^{p} \mathfrak{C}_\nu'' = 0.$$

Der von Hilbert, Weyl u. a. betrachtete *Fall der ausgezeichneten Charakteristik* ist besonders einfach: einmal, weil bei ihm die Betrachtung einer einzigen Konkurrenzfunktion genügt, sodann, weil bei ihm die zur Normierung der Konkurrenzfunktionen verwendeten Konstanten auf die Randbedingungen ohne Einfluß sind.

Im allgemeinen Prymschen Falle hat man die Summe der Dirichlet-Integrale gebildet für ein Paar von Konkurrenzfunktionen $V'$, $V''$ zu betrachten, d. h.

$$D(V', V'') = D(V) = \iint\limits_{T'} \left(\left(\frac{\partial V'}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V''}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V''}{\partial y}\right)^2\right) dx\,dy.$$

*Je zwei zusammengehörige Konkurrenzfunktionen $V'$, $V''$ genügen den folgen-*

---

*) Hilbert, Über das Dirichletsche Prinzip (Math. Ann. 1904); Weyl, l. c., S. 79 ff., sowie die ebenda zitierte Literatur. Den Ausführungen des Textes ist der Weylsche Beweis zugrunde gelegt. Wie Herr Prym mir mitteilt, ist er bei seinen, vor mehr als 40 Jahren begonnenen, Untersuchungen ebenfalls vom Dirichletschen Prinzip ausgegangen, hat es aber bald verlassen, nachdem er die Unzulässigkeit dieses Schlußverfahrens in seiner alten Form für gewisse Probleme erkannt und durch ein einfaches Beispiel (Crelles Journ. 73, S. 340—364; abgedruckt in Prym-Rost, I. Teil, S. 227 ff.) dargetan hatte.

**) Prym-Rost, l. c., I. Teil, S. 150.

***) Prym-Rost, l. c, I. Teil, S. 95.

*den Forderungen:* $V'$ und $V''$ sind in $T'$, einschließlich der Begrenzung, reellwertig und stetig differenzierbar, im Innern von $T'$ überdies eindeutig. Die Werte von $V'$, $V''$ und ihren ersten Ableitungen an den bezüglichen Ufern der Begrenzung von $T'$ genügen den Bedingungen (S). Das Dirichlet-Integral $D(V', V'')$, erstreckt über das Innere der Fläche $T'$, hat einen endlichen Wert.

Der Existenzbeweis*) verläuft so: Es existieren Paare von Konkurrenzfunktionen $V_h'$, $V_h''$ $(h = 1, 2, \cdots)$, sobald die Beziehungen (S') bestehen. Die $V_h'$, $V_h''$ werden durch Addition von reellen Konstanten $C_h'$ bzw. $C_h''$ derart normiert, daß

$$\int\limits_0^{2\pi}(V_h' + C_h')\,d\varphi_0 = 0, \qquad \int\limits_0^{2\pi}(V_h'' + C_h'')\,d\varphi_0 = 0, \qquad h = 1, 2, \cdots.$$

Die Integrale sind hierbei zu erstrecken über die Peripherie eines festen $z$-Kreises**) mit dem Zentrum $P$, der im Innern und auf seiner Peripherie weder Verzweigungspunkte von $T$ noch Randpunkte von $T'$ enthält. Setzt man

$$V_h' + C_h' = v_h', \qquad V_h'' + C_h'' = v_h'', \qquad h = 1, 2, \cdots,$$

so erfüllen die *normierten Konkurrenzfunktionen* $v_h'$, $v_h''$ die Randbedingungen (S) mit dem Unterschiede, daß die additiven Perioden jetzt bzw. die Werte haben

$$\mathfrak{A}_\nu' + (1 - A_\nu')\,C_h' + A_\nu''\,C_h'', \quad \mathfrak{A}_\nu'' - A_\nu''\,C_h' + (1 - A_\nu')\,C_h'' \text{ längs } a_\nu \quad (\nu = 1, \cdots, p).$$

Entsprechendes gilt für die Schnitte $b_\nu$; die $\mathfrak{C}_\nu$ bleiben ungeändert. Bedeutet $d$ die untere Grenze für das Dirichlet-Integral bezüglich der Gesamtheit der Konkurrenzfunktionen $v_h'$, $v_h''$, so wählt man die Indizes $h$ derart, daß $\lim\limits_{h=\infty} D(v_h', v_h'') = d$.

Die zur Anwendung des Dirichletschen Prinzips nötigen Beziehungen und Ungleichungen bleiben im vorliegenden Fall sämtlich in Kraft. Insbesondere nimmt die Levische Ungleichung die Gestalt an

$$D(v_m' - v_n', v_m'' - v_n'') \leqq \left\{\sqrt{D(v_m', v_m'') - d} + \sqrt{D(v_n', v_n'') - d}\right\}^2.$$

Demgemäß ergibt sich zunächst die Existenz eines Paares im Innern von $T'$ allenthalben regulärer Potentialfunktionen $U'$, $U''$. Diese werden geliefert durch die Grenzwerte

$$U' = \lim_{h=\infty} \frac{1}{\pi a^2} \iint\limits_K v_h'\,dx\,dy, \qquad U'' = \lim_{h=\infty} \frac{1}{\pi a^2} \iint\limits_K v_h''\,dx\,dy;$$

dabei sind die Flächenintegrale erstreckt über den ganz im Innern von $T'$

*) Siehe Weyl, l. c., S 79ff.

**) Wegen dieser Ausdrucksweise vgl. Weyl, l. c., S. 80.

gelegenen, genügend kleinen, im übrigen beliebigen $z$-Kreis K vom Radius $a$, zu dessen Mittelpunkt der Funktionswert $U'$ bzw. $U''$ gehört.

*Es erübrigt zu zeigen, daß $U'$, $U''$ den Randbedingungen genügen.* Zu dem Zwecke*) fasse man einen Punkt $P_1$ der Begrenzung von $T'$ — etwa des Schnittes $a_1$ — ins Auge, schlage um $P_1$ einen $z$-Kreis $K_1$, der im Innern und auf der Begrenzung keinen Verzweigungspunkt, keinen Punkt des zur Normierung verwendeten $z$-Kreises um $P$ und nur solche Randpunkte von $T'$ enthält, die dem Schnitte $a_1$ angehören. $K_1$ kann und soll überdies so klein gewählt werden, daß seine Peripherie den Schnitt $a_1$ nur in den beiden Punkten $S_1$ und $S_2$ trifft. Entsprechend dem + bzw. — Ufer von $a_1$ zerfällt $K_1$ und seine Peripherie in zwei, einfach zusammenhängende Teile. Für das Folgende werde der am + Ufer von $a_1$ gelegene Teil $K_1^+$ betrachtet; dieser wird begrenzt durch das im Innern von $K_1$ gelegene Stück $\alpha_1^+$ von $a_1^+$ und den Kreisbogen $\varkappa_1 = \widehat{S_1 S_2}$. Ersetzt man den Schnitt $a_1$, soweit er im Innern von $K_1$ verläuft, durch $\varkappa_1$, so resultiert eine Fläche $\overset{\times}{T}'$ und ein neues Minimalproblem; der Bogen $\varkappa_1$ gibt zu zwei Ufern $\varkappa_1^+$, $\varkappa_1^-$ Anlaß. Paare von normierten Konkurrenzfunktionen $\overset{\times}{v}_h{}'$, $\overset{\times}{v}_h{}''$ des neuen Problems erhält man vermöge folgender Definition:

$$\overset{\times}{v}_h{}' = v_h{}', \overset{\times}{v}_h{}'' = v_h{}'' \tag{1}$$

für alle inneren Punkte und Randpunkte von $\overset{\times}{T}'$, die nicht innere Punkte von $K_1^+$ sind und nicht zu den Punkten auf $\alpha_1^+$ und $\varkappa_1^-$ gehören;

$$\begin{aligned} \overset{\times}{v}_h{}' &= A_1{}' v_h{}' - A_1{}'' v_h{}'' + \mathfrak{A}_1{}' + (1 - A_1{}') C_h{}' + A_1{}'' C_h{}'', \\ \overset{\times}{v}_h{}'' &= A_1{}'' v_h{}' + A_1{}' v_h{}'' + \mathfrak{A}_1{}'' - \qquad A_1{}'' C_h{}' + (1 - A_1{}') C_h{}'' \end{aligned} \tag{2}$$

für alle inneren Punkte von $K_1^+$ und alle auf $\alpha_1^+$ und $\varkappa_1^-$ gelegenen Punkte.

Umgekehrt erhält man hierdurch auch alle Paare von Konkurrenzfunktionen des neuen Problems.

Infolge dieser Definition ist

$$D(\overset{\times}{v}_h{}', \overset{\times}{v}_h{}'') = D(v_h{}', v_h{}'').$$

In der Tat wird durch die *orthogonalen Transformationen*

$$\frac{\partial \overset{\times}{v}_h{}'}{\partial x} = \frac{\partial v_h{}'}{\partial x}, \quad \frac{\partial \overset{\times}{v}_h{}''}{\partial x} = \frac{\partial v_h{}''}{\partial x}, \tag{1}$$

bzw.

$$\frac{\partial \overset{\times}{v}_h{}'}{\partial x} = A_1{}' \frac{\partial v_h{}'}{\partial x} - A_1{}'' \frac{\partial v_h{}''}{\partial x}, \quad \frac{\partial \overset{\times}{v}_h{}''}{\partial x} = A_1{}'' \frac{\partial v_h{}'}{\partial x} + A_1{}' \frac{\partial v_h{}''}{\partial x}, \tag{2}$$

*) Vgl. Hilbert, a. a. O.

(und die entsprechenden Substitutionen für die partiellen Ableitungen nach $y$) *die quadratische Form*

$$\left(\frac{\partial U'}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial U''}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial U'}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial U''}{\partial y}\right)^2$$

*in sich transformiert.*

$$\overset{\times}{U}{}'=\lim_{h=\infty}\frac{1}{\pi a^2}\iint\limits_{\mathsf{K}}\overset{\times}{v}_h{}'\,dx\,dy,\qquad \overset{\times}{U}{}''=\lim_{h=\infty}\frac{1}{\pi a^2}\iint\limits_{\mathsf{K}}\overset{\times}{v}_h{}''\,dx\,dy$$

stellen mithin Potentialfunktionen dar, die im Innern von $\overset{\times}{T}{}'$, insbesondere also im Innern von $\mathsf{K}_1$ regulär sind. Da ferner $U'=\lim\limits_{h=\infty}\frac{1}{\pi a^2}\iint\limits_{\mathsf{K}} v_h{}'\,dx\,dy$, usw., existiert und die Beziehungen (2) bestehen, so ergibt sich für irgend ein Gebiet im Innern von $\mathsf{K}_1{}^+$

$$(2)\qquad \begin{aligned}\overset{\times}{U}{}' &= A_1{}'U'-A_1{}''U''+\mathfrak{A}_1{}'+\lim_{h=\infty}\{(1-A_1{}')C_h{}'+A_1{}''C_h{}''\},\\ \overset{\times}{U}{}'' &= A_1{}''U'+A_1{}'U''+\mathfrak{A}_1{}''+\lim_{h=\infty}\{-A_1{}''C_h{}'+(1-A_1{}')C_h{}''\}.\end{aligned}$$

Es folgt also zunächst die Existenz von $\lim\limits_{h=\infty}C_h{}'=C'$, $\lim\limits_{h=\infty}C_h{}''=C''$. $U'-C'$, bzw. $U''-C''$ sind demgemäß Potentialfunktionen, die den vorgegebenen Randbedingungen genügen. Den eben benutzten Beziehungen (2) zufolge können nämlich $U'$, $U''$ analytisch über $\alpha_1$ fortgesetzt werden und diese Fortsetzung erfolgt, wie aus (2) erhellt, den Randbedingungen (S) gemäß, w. z. b. w.

Für die den Schnitten $a_\nu$ und $b_\nu$ gemeinsamen Punkte gelingt der Beweis entsprechend. Die Existenz von Potentialfunktionen, die an vorgegebenen Stellen *von endlicher Ordnung oder logarithmisch unendlich* werden, ergibt sich ganz analog.

Schließlich sei nochmals hervorgehoben, daß *durch* die Prymsche Bedingung $|A_\nu|=|B_\nu|=1$, $\nu=1,\cdots,p$ d. i. durch *die Orthogonalität von* (S) *die Anwendbarkeit des Dirichletschen Prinzips bedingt* erscheint, im wesentlichen deshalb, *weil dann der Wert des Dirichlet-Integrals von der Art der Zerschneidung der Fläche $T$ nicht abhängt.*

## § 5.

## Übergang von den Potentialfunktionen zu den analytischen Funktionen 1. Ordnung.

Der eingangs des § 2 angegebene Satz der Herren Prym und Rost liefert den genannten Autoren einen sehr eleganten Beweis für die Tatsache, daß — außer der Konstanten — zur ausgezeichneten Charakteristik gerade $p$, zu einer allgemeinen (d. h. nicht ausgezeichneten) Prymschen Charakteristik hingegen genau $p-1$ linear unabhängige, allenthalben endliche, normierte analytische Funktionen, die sog. *allenthalben endlichen Elementarfunktionen* *), existieren.**) Bei diesem Nachweis wird, außer von dem in Rede stehenden Satze, nur noch von der Tatsache Gebrauch gemacht, daß, abgesehen von der Konstanten, $2p-2$ linear unabhängige, allenthalben endliche — und überdies keine allenthalben endlichen multiplikativen — Potentialfunktionen zu einer allgemeinen Prymschen Charakteristik gehören. Die in § 2 bewiesene Umkehrung legt es nahe, zu versuchen, *unter Umgehung des fraglichen Satzes, lediglich aus der Existenz der* genannten $2p-2$ *Potentialfunktionen, die Anzahl allenthalben endlicher* (linear unabhängiger) *Elementarfunktionen zu bestimmen.* Dies gelingt in der Tat, wie noch gezeigt werden soll, und zwar *ausschließlich unter Benutzung der sogenannten Fundamentalformel.****) Die nämlichen Überlegungen gestatten dann, auch für Nicht-Prymsche Charakteristiken die Theorie der analytischen Funktionen aus derjenigen der Potentialfunktionen zu entwickeln. Ferner erscheint das Verfahren für die Fälle $N$. Ordnung anwendbar. Es braucht andererseits kaum hervorgehoben zu werden, daß der angedeutete Weg dem der Herren Prym und Rost an Kürze nachsteht.

Im folgenden *sehe man zunächst vom Falle der ausgezeichneten Charakteristik ab* und lege der Betrachtung die, in den Prymschen Fällen sicherlich erfüllte, Annahme zugrunde†): *Zu jeder in Betracht kommenden Charakteristik (die keine ausgezeichnete ist) gehören* $2p-2$ *linear unabhängige, allenthalben endliche Potentialfunktionen* $u_\varrho$ ($\varrho = 1, \cdots, 2p-2$), *dabei ist von der Konstanten stets abgesehen. Eine multiplikative, allenthalben endliche Potentialfunktion existiert nicht* (Bedingung 1).

Die genannten $2p-2$ Potentialfunktionen können durch Addition passender Konstanten so *normiert* werden, daß eine bestimmte, zu einem

*) Prym-Rost, l. c., II. Teil, S. 8. Im folgenden ist die Bezeichnung „Elementarfunktionen" für Funktionen gebraucht, die etwas anders als die Prym-Rostschen Elementarfunktionen normiert sind.

**) Prym-Rost, l. c., I. Teil, S. 164 f.

***) Prym-Rost, l. c., I. Teil, S. 190, Formel (F).

†) Diese Bedingung ist identisch mit der folgenden: Die lineare, homogene Integralgleichung des Problems im Gebiete der Potentialfunktionen besitzt keine Eigenfunktion (multiplikative, allenthalben endliche Potentialfunktion). Auch für den Ausnahmefall, daß solche Eigenfunktionen existieren, sind die Überlegungen des Textes, unwesentlich modifiziert, anwendbar, sobald man den Zusammenhang zwischen den *multiplikativen*, allenthalben endlichen *Potentialfunktionen einerseits und* den (zur gleichen Charakteristik gehörigen) *multiplikativen,* allenthalben endlichen, *analytischen Funktionen andererseits* klargestellt hat. Auf die hiermit bezeichneten Sätze, die übrigens auch beim Beweise der Existenz zur Charakteristik gehöriger Potentialfunktionen von zentraler Bedeutung sind, hoffe ich an andrer Stelle zurückzukommen.

eigentlichen Faktor, etwa die zu $A_p + 1$ gehörige Periode $\mathfrak{A}_p$ stets Null ist. In gleicher Weise sollen im folgenden auch alle zur Charakteristik gehörigen, allenthalben endlichen Elementarfunktionen normiert sein. Man beweist zunächst

a) *Gehören zu einer (nicht ausgezeichneten) Charakteristik insgesamt $R$, zu ihrer konjugiert-komplexen insgesamt $\bar{R}$ (linear unabhängige) normierte, allenthalben endliche (analytische) Elementarfunktionen, so ist $R + \bar{R} = 2p - 2$, sobald für beide Charakteristiken die Bedingung* 1) *erfüllt ist.*

Damit eine zur Charakteristik gehörige Potentialfunktion $U = \sum_{\varrho=1}^{2p-2} c_\varrho u_\varrho$ eine (analytische) Elementarfunktion sei, ist notwendig und hinreichend, daß die Identität besteht

$$(J) \qquad \sum_{\varrho=1}^{2p-2} c_\varrho u_\varrho \equiv i \sum_{\varrho=1}^{2p-2} c_\varrho \tilde{u}_\varrho .$$

Die $\tilde{u}_\varrho$ bedeuten hierbei die zu den $u_\varrho$ $(\varrho = 1, \cdots, 2p-2)$ bzw. konjugierten Potentialfunktionen

$$\tilde{u}_\varrho = \int_{x_0 y_0}^{xy} \left( - \frac{\partial u_\varrho}{\partial y} dx + \frac{\partial u_\varrho}{\partial x} dy \right), \qquad \varrho = 1, \cdots, 2p-2.$$

Nach Voraussetzung gibt es zur Charakteristik insgesamt $R$ linear unabhängige normierte Elementarfunktionen $W_r$ $(r = 1, \cdots, R;\ R \leqq 2p-2)$, d. h. es existieren gerade $R$ linear unabhängige Systeme

$$c_1^{(r)},\ c_2^{(r)},\ \cdots,\ c_p^{(r)} \qquad\qquad r = 1, \cdots, R,$$

für welche die Identität $(J)$ besteht.

Demzufolge lassen sich $R$ der $u_\varrho$, etwa $u_1, \cdots, u_R$ durch die $W_r$ $(r = 1, \cdots, R)$ ersetzen und die $2p - 2$ Funktionen $W_1, \cdots, W_R, u_{R+1}, \cdots, u_{2p-2}$ sind dann linear unabhängig. Keine lineare Kombination der Potentialfunktionen $u_{R+1}, \cdots, u_{2p-2}$ liefert also eine analytische Funktion. Infolgedessen hat die Gleichung

$$\sum_{\tau=R+1}^{2p-2} c_\tau u_\tau \equiv i \sum_{\tau=R+1}^{2p-2} c_\tau \tilde{u}_\tau$$

nur die Lösung

$$c_{R+1} = c_{R+2} = \cdots = c_{2p-2} = 0.$$

Geht man zur konjugiert-komplexen Charakteristik über*), so besagt die eben bewiesene Tatsache, daß die analytischen Funktionen

$$\bar{U}_\tau = \bar{u}_\tau + i \bar{\tilde{u}}_\tau, \qquad \tau = R + 1, \cdots, 2p-2,$$

---

*) d. h. zu derjenigen Charakteristik, deren Faktoren $\bar{A}_\nu$, $\bar{B}_\nu$ die konjugiert-komplexen Werte der entsprechenden Faktoren $A_\nu$, $B_\nu$ der ursprünglichen Charakteristik sind.

linear unabhängig sind und daß keine der Funktionen $\overline{U}_\tau$ identisch verschwindet. Der Querstrich in $\overline{u}_\tau$, usw. bedeutet, daß statt $u_\tau$, usw. die konjugiert-komplexen Größen genommen sind. Es gibt also zur konjugiert-komplexen Charakteristik mindestens $2p-2-R$ unabhängige, normierte, allenthalben endliche Elementarfunktionen. Ist $\overline{R}$ die Höchstzahl solcher Elementarfunktionen, so gilt demnach

$$\overline{R} \geqq 2p-2-R \quad \text{oder} \quad R+\overline{R} \geqq 2p-2.$$

Andererseits hat man in den $\overline{W}_\varrho$, wie leicht zu sehen, $R$ unabhängige, normierte, zur konjugiert-komplexen Charakteristik gehörige Potentialfunktionen, die zu keiner einzigen analytischen Funktion führen und von denen keine identisch verschwindet. Da insgesamt zur Charakteristik gerade $2p-2$ unabhängige normierte Potentialfunktionen gehören, ist also $R+\overline{R} \leqq 2p-2$. Mithin folgt $R+\overline{R}=2p-2$, w. z. b. w.

b) *Gehören zu einer (nicht ausgezeichneten) Charakteristik im ganzen $R$, zur kontragredienten Charakteristik hingegen insgesamt* $\mathsf{P}$ *linear unabhängige, normierte (analytische) Elementarfunktionen, so ist* $R+\mathsf{P}=2p-2$, *sobald die Bedingung* 1) *für beide Charakteristiken erfüllt ist.*

Unter der *kontragredienten Charakteristik* versteht man hierbei diejenige, deren homogene Substitutionen an den Schnitten $a_\nu$, $b_\nu$, $c_\nu$ zu den entsprechenden Substitutionen der ursprünglichen Charakteristik kontragredient sind. Im Falle eines Problems 1. Ordnung hat die kontragrediente Charakteristik die Faktoren $\frac{1}{A_\nu}$, $\frac{1}{B_\nu}$ $(\nu=1,\cdots,p)$, wenn $A_\nu$, $B_\nu$ die Faktoren der ursprünglichen Charakteristik waren.

$W_r$ $(r=1,\cdots,R)$ seien die $R$ unabhängigen, zur Charakteristik gehörigen Elementarfunktionen, $\mathfrak{A}_\nu^{(r)}$, $\mathfrak{B}_\nu^{(r)}$, $\mathfrak{C}_\nu^{(r)}$ $(\nu=1,\cdots,p)$ ihre Perioden, $\Omega_\varrho$ $(\varrho=1,\cdots,\mathsf{P})$ die $\mathsf{P}$ zur kontragredienten Charakteristik gehörigen Elementarfunktionen mit den Perioden $\alpha_\nu^{(\varrho)}$, $\beta_\nu^{(\varrho)}$, $\gamma_\nu^{(\varrho)}$ $(\nu=1,\cdots,p)$.

Die Fundamentalformel gilt, wie ihre Herleitung zeigt, unabhängig von der Prymschen Modulbedingung.*) Angewandt auf je eine Funktion $W_r$ und eine Funktion $\Omega_\varrho$ liefert die Fundamentalformel die Beziehungen

$$(1)\qquad \sum_{\nu=1}^{\nu=p}\left\{\frac{1}{A_\nu}\beta_\nu^{(\varrho)}\mathfrak{A}_\nu^{(r)}-\frac{1}{B_\nu}\alpha_\nu^{(\varrho)}\mathfrak{B}_\nu^{(r)}-\left(\frac{\beta_\nu^{(\varrho)}}{A_\nu}+\alpha_\nu^{(\varrho)}\right)\mathfrak{C}_\nu^{(r)}\right\}$$
$$+\sum_{\nu=1}^{\nu=p}\mathfrak{C}_\nu^{(r)}\left(\gamma_1^{(\varrho)}+\cdots+\gamma_\nu^{(\varrho)}\right)=0,\qquad \begin{matrix} r=1,\cdots,R, \\ \varrho=1,\cdots,\mathsf{P}. \end{matrix}$$

*) Prym, Über ein Randintegral (Crelles Journal, Bd. 71, abgedruckt in Prym-Rost, l. c., I. Teil, S. 216 ff.). Vgl. Prym-Rost, l. c., I. Teil, S. 190.

Sämtliche Relationen stellen zunächst nur *notwendige* Bedingungen für die Perioden der Elementarfunktionen dar. Wie sich zeigen wird, sind diese Bedingungen auch die einzigen.

Um die Wendungen des Beweises deutlich hervortreten zu lassen, betrachte man zuerst eine *gewöhnliche Charakteristik*; eine solche besitzt *nur eigentliche Faktorenpaare.**)

Unter den $W_r$ (und ihren linearen Kombinationen) gebe es gerade $f(\leqq p-1)$ unabhängige $W_r$ $(r=1,\cdots,f)$, deren Perioden $\mathfrak{C}_\nu^{(r)}$ $(\nu=1,\cdots,p;\ r=1,\cdots,f)$ sämtlich Null sind. Die aus diesen Funktionen entspringenden Beziehungen (1) nehmen die Form an

$$\sum_{\nu=1}^{p} l_\nu^{(r)}\gamma_\nu^{(\varrho)}=0,\qquad r=1,\cdots,f;\ \varrho=1,\cdots,\mathsf{P},$$

wenn $\mathfrak{A}_\nu^{(r)}=(1-A_\nu)\,l_\nu^{(r)}$, $\mathfrak{B}_\nu^{(r)}=(1-B_\nu)\,l_\nu^{(r)}$ $(\nu=1,\cdots,p;\ r=1,\cdots,f)$ gesetzt wird. Die $f$ Konstantensysteme $l_1^{(r)},\cdots,l_p^{(r)}$ $(r=1,\cdots,f)$ sind linear unabhängig. Anderenfalls gäbe es ja lineare Kombinationen $\sum\limits_{r=1}^{f} c_r W_r$ mit nicht sämtlich verschwindenden Koeffizienten $c_r$, deren Perioden $\mathfrak{A}_\nu$, $\mathfrak{B}_\nu$, $\mathfrak{C}_\nu$ alle Null wären. Dies widerspricht der postulierten Unabhängigkeit der $W_r$ $(r=1,\cdots,f)$, wenn man berücksichtigt, daß keine multiplikative, allenthalben endliche Potentialfunktion existieren soll.

Man hat mithin mindestens $f$ unabhängige, lineare, homogene Bedingungen für die $\gamma_\nu^{(\varrho)}$ $(\varrho=1,\cdots,\mathsf{P})$. Wegen

$$l_p^{(r)}=0\quad\text{und}\quad\sum_{\nu=1}^{p}\gamma_\nu^{(\varrho)}=0\quad(r=1,\cdots,f;\ \varrho=1,\cdots,\mathsf{P})$$

existieren also zur kontragredienten Charakteristik höchstens $p-1-f$ linear unabhängige Elementarfunktionen $\Omega_\varrho$ von der Art, daß die Perioden $\gamma_\nu$ eines jeden linearen Aggregates solcher Funktionen nicht sämtlich Null sind. Ist (für die kontragrediente Charakteristik) $\Gamma$ die Höchstzahl von Funktionen der letztgenannten Art, so gilt die Ungleichung

$$\Gamma\leqq p-1-f\leqq p-1.$$

Ist entsprechend für die kontragrediente Charakteristik $\Phi$ die Gesamtzahl linear unabhängiger Elementarfunktionen $\Omega_\varrho$ mit verschwindenden Perioden $\gamma_\nu^{(\varrho)}$, also $\Phi+\Gamma=\mathsf{P}$ und wird noch $g=R-f$ gesetzt, so hat man ebenso $g\leqq p-1-\Phi$ und schließlich

$$R+\mathsf{P}=g+f+\Phi+\Gamma\leqq 2p-2.$$

*) Prym-Rost, l. c., II. Teil, S. 2.

Die Anzahlen unabhängiger Elementarfunktionen für die zur ursprünglichen Charakteristik (bzw. zu der ihr kontragredienten Charakteristik) konjugiert-komplexen Charakteristiken sind nach a):

$$\overline{R} = 2p - 2 - R, \quad \overline{\mathsf{P}} = 2p - 2 - \mathsf{P}.$$

Beachtet man, daß diese beiden (konjugiert-komplexen) in Rede stehenden Charakteristiken zueinander kontragredient sind, so folgt aus dem im gegenwärtigen Abschnitt b) gewonnenen Ergebnis:

$$R + \mathsf{P} \geqq 2p - 2.$$

Es ist also

$$R + \mathsf{P} = 2p - 2, \quad \text{w. z. b. w.}$$

Insbesondere folgt noch $g + \Phi = \Gamma + f = p - 1$. (Im Prymschen Falle ist sicher $f = \Phi = 0$.)

Läßt man *uneigentliche Faktorenpaare*, d. h. *gemischte Charakteristiken**), zu, so ist für jedes uneigentliche Faktorenpaar $A = B = 1$: $\mathfrak{C} = \gamma = 0$ und $(1 - A)\mathfrak{B} - (1 - B)\mathfrak{A} = 0$ dann identisch für beliebige $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ befriedigt. Entsprechend den Fällen $\mathfrak{C} = 0$, $\mathfrak{C} \neq 0$ unterscheidet man jetzt zwischen $\mathfrak{A} = 0$ und $\mathfrak{A} \neq 0$. Die Überlegungen bleiben im wesentlichen ungeändert, das Ergebnis ist das nämliche wie oben.

Für die *ausgezeichnete Charakteristik* gestaltet sich der Beweis entsprechend. Nur ist jetzt $R + \overline{R} = 2p$. Da die ausgezeichnete Charakteristik mit ihrer konjugiert-komplexen identisch ist, so folgt unmittelbar $R = \overline{R} = p$. Der weitere Aufbau der Theorie der Abelschen Integrale vollzieht sich mit Hilfe der Fundamentalformel in bekannter Weise.**)

c) *Schließlich ist* $R = \mathsf{P} = p - 1$.

Unter der Bedingung 1), insbesondere also in den Prymschen Fällen, existiert zur Charakteristik stets eine analytische Funktion $W\left|\begin{smallmatrix} z_0 \\ z \end{smallmatrix}\right|$, die an einer beliebigen Stelle $z_0$ von $T$ einen einfachen Pol besitzt, sonst überall auf $T$ regulär analytisch ist und an den Schnitten $a_\nu$, $b_\nu$, $c_\nu$ gewisse Perioden $\mathfrak{A}_\nu|z_0|$, $\mathfrak{B}_\nu|z_0|$, $\mathfrak{C}_\nu|z_0|$ ausscheidet.***) Durch Multiplikation mit einer Konstanten wird $W\left|\begin{smallmatrix} z_0 \\ z \end{smallmatrix}\right|$ so *normiert*, daß das Residuum in $z = z_0$ den Wert 1 hat. Durch Addition geeigneter Vielfachen der $W_r$ $(r = 1, \cdots, R)$ kann und soll $W\left|\begin{smallmatrix} z_0 \\ z \end{smallmatrix}\right|$ ferner so *normiert* werden, daß $g$

*) Prym-Rost, l. c., II. Teil, S. 2.

**) Vgl. Prym-Rost, II. Teil, Abschnitt 4 und 5.

***) Prym-Rost, l. c., I. Teil. S. 150.

bestimmte Perioden $\mathfrak{C}_\nu|z_0|$ und, außer $\mathfrak{A}_p|z_0|$, noch $f$ bestimmte Perioden $\mathfrak{A}_\nu|z_0|$, $\mathfrak{B}_\nu|z_0|$ verschwinden. Es sind dann noch unter den $\mathfrak{A}_\nu|z_0|$, usw. höchstens $2p-2-R=\mathsf{P}$ voneinander unabhängige, bestimmte Perioden von Null verschieden.

Jede, in $N$ verschiedenen Punkten $z_\sigma$ $(\sigma=1,\cdots,N)$ von 1. Ordnung unendlich werdende, in der angegebenen Weise bis auf einen konstanten Faktor *normierte* Funktion läßt sich auf die Form bringen

$$W\left|\begin{matrix} z_1\, z_2 \cdots z_N \\ z \end{matrix}\right| = \sum_{\sigma=1}^{N} c_\sigma W\left|\begin{matrix} z_\sigma \\ z \end{matrix}\right|.$$

Die Perioden von $W\left|\begin{matrix} z_1 \cdots z_N \\ z \end{matrix}\right|$ sind $\mathfrak{A}_\nu|z_1\cdots z_N|$, $\mathfrak{B}_\nu|z_1\cdots z_N|$, $\mathfrak{C}_\nu|z_1\cdots z_N|$, $(\nu=1,\cdots,p)$. Die normierte Funktion $W\left|\begin{matrix} z_1 \cdots z_N \\ z \end{matrix}\right|$ ist dann und nur dann multiplikativ, wenn die oben bestimmten $\mathsf{P}$ Perioden unter den $\mathfrak{A}_\nu|z_1\cdots,z_N|$, usw. verschwinden, m. a. W. wenn die $c_\sigma$ $(\sigma=1,\cdots,N)$ den Gleichungen $\sum_{\sigma=1}^{N} c_\sigma \mathfrak{A}_\nu|z_\sigma|=0$, usw. $(\nu=1,\cdots,p)$ — unter denen höchstens $\mathsf{P}$ unabhängige sind — genügen. Es gibt daher mindestens $d$ linear unabhängige, multiplikative Funktionen $W\left|\begin{matrix} z_1 \cdots z_N \\ z \end{matrix}\right|$, die in den $z_1,\cdots,z_N$ oder in einem Teil derselben Pole 1. Ordnung besitzen, sobald $d=N-\mathsf{P}\geqq 1$ ist.

Entsprechend ergibt sich für die kontragrediente Charakteristik: Sind $\mathsf{N}$ Punkte $z_\tau$ $(\tau=1,\cdots,\mathsf{N})$ der Fläche $T$ gegeben, so existieren mindestens $\delta$ linear unabhängige, bis auf konstante Faktoren normierte, multiplikative Funktionen

$$\Omega\left|\begin{matrix} z_1 \cdots z_{\mathsf{N}} \\ z \end{matrix}\right| = \sum_{\tau=1}^{\mathsf{N}} c_\tau \Omega\,|z_\tau|,$$

die in den Punkten $z_1,\cdots,z_{\mathsf{N}}$ oder in einem Teile derselben Pole 1. Ordnung besitzen, wenn $\delta=\mathsf{N}-R\geqq 1$ ist.

Angenommen, es sei $R=p+\mu$ und $\mu\geqq -1$, dann ist $\mathsf{P}=p-2-\mu$. Man wähle $\mathsf{N}=R+1$, also $\delta=1$. Es existiert mindestens eine multiplikative Funktion $\Omega\left|\begin{matrix} z_1 \cdots z_{R+1} \\ z \end{matrix}\right|$, die in den $z_1,\cdots,z_{R+1}$ oder in einem Teil derselben Pole 1. Ordnung besitzt. Dabei können die $z_\tau$ $(\tau=1,\cdots,R+1)$ stets so gewählt werden, daß $\Omega\left|\begin{matrix} z_1 \cdots z_{R+1} \\ z \end{matrix}\right|$ sicher in sämtlichen Punkten $z_1,\cdots,z_{R+1}$ von 1. Ordnung unendlich wird. In der Tat folgen aus der Prymschen Fundamentalformel, angewandt auf $\Omega\left|\begin{matrix} z_1 \cdots z_{R+1} \\ z \end{matrix}\right|$ und eine der Funktionen $W_r$ die $R$ Gleichungen:

$$\sum_{\nu=1}^{p}\left\{\frac{1}{A_\nu}\beta_\nu\mathfrak{A}_\nu^{(r)}-\frac{1}{B_\nu}\alpha_\nu\mathfrak{B}_\nu^{(r)}-\left(\frac{1}{A_\nu}\beta_\nu+\alpha_\nu\right)\mathfrak{C}_\nu^{(r)}\right\}+\sum_{\nu=1}^{p}\mathfrak{C}_\nu^{(r)}(\gamma_1+\cdots+\gamma_\nu)$$
$$=-2\pi i\sum_{\tau=1}^{R+1}c_\tau W_r'(z_\tau).$$

Dabei ist $W_r'(z)$ die 1. Ableitung von $W_r$ genommen nach der Ortsuniformisierenden des Punktes $z_\tau$, $W_r'(z_\tau)$ deren Wert an der Stelle $z=z_\tau$. Die linken Seiten sind linear und homogen in den Perioden von $\Omega\left|\begin{matrix}z_1\cdots z_{R+1}\\ z\end{matrix}\right|$ und verschwinden daher, sobald $\Omega$ multiplikativ ist. Die rechten Seiten führen also zu den Gleichungen

$$\sum_{\tau=1}^{R+1}c_\tau W_r(z_\tau)=0, \qquad r=1,2,\cdots,R.$$

Da die $W_r'$ nicht identisch verschwindende, linear unabhängige, bis auf die unendlich fernen und die Verzweigungspunkte in $T$ regulär-analytische Funktionen sind, so können die Unterdeterminanten $R$. Ordnung der Matrix

$$\left\|\begin{matrix}W_1'(z_1) & W_1'(z_2) & \cdots & W_1'(z_{R+1})\\ W_2'(z_1) & W_2'(z_2) & \cdots & W_2'(z_{R+1})\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ W_R'(z_1) & W_R'(z_2) & \cdots & W_R'(z_{R+1})\end{matrix}\right\|$$

nicht identisch für beliebige Systeme von Punkten $z_1,\cdots,z_{R+1}$ verschwinden.*) Wählt man nun die $(R+1)$ Punkte $z_1,\cdots,z_{R+1}$ so, daß keine von diesen Unterdeterminanten Null ist, so existiert gerade eine normierte, bis auf einen konstanten Faktor bestimmte, multiplikative Funktion

$$\Omega\left|\begin{matrix}z_1\cdots z_{R+1}\\ z\end{matrix}\right|=\sum_{\tau=1}^{R+1}c_\tau\,\Omega\left|\begin{matrix}z_\tau\\ z\end{matrix}\right|.$$

Hierin sind überdies die Koeffizienten $c_\tau$ sämtlich von Null verschieden. $\Omega\left|\begin{matrix}z_1\cdots z_{R+1}\\ z\end{matrix}\right|$ hat dann genau $R+1$ Nullstellen $\zeta_\tau$ $(\tau=1,\cdots,R+1)$.

Der Einfachheit wegen nehme man an, daß die $\zeta_\tau$ $(\tau=1,\cdots,R+1)$ alle getrennt liegen. Zur ursprünglichen Charakteristik gibt es dann, dem oben Bewiesenen zufolge, mindestens

$$d=R+1-\mathrm{P}=p+1+\mu-p+2+\mu=2\mu+3$$

*) Vgl. die Überlegungen bei Prym-Rost, l. c., II. Teil, S. 181—182.

linear unabhängige normierte Funktionen $W_j\left|\begin{matrix}\zeta_1\cdots\zeta_{R+1}\\ z\end{matrix}\right|$ $(j=1,\cdots,d)$, welche die Punkte $\zeta_\tau$ $(\tau=1,\cdots,R+1)$ oder einen Teil derselben zu einfachen Polen haben und multiplikativ sind. Die Produkte

$$\Omega\left|\begin{matrix}z_1\cdots z_{R+1}\\ z\end{matrix}\right| \cdot W_j\left|\begin{matrix}\zeta_1\cdots\zeta_{R+1}\\ z\end{matrix}\right| = \mathsf{A}_j\left|\begin{matrix}z_1\cdots z_{R+1}\\ z\end{matrix}\right| \quad (j=1,\cdots,d)$$

sind linear unabhängige algebraische Funktionen der Fläche $T$, deren Pole sämtlich im System der $R+1=p+\mu+1$ Punkte $z_\tau$ $(\tau=1,\cdots,p+\mu+1)$ enthalten sind. Nach bekannten Sätzen lassen sich aber die $z_\tau$ $(\tau=1,\cdots,R+1)$, im Rahmen der oben gemachten Einschränkung, so bestimmen, daß gerade $\mu+2$ und nicht mehr unabhängige algebraische Funktionen (die Konstante mitgezählt) der in Rede stehenden Art existieren. Wegen $d=2\mu+3\leqq\mu+2$ d. h. $\mu+1\leqq 0$ und $\mu+1\geqq 0$, folgt $\mu=-1$ oder $R=\mathsf{P}$.

Im Falle mehrfacher Nullstellen $\zeta_1,\cdots,\zeta_{R+1}$ von $\Omega\left|\begin{matrix}z_1\cdots z_{R+1}\\ z\end{matrix}\right|$ hat man zum Beweise auch die höheren Ableitungen nach der Ortsuniformisierenden zu verwenden.*)

Auf Grund des erhaltenen Resultates ist der Zugang zur Theorie der zur Charakteristik gehörigen analytischen Funktionen gewonnen. Der weitere Aufbau der Theorie vollzieht sich nach Prym-Rost (II. Teil, 2. u. 6. Abschnitt).

## § 6.

## Bemerkung über die Prymschen Probleme $N$. Ordnung.**)

Die in § 4 angestellten Überlegungen führen zur Formulierung der Prymschen Probleme $N$. Ordnung zunächst *für Potentialfunktionen: Gesucht werden $N$ Funktionen $U_k=U_k'+iU_k''$ $(k=1,\cdots,N)$ von folgenden Eigenschaften*

1. *$U_k$ ist eine in $T$ allenthalben reguläre, im Innern von $T$ eindeutige Potentialfunktion;*

2. *die analytische Fortsetzung der $U_k$ über die Schnitte $a_\nu, b_\nu, c_\nu$ $(\nu=1,\cdots,p)$ hinüber, erfolgt gemäß den Substitutionen*

---

*) Siehe Prym-Rost, l. c., II. Teil, S. 209 ff.

**) Vgl. Prym-Rost, l. c., Vorwort. Wie die Herren Prym und Rost mir mitteilen, befinden sie sich bereits seit Jahren im Besitze dieser und weitergehender Resultate. Die oben angegebenen Sätze sind ohne Kenntnis dieser Resultate und auf anderem Wege gefunden.

$$
\text{(S)}\qquad
\left.
\begin{aligned}
(U_k)^+ &= \sum_{j=1}^{N} A_{kj}^{(\nu)}(U_j)^- + \mathfrak{A}_k^{(\nu)} \quad \text{längs } a_\nu\\
(U_k)^+ &= \sum_{j=1}^{N} B_{kj}^{(\nu)}(U_j)^- + \mathfrak{B}_k^{(\nu)} \quad \text{längs } b_\nu\\
(U_k)^+ &= \sum_{j=1}^{N} C_{kj}^{(\nu)}(U_j)^- + \mathfrak{C}_k^{(\nu)} \quad \text{längs } c_\nu
\end{aligned}
\right\}
\begin{aligned}
&\nu = 1, \cdots, p,\\
&k = 1, \cdots, N,
\end{aligned}
$$

wobei

$$A_{kj}^{(\nu)} = \left(A_{kj}^{(\nu)}\right)' + i\left(A_{kj}^{(\nu)}\right)'', \; B_{kj}^{(\nu)} = \left(B_{kj}^{(\nu)}\right)' + i\left(B_{kj}^{(\nu)}\right)'', \text{ usw.},$$

$$\mathfrak{A}_k^{(\nu)} = \left(\mathfrak{A}_k^{(\nu)}\right)' + i\left(\mathfrak{A}_k^{(\nu)}\right)'', \text{ usw.}$$

komplexe Konstanten sind mit den reellen bzw. lateralen Teilen

$$\left(A_{kj}^{(\nu)}\right)' \text{ usw.} \quad \text{bzw.} \quad \left(A_{kj}^{(\nu)}\right)'' \text{ usw.}$$

3. *Die homogenen, in reellen und lateralen Teil zerlegten Substitutionen,* d. h. die Substitutionen

$$
\mathsf{A}^{(\nu)} = \begin{Bmatrix}
\left(A_{11}^{(\nu)}\right)' & -\left(A_{11}^{(\nu)}\right)'' & \left(A_{12}^{(\nu)}\right)' & -\left(A_{12}^{(\nu)}\right)'' & \cdots & -\left(A_{1N}^{(\nu)}\right)''\\
\left(A_{11}^{(\nu)}\right)'' & \left(A_{11}^{(\nu)}\right)' & \left(A_{12}^{(\nu)}\right)'' & \left(A_{12}^{(\nu)}\right)' & \cdots & \left(A_{1N}^{(\nu)}\right)'\\
\vdots & & & & & \vdots\\
\left(A_{N1}^{(\nu)}\right)'' & \left(A_{N1}^{(\nu)}\right)' & & & \cdots & \left(A_{NN}^{(\nu)}\right)'
\end{Bmatrix},
$$

$$
\mathsf{B}^{(\nu)} = \begin{Bmatrix}
\left(B_{11}^{(\nu)}\right)' & -\left(B_{11}^{(\nu)}\right)'' & \cdots & -\left(B_{1N}^{(\nu)}\right)''\\
\vdots & & & \vdots\\
\left(B_{N1}^{(\nu)}\right)'' & \left(B_{N1}^{(\nu)}\right)' & \cdots & \left(B_{NN}^{(\nu)}\right)'
\end{Bmatrix},
$$

$$
\Gamma^{(\nu)} = \begin{Bmatrix}
\left(C_{11}^{(\nu)}\right)' & -\left(C_{11}^{(\nu)}\right)'' & \cdots & -\left(C_{1N}^{(\nu)}\right)''\\
\vdots & & & \vdots\\
\left(C_{N1}^{(\nu)}\right)'' & \left(C_{N1}^{(\nu)}\right)' & \cdots & \left(C_{NN}^{(\nu)}\right)'
\end{Bmatrix}
$$

*sind Orthogonalsubstitutionen.*

Die Gesamtheit der Substitutionen $\mathsf{A}^{(\nu)}$, $\mathsf{B}^{(\nu)}$, $\Gamma^{(\nu)}$, $(\nu = 1, \cdots, p)$ heißt wieder *Charakteristik des Problems.* Damit die *Randbedingungen widerspruchsfrei* sind, ist *notwendig,* daß

a) die *homogenen* Substitutionen den Matrizengleichungen

$$(S_a')\qquad \begin{cases} (\mathsf{A}^{(\nu)})^{-1}(\mathsf{B}^{(\nu)})^{-1}\mathsf{A}^{(\nu)}\mathsf{B}^{(\nu)} = \Gamma^{(\nu)}, & \nu = 1,\cdots,p,\\ \Gamma^{(1)}\Gamma^{(2)}\ldots\Gamma^{(p)} = 1 \end{cases}$$

genügen,

b) für die *inhomogenen* Substitutionen die Bedingungen (in der Schreibweise des Matrizenkalküls)

$$(S_b')\qquad \begin{cases} (\mathfrak{A}^{(\nu)})^{-1}(\mathfrak{B}^{(\nu)})^{-1}\mathfrak{A}^{(\nu)}\mathfrak{B}^{(\nu)} = \mathfrak{C}^{(\nu)}, & \nu = 1,\cdots,p,\\ \mathfrak{C}^{(1)}\mathfrak{C}^{(2)}\ldots\mathfrak{C}^{(p)} = 1 \end{cases}$$

erfüllt sind. Dabei haben die $\mathfrak{A}^{(\nu)}$ folgende Bedeutung: Macht man die Substitutionen (S) durch Einführung einer $(N+1)$. Veränderlichen

$$U_{N+1}^{+} = U_{N+1}^{-}$$

homogen, schreibt also

$$(S)\qquad (U_k)^{+} = \sum_{j=1}^{N+1} A_{kj}^{(\nu)}(U_j)^{-},\ \text{usw.},\qquad k = 1,\cdots,N+1,$$

wobei

$$A_{k,N+1}^{(\nu)} = \mathfrak{A}_k^{(\nu)}\ (\nu = 1,\cdots,p;\ k = 1,\cdots,N),\quad A_{N+1,j}^{(\nu)} \begin{matrix} = 0,\ j = 1,\cdots,N \\ = 1,\ j = N+1 \end{matrix},\ \text{usw.},$$

so bezeichnet $\mathfrak{A}^{(\nu)}$ bzw. $\mathfrak{B}^{(\nu)}$, $\mathfrak{C}^{(\nu)}$ die Matrix jeder solchen Substitution.*)

Aus dem Dirichletschen Prinzip ergibt sich dann der folgende

Existenzsatz: *Auf jeder beliebigen Riemannschen Fläche $T'$ existiert zu einer Prymschen Charakteristik und zu, im Rahmen der Bedingungen* (S'), *vorgegebenen Perioden $\mathfrak{A}_k^{(\nu)}$, $\mathfrak{B}_k^{(\nu)}$, $\mathfrak{C}_k^{(\nu)}$ $(\nu = 1,\cdots,p;\ k = 1,\cdots,N)$ immer mindestens ein System von $N$ (nicht sämtlich identisch verschwindenden) Potentialfunktionen.*

Daß es andererseits (höchstens von Konstantensystemen abgesehen) nicht mehr als ein derartiges System gibt, folgt aus dem

Eindeutigkeitssatz: *Von Konstantensystemen abgesehen existiert auf keiner einzigen Riemannschen Fläche $T$ vom Geschlechte $p$ zu einer gegebenen Prymschen Charakteristik ein System von allenthalben endlichen Potentialfunktionen, das den homogenen Bedingungen genügt.*

Der Beweis des Eindeutigkeitssatzes ergibt sich aus der Betrachtung des Dirichlet-Integrals

---

*) Im Falle 1. *Ordnung* waren die homogenen, zu jedem Schnittpaare $a_\nu$, $b_\nu$ gehörigen Substitutionen vertauschbar. Die Bedingung a) zog infolgedessen $C_\nu = 1$ $(\nu = 1,\cdots,p)$ nach sich. Bei den Problemen $N$. *Ordnung* hingegen ist dies im allgemeinen nicht mehr der Fall, d. h. die quadratische Matrix $\Gamma^{(\nu)}$ im allgemeinen nicht mehr die Einheitsmatrix.

$$D(U_1, \cdots, U_N) = \iint\limits_{T'} \left\{ \sum_{k=1}^{N} \left[ \left(\frac{\partial U_k'}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U_k'}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial U_k''}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U_k''}{\partial y}\right)^2 \right] \right\} dx\, dy,$$

wenn man den Greenschen Satz anwendet und von der Tatsache Gebrauch macht, daß die Bilinearform

$$\sum_{k=1}^{N} \left[ U_k' \frac{\partial U_k'}{\partial n} + U_k'' \frac{\partial U_k''}{\partial n} \right]$$

— $\frac{\partial}{\partial n}$ bedeutet die Ableitung nach der Normalen am Rande von $T'$ — bei orthogonaler kongredienter Transformation der Variablen $U_k'$, $U_k''$ bzw. $\frac{\partial U_k'}{\partial n}$, $\frac{\partial U_k''}{\partial n}$ in sich übergeht.

Bei Hinzunahme vorgegebener Pole bzw. logarithmischer Unstetigkeiten gelingt der Existenzbeweis ebenfalls mit Hilfe des Dirichletschen Prinzips. Bezüglich der hierbei sich ergebenden Sätze sowie der Theorie der analytischen Funktionen (deren Existenz und Anzahl, soweit es sich um die allenthalben endlichen handelt, auch durch ähnliche Argumentation wie in § 5 sich herleiten läßt) muß auf weitere Arbeiten der Herren Prym und Rost verwiesen werden.

## § 7.

## Zum Existenzbeweis der in den §§ 1 mit 3 benutzten Abbildungsfunktionen.

a) Um zu den *Funktionen* $W(z)$ *der §§ 1 und 2* zu gelangen, konstruiert man im Gebiete $S$ zunächst eine reelle Potentialfunktion $u$ von folgenden Eigenschaften:

1. $u$ ist, von einem einzigen, dem Innern von $S$ angehörigen festen Punkte $O$ abgesehen, in $S$ und auf dessen Begrenzung eine reguläre Potentialfunktion;

2. $u$ wird in $O$ unstetig wie $\frac{W_0'}{(W_0')^2 + (W_0'')^2}$ (unter
$$W_0 = W_0' + i\, W_0''$$
die zu $O$ gehörige Ortsuniformisierende von $S$ verstanden);

3. je zwei, entsprechenden Punkten paralleler Begrenzungsstücke zugehörige, Funktionselemente von $u$ sind identisch.

Der Beweis ist wörtlich der gleiche wie bei Weyl.*) Im vorliegenden Fall ist die bei Weyl**) formulierte *Definition der Konkurrenzfunktion* $v$

*) Weyl, l. c., S. 79ff.
**) Weyl, l. c., S. 93.

durch die Forderung zu ergänzen: $v$ ist stetig differenzierbar auch noch in den Punkten der Begrenzung von $S$. Die Werte von $v$ bzw. seiner ersten Ableitungen stimmen in entsprechenden Punkten paralleler Begrenzungsstücke bzw. überein. M. a. W.: Ist in den rechtwinkligen Koordinaten $W'$, $W''$

$$W_1' = A'W' - A''W'' + \mathfrak{A}', \quad W_1'' = A''W' + A'W'' + \mathfrak{A}''$$

die lineare Zuordnung eines Paares von Begrenzungsstücken, so muß sein

$$v(W', W'') = v(W_1', W_1'') = v(A'W' - A''W'' + \mathfrak{A}', A''W' + A'W'' + \mathfrak{A}''),$$

$$\left(\frac{\partial v}{\partial W'}\right)_{W', W''} = \left(\frac{\partial v}{\partial W_1'} A' + \frac{\partial v}{\partial W_1''} A''\right)_{W_1', W_1''}, \text{ usw.}$$

Es gibt solche Konkurrenzfunktionen. Nachdem die Existenz der (im Innern von $S$ mit Ausnahme von $O$ regulären) Limesfunktion $u$ gezeigt ist, erübrigt nur mehr der Nachweis, daß $u$ auch die Bedingung 3 erfüllt. Dieser Nachweis gründet sich (vgl. § 4) auf die Tatsache, daß das absolute Minimum $d$ des Dirichlet-Integrals bezüglich der Gesamtheit der Konkurrenzfunktionen $v$ den nämlichen Wert hat für alle Gebiete $\overset{\times}{S}$, die zum gleichen Systeme linearer Substitutionen $W_1 = A_\nu W^- + \mathfrak{A}_\nu$ usw., wie das ursprüngliche Gebiet $S$, gehören und aus $S$ durch geeignete Deformation der Begrenzung hervorgehen. In der Tat wird (bei geeigneter Deformation) $\overset{\times}{S}$ aus $S$ erhalten, indem man von $S$ etwa ein einziges, einfach zusammenhängendes Gebiet $f$ wegschneidet, und dafür an anderer Stelle ein Gebiet $\overset{\times}{f}$ der gleichen Art zu $S$ hinzufügt. $f$ und $\overset{\times}{f}$ sind vermöge der entsprechenden linearen Substitution, etwa $W_1 = A_1 W^- + \mathfrak{A}_1$, umkehrbar eindeutig und konform aufeinander zu beziehen. Aus jeder Konkurrenzfunktion $v$ des ursprünglichen Minimalproblems (bezüglich $S$) ergibt sich eine Konkurrenzfunktion $\overset{\times}{v}$ des neuen Problems (bezüglich $\overset{\times}{S}$) auf Grund der Definition:

$v \equiv \overset{\times}{v}$ in dem $S$ und $\overset{\times}{S}$ gemeinsamen Gebiet,

$v$ hat in einem Punkte von $f$ den gleichen Wert wie $\overset{\times}{v}$ in dem vermöge $W_1 = A_1 W^- + \mathfrak{A}_1$ zugeordneten Punkt von $\overset{\times}{f}$.

Das Dirichlet-Integral bleibt aber bei konformer Abbildung ungeändert.

Aus der Potentialfunktion $u$ gewinnt man schließlich in bekannter Weise die gesuchte analytische Funktion $z$.

b) Im wesentlichen die gleichen Bemerkungen gelten für den *Existenzbeweis der Abbildungsfunktion des § 3.*

## III. Schlußbemerkung: Weitere Fragestellungen.

Der § 2 vorliegender Arbeit hatte sich mit der Umkehrung eines merkwürdigen Theorems der Herren Prym und Rost beschäftigt, welches als ein Analogon — oder, wenn man will, als eine Verallgemeinerung — jener wohlbekannten Tatsache gelten kann, daß ein Abelsches Integral 1. *Gattung mit, beispielsweise, durchweg rein imaginären* (oder mit lauter reellen) Perioden nicht existiert.

Dieser letztere Satz ist ein besonderer Fall des folgenden Theorems*):

Ein Abelsches Integral 1. Gattung vom Geschlecht $p$ und mit den Perioden $\mathfrak{A}_\nu, \mathfrak{B}_\nu$ $(\nu = 1, \cdots, p)$ existiert sicherlich nicht, sobald die Beziehung

$$\text{(Ia)} \qquad -i\sum_{\nu=1}^{p}\{\overline{\mathfrak{A}}_\nu \mathfrak{B}_\nu - \overline{\mathfrak{B}}_\nu \mathfrak{A}_\nu\} > 0$$

nicht erfüllt ist, unter $\overline{\mathfrak{A}}_\nu, \overline{\mathfrak{B}}_\nu$ wiederum die zu $\mathfrak{A}_\nu$ bzw. $\mathfrak{B}_\nu$ konjugiert komplexen Größen verstanden*). Mit andern Worten: Die Ungleichung (Ia) ist eine *notwendige* Bedingung dafür, daß die $\mathfrak{A}_\nu, \mathfrak{B}_\nu$ als die Perioden eines Abelschen Integrals 1. Gattung möglich sind.

Es ergibt sich hieraus unmittelbar die Frage, *inwieweit die Bedingung* (Ia) *auch hinreichend sei. Gegeben seien* $2p$ *Größen* $\mathfrak{A}_\nu, \mathfrak{B}_\nu$ $(\nu = 1, \cdots, p)$, *die der Beziehung* (Ia) *Genüge leisten. Gibt es ein Abelsches Integral 1. Gattung vom Geschlecht* $p$, *das die Perioden* $\mathfrak{A}_\nu, \mathfrak{B}_\nu$ *besitzt?*

Der in § 1 aufgeführte Prymsche Eindeutigkeitssatz und, allgemeiner, das bereits genannte Theorem des Herrn Prym und Rost**) bilden nun Spezialfälle eines Satzes über die Prymschen Funktionen 1. Ordnung, welcher genau der oben präzisierten Eigentümlichkeit der Abelschen Integrale entspricht bzw. sie als Sonderfall umfaßt. Er läßt sich so aussprechen:

*Die* $2p$ *Größen* $\mathfrak{A}_\nu, \mathfrak{B}_\nu$ *können nur dann Perioden (mindestens) einer zur Prymschen Charakteristik* $\mathsf{A}_\nu, \mathsf{B}_\nu$ $(\nu = 1, \cdots, p)$ *gehörigen, allenthalben endlichen Prymschen Funktion des Geschlechtes* $p$ *sein, wenn die Ungleichung besteht*

$$\text{(Ib)} \quad -i\sum_{\nu=1}^{\nu=p}\Big[\{\overline{\mathsf{B}}_\nu\overline{\mathfrak{A}}_\nu\mathfrak{B}_\nu - \overline{\mathsf{A}}_\nu\overline{\mathfrak{B}}_\nu\mathfrak{A}_\nu\} + \big(\mathfrak{A}_\nu(1-\mathsf{B}_\nu) - \mathfrak{B}_\nu(1-\mathsf{A}_\nu)\big)\Big(\overline{\mathsf{A}}_\nu\overline{\mathfrak{B}}_\nu + \overline{\mathfrak{A}}_\nu - \sum_{\varrho=1}^{\nu}\{\overline{\mathfrak{A}}_\varrho(1-\overline{\mathsf{B}}_\varrho) - \overline{\mathfrak{B}}_\varrho(1-\overline{\mathsf{A}}_\varrho)\}\Big)\Big] > 0 \text{***)}.$$

*) Vgl. z. B. S. 28 dieser Arbeit.

**) Vgl. § 2, S. 33 dieser Arbeit.

***) Vgl. z. B. S. 26, Formel (I) dieser Arbeit.

Natürlich gilt nebenher (damit die Randbedingungen in sich widerspruchsfrei sind)

$$(\mathrm{S}') \qquad \sum_{\nu=1}^{p}[\mathfrak{A}_\nu(1-\mathsf{B}_\nu)-\mathfrak{B}_\nu(1-\mathsf{A}_\nu)]=0.\text{*)}$$

*Die Bedingung* (Ib) *ist also notwendig. Ist sie auch hinreichend?*

Zufolge (Ib) können die Perioden *einer* allenthalben endlichen Prymschen Funktion nicht völlig willkürlich gewählt werden. Diese Bemerkung führt schließlich zu einer Erweiterung der Umkehrung**) des Prym-Rostschen Satzes. Man kann nämlich nicht nur, wie das die obige Betrachtung tat, lediglich (Ib) in den Mittelpunkt der Betrachtung stellen und dabei *die Charakteristik festhalten.* Vielmehr kann der Nachdruck auch auf den Umstand gelegt werden, daß es *Charakteristiken spezieller Art* sind, für die obige Beschränkung hinsichtlich der additiven Perioden statthat. Demgemäß wird man sich fragen:

*Gibt es Klassen Nicht-Prymscher Charakteristiken, für welche — entsprechend der Eigentümlichkeit der Klasse der Prymschen — nicht notwendig jedes, im Rahmen der Bedingung* (S') *gewählte System von* $2p$ *Größen* $\mathfrak{A}_\nu$, $\mathfrak{B}_\nu$ $(\nu=1,\cdots,p)$ *als System der additiven Perioden (mindestens) einer allenthalben endlichen, zur betrachteten Charakteristik der Klasse gehörigen Funktion möglich ist?*

Zeigt sich, daß die Prymschen Charakteristiken in der Tat die einzigen in dieser Art sind, *so wäre damit die (in* (Ib) *zum Ausdruck kommende) Beschränkung für die additiven Perioden als charakteristisch für die Prymschen Probleme erwiesen.*

Die Beweise für diese Sätze werden auf andere Art als die Beweise in § 1 mit 3 zu führen sein.

Entsprechende Fragestellungen ergeben sich bei den Problemen *N.* Ordnung.***)

Ausgehend von den in § 3 gemachten Bemerkungen gelangt man in ähnlicher Weise zur Frage nach der Verallgemeinerung der Sätze von Hurwitz†) (speziell des Eindeutigkeitssatzes) für das Riemannsche Problem *N.* Ordnung. In erster Reihe steht hier, zwecks Charakterisierung der Ausnahmefälle, die Aufstellung von (notwendigen) Bedingungen für die Existenz *allenthalben endlicher* (multiplikativer) *Funktionenscharen.*

*) Vgl. S. 45 vorliegender Arbeit.

**) Siehe § 2 dieser Arbeit.

***) Vgl. hierzu auch § 6. Vorstehender Teil der Schlußbemerkungen ist bei der Korrektur (März 1915) hinzugefügt. Leider war es mir dabei nicht möglich, die seit April 1914 erschienene Literatur zu berücksichtigen.

†) Hurwitz, Algebraische Gebilde mit eindeutigen Transformationen (Math. Ann. 41 (1893), 3. Abschnitt, S. 429ff.).

In § 5 dieser Arbeit wurde der Existenzbeweis für die zu einer Nicht-Prymschen Charakteristik 1. Ordnung gehörigen, analytischen Funktionen, wenigstens für gewisse Fälle, durchgeführt. Hierbei dienten nach dem Vorgange der Herren Prym und Rost die Existenzsätze für die *Potentialfunktionen* als Ausgangspunkt der Untersuchung. Letztere sind indes bis jetzt (mit Hilfe des alternierenden Verfahrens bzw. des Dirichletschen Prinzips) nur für Prymsche Probleme bewiesen.*) Es erscheint daher nicht ohne Interesse, die Existenzbeweise für die Potentialfunktionen auch für Nicht-Prymsche Charakteristiken $N$. Ordnung ($N \geqq 1$) durchzuführen**), zumal sich hierbei neue Sätze, unter anderem für die Lösungen von $\Delta u + \lambda u = 0$, ergeben. Als Hilfsmittel wird die Theorie der linearen Integralgleichungen zu dienen haben. Auch bei diesen Untersuchungen erweisen sich die Prymschen Charakteristiken als bemerkenswerte Sonderfälle. Bei der Diskussion der Integralgleichung des Problems spielt nämlich neben der gegebenen Charakteristik deren kontragrediente eine wesentliche Rolle. Die Greenschen Funktionen des Problems müßten als Funktionen der Variablen zur gegebenen, als Funktionen der Parameter zur kontragredienten Charakteristik gehören. Spaltet man in reellen und lateralen Teil, so wird das Problem reell; für die Prymschen Charakteristiken und nur für diese ist dann die kontragrediente Charakteristik des reellen Problems mit der ursprünglichen identisch. Daher führen die Prymschen Charakteristiken und nur sie zu Problemen mit (reellem) symmetrischen Kern. Sie sind aus diesem Grunde auch für die Theorie der Differentialgleichung $\Delta u + \lambda u = 0$ von Bedeutung.***)

Schließlich kann man noch die relativ zu einer Riemannschen Fläche $T$ verzweigten Potentialfunktionen in den Kreis der Untersuchung einbeziehen,

*) Vgl. indes meine Note: „Bemerkung über die Integrale Riemannscher Funktionenscharen“ (Sitzungsber. d. Heidelberger Akademie 1914, Math.-physikal. Abteil., 23. Abhandlung, S. 10ff.). Dort wird (umgekehrt) der Existenzsatz für die Potentialfunktionen aus der Existenz der analytischen Funktionen (genauer gesagt aus dem Existenztheorem für die Integrale Riemannscher Funktionenscharen) abgeleitet. Die Integrale der Riemannschen Scharen werden ebenda auf Grund des Existenzsatzes von Hilbert-Plemelj unmittelbar aus den Sätzen von Ritter (Math. Ann. 47) gewonnen: (Siehe auch die dort zitierte Literatur; insbes. die Arbeiten von Klein, auf die in obiger Arbeit leider nicht eingegangen werden konnte.)

**) Wegen andrer Behandlung der Probleme 1. Ordnung siehe: Appel, Sur les intégrales etc. (Acta mathem. Bd. 13); R. König, Leipziger Berichte, Bd. 63 (1911), S. 348—368. Wegen der Probleme 2. Ordnung siehe G. Vitali, Equationi differenziali etc. (Rend. Circolo Palermo, Bd. XVI, 1902), sowie die in meiner Heidelberger Note zitierte Literatur.

***) Vgl. Pockels, Über die partielle Differentialgleichung $\Delta u + k^2 u = 0$ (Leipzig, Teubner 1892).

speziell ihren Zusammenhang mit den Riemannschen (analytischen) Funktionenscharen behandeln.*)

Auf diese und die vorerwähnten Fragen hoffe ich an anderer Stelle zurückzukommen; es wird sich dabei Gelegenheit ergeben, die mannigfachen Beziehungen, welche zwischen den Untersuchungen von Klein und Ritter einerseits, Prym und Rost andererseits bestehen, zu beleuchten.

Würzburg, den 23. März 1914.

---

* Vgl. Fußnote *) S. 63 dieser Arbeit.